ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE GHYS

Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 20, nº 2 (1987), p. 251-270
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_2_251_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 20, 1987, p. 251 à 270.

FLOTS D'ANOSOV DONT LES FEUILLETAGES STABLES SONT DIFFÉRENTIABLES

PAR ÉTIENNE GHYS

RÉSUMÉ. — Nous étudions les flots d'Anosov sur les variétés de dimension 3 dont les feuilletages stables et instables forts sont de classe C^∞. Après avoir montré qu'il existe de tels flots qui sont « exotiques », c'est-à-dire non conjugués à des flots algébriques, nous montrons comment il est possible de les décrire tous.

1. Introduction

Rappelons qu'un flot non singulier φ_t, de classe C^∞, sur une 3-variété compacte M est de type Anosov s'il existe une décomposition du fibré tangent TM en une somme de trois sous-fibrés de rang 1, notés H^+, H^- et Φ, telle que les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Φ est le fibré en droites supportant le champ de vecteurs $\partial\varphi_t/\partial t$ associé à φ_t.
2. H^+ et H^- sont invariants par $d\varphi_t$.
3. Les vecteurs de H^+ (resp. H^-) sont exponentiellement dilatés (resp. contractés) par $d\varphi_t$ lorsque t tend vers $+\infty$.

Les premiers exemples de ces flots sont fournis par le théorème suivant de D. V. Anosov. Si g est une métrique riemannienne à courbure négative sur une surface compacte Σ, alors le flot géodésique de g, opérant sur le fibré unitaire tangent $T_1\Sigma$ à Σ, est un flot d'Anosov. Les flots d'Anosov jouissent de propriétés extrêmement intéressantes qui en motivent l'étude. En particulier, ils sont structurellement stables, c'est-à-dire que si ψ_t est un flot proche de φ_t dans la C^1-topologie, alors il existe un homéomorphisme de M envoyant les orbites de ψ_t sur celles de φ_t (*voir* [An]). Ces flots ont par ailleurs un comportement stochastique assez complexe; leur étude ergodique est maintenant bien développée (*voir* [Bo]).

D'autres exemples classiques sont obtenus à partir de constructions plus algébriques :

(*a*) les suspensions d'automorphismes hyperboliques du tore $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$;

(*b*) les flots sur les variétés du type $\Gamma\backslash\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ obtenus par translations à droite par les matrices « diagonales ». Ici $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ désigne le revêtement universel de $SL(2, \mathbb{R})$ et Γ désigne un sous-groupe uniforme discret. A revêtements finis près, ces derniers flots sont en fait des flots géodésiques sur des surfaces à courbure négative constante.

Pour simplifier, nous appellerons « algébriques » les flots de type (a) ou (b).

On connaît par ailleurs des variétés de dimension 3 qui supportent des flots d'Anosov mais qui ne sont pas difféomorphes à une variété supportant un flot algébrique (*voir* [H-T], [Go], [Fr]).

Les flots algébriques possèdent cependant une propriété remarquable; les champs de droites H^+ et H^- qui leur sont associés sont de classe C^∞ (et, en fait, analytiques réels). Il s'agit là d'une circonstance exceptionnelle; en général H^+ et H^- définissent des feuilletages qui ne sont que de classe C^0 (appelés feuilletages instables et stables forts). De même, $H^+ \oplus \Phi$ et $H^- \oplus \Phi$ définissent des feuilletages (instables et stables faibles) qui ne sont en général que de classe C^1. Dans le cas particulier où le flot considéré est le flot géodésique d'une métrique g de classe C^∞, le champ de plans $H^+ \oplus H^-$ n'est autre que l'orthogonal de Φ pour la métrique naturelle sur $T_1 \Sigma$. Dans ce cas particulier, $H^+ \oplus H^-$ est donc de classe C^∞ et H^+ et H^- définissent donc des feuilletages de classe C^1.

Le but de ce travail est d'étudier les flots d'Anosov pour lesquels H^+ et H^- sont des champs de droites de classe C^∞.

Le premier résultat que nous obtenons (section 2) est le fait qu'il existe des flots d'Anosov pour lesquels H^+ et H^- sont de classe C^∞ mais qui ne sont pas conjugués à des flots algébriques. La méthode employée, qui consiste à déformer une structure géométrique, montre que même si ces flots « exotiques » n'ont pas de structure algébrique globale, ils possèdent cependant une structure locale extrêmement riche.

Les trois sections qui suivent (3, 4 et 5) ont pour but de montrer que tous les flots d'Anosov pour lesquels H^+ et H^- sont de classe C^∞ sont du type de ceux qui ont été construits dans la section 2. En d'autres termes, nous sommes en mesure de décrire très précisément tous ces flots d'Anosov (théorèmes 3.1 et 5.1).

Enfin, dans la section 6, nous donnons quelques applications. La première montre que les flots exotiques ne sont exotiques que comme flots et non pas comme feuilletages de dimension 1.

THÉORÈME. — *Soit φ_t un flot d'Anosov orientable, de classe C^∞, sur une 3-variété fermée* M. *Si les fibrés H^+ et H^- sont de classe C^∞ et si φ_t n'est pas une suspension, alors φ_t est C^∞-équivalent à un flot algébrique dans le sens suivant. Il existe un difféomorphisme de classe C^∞ de* M *sur un espace homogène $\Gamma \backslash \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ qui envoie les orbites de φ_t sur celles du « flot diagonal » de $\Gamma \backslash \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.*

En d'autres termes, les flots exotiques sont obtenus à partir des flots algébriques par une modification (très particulière) du paramétrage.

La démonstration de ces résultats utilise de façon essentielle la théorie locale des équations différentielles du second ordre rappelée dans la section 3. Cette théorie a été développée en classe C^∞ mais, semble-t-il, ses résultats pourraient s'étendre dans une classe de différentiabilité finie. Ceci permettrait alors d'étendre nos résultats dans cette même classe de différentiabilité. Il est d'ailleurs concevable que, si φ_t est de classe C^∞ et si H^+ et H^- sont de classe C^2, alors H^+ et H^- sont en fait de classe C^∞. C'est le cas si $H^+ \oplus H^-$ est de classe C^∞ (par exemple pour un flot géodésique) comme il résulte de [HK].

Dans cette direction, nous montrons le résultat suivant qui répond positivement à une conjecture de S. Hurder et A. Katok [HK].

THÉORÈME. — *Soit g une métrique riemannienne de classe* C^∞ *et à courbure négative sur une surface compacte. Si le feuilletage stable faible du flot géodésique de g est de classe* C^2, *alors la courbure de g est constante.*

Ce théorème est déjà montré dans [HK] sous l'hypothèse additionnelle que g est suffisamment proche d'une métrique à courbure constante.

Je tiens à remercier D. Fried et S. Hurder qui m'ont encouragé à rédiger cet article, J. Smillie qui m'a signalé que le théorème 5.1 pourrait être vrai et T. Tsuboi à qui je dois la proposition 2.4.

2. Construction de flots d'Anosov « exotiques »

Rappelons tout d'abord la notion de (G, X)-structure sur une variété M (*voir* [T] pour plus de détails). Soit X une variété analytique réelle et G un groupe opérant analytiquement sur X. Une (G, X)-structure sur une variété compacte M est la donnée d'un recouvrement ouvert U_i de M et de difféomorphismes f_i de U_i sur un ouvert de X tels que les changements de cartes $f_i \circ f_j^{-1}$ soient les restrictions à $f_j(U_i \cap U_j)$ de l'action d'un élément g_{ij} de G sur X.

Si M est munie d'une (G, X)-structure, il existe un difféomorphisme local $D : \tilde{M} \to X$ du revêtement universel de M dans X, appelé application développante. Il est par ailleurs possible de construire un morphisme « d'holonomie » $h : \pi_1(M) \to G$ tel que, pour tout γ de $\pi_1(M)$ et tout x de $\tilde{M}$:

$$D(\gamma . x) = h(\gamma) D(x).$$

Ce morphisme d'holonomie est défini à conjugaison intérieure près au but. Lorsque D est un revêtement, on dit que la (G, X)-structure est complète. S'il existe une métrique riemannienne sur X invariante par l'action de G, toute (G, X)-structure sur une variété compacte est complète. Par exemple, si un groupe de Lie simplement connexe G opère sur $X = G$ par translations à gauche, toute (G, G)-structure sur une variété compacte est complète, de sorte que les variétés compactes admettant une (G, G)-structure sont précisément les espaces homogènes du type $\Gamma \backslash G$ où Γ est uniforme discret dans G.

