ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI CARAYOL

Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 19, nº 3 (1986), p. 409-468
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_3_409_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 19, 1986, p. 409 à 468.

SUR LES REPRÉSENTATIONS l-ADIQUES ASSOCIÉES AUX FORMES MODULAIRES DE HILBERT

PAR HENRI CARAYOL

0. Introduction et notations

0.1. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré fini d. Nous désignons par $\tau_1, \ldots, \tau_d$ les différents plongements réels de F.

0.2. Pour $k \geqq 2$ et w deux entiers de même parité, nous notons $D_{k,w}$ la représentation essentiellement de carré intégrable du groupe $GL_2(\mathbb{R})$ qui intervient dans l'induite $\mathrm{Ind}(\mu, \nu)$ (induction unitaire), où μ et ν sont les caractères suivants de $\mathbb{R}^*$:

$$\mu(t) = |t|^{(1/2)(k-1-w)} . \mathrm{sgn}(t)^k, \qquad \nu(t) = |t|^{(1/2)(-k+1-w)}.$$

Le caractère central de $D_{k,w}$ est égal au produit $\mu\nu : t \to t^{-w}$.

0.3. Soient $k_1, \ldots, k_d$ (tous $\geqq 2$) et w des entiers de même parité. Nous nous intéressons dans la suite aux représentations automorphes paraboliques $\pi = \otimes \pi_v$ de $GL_2(\mathbb{A}_F)$ dont les composantes locales aux places archimédiennes sont données par : $\pi_{\tau_i} \simeq D_{k_i, w}$. De telles représentations correspondent à des formes modulaires (holomorphes) de Hilbert de poids $(k_1, \ldots, k_d)$ (*cf.* [Oh]).

Nous supposerons de plus toujours que, dans le cas où le degré d de F est *pair*, alors il existe au moins une place finie v de F telle que la composante locale π_v soit une représentation *essentiellement de carré intégrable* (=spéciale ou cuspidale) du groupe $GL_2(F_v)$.

0.4. Nous normalisons l'isomorphisme de la théorie du corps de classes de sorte que les éléments de Frobenius *géométriques* correspondent aux uniformisantes. « Caractère »

Le présent travail a été achevé alors que l'auteur était invité à l'Institute for Advanced Study. Que cet organisme soit ici remercié pour son hospitalité.

signifiera toujours « quasi-caractère », et nous noterons par la même lettre un caractère de $F_{\mathfrak{p}}^*$ (pour $\mathfrak{p}$ une place finie de F) et le caractère correspondant du groupe de Weil local $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$. Nous notons $\omega_{\mathfrak{p}}^s$ le caractère $|\ |_{\mathfrak{p}}^s$; en particulier le caractère $\omega_{\mathfrak{p}}=\omega_{\mathfrak{p}}^1$, vu comme caractère galoisien, donne l'action de $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$ sur les racines de l'unité d'ordre premier à la caractéristique résiduelle p de $\mathfrak{p}$. Notation analogue $\omega_{\mathbb{R}}^s$ (resp. $\omega_{\mathbb{C}}^s$) pour les puissances de la valeur absolue réelle (resp. de la valeur absolue complexe normalisée).

Pour χ un caractère de $F_{\mathfrak{p}}^*$ et $\pi_{\mathfrak{p}}$ une représentation de $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ nous notons $\chi.\pi$ le produit tensoriel $\pi\otimes(\chi\circ\det)$. De même, pour σ une représentation de $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$, nous notons $\chi.\sigma$ le produit $\sigma\otimes\chi$.