Le théorème suivant montre que les (G, X)-structures peuvent se déformer.

Convenons de dire que deux (G, X)-structures sur M sont proches si elles peuvent être définies par le même recouvrement U_i et si les difféomorphismes correspondants de U_i sur un ouvert de X sont proches (dans la topologie C^∞ par exemple).

THÉORÈME 2.1 (*voir* [T]). — *Considérons une* (G, X)-*structure sur la variété compacte* M, *d'holonomie* $h : \pi_1(M) \to G$. *Soit* $h' : \pi_1(M) \to G$ *un morphisme suffisamment proche de h (sur un système de générateurs de* $\pi_1(M)$). *Alors, il existe une* (G, X)-*structure sur* M, *proche de la structure initiale et dont l'holonomie est* h'.

Considérons l'exemple suivant qui sera fondamental pour la suite. Posons $X = SL(2, \mathbb{R})$ et $G = SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. L'action de G sur X est définie comme suit; le facteur $SL(2, \mathbb{R}) \times \{0\}$ opère sur $SL(2, \mathbb{R})$ par translations à gauche et (id, t) opère sur $SL(2, \mathbb{R})$ par translations à droite par la matrice $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$.

Soit $\{\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}\}$ la base de l'algèbre de Lie (des champs invariants à gauche) correspondant aux matrices diagonales, triangulaires inférieures et supérieures respectivement. Cette base peut être considérée comme un triplet de champs de vecteurs sur $X = SL(2, \mathbb{R})$. Ces derniers champs sont invariants par translations à gauche par $SL(2, \mathbb{R})$ mais pas par la translation à droite par $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Celle-ci multiplie $\mathscr{Y}$ par e^{+2t}, $\mathscr{Z}$ par e^{-2t} et préserve $\mathscr{X}$. Par conséquent, si M est une variété compacte équipée d'une $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure, alors M est canoniquement équipée d'un champ de vecteurs, encore noté $\mathscr{X}$, et de deux champs de directions analytiques réels qui correspondent aux champs de droites supportant $\mathscr{Y}$ et $\mathscr{Z}$. Ces champs de directions, que nous noterons H^+ et H^- sont évidemment invariants par le flot de $\mathscr{X}$.

THÉORÈME 2.2. — *Sur le fibré unitaire tangent à une surface Σ compacte de genre supérieur à 1 il existe des flots d'Anosov analytiques réels dont les fibrés H^+ et H^- sont analytiques réels mais qui ne sont pas C^0-conjugués à un flot algébrique.*

Démonstration. — Soit g_0 une métrique riemannienne sur Σ à courbure -1. Cette métrique permet d'identifier $T_1\Sigma$ à un espace homogène du type $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ et fournit donc une $(SL(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{R}))$-structure sur $T_1\Sigma$. Cette structure peut aussi être considérée comme une $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure dont l'holonomie

$$h: \quad \pi_1(T_1\Sigma) \to SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

est triviale sur le second facteur, c'est-à-dire est du type :

$$h(\gamma) = (h_1(\gamma), 0).$$

Soit $h_2 : \pi_1(T_1\Sigma) \to \mathbb{R}$ un morphisme non trivial suffisamment petit, c'est-à-dire une petite classe de cohomologie de $H^1(T_1\Sigma; \mathbb{R})$. (La non-nullité de la caractéristique d'Euler de Σ et un peu de topologie algébrique montrent que $H^1(T_1\Sigma; \mathbb{R}) \simeq H^1(\Sigma; \mathbb{R}) \neq 0$.)

$$h' = (h_1, h_2) : \pi_1(T_1\Sigma) \to SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

est une perturbation de h. D'après 2.1, la $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure peut se déformer en une nouvelle structure. Le champ $\mathscr{X}$, associé à cette nouvelle structure sera proche du précédent, i. e. du flot géodésique de g_0. Ce champ $\mathscr{X}$ est donc de type Anosov puisque les champs de type Anosov forment un ouvert dans la C^1-topologie. De plus, les champs de directions associés à la nouvelle structure sont analytiques réels et sont invariants par le flot de $\mathscr{X}$. Ce sont donc nécessairement les fibrés stables et instables H^- et H^+ de $\mathscr{X}$. Il est en effet facile de vérifier qu'un flot d'Anosov ne peut préserver que trois champs de directions, i. e. H^+, H^- et Φ.

En résumé, $\mathscr{X}$ définit un flot d'Anosov dont les fibrés H^- et H^+ sont C^ω. Il restera à montrer que ce flot n'est pas C^0-conjugué à un flot algébrique. Ceci sera montré plus loin (*voir* remarque 4.8). ∎

Remarque 2.3. — La construction que nous venons de faire est en fait beaucoup plus générale. Soit φ_t un flot quelconque sur une variété compacte M, de dimension quelconque. Soit $\tilde{\varphi}_t$ le relevé à $\tilde{M}$ du flot φ_t. Alors $\tilde{\varphi}_t$ commute avec l'action de $\pi_1(M)$ sur $\tilde{M}$, de sorte que le groupe $G=\pi_1(M)\times\mathbb{R}$ opère naturellement sur $\tilde{M}$. Puisque la variété M est évidemment munie d'une $(\pi_1(M), \tilde{M})$-structure, elle est aussi munie d'une $(\pi_1(M)\times\mathbb{R}, \tilde{M})$-structure dont l'holonomie est triviale sur le second facteur. De la même façon que précédemment, si c est une petite classe de cohomologie de $H^1(M; \mathbb{R})$, on peut déformer la structure et on obtient alors un nouveau flot ψ_t sur M.

Cette construction généralise la précédente. En effet, si φ_t est un flot algébrique sur $\Gamma\backslash SL(2, \mathbb{R})$, le flot $\tilde{\varphi}_t$ relevé de φ_t à $SL(2, \mathbb{R})$ n'est autre que l'action à droite des matrices diagonales sur $SL(2, \mathbb{R})$ qui coïncide avec l'action de $(\mathrm{id}, t)\in SL(2, \mathbb{R})\times\mathbb{R}$ sur $SL(2, \mathbb{R})$.

Pour éclairer le lecteur, nous explicitons la construction de ψ_t dans un cas simple. Soit $S\subset M$ une hypersurface et supposons pour simplifier que S et M sont orientés. Soit c la classe de cohomologie qui, sur l'élément γ de $\pi_1(M)$, vaut $\varepsilon(\gamma.S)$ où $\gamma.S$ désigne le nombre d'intersection de γ et S. Alors, le flot ψ_t associé à c est obtenu de la façon suivante. Soit $\bar{M}$ le revêtement cyclique associé à S, T le générateur du groupe du revêtement, $\bar{S}$ un relevé de S dans $\bar{M}$ et $\bar{\varphi}_t$ le relevé de φ_t à $\bar{M}$. On considère alors la sous-variété $\bar{S}'=T\circ\bar{\varphi}_\varepsilon(\bar{S})$. Si ε est suffisamment petit, $\bar{S}$ et $\bar{S}'$ sont les composantes du bord d'une sous-variété à bord D de $\bar{M}$. En identifiant les composantes de ∂D à l'aide de $T\circ\bar{\varphi}_\varepsilon$, on obtient une variété compacte M′ évidemment difféomorphe à M. Cette variété M′ est naturellement équipée d'un flot ψ_t puisque l'identification $T\circ\bar{\varphi}_\varepsilon$ commute avec $\bar{\varphi}_t$.

En général, le flot ψ_t n'est pas conjugué au flot φ_t. Supposons par exemple que φ_t ne possède que deux orbites périodiques, l'une d'entre elles, γ_1, ne rencontrant pas S et l'autre, γ_2, rencontrant S exactement une fois. On vérifie alors que ψ_t possède également deux orbites périodiques. La première γ'_1, a une période égale à celle de γ_1 et la seconde, γ'_2, a une période égale à celle de γ_2 augmentée de ε. Dans cet exemple, φ_t et ψ_t ne peuvent évidemment pas être conjugués.

Cependant, le passage de φ_t à ψ_t peut être considéré comme un « changement de paramétrage » comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.4. — *Si φ_t n'a pas de singularité, il existe un difféomorphisme de classe C^∞ de M qui envoie les orbites de φ_t sur celles de ψ_t.*

Démonstration. — Considérons l'action suivante de $\pi_1(M)\times\mathbb{R}$ sur $\tilde{M}\times[0, 1]$:

$$(\gamma, t)(m, \lambda)=(\tilde{\varphi}_{\lambda t}(\gamma.m), \lambda).$$

Évidemment, $M\times[0, 1]$ admet une $(\pi_1(M)\times\mathbb{R}, \tilde{M}\times[0, 1])$-structure dont l'holonomie est triviale sur le second facteur. Si c est une petite classe de cohomologie de $H^1(M; \mathbb{R})\simeq\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$, on peut donc déformer la structure sur $M\times[0, 1]$. Cette nouvelle structure définit un flot Φ_t sur $M \times [0, 1]$, tangent aux $M \times \{\lambda\}$, et qui coïncide avec φ_t et ψ_t sur $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$. On observe alors que l'action de $\pi_1(M) \times \mathbb{R}$ sur $\tilde{M} \times [0, 1]$ préserve le feuilletage de dimension 2 produit par $[0, 1]$ du feuilletage de dimension 1 engendré par φ_t. Ce feuilletage est transverse aux sous-variétés $\tilde{M} \times \{\lambda\}$. Par conséquent, toute $(\pi_1(M) \times \mathbb{R}, \tilde{M} \times [0, 1])$-structure sur $M \times [0, 1]$ détermine naturellement un feuilletage de dimension 2 transverse aux $M \times \{\lambda\}$. En résumé, il existe une homotopie intégrable entre les feuilletages de dimension 1 engendrés par φ_t et ψ_t. On en déduit alors qu'il existe une isotopie de classe C^∞ entre ces feuilletages. ■

3. Géométrie locale du couple de champs de directions (H^-, H^+)

Le but de cette section et de la suivante est de montrer que les exemples que nous avons construits plus haut sont essentiellement les seuls. Pour simplifier, nous nous limiterons au cas des flots d'Anosov orientables, c'est-à-dire au cas où les fibrés en droites H^- et H^+ sont orientables. Le résultat précis que nous avons en vue est le suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit φ_t un flot d'Anosov orientable et de classe C^∞ sur une variété compacte* M. *On suppose que les fibrés H^+ et H^- sont de classe C^∞. Alors, ou bien φ_t est une suspension d'un automorphisme hyperbolique de T^2 ou bien il existe une $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure sur* M *telle qu'un multiple constant du champ $\mathscr{X}$ qui lui est associé n'est autre que le champ associé à φ_t.*

Ce théorème sera démontré en deux temps. Dans cette section, nous montrerons que M possède une structure géométrique un peu plus faible et nous raffinerons cette structure dans la section suivante. Pour mémoire, notons que nous montrons dans la section 5 que la $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure donnée par 3.1 est en fait complète.

Soit $X = PTP_2(\mathbb{R})$ le projectifié du fibré tangent au plan projectif $P_2(\mathbb{R})$. Soit $G = PGL(3, \mathbb{R})$. Le groupe G opère sur $P_2(\mathbb{R})$ et donc sur X. Commençons par décrire deux feuilletages naturels Δ^- et Δ^+ sur X.

Le premier, Δ^-, est le feuilletage dont les feuilles sont les fibres de la fibration $PTP_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$. Une feuille du second, Δ^+, est décrite de la façon suivante. Si (x, δ) est un point de X, c'est-à-dire un couple formé d'un point de $P_2(\mathbb{R})$ et d'une droite tangente à $P_2(\mathbb{R})$ en ce point, alors la feuille de Δ^+ passant par (x, δ) est l'ensemble des couples (x', δ') où x' est un point de la droite projective D passant par x et tangente à δ et δ' est la tangente à D en x'.

Ces deux feuilletages, qui définissent des champs de directions sur X encore notés Δ^- et Δ^+, sont évidemment invariants par l'action de $G = PGL(3, \mathbb{R})$ sur X. Par conséquent, toute $(PGL(3, \mathbb{R}), PTP_2(\mathbb{R}))$-structure sur une variété détermine canoniquement deux champs de droites, Δ^- et Δ^+, sur cette variété.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section.

PROPOSITION 3.2. — *Soit φ_t un flot d'Anosov de classe C^∞ sur la 3-variété compacte* M *et qui n'est pas une suspension d'un automorphisme hyperbolique de T^2. Si H^+ et H^- sont* *de classe* C^∞, *alors il existe une* $(PGL(3, \mathbb{R}), PTP_2(\mathbb{R}))$-*structure sur* M *dont les champs de droites* Δ^- *et* Δ^+ *associés sont précisément* H^- *et* H^+.

Nous nous fixons donc un flot d'Anosov φ_t vérifiant les hypothèses de la proposition.

LEMME 3.3. — *Dans ces conditions, le champ de plans* $H^+ \oplus H^-$ *définit une structure de contact sur* M.

Démonstration. — Ceci est bien connu. Soit α la 1-forme différentielle égale à 1 sur le champ $\mathscr{X}$ associé à φ_t et nulle sur $H^+ \oplus H^-$. Comme α est invariante par φ_t^*, il en est de même pour la 3-forme $\alpha \wedge d\alpha$. On sait ([B]) que si un flot d'Anosov préserve une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, celle-ci est nécessairement une forme de volume. On en déduit que $\alpha \wedge d\alpha$ est soit identiquement nulle soit nulle part nulle. Dans le premier cas, il est montré dans [P] que φ_t est une suspension et d'après [HK], H^+ et H^- étant de classe C^∞, il s'agit de la suspension d'un automorphisme hyperbolique de T^2 (à conjugaison C^∞-près). Dans le second cas, $H^+ \oplus H^-$ définit une structure de contact. ■

Nous sommes précisément dans la situation décrite dans [Ar], p. 52-63, que nous rappelons brièvement.

Soit P une structure de contact définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$ et Y, Z deux champs de directions, contenus dans P, non colinéaires et définis au voisinage de 0. Si l'on projette les orbites locales de Y sur un espace local d'orbites de Z, on obtient une famille de courbes définies dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Dans un système convenable de coordonnées, ces courbes peuvent être définies par une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, p), \qquad p = \frac{dy}{dx}.$$

Réciproquement, il est montré dans [Ar] que toute équation différentielle (locale) du second ordre peut être construite par ce procédé.

Deux équations différentielles du second ordre sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme local du plan envoyant les graphes des solutions de l'une sur les graphes des solutions de l'autre. De même, deux couples de champs de directions (X, Y) et (X′, Y′) contenus dans des structures de contact P, P′ sont équivalents s'il existe un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^3$ envoyant (X, Y) sur (X′, Y′).

THÉORÈME 3.4 [Ar]. — *Deux équations différentielles sont équivalentes si et seulement si les deux couples de champs de directions qui leur correspondent sont équivalents.*

Remarquons que la dualité $(X, Y) \to (Y, X)$ permet de définir la notion d'équations différentielles du second ordre duales, notion définie à équivalence près.

Il existe des invariants locaux qui sont des obstructions à la rectification d'une équation différentielle du second ordre, c'est-à-dire à l'équivalence à l'équation $d^2 y/dx^2 = 0$ dont les solutions sont les droites. Ces invariants se construisent de la façon suivante.

THÉORÈME 3.5 [Ar]. — *Toute équation différentielle du second ordre est équivalente dans le voisinage du graphe de l'une de ses solutions fixée à une équation du type :*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{A}(x) y^2 + \mathrm{B}(x) yp + \mathrm{C}(x) p^2 + O(|y|^3 + |p|^3), \qquad p = \frac{dy}{dx}.$$

La solution fixée correspond à la solution $y=0$. Sur le graphe de la solution nulle, la forme ω de degré $5/2$:

$$\omega = (6\,\mathrm{A}(x) - 2\,\mathrm{B}'(x) + \mathrm{C}''(x))\,|dx|^{5/2}$$

est définie intrinséquement à une constante multiplicative près. Ici $\mathrm{B}'(x)$ *et* $\mathrm{C}''(x)$ *désignent respectivement les dérivées première et seconde de* B *et* C *par rapport à* x.