0.5. Correspondance de Hecke. — Il résulte du travail de Kutzko [Ku] qu'on peut attacher à chacune des composantes locales $\pi_{\mathfrak{p}}$, pour $\mathfrak{p}$ une place finie de F, une représentation $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$, F-semisimple de degré 2, du groupe de Weil-Deligne local $W'_{F_{\mathfrak{p}}}$ (*cf.* [Ta]), caractérisée par les égalités suivantes, pour chaque quasi-caractère χ de $F_{\mathfrak{p}}^*$:

$$L(\chi.\check{\sigma}(\pi_{\mathfrak{p}}))=L(\chi.\omega_{\mathfrak{p}}^{1/2}.\pi_{\mathfrak{p}}),$$
$$\varepsilon(\chi.\check{\sigma}(\pi_{\mathfrak{p}}))=\varepsilon(\chi.\omega_{\mathfrak{p}}^{1/2}.\pi_{\mathfrak{p}}).$$

La correspondance « de Hecke » ainsi définie diffère de la correspondance de Langlands par torsion par le caractère $\omega_{\mathfrak{p}}^{1/2}$ suivie du passage à la contragrédiente. En particulier, pour $\pi_{\mathfrak{p}}=\mathrm{Ind}(\xi_1,\xi_2)$ (induction unitaire) une série principale irréductible, alors $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$ est donnée par :

$$\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})=\xi_1^{-1}.\omega_{\mathfrak{p}}^{-1/2}\oplus\xi_2^{-1}.\omega_{\mathfrak{p}}^{-1/2}.$$

Dans tous les cas, cette correspondance vérifie les deux propriétés suivantes :

(*a*) Le déterminant de $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$ est lié au caractère central $\chi_{\pi_{\mathfrak{p}}}$ de $\pi_{\mathfrak{p}}$ par la formule :

$$\det\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})=\chi_{\pi_{\mathfrak{p}}}^{-1}.\omega_{\mathfrak{p}}^{-1}.$$

(*b*) On a : $\sigma(\chi.\pi_{\mathfrak{p}})=\chi^{-1}.\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$, pour chaque caractère χ de $F_{\mathfrak{p}}^*$.

L'avantage de la correspondance de Hecke sur celle de Langlands est d'être compatible aux automorphismes du corps de définition : *cf.* [D. 1].

0.6. Soit π comme en (0.3). Il existe un corps de nombres de degré fini $\mathbb{Q}(\pi)$ tel que toutes les composantes locales $\pi_{\mathfrak{p}}$ de π aux places finies $\mathfrak{p}$ soient définies, et donc se réalisent, sur $\mathbb{Q}(\pi)$ (on renvoie à [W] pour toutes les questions de rationalité). Les représentations $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$ correspondantes sont donc définies sur $\mathbb{Q}(\pi)$, et il est facile de voir qu'il existe une extension finie E de $\mathbb{Q}(\pi)$ où toutes se réalisent. Il correspond alors à $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$, pour chaque place finie λ de E de caractéristique résiduelle différente de la caractéristique résiduelle de $\mathfrak{p}$, une représentation λ-adique continue $\sigma^{\lambda}(\pi_{\mathfrak{p}})$ du groupe de Weil local $W_{F_{\mathfrak{p}}}$.

0.7. L'objet de ce travail est de prouver le résultat suivant :

Théorème (A). — *Soit π comme en* (0.3). *Il existe alors une extension finie* E *de* $\mathbb{Q}(\pi)$ *et un système strictement compatible* $\{\sigma^{\lambda}\}$ *de représentations continues* E_{λ}*-adiques de dimension* 2 *du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, *vérifiant la propriété suivante : pour toute place*

finie $\mathfrak{p}$ *de* F, *et pour toute place finie* λ *de* E, *de caractéristique résiduelle différente de celle de* $\mathfrak{p}$, *la restriction* $\sigma_{\mathfrak{p}}^{\lambda}$ *de* σ^{λ} *au groupe de Weil local* $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ *est équivalente à* $\sigma^{\lambda}(\pi_{\mathfrak{p}})$.

Le résultat nouveau est que nous déterminons la représentation $\sigma_{\mathfrak{p}}^{\lambda}$ à *toute* place finie $\mathfrak{p}$ de F. L'existence du système $\{\sigma^{\lambda}\}$ vérifiant la propriété du théorème pour *presque toute* place finie $\mathfrak{p}$ était déjà connue : *cf.* [Oh], [R.T].

Remarque. — On peut montrer (K. Ribet, non publié) que la représentation σ^{λ} est nécessairement *irréductible.* En vertu du théorème de Čebotarev, elle est donc entièrement *caractérisée* par la propriété énoncée.