THÉORÈME 3.6. — *Une équation différentielle du second ordre est localement linéarisable si et seulement si la forme ω est identiquement nulle sur toutes ses courbes intégrables et si la forme ω' associée à l'équation duale est elle aussi identiquement nulle.*

Nous pouvons maintenant appliquer ces résultats à notre situation, c'est-à-dire au couple de champs de directions $(\mathrm{H}^+, \mathrm{H}^-)$.

PROPOSITION 3.7. — *Les deux équations différentielles locales du second ordre définies par* $(\mathrm{H}^+, \mathrm{H}^-)$ *sont linéarisables (i. e. équivalentes à* $d^2 y/dx^2 = 0$).

Démonstration. — D'après ce que nous avons vu, chaque horicycle (i. e. courbe intégrale de H^+ ou H^-) est munie d'une forme ω de degré $5/2$ bien définie à un facteur multiplicatif près. Il s'agit de montrer que ces formes sont nulles. Puisque les orbites périodiques d'un flot d'Anosov préservant le volume sont denses, il nous suffit donc de montrer que si m est un point périodique de φ_t, alors la forme ω est nulle sur un voisinage de m dans l'horicycle (stable par exemple) passant par m.

Soit donc m un point périodique de φ_t, i. e.

$$\varphi_{t_0}(m) = m, \qquad t_0 > 0.$$

Soit U un voisinage suffisamment petit de m dans la variété stable faible passant par m. On peut alors introduire un système de coordonnées locales (x, y) dans U de telle sorte que les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Dans U, les variétés stables fortes ont comme équation $y = \mathrm{Cte}$.
2. Au voisinage de (0,0) l'application φ_{t_0} s'écrit :

$$\varphi_{t_0}(x, y) = (\lambda x, y), \qquad |\lambda| < 1.$$

3. Le flot φ_t pour t petit s'écrit dans U

$$\varphi_t(x, y) = (x, y + t).$$

L'existence d'un tel système de coordonnées résulte du théorème de linéarisation de Sternberg.

Considérons alors l'équation différentielle déterminée par (H^+, H^-) sur U, au voisinage de l'horicycle $y=0$, celle-ci s'écrit :

$$(*) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2}=f(x, y, p), \qquad p=\frac{dy}{dx}.$$

Puisque φ_t préserve H^+ et H^-, les solutions de cette équation sont globalement invariantes par φ_t. En écrivant cette condition d'invariance pour t petit, on voit que $(*)$ s'écrit en fait :

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=f(x, p), \qquad p=\frac{dy}{dx}.$$

Puisque les solutions sont invariantes par φ_{t_0}, on voit que si $y(x)$ est une solution de $(*)$, il en est de même de $Y(x)=y(x/\lambda)$. On obtient alors :

$$\frac{1}{\lambda^2} f\left(\frac{x}{\lambda}, p\right)=f\left(x, \frac{1}{\lambda} p\right).$$

Puisque les courbes $y=\mathrm{Cte}$ sont solutions de $(*)$, on a $f(x, 0)=0$. Développons f en série de Taylor par rapport à p :

$$f(x, p)=a(x) p+c(x) p^2+O_x(p^3).$$

Les équations précédentes donnent :

$$c(x)=c\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$a(x)=\frac{1}{\lambda} a\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Par conséquent :

$$a(x)=\lambda a(\lambda x)=\lambda^n a(\lambda^n x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$c(x)=c(\lambda x)=c(\lambda^n x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} c(0).$$

Finalement, l'équation $(*)$ s'écrit en fait :

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=c p^2+O_x(p^3).$$

En d'autres termes, le système de coordonnées (x, y) introduit dans U est précisément un système de coordonnées du type de celui décrit en 3.5. Il suffit alors de calculer :

$$\omega=(6A-5B'+C'')\,|dx|^{5/2}=0$$

puisque A et B sont nuls et que C est constant.

Nous avons donc atteint notre but puisque nous avons montré que ω s'annule au voisinage de m dans l'horicycle stable passant par m. ■

Nous pouvons finalement démontrer la proposition 3.2. Pour cela, remarquons que le couple canonique de champs de directions (Δ^+, Δ^-) sur $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$ est lui aussi linéarisable pour des raisons évidentes. Par conséquent, d'après 3.4, il existe un recouvrement de M par des ouverts U_i et des difféomorphismes f_i de U_i sur un ouvert de $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$ qui envoient le champ H^+ (resp. H^-) sur Δ^+ (resp. Δ^-). Les difféomorphismes locaux $f_i \circ f_j^{-1}$ de $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$ préservent donc les champs de droites Δ^+ et Δ^-. La proposition 3.2 est alors une conséquence du lemme élémentaire suivant dont nous laissons la démonstration au lecteur.

LEMME 3.8. — *Si ψ est un difféomorphisme local de* $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$ *qui préserve* Δ^+ *et* Δ^-, *alors ψ est la restriction à un ouvert de l'action d'une transformation projective de* $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ *sur* $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$.

4. Réduction du groupe structural

Dans cette section, nous terminons la démonstration du théorème 3.1, c'est-à-dire que nous montrons que les $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathrm{PTP}_2(\mathbb{R}))$-structures que nous avons construites plus haut peuvent en fait se réduire à des $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}))$-structures.

Appelons flot projectif un flot ψ_t sur $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$ induit par l'action d'un sous-groupe à 1-paramètre de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$. Si ψ_t est un flot projectif, nous noterons $C(\psi_t)$ le cèntralisateur de ψ_t dans $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$.

LEMME 4.1. — *La* $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathrm{PTP}_2(\mathbb{R}))$-*structure fournie par la proposition* 3.2 *est en fait une* $(C(\psi_t), \mathrm{PTP}_2(\mathbb{R}))$-*structure pour un certain flot projectif non trivial* ψ_t.

Démonstration. — Soit $\{(U_i, f_i)\}$ un atlas définissant la $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathrm{PTP}_2(\mathbb{R}))$-structure. Puisque le flot d'Anosov φ_t préserve H^+ et H^-, le flot local $f_i \circ \varphi_t \circ f_i^{-1}$ sur $f_i(U_i)$ préserve les champs de directions Δ^+ et Δ^- de $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$. D'après le lemme 3.8, ce flot est la restriction à $f_i(U_i)$ d'un flot projectif ${}_i\psi_t$. Si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, il est clair que la transformation $g_{ij} = f_i \circ f_j^{-1}$ conjugue les flots projectifs ${}_i\psi_t$ et ${}_j\psi_t$, i. e. :

$$ {}_j\psi_t = g_{ij}^{-1} \circ {}_i\psi_t \circ g_{ij}. $$

Puisque l'on suppose évidemment que la variété M est connexe, il s'ensuit que tous les flots projectifs ${}_i\psi_t$ sont projectivement conjugués. On se fixe alors un flot projectif ψ_t qui est projectivement conjugué à l'un quelconque des ${}_i\psi_t$, c'est-à-dire que pour tout i, il existe $h_i \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ tel que :

$$ \psi_t = h_i \circ {}_i\psi_t \circ h_i^{-1}. $$

Si l'on définit de nouveaux difféomorphismes locaux f'_i de U_i sur un ouvert de $\mathrm{PTP}_2(\mathbb{R})$ par $f'_i = h_i \circ f_i$, les nouveaux changements de cartes sont :

$$ g'_{ij} = f'_i \circ f'^{-1}_j = h_i \circ g_{ij} \circ h_j^{-1}. $$

Ces dernières transformations projectives g'_{ij} commutent avec ψ_t comme il ressort des formules précédentes. ■

Ceci nous mène naturellement à étudier la structure des centralisateurs des flots projectifs.

LEMME 4.2. — *Soit ψ_t un flot projectif non trivial. Alors, l'une des trois propriétés suivantes est réalisée.*

1. *Le centralisateur $C(\psi_t)$ de ψ_t est un groupe de Lie abélien de dimension 2.*
2. *ψ_t est conjugué dans $PGL(3, \mathbb{R})$ au flot :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \neq 0$$

Nous notons entre crochets la classe d'équivalence d'une matrice dans $PGL(3, \mathbb{R})$. Dans ce cas, $C(\psi_t)$ est le groupe des matrices du type :

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b \neq 0$$

3. *ψ_t est conjugué dans $PGL(3, \mathbb{R})$ au flot :*

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \neq 0$$

Dans ce cas, $C(\psi_t)$ est le groupe des matrices du type :

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Démonstration. — La démonstration étant élémentaire et sans intérêt, nous l'omettrons. Elle consiste simplement à étudier $C(\psi_t)$ en fonction de la décomposition de Jordan de ψ_t. ■

Nous nous proposons de montrer que, dans le cas qui nous intéresse, seul le cas 3 peut se produire. Nous éliminerons donc successivement les cas 1 et 2.

LEMME 4.3. — *Le cas 1 ne peut pas se produire.*

Démonstration. — Puisque $C(\psi_t)$ est un groupe de Lie abélien de dimension 2, son action sur $PTP_2(\mathbb{R})$ permet de construire deux champs de vecteurs qui commutent sur $PTP_2(\mathbb{R})$ et qui sont linéairement indépendants sur un ouvert dense. On peut toujours supposer que l'un de ces champs n'est autre que le champ associé à ψ_t puisque, évidemment, ψ_t est contenu dans $C(\psi_t)$. Ces deux champs sont invariants par $C(\psi_t)$ de sorte que toute $(C(\psi_t), PTP_2(\mathbb{R}))$-structure sur M détermine deux champs de vecteurs sur M qui commutent et qui sont linéairement indépendants sur un ouvert dense. L'un de ces champs de vecteurs est précisément le champ associé au flot d'Anosov φ_t étudié. Mais ceci est impossible car il est bien connu (et élémentaire) qu'un champ de vecteurs qui commute avec un champ d'Anosov est nécessairement un multiple constant de ce champ. ■

Avant d'éliminer le cas 2, nous démontrons un lemme qui servira encore ultérieurement.

LEMME 4.4. — *Soit* $S \subset PTP_2(\mathbb{R})$ *une sous-variété compacte de dimension* 2 *invariante par* $C(\psi_t)$. Alors, la $(C(\psi_t), PTP_2(\mathbb{R}))$-*structure que nous étudions est en fait une* $(C(\psi_t), PTP_2(\mathbb{R})-S)$-*structure.*

Démonstration. — Soit $D: \tilde{M} \to PTP_2(\mathbb{R})$ l'application développante. Nous allons montrer que l'image $D(\tilde{M})$ évite S. En effet, $D^{-1}(S)$ est une sous-variété de $\tilde{M}$ invariante par l'action de $\pi_1(M)$ sur M et définit donc une sous-variété compacte de dimension 2 dans M. Celle-ci est évidemment invariante par le flot d'Anosov étudié. Le lemme résulte alors du fait élémentaire suivant : un flot d'Anosov ne peut pas préserver une sous-variété compacte lisse (et non vide) de dimension 2. ■

Appliquons ce lemme au cas 2. Dans ce cas, la sous-variété S de $PTP_2\mathbb{R}$ formée des droites tangentes à $PTP_2(\mathbb{R})$ en un point de la droite de l'infini $x_3=0$ est invariante par $C(\psi_t)$. Par conséquent, si le cas 2 se produisait, la structure envisagée se réduirait à $(C(\psi_t), PTP_2(\mathbb{R})-S)$. Remarquons que $PTP_2(\mathbb{R})-S$ n'est autre que $PT\mathbb{R}^2$, le projectifié du fibré tangent à $\mathbb{R}^2$. L'action de ψ_t sur $PT\mathbb{R}^2$ est obtenue en projectifiant la différentielle des translations :

$$f_t(x_1, x_2)=(x_1+\lambda t, x_2).$$

Le groupe $C(\psi_t)$, agissant sur $PT\mathbb{R}^2$, correspond au groupe des applications affines de $\mathbb{R}^2$ qui commutent avec les translations f_t.

LEMME 4.5. — *Le cas* 2 *ne peut pas se produire.*

Démonstration. — Soit $\pi: PT\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la projection de $PT\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ suivie de celle de $\mathbb{R}^2$ sur le second facteur. Si $\{(U_i, f_i)\}$ est un atlas définissant la structure, on considère les submersions $\pi_i=\pi\circ f_i: U_i \to \mathbb{R}$. Puisque les applications « affines » de $C(\psi_t)$ commutent avec f_t, elles préservent les surfaces de niveau de π. Si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, il existe donc une application affine $\theta_{ij}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\pi_j=\theta_{ij}\circ\pi_i$. En d'autres termes, les π_i définissent un feuilletage de codimension 1, transversalement affine, sur M. Ce feuilletage n'est autre que le feuilletage stable faible de φ_t. Les fibres de π contiennent en effet les orbites de ψ_t et les fibres de la projection $PT\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui ne sont autres que les feuilles de Δ^-.

En conclusion, le feuilletage stable faible de φ_t admet une structure transverse affine. D'après [P], le flot φ_t admet une section globale. Mais ceci contredit le résultat de G. Reeb affirmant qu'un flot de contact ne peut pas admettre de section globale. ■

Nous avons presque atteint notre but. Nous avons montré que la $(PGL(3, \mathbb{R}), PTP_2(\mathbb{R}))$-structure que nous étudions est une $(C(\psi_t), PTP_2(\mathbb{R}))$-structure où ψ_t est le flot projectif :

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \neq 0$$

Le groupe $C(\psi_t)$ est le groupe des matrices du type :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad A \in GL(2, \mathbb{R}).$$

Il nous reste à préciser cette structure.

LEMME 4.6. — *L'application développante* $D : \tilde{M} \to PTP_2(\mathbb{R})$ *évite les deux sous-variétés suivantes :*

1. S_1, *la variété des droites tangentes à* $P_2(\mathbb{R})$ *en un point de la droite de l'infini d'équation homogène* $x_3 = 0$.

2. S_2, *la variété des droites* δ *tangentes à* $P_2(\mathbb{R})$ *en un point* x *telles que la droite projective passant par* x *et tangente à* δ *contienne le point* $(0, 0, 1)$ *de* $P_2(\mathbb{R})$.

Démonstration. — Elle résulte du lemme 4.4 car S_1 et S_2 sont invariantes par $C(\psi_t)$. ■

Le complémentaire $PTP_2(\mathbb{R}) - (S_1 \cup S_2)$ s'identifie à l'espace X des couples (x, δ) où x est un point de $\mathbb{R}^2$ et δ est une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par x mais ne passant pas par (0,0). L'action de $C(\psi_t) \simeq GL(2, \mathbb{R})$ sur X est simplement induite par l'action naturelle de $GL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$. Puisque nous nous limitons aux flots d'Anosov orientables nous sommes finalement limités à une $(GL^+(2, \mathbb{R}), X)$-structure. Le théorème 3.1 sera donc finalement démontré si nous montrons le lemme suivant :

LEMME 4.7. — *Il existe un difféomorphisme* F *de* $SL(2, \mathbb{R})$ *sur* X *tel que :*

1. F *conjugue l'action de* $GL^+(2, \mathbb{R}) \simeq SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ *sur* X *et celle de* $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ *sur* $SL(2, \mathbb{R})$.

2. F *envoie les champs* $\mathcal{Y}$ *et* $\mathcal{X}$ *de* $SL(2, \mathbb{R})$ *sur des champs contenus dans* Δ^+ *et* Δ^-.

3. F *envoie le champ* $\mathcal{X}$ *sur un multiple constant du champ associé à* ψ_t.

Démonstration. — Le difféomorphisme F est défini explicitement de la façon suivante. L'image de la matrice A de $SL(2, \mathbb{R})$ est le couple (x, δ) où x est le point de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont fournies par la première colonne de A et δ est la droite de $\mathbb{R}^2$ passant par x et dont le vecteur directeur est donné par la deuxième colonne de A. Les propriétés 1, 2 et 3 se vérifient sans difficulté. ■

Remarque 4.8. — Dans la construction des flots exotiques faite dans la section 2, nous avons laissé en suspens le fait que ces flots sont effectivement non C^0-conjugués à un flot algébrique. D'après [FO], deux flots d'Anosov pour lesquels H^+ et H^- sont différentiables et qui sont C^0-conjugués sont en fait C^∞-conjugués. Il nous suffit donc de montrer que les flots exotiques ne sont pas C^∞-conjugués à un flot algébrique. Il résulte de la démonstration même du théorème 3.1 que nous venons de démontrer que deux flots d'Anosov dont les champs H^+ et H^- sont C^∞ et qui sont C^∞-conjugués définissent des $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structures isomorphes. La classe de conjugaison du morphisme d'holonomie $h : \pi_1(M) \to SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est donc un invariant de conjugaison C^∞. Les flots algébriques étant caractérisés par le fait que leur holonomie est triviale sur le second facteur, la démonstration du théorème 2.2 est achevée.