0.8. Application. — Le théorème précédent, appliqué dans le cas particulier où $F=\mathbb{Q}$ et $k=2$, fournit facilement une réponse affirmative à une conjecture concernant les courbes elliptiques de Weil :

Corollaire. — *Soit* $f\in S_2(\Gamma_0(N))$ *une nouvelle forme rationnelle, valeur propre normalisée des opérateurs de Hecke, et soit* E_f *la courbe elliptique sur* $\mathbb{Q}$ *associée à* f. *Alors la fonction* L *de* E_f *est égale à* $L(f, s)$, *et le conducteur géométrique de* E_f *est égal à* N.

En effet, notons π la représentation automorphe attachée à f, et soit σ^l la représentation l-adique que le théorème associe à π. De la définition de E_f et du théorème de Čebotarev, il résulte que σ^l est isomorphe à la représentation naturelle de Galois sur l'espace $H^1(E_f \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_l)$. L'égalité des séries L découle de ce fait et du théorème. De même pour l'égalité des conducteurs, compte tenu du travail de Ogg [Og].

0.9. Le principe de la démonstration du théorème (A) est d'en prouver tout d'abord une version affaiblie. Rappelons que les représentations *irréductibles* de degré 2 des groupes de Weil locaux $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ peuvent être ou bien *monomiales* (i.e. induites par un caractère du groupe de Weil d'une extension quadratique de $F_{\mathfrak{p}}$) ou bien *primitives* (ce dernier cas ne peut se présenter que si la caractéristique résiduelle de $\mathfrak{p}$ est égale à 2). Les représentations correspondantes du groupe $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ — qui sont alors *cuspidales* — sont dites *ordinaires* dans le premier cas et *extraordinaires* dans le second; les représentations ordinaires sont celles obtenues au moyen de la *représentation de Weil* à partir d'un caractère du groupe multiplicatif d'une extension quadratique de $F_{\mathfrak{p}}$. Munis de ces définitions, nous sommes en mesure d'énoncer une version affaiblie du théorème (A) :

Théorème (B). — *Soit* π *comme en* (0.3). *Fixons, dans le cas où* d *est pair, une place finie* v *de* F *où* π_v *est essentiellement de carré intégrable. Alors il existe une extension finie* E *de* $\mathbb{Q}(\pi)$ *et un système strictement compatible* $\{\sigma^{\lambda}\}$ *de représentations* E_{λ}-*adiques continues du groupe* $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, *tel que la conclusion du théorème* (A) *soit vérifiée en chaque place finie* $\mathfrak{p}\neq v$ *où* $\pi_{\mathfrak{p}}$ *n'est pas cuspidale extraordinaire.*

La plus grande partie de ce travail est consacrée à la preuve du théorème (B). Nous montrons ensuite, par des arguments de « changement de base pour GL(2) », qu'il entraîne le théorème (A).

0.10. La preuve du théorème (B) est de nature géométrique. Notons B l'algèbre de quaternions de centre F qui est déployée à la place τ_1, ramifiée aux places $\tau_2, \ldots, \tau_d$, et déployée à toutes les places finies, sauf la place v dans le cas où d est pair. Soit G le

groupe $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(B^*)$; le groupe $G(\mathbb{R})$ est isomorphe au produit $GL_2(\mathbb{R}) \times (\mathbb{H}^*)^{d-1}$, où $\mathbb{H}$ désigne le corps des quaternions de Hamilton. Désignons enfin par $\bar{D}_{k,w}$ la représentation du groupe $\mathbb{H}^*$ qui correspond à $D_{k,w}$ par la correspondance de Jacquet-Langlands ([J.L.], § 16). On vérifie sans peine que $\bar{D}_{k,w}$ est donnée par la formule :

$$\bar{D}_{k,w} \simeq (\omega_{\mathbb{R}}^{(-w-k+2)/2} \circ \nu) \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathscr{V})$$

où $\mathscr{V}$ désigne la représentation de degré 2 de $\mathbb{H}^*$ obtenue comme la composée :

$$\mathbb{H}^* \hookrightarrow (\mathbb{H} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C})^* \simeq GL_2(\mathbb{C}),$$

et où ν désigne la norme réduite sur $\mathbb{H}$.

Il résulte aussitôt de la correspondance de Jacquet-Langlands que le théorème (B) est équivalent au :

THÉORÈME (B′). — *Soit $\pi = \otimes \pi_{\mathfrak{p}}$ une représentation automorphe parabolique de $G(\mathbb{A})$ dont les composantes locales aux places archimédiennes sont données par : $\pi_{\tau_1} \simeq D_{k_1,w}$ et $\pi_{\tau_i} \simeq \bar{D}_{k_i,w}$* (pour $i \geqq 2$). *Il existe alors une extension finie E de $\mathbb{Q}(\pi)$ et un système strictement compatible $\{\sigma^\lambda\}$ de représentations E_λ-adiques continues de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ tel que la conclusion du théorème (A) soit vérifiée en toute place finie $\mathfrak{p} \neq v$ de F où $\pi_{\mathfrak{p}}$ n'est pas cuspidale extraordinaire.*

Remarque. — Pour $F \neq \mathbb{Q}$, le groupe dérivé G^{der} est anisotrope, et « parabolique » signifie « non de dimension 1 ».

0.11. La construction du système $\{\sigma^\lambda\}$ dans le théorème (B′) se fait — et c'est bien connu : *cf.* [Oh], [R.T] — en considérant le système projectif des *courbes de Shimura* $M_K(G, X)$ associé au groupe G, en le munissant d'un système de faisceaux l-adiques $\mathscr{F}_\lambda$, et en décomposant sous l'action des opérateurs de Hecke la cohomologie $H^1_{\mathrm{et}}(M_K \underset{F}{\otimes} \bar{F}, \mathscr{F}_\lambda)$ (cohomologie « parabolique » dans le cas $F = \mathbb{Q}$ où les courbes M_K ne sont pas propres). Dans le cas où F est le corps $\mathbb{Q}$, la preuve du théorème (B′) est due à Deligne [D.2] à la suite d'un travail de Langlands [L.1] (*voir* aussi Piatetskii-Shapiro [P.S]). La méthode utilisée repose sur la connaissance pour tout p de la réduction (éventuellement mauvaise) des courbes modulaires. Nous montrons que cette méthode se généralise au cas des courbes de Shimura, et cela utilise de façon cruciale les résultats que nous avons obtenus au préalable sur la (mauvaise) réduction de ces courbes [Ca.3]. Pour la commodité du lecteur, le paragraphe suivant est consacré à un résumé de ces résultats.

PLAN

1. Résumé des résultats de [Ca.3], et suite des notations.
2. Construction du système $\{\sigma^\lambda\}$.
3. Torsion et déterminant.
4. La suite exacte des cycles évanescents.

5. Cohomologie de la fibre spéciale normalisée.
6. Calcul de ${}^s\mathscr{H}_1$.
7. Un formalisme pour les $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules divisibles de hauteur 2 supersinguliers.
8. Construction de la déformation universelle, avec structure de niveau, d'un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel à isogénie près polarisé.
9. L'orbite supersingulière revisitée.
10. La représentation locale fondamentale.
11. Preuve du théorème (B).
12. Preuve du théorème (A) (par « changement de base »).
Appendice par J. L. Brylinski : Un lemme sur les cycles évanescents en dimension relative 1.

1. Résumé des résultats de [Ca 3] et suite des notations

Nous conservons les notations de l'introduction. Le corps F est supposé distinct de $\mathbb{Q}$ (le cas $F=\mathbb{Q}$ correspond à la théorie classique des courbes modulaires usuelles), et il sera toujours considéré comme plongé dans $\mathbb{C}$ via le plongement $\tau=\tau_1$; nous noterons $\bar{F}$ sa clôture algébrique dans $\mathbb{C}$, et $F^{ab}\subset\bar{F}$ l'extension abélienne maximale de F.

Posant $T \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(G_m)$, nous noterons $\nu : G \to T$ le morphisme défini par la norme réduite.