5. Complétude des $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structures

Dans cette section, nous améliorons le théorème 3.1 en montrant que la $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure qui est associée au flot d'Anosov considéré est complète. Rappelons qu'une (G, X)-structure sur M est complète si l'application développante est un revêtement. Si X est simplement connexe, cela signifie simplement que M est le quotient de X par l'action d'un sous-groupe de G opérant proprement et discontinument sur X. Si X n'est pas simplement connexe, la situation est semblable puisqu'une (G, X)-structure définit une $(\tilde{G}, \tilde{X})$-structure où $\tilde{X}$ est le revêtement universel de X et $\tilde{G}$ est le groupe des relevés à $\tilde{X}$ des éléments de G.

THÉORÈME 5.1. — *Soit φ_t un flot d'Anosov de classe C^∞ qui n'est pas une suspension. Si les fibrés H^+ et H^- sont de classe C^∞*, alors la $(SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-*structure associée à φ_t est complète.*

Il s'agit de montrer que l'application développante $D : \tilde{M} \to SL(2, \mathbb{R})$ est un revêtement, c'est-à-dire qu'elle vérifie la propriété des relèvements des chemins.

Soit $\tilde{\varphi}_t$ le relevé à $\tilde{M}$ de φ_t et ψ_t le flot de $SL(2, \mathbb{R})$ obtenu par multiplication à droite par $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Nous savons que, quitte à multiplier le champ d'Anosov par une constante, on a :

$$D \circ \tilde{\varphi}_t = \psi_t \circ D.$$

On en déduit immédiatement le lemme suivant :

LEMME 5.2. — *Si $\gamma : [0,1] \to SL(2, \mathbb{R})$ est un chemin tangent à une orbite de ψ_t et si $\tilde{x}$ est un point de $\tilde{M}$ tel que $D(\tilde{x}) = \gamma(0)$, alors il existe un chemin $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{M}$ d'origine $\tilde{x}$ qui relève γ.*

Démonstration. — Il existe en effet une application $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\gamma(t) = \psi_{u(t)}(\gamma(0)).$$

Un relevé $\tilde{\gamma}$ est alors donné par :

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\varphi}_{u(t)}(\tilde{x}). \blacksquare$$

Après avoir montré que les chemins tangents à ψ_t se relèvent, nous allons montrer que les chemins tangents aux horicycles se relèvent également.

Nous commençons par montrer comment un horicycle quelconque $\mathscr{H}$ de φ_t (i. e. une feuille de feuilletage stable fort par exemple) est naturellement équipé d'une structure affine. Pour cela, fixons-nous deux points distincts x_1 et x_2 de $\mathscr{H}$. Nous allons construire une application naturelle :

$$\pi : \quad \mathscr{H} \to \mathbb{R}.$$

Choisissons un flot C^∞, θ_t, tangent à H^+ et un point m de $\mathscr{H}$. On a alors

$$x_1 = \theta_{t_2}(x_2)$$
$$x_1 = \theta_{t_3}(m)$$

pour un certain couple (t_2, t_3). Soit P le champ de plans $H^+ \oplus H^-$. Dans l'espace $T_{x_1} M$, on dispose alors de quatre plans contenant tous la droite H_x^+, en l'occurence :

$$P_{x_1}, \; d\theta_{t_2}(P_{x_2}), \; (H^+ \oplus \Phi)_{x_1}, \; d\theta_{t_3}(P_m)$$

[Rappelons que Φ est le champ de droites contenant $(\partial/\partial t)\ \varphi_t$]. On définit alors $\pi(m)$ comme étant le birapport de ces quatre plans. Remarquons que $\pi(m)$ est effectivement un nombre réel (i. e. $\neq \infty$) car aucun des plans P_{x_1}, $d\theta_{t_2}(P_{x_2})$, $d\theta_{t_3}(P_m)$ ne peut coïncider avec $(H^+ \oplus \Phi)_{x_1}$. Par ailleurs, π ne dépend évidemment pas du choix du flot θ_t.

LEMME 5.3. — *π est une submersion.*

Démonstration. — Ceci est une reformulation du fait que P est une structure de contact; le plan P « tourne » si l'on se déplace le long de $\mathscr{H}$. ■

LEMME 5.4. — *Si l'on change x_1 et x_2, l'application π est modifiée au but par une application affine de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. — Ceci résulte de la définition de π et des propriétés élémentaires du birapport. ■

En résumé, nous avons effectivement muni chaque feuille du feuilletage stable fort d'une structure affine naturelle. Le pas important dans la démonstration du théorème 5.1 est la proposition suivante :

PROPOSITION 5.5. — *La structure affine décrite ci-dessus sur les horicycles est complète, c'est-à-dire que π est surjective.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que :

$$\pi(\theta_t(x_1)) \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

Géométriquement, cela signifie que la famille de plans $Q_t(x_1) = d\theta_t(P_{\theta-t(x_1)})$ converge vers $(H^+ \oplus \Phi)_{x_1}$, lorsque t tend vers l'infini. Puisque cette famille de plans « tourne » de façon monotone lorsque t varie de façon monotone, les limites suivantes existent :

$$Q_{+\infty}(x_1) = \lim_{t \to +\infty} d\theta_t(P_{\theta_{-t}(x_1)})$$

$$Q_{-\infty}(x_1)=\lim_{t\to-\infty} d\theta_t(P_{\theta_{-t}(x_1)}).$$

En utilisant une fois de plus le fait que P est une structure de contact, on voit que, pour tout x_1, $Q_{+\infty}(x_1)$ et $Q_{-\infty}(x_1)$ sont différents de P_{x_1}. Plus précisément, l'angle entre $Q_{+\infty}(x_1)$ [resp. $Q_{-\infty}(x_1)$] et P_{x_1} est minoré par un nombre strictement positif α indépendant de x_1 (l'angle étant calculé à l'aide d'une métrique riemannienne auxiliaire sur M).

Observons alors que, puisque H^+ et H^- sont invariants par le flot d'Anosov φ_t, les champs de plans $Q_{+\infty}$ et $Q_{-\infty}$ sont aussi invariants par φ_t. Le lemme résulte alors du fait élémentaire suivant. Soit Q un champ de plans sur M (éventuellement discontinu) qui contient H^+ et tel que l'angle (Q, P) soit borné inférieurement. Alors $d\varphi_t(Q)$ converge uniformément vers $\Phi\oplus H^+$. ■

Nous pouvons maintenant montrer que D est un revêtement au-dessus des horicycles.

LEMME 5.6. — *Soit* $\gamma : [0, 1]\to SL(2, \mathbb{R})$ *un chemin contenu dans un horicycle stable (ou instable) de* $SL(2, \mathbb{R})$ *(i.e. contenu dans une orbite du flot des matrices triangulaires supérieures). Si* $\tilde{x}$ *est un point de* $\tilde{M}$ *tel que* $D(\tilde{x})=\gamma(0)$, *alors* γ *se relève dans* $\tilde{M}$ *en un chemin d'origine* $\tilde{x}$.