(1.1.1) Soit $K\subset G(\mathbb{A}^f)$ un sous-groupe compact ouvert assez petit; la *courbe de Shimura* M_K est alors une courbe propre et lisse sur le corps F, de variété analytique sous-jacente :

$$M_K(\mathbb{C})=G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}^f)\times X/K,$$

où X, isomorphe à $\mathbb{C}-\mathbb{R}$, désigne la somme de deux copies du demi-plan de Poincaré; le groupe $G(\mathbb{R})$ y opère via son facteur $GL_2(\mathbb{R})$ de façon habituelle (*cf.* [Ca 3] pour une description plus canonique).

Pour K de plus en plus petit, les M_K constituent un système projectif sur lequel opère le groupe $G(\mathbb{A}^f)$.

(1.1.2) Pour $U\subset T(\mathbb{A}^f)$ un sous-groupe compact ouvert, nous considérons de même l'ensemble fini $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}^f)\times\pi_0(T(\mathbb{R})/U$. Nous définissons sur cet ensemble une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, via $\mathrm{Gal}(F^{ab}/F)$, comme l'inverse du composé de l'action évidente de $\pi_0\,(T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}))$ par l'isomorphisme de la théorie du corps de classes. Cela définit un F-schéma fini $\mathscr{M}_U$ [muni d'une action de $T(\mathbb{A}^f)$]. Noter que $\mathscr{M}_U$ est isomorphe (comme F-schéma) au spectre de l'extension abélienne de F correspondant au sous-groupe $T(\mathbb{Q}).U.T(\mathbb{R})^0$ de $\mathbb{A}_F^*$.

Une composante connexe X^+ de X étant choisie, le morphisme ν induit alors un morphisme à fibres connexes :

$$\nu : \quad M_K(\mathbb{C})\to\mathscr{M}_{\nu(K)}(\mathbb{C}),$$

et il résulte de la « loi de réciprocité des modèles canoniques » que ce dernier morphisme provient d'un morphisme de F-schémas $\nu : M_K\to\mathscr{M}_{\nu(K)}$.

1.2. Propriétés de bonne réduction. — 1.2.1. Nous fixons une place finie $\mathfrak{p}$ de F où B est déployé (i.e. $\mathfrak{p} \neq v$), et nous notons $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$ l'anneau des $\mathfrak{p}$-entiers de F, et $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ son complété, de corps des fractions $F_{\mathfrak{p}}$ et de corps résiduel κ. Nous désignons par p et q la caractéristique et le cardinal de κ. Soient d'autre part $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ (resp. $F_{\mathfrak{p}}^{n}$) l'extension non ramifiée maximale de $F_{\mathfrak{p}}$ (resp. l'extension de $F_{\mathfrak{p}}^{nr}$ correspondant par la théorie du corps de classes au sous-groupe $U_{\mathfrak{p}}^{n}$ de $F_{\mathfrak{p}}^{*}$ constitué des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{p}^{n}$). Nous noterons $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{nr}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^{n}$) leurs anneaux d'entiers respectifs, et $\hat{F}_{\mathfrak{p}}^{nr}$, $\hat{F}_{\mathfrak{p}}^{n}$, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}$, $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{n}$ les différents complétés.

Nous choisissons une identification entre $B \otimes F_{\mathfrak{p}}$ et $M_2(F_{\mathfrak{p}})$, et nous notons $K_{\mathfrak{p}}^{0}$ (resp. $K_{\mathfrak{p}}^{n}$) le sous-groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ de $(B \otimes F_{\mathfrak{p}})^{*}$ (resp. le sous-groupe de congruence formé des éléments de $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ qui sont congrus à 1 modulo $\mathfrak{p}^{n}$). Nous noterons d'autre part Γ le produit restreint, étendu aux places finies $w \neq \mathfrak{p}$ de F, des groupes $(B \otimes F_{w})^{*}$, et, pour H un sous-groupe compact ouvert de Γ, nous poserons $M_{n,H} \underset{\text{def}}{=} M_{K_{\mathfrak{p}}^{n} \times H}$. De même, pour V un sous-groupe de $(\mathbb{A}_{F}^{f,\mathfrak{p}})^{*}$: $\mathcal{M}_{n,V} \underset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_{U_{\mathfrak{p}}^{n} \times V}$.