Démonstration. — Nous avons vu que chaque horicycle stable de φ_t est équipé d'une structure affine complète. Leurs relevés dans $\tilde{M}$ sont donc eux aussi munis d'une structure affine complète. De la même façon, les horicycles de $SL(2, \mathbb{R})$ sont munis d'une structure affine complète. Soit $\mathscr{L}^-$ l'horicycle stable de $SL(2, \mathbb{R})$ passant par $\gamma(0)$ et $\mathscr{H}$ la composante connexe de $D^{-1}(\mathscr{L}^-)$ qui contient $\tilde{x}$. Il est clair que $\mathscr{H}$ n'est autre qu'un relevé à $\tilde{M}$ d'un horicycle stable de φ_t. La naturalité des structures affines sur $\mathscr{H}$ et $\mathscr{L}^-$ montre que la restriction de D à $\mathscr{H}$ est une application affine de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{L}^-$ qui est une submersion. Comme $\mathscr{H}$ et $\mathscr{L}^-$ sont affinement isomorphes à $\mathbb{R}$ et qu'une application affine non constante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective, on en déduit que D envoie homéomorphiquement $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{L}^-$. Ceci montre précisément que γ se relève en $\tilde{\gamma} : [0, 1]\to\mathscr{H}$. ■

La démonstration du théorème 5.1 est maintenant facile :

THÉORÈME 5.7. — *L'application développante* $D : \tilde{M}\to SL(2, \mathbb{R})$ *est un revêtement.*

Démonstration. — Si $\varepsilon>0$ est suffisamment petit, l'ensemble U_ε des matrices de $SL(2, \mathbb{R})$ du type

$$\begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1\end{pmatrix}=A(s, t, u)$$

avec $|s|<\varepsilon$, $|t|<\varepsilon$, $|u|<\varepsilon$ forme un voisinage ouvert de $id\in SL(2, \mathbb{R})$ paramétré bijectivement par $(s, t, u)\in]-\varepsilon, +\varepsilon[^3$. La famille des ouverts $U_\varepsilon B$ ($B\in SL(2, \mathbb{R})$) forme donc un recouvrement de $SL(2, \mathbb{R})$. Par applications successives des lemmes 5.2 et 5.6, on voit que si $D(\tilde{x})=B$, il existe une unique application

$$(s, t, u)\in]-\varepsilon, +\varepsilon[^3\mapsto\tilde{x}(s, t, u)\in\tilde{M}$$

telle que $D(\tilde{x}(s, t, u))=A(s, t, u)B$ et $\tilde{x}(0, 0, 0)=B$. Ceci montre précisément que D est un revêtement. ■

6. Applications

La première application que nous avons en vue est le théorème mentionné dans l'introduction.

THÉORÈME 6.1. — *Soit g une métrique riemannienne de classe* C^∞ *et à courbure négative sur une surface compacte* Σ. *Si le feuilletage stable faible du flot géodésique* φ_t^g *de g est de classe* C^2, *alors la courbure de g est constante.*

Une propriété essentielle des flots géodésiques est le fait que φ_t^g est conjugué à son inverse φ_{-t}^g. En effet, soit $\sigma : T_1\Sigma \to T_1\Sigma$ l'involution envoyant un vecteur unitaire sur son opposé. Alors $\sigma\varphi_t^g\sigma^{-1}=\varphi_{-t}^g$. Remarquons par ailleurs que σ est homotope à l'identité. Le lemme suivant analyse cette situation.

LEMME 6.2. — *Soit* φ_t *un flot d'Anosov, de classe* C^∞, *qui n'est pas une suspension. On suppose que* H^+ *est de classe* C^∞ *et qu'il existe un difféomorphisme* σ, *de classe* C^∞, *homotope à l'identité tel que* $\sigma\varphi_t\sigma^{-1}=\varphi_{-t}$. *Alors,* φ_t *est* C^∞*-conjugué à un flot algébrique.*

Démonstration. — Évidemment, l'hypothèse entraîne que H^- est lui aussi de classe C^∞. Le flot φ_t correspond donc à une $(SL(2, \mathbb{R})\times\mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure. Soit $h=(h_1, h_2) : \pi_1(M)\to SL(2, \mathbb{R})\times\mathbb{R}$ l'holonomie de cette structure. Comme le fibré stable (resp. instable) de φ_{-t} est le fibré instable (resp. stable) de φ_t, le flot φ_{-t} correspond lui aussi à une $(SL(2, \mathbb{R})\times\mathbb{R}, SL(2, \mathbb{R}))$-structure. On vérifie que l'holonomie de cette nouvelle structure est :

$$h'=(h'_1, h'_2) : \pi_1(M)\to SL(2, \mathbb{R})\times\mathbb{R}$$

avec

$$h'_1=h_1, \qquad h'_2=-h_2$$

Puisque σ envoie φ_t sur φ_{-t} et que σ est homotope à l'identité, σ conjugue les structures qui ont donc la même holonomie, i. e. $h'_1=h_1$ et $h'_2=h_2$.

Ceci montre donc que $h_2=0$, c'est-à-dire que la structure était en fait une $(SL(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{R}))$-structure. En d'autres termes φ_t est algébrique. ■

Démonstration de 6.1. — Le champ de plans $H^+\oplus H^-$ n'est autre que l'orthogonal du champ associé à φ_t^g pour la métrique naturelle sur $T_1\Sigma$. Par conséquent, ce champ de plans est de classe C^∞. Puisque nous supposons que $\Phi\oplus H^-$ est de classe C^2, on en déduit alors que H^-est de classe C^2. En utilisant l'involution σ, on voit alors que H^+ est lui aussi de classe C^2. Dans [HK], il est montré que si un flot d'Anosov de classe C^∞ est tel que H^+ et H^- sont de classe C^2 et $H^+\oplus H^-$ est de classe C^∞, alors H^+ et H^- sont de classe C^∞. Nous sommes donc dans les conditions d'application de notre travail.

D'après ce qui précède, φ_t^g est C^∞-conjugué à un flot algébrique sur un espace homogène du type $\Gamma\backslash\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Remarquons que ce dernier espace est un fibré de Seifert suffisamment grand [R – V] et que $T_1\Sigma$ est aussi un fibré de Seifert du type $\Gamma_1\backslash PSL(2, \mathbb{R})$. Il résulte alors de la classification des fibrés de Seifert [0] que si $\Gamma\backslash\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ est difféomorphe à $T_1\Sigma$, alors $\Gamma\backslash\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ est en fait du type $\Gamma_1\backslash PSL(2, \mathbb{R})$, avec $\Gamma_1=\pi_1(\Sigma)$ i. e. Γ

contient nécessairement le centre de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. En d'autres termes, φ_t^g est C^∞-conjugué au flot géodésique d'une certaine métrique sur Σ à courbure négative constante. Il résulte alors de [K] que la courbure de g est elle-même constante. ■

Remarque 6.3. — Le théorème 6.1 pourrait aussi se démontrer en associant 3.1 et le théorème suivant de Mitsumatsu [M]. Si le feuilletage stable de φ_t^g est de classe C^2 et si son invariant de Godbillon-Vey est égal à celui du feuilletage stable correspondant à une métrique à courbure constante, alors la courbure de g est constante. En effet, le théorème 3.1 entraîne évidemment que le feuilletage stable faible de φ_t^g est transversalement projectif. Il est alors connu que son invariant de Godbillon-Vey peut s'évaluer à partir du nombre d'Euler du fibré $T_1\Sigma \to \Sigma$. Le théorème de [M] permet alors de conclure.

Nous étudions maintenant la topologie des variétés qui supportent les flots que nous avons considérés.

THÉORÈME 6.4. — *Soit* M *une variété compacte de dimension* 3 *qui admet un flot d'Anosov* φ_t *de classe* C^∞, *orientable, pour lequel* H^+ *et* H^- *sont* C^∞. *Si* φ_t *n'est pas une suspension, alors* M *est difféomorphe à un espace homogène du type* $\Gamma \diagdown \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. — Nous savons que M est le quotient de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ par l'action d'un sous-groupe Γ de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ opérant proprement et discontinument. Puisqu'un morphisme de Γ dans $\mathbb{R}$ est nécessairement nul sur le premier groupe des commutateurs de $[\Gamma, \Gamma]$ de Γ, on en déduit que $[\Gamma, \Gamma]$ opère proprement et discontinument sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ par translations à gauche de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Par conséquent, $[\Gamma, \Gamma]$ est un sous-groupe discret de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. Observons maintenant que si Γ est un sous-groupe de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$, trois cas sont possibles :

1. Γ est dense dans $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ et, dans ce cas, $[\Gamma, \Gamma]$ est aussi dense.
2. Γ est résoluble.
3. Γ est discret.