1.2.2. Théorème. — *Lorsque* H *est assez petit, la courbe* $M_{0,H}$ *se prolonge en un* $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$*-schéma propre et lisse* $\mathbf{M}_{0,H}$. *Un tel prolongement est unique (à isomorphisme unique près). Pour* $H' \subset H$ *le morphisme de* $M_{0,H'}$ *sur* $M_{0,H}$ *se prolonge en un morphisme étale de* $\mathbf{M}_{0,H'}$ *sur* $\mathbf{M}_{0,H}$.

Il est d'autre part évident que $\mathcal{M}_{0,V}$ se prolonge (uniquement) en un $\mathcal{O}_{(\mathfrak{p})}$-schéma étale fini $\mathcal{M}_{0,V}$, et que le morphisme ν de (1.1.2) se prolonge en un morphisme $\boldsymbol{\nu}$: $\mathbf{M}_{0,H} \to \mathcal{M}_{0,\nu(H)}$.

Pour $n \geqq 1$, nous notons $\mathbf{M}_{n,H}$ le normalisé de $\mathbf{M}_{0,H}$ dans $M_{n,H}$. Définition analogue de $\mathcal{M}_{n,V}$ (isomorphe au spectre de l'anneau des $\mathfrak{p}$-entiers d'une extension abélienne de F). Le morphisme ν s'étend à ces normalisés.

1.3. Construction de groupes p-divisibles. — 1.3.1. Fixons un entier $n \geqq 1$ et considérons l'action à droite suivante du groupe $K_{\mathfrak{p}}^{0}/K_{\mathfrak{p}}^{n} = GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{n})$ sur le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^{2}$: $g \in GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{n})$ envoie $v \in (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^{2}$ sur $g^{-1}.v$. Le même groupe opère aussi à droite sur $M_{n,H}$ avec pour quotient $M_{0,H}$. Lorsque H est assez petit (une condition qui dépend de n), cette dernière action est *libre*. On définit alors sur $M_{0,H}$ un schéma en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules, comme le quotient :

$$E_n \underset{\text{def}}{=} (M_{n,H} \times (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^{2})/GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{n}).$$

Il existe entre les E_n lorsque n et H varient des compatibilités évidentes, et la limite inductive E_{∞} des E_n constitue un *groupe de Barsotti-Tate* sur la limite projective des $M_{0,H}$. Ce dernier groupe E_{∞} est le substitut dans le cas présent du groupe p-divisible de la courbe elliptique « universelle » sur les schémas de modules des courbes elliptiques.

1.3.2. De même, considérons l'action de $U_{\mathfrak{p}}^{0}/U_{\mathfrak{p}}^{n} = (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{n})^{*}$ sur $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ pour laquelle $g \in (\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{n})^{*}$ agit par multiplication par g^{-1}. On définit de la même façon un schéma en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules L_n sur $\mathcal{M}_{0,V}$ pour V assez petit :

$$L_n = (\mathcal{M}_{n,V} \times (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}))/(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{n})^{*},$$

avec des propriétés analogues à celles des groupes E_n. Le choix d'une uniformisante de $F_\mathfrak{p}$ fournit un isomorphisme :

$$\overset{2}{\underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\wedge}} E_n \xrightarrow{\sim} v^* L_n$$

et nous noterons $e_n : E_n \times E_n \to v^* L_n$ le morphisme $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-bilinéaire alterné qui en résulte.

1.4. Prolongement des groupes E_n et L_n.

1.4.1. Théorème. — *Il existe, à isomorphisme unique près, une unique façon « naturelle » de prolonger les groupes* E_n *en des schémas en groupes finis localement libres* $\mathbf{E}_n$ *sur les* $\mathbf{M}_{0,H}$.

La « naturalité » du prolongement signifie que les compatibilités satisfaites par les E_n le sont encore par les $\mathbf{E}_n$ (*cf.* [Ca 3], § 6).