Si Γ était résoluble, on déduirait de [P] que φ_t aurait une section, ce que nous avons vu être impossible. Par conséquent Γ est discret dans $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Observons alors que le revêtement universel de M est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ d'après 5.1. Les deux variétés $\Gamma \diagdown \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ et M ont donc le même type d'homotopie et M est irréductible. Il résulte alors du théorème de Waldhausen ([He], p. 135 et 97) que M est difféomorphe à $\Gamma \diagdown \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. ■

Nous démontrons maintenant le théorème mentionné dans l'introduction.

THÉORÈME 6.5. — *Sous les hypothèses du théorème* 6.4, *il existe un difféomorphisme de classe* C^∞, *entre* M *et un espace homogène* $\Gamma \diagdown \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ *qui envoie les orbites de* φ_t *sur celles du flot algébrique sur* $\Gamma \diagdown \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit $h=(h_1, h_2) : \pi_1(M) \to \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ l'holonomie de la $(\widetilde{SL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \widetilde{SL}(2, \mathbb{R}))$-structure correspondante à φ_t. Nous avons vu que $\Gamma = h_1(\pi_1(M))$ est un sous-groupe uniforme discret dans $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. On considère alors le flot algébrique ψ_t sur $\Gamma \diagdown \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ correspondant aux multiplications à droites par les « matrices diagonales ». Soit $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) le feuilletage de dimension 1 engendré par φ_t (resp. ψ_t).

Nous nous proposons de montrer que les pseudo-groupes d'holonomie de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont équivalents. Pour ces notions, nous référons à [Ha].

Étudions d'abord le pseudo-groupe d'holonomie de $\mathscr{G}$.

Le relevé de $\mathscr{G}$ à $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ est le feuilletage dont les feuilles sont les fibres de l'application :

$$p: \quad \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \to \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})/\mathscr{D}$$

où $\mathscr{D}$ est le sous-groupe à 1-paramètre correspondant aux « matrices diagonales ». Le groupe fondamental Γ de $\Gamma\backslash\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ opère sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ en préservant les fibres de p. Il en résulte que le pseudo-groupe d'holonomie de $\mathscr{G}$ est équivalent à l'action naturelle de Γ sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})/\mathscr{D}$.

En ce qui concerne $\mathscr{F}$, nous savons qu'il existe un difféomorphisme $\mathrm{D} : \tilde{\mathrm{M}} \to \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$. Les feuilles du relevé de $\mathscr{F}$ à M sont les fibres de l'application :

$$p \circ \mathrm{D}: \quad \mathrm{M} \to \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})/\mathscr{D}.$$

Observons maintenant que $\pi_1(\mathrm{M})$ opère sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ à travers l'action de $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ sur $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Puisqu'un élément du type $(\mathrm{id}, t) \in \widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ opère par translations à droite par une matrice diagonale, l'action de (id, t) induite sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})/\mathscr{D}$ est triviale. En d'autres termes, on a :

$$p \circ \mathrm{D}(\gamma \circ x) = h_1(\gamma)(p \circ \mathrm{D}(x)).$$

Finalement, le pseudo-groupe d'holonomie de $\mathscr{F}$ est lui-aussi équivalent à l'action de $\Gamma = h_1(\pi_1(\mathrm{M}))$ sur $\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})/\mathscr{D}$ par translations à gauche.

Remarquons maintenant que tous les revêtements d'holonomie de toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ ou de $\mathscr{G}$ sont contractiles puisque difféomorphes à $\mathbb{R}$. D'après ([Ha], p. 83), $(\mathrm{M}, \mathscr{F})$ et $(\Gamma\backslash\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R}), \mathscr{G})$ sont deux versions du classifiant du même pseudo-groupe. Il existe donc ([Ha], p. 82]) une équivalence d'homotopie $\mathrm{F} : \mathrm{M} \to \Gamma\backslash\widetilde{\mathrm{SL}}(2, \mathbb{R})$ telle que :

1. $\mathscr{F}$ envoie une feuille de $\mathscr{F}$ sur une feuille de $\mathscr{G}$.

2. l'application induite sur des transversales locales à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ est projective, donc C^∞.

Nous sommes alors dans une situation très semblable à celle rencontrée dans [G] paragraphe 4. Il existe une application $a : \mathrm{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathrm{F}(\varphi_t(x)) = \psi_{a(x, t)}(\mathrm{F}(x)).$$

On choisit alors une fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, à support compact et d'intégrale 1. Si $\mathrm{T} > 0$, on pose :

$$\mathrm{F}_\mathrm{T}(x) = \psi_{b(x, \mathrm{T})}(\mathrm{F}(x))$$

où

$$b(x, \mathrm{T}) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x, t) \frac{\theta(\mathrm{T}t)}{\mathrm{T}} dt.$$

Le même argument que dans [G] montre que si T est suffisamment grand, F_T est localement injectif. Puisque F_T est encore une équivalence d'homotopie vérifiant 1, on en déduit que F_T est alors un homéomorphisme envoyant $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{G}$. Enfin, puisque F_T vérifie 2 et que θ est C^∞ à support compact, on déduit que F_T est un difféomorphisme de classe C^∞. ■

BIBLIOGRAPHIE

[An] D. V. ANOSOV, *Geodesic Flows on Compact Riemannian Manifolds of Negative Curvature* (*Proc. Steklov. Math. Inst. A.M.S. Translations*, 1969).

[Ar] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1980.

[B] R. BOWEN, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms* (*Lecture Notes in Math.*, n° 470, 1975, Springer).

[BK] K. BURNS et A. KATOK, en collaboration avec W. BALLMAN, M. BRIN, P. ELERBEIN et R. OSSERMAN, *Manifolds with Non Positive Curvature* (*Ergod. and Dynam. Syst.*, vol. 5, 1985, p. 307-317).

[FO] J. FELDMAN et D. ORNSTEIN, *Semirigidity of Horocycle Flows Over Compact Surfaces of Variable Negative Curvature*, preprint.

[F] D. FRIED, *Transitive Anosov Flows and Pseudo-Anosov Maps* (*Topology*, vol. 22, n° 3, 1983, p. 299-303).

[G] E. GHYS, *Flots d'Anosov sur les* 3-*variétés fibrés en cercle* [*Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, (4), 1984, p. 67-80].

[Go] S. GOODMAN, *Dehn Surgery on Anosov Flows, Geometric Dynamics* (*Lecture Notes in Math.*, Springer, n° 1007, p. 300-307).

[HA] A. HAEFLIGER, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants* (*Astérisque*, vol. 116, 1984, p. 70-97).

[H-T] HANDEL et W. THRUSTON, *Anosov Flows on New* 3-*Manifolds* (*Inv. Math.*, vol. 59, 1980, p. 95-103).

[He] J. HEMPEL, 3-*Manifolds* (*Annals of Mathematics Studies*, n° 86, Princeton University Press, 1976).

[HPS] M. HIRSCH, C. PUGH et M. SHUB, *Invariant Manifolds* (*Lecture Notes in Math.*, n° 583, 1977, Springer).

[HK] S. HURDER et A. KATOK, *Differentiability, Rigidity and Godbillon-Vey Classes for Anosov Flows*, Preprint.

[M] Y. MITSUMATSU, *A Relation Between the Topological Invariance of the Godbillon-Vey Class and the Differentiability of Anosov Foliations* (*Advanced Studies in Pure Math.*, vol. 5, 1985).

[O] P. ORLIK, *Seifert Manifolds* (*Lecture Notes in Math.*, n° 291, Springer-Verlag, 1972).

[P] J. PLANTE, *Anosov Flows, Transversely Affine Foliations and a Conjecture of Verjovsky* [*J. London. Math. Soc.*, (2), 23, 1981, n° 2, p. 359-362].

[RV] F. RAYMOND et T. VASQUEZ, 3-*Manifolds Whose Universal Coverings Are Lie Groups* (*Topology and its Applications*, vol. 12, 1981, p. 161-179).

[T] W. THURSTON, *The Geometry and Topology of* 3-*Manifolds*, chap. 4 and 5, Princeton Lectures Notes.

(Manuscrit reçu le 3 octobre 1986,
révisé le 23 janvier 1987).

Étienne GHYS,
U.F.R. de Mathématiques,
U. A. au C.N.R.S. n° 751,
Université des Sciences,
et Techniques de Lille-I,
59655 Villeneuve-d'Ascq,