1.4.2. La limite inductive $\mathbf{E}_\infty$ des $\mathbf{E}_n$ constitue alors un groupe de Barsotti-Tate sur la limite projective des $\mathbf{M}_{0,H}$. Le groupe $\mathbf{E}_\infty$ ainsi défini se trouve être un objet déjà étudié, dans un contexte différent, par Drinfel'd [Dr] : Un « $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module divisible de hauteur 2 »; en particulier, pour x un point géométrique de caractéristique p de $\mathbf{M}_{0,H}$, il résulte de Drinfel'd que deux possibilités se présentent pour le groupe $\mathbf{E}_{\infty\,|\,x}$:

(*a*) *Cas « ordinaire »* : Le groupe $\mathbf{E}_{\infty\,|\,x}$ est isomorphe au produit du $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module divisible constant $(F_\mathfrak{p}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})$ par (l'unique) $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel de hauteur 1 sur $\bar{\kappa}$ (ce dernier n'étant autre que la réduction d'un groupe de Lubin-Tate associé au corps local $F_\mathfrak{p}$).

(*b*) *Cas « supersingulier »* : Le groupe $\mathbf{E}_{\infty\,|\,x}$ est isomorphe à (l'unique) $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$.

1.4.3. Dans chacun de ces deux cas, notons $(\mathbf{M}_0)^\wedge_{(x)}$ le complété du localisé de $\mathbf{M}_{0,H}$ en x (il est « indépendant » de H). Sur ce complété « vit » le groupe $\mathbf{E}_\infty$, et nous avons l'analogue suivant du théorème de Serre-Tate :

Proposition. — *La restriction de* $\mathbf{E}_\infty$ *à* $(\mathbf{M}_0)^\wedge_{(x)}$ *coïncide avec « la » déformation universelle (étudiée dans [Dr]) du* $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$*-module divisible* $\mathbf{E}_{\infty\,|\,x}$.

1.4.4. L'analogue pour les groupes L_n du théorème de prolongement précédent définit des groupes $\mathbf{L}_n$ sur les $\mathcal{M}_{0,V}$. Pour x un point géométrique algébrique de caractéristique p de $\mathcal{M}_{0,V}$, le complété $(\mathcal{M}_0)^\wedge_{(x)}$ est isomorphe au spectre de $\hat{\mathcal{O}}^{nr}_\mathfrak{p}$, et le groupe $\mathbf{L}_\infty$ y est alors isomorphe à la restriction d'un (quelconque) groupe de Lubin-Tate pour le corps local $F_\mathfrak{p}$.

Nous montrons enfin que le morphisme e_n défini en (1.3.2) se prolonge en un morphisme : $\mathbf{e}_n : \mathbf{E}_n \times \mathbf{E}_n \to \mathbf{v}^* \mathbf{L}_n$.

1.5. Bases de Drinfel'd. — 1.5.1. Soit $n \geqq 1$ un entier et $H \subset \Gamma$ assez petit pour que le groupe E_n existe sur $M_{0,H}$. Si S est alors un schéma au-dessus de $\mathbf{M}_{0,H}$, on définit une *base de Drinfel'd* sur $\mathbf{E}_n$ au-dessus de S comme la donnée d'un morphisme de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules :

$$\varphi : \quad (\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2 \to \mathbf{E}_n(S)$$

tel que la somme schématique des images des sections $\varphi(\alpha)$ coïncide avec $\mathbf{E}_{n\,|\,S}$ (variante évidente : considérer au lieu de φ la donnée du couple d'éléments de $\mathbf{E}_n(S)$ image d'une base du $(\mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_\mathfrak{p})^2$).

THÉORÈME. — *Le schéma* $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}$ [cf. (1.2.2)], *vu comme* $\mathbf{M}_{0,\mathrm{H}}$*-schéma, représente le foncteur qui à* S *associe l'ensemble des bases de Drinfel'd sur* $\mathbf{E}_n$ *au-dessus de* S. *Ce schéma est régulier, et fini et plat au-dessus de* $\mathbf{M}_{0,\mathrm{H}}$.

1.5.2. On définit aussi, pour S un schéma au-dessus de $\mathcal{M}_{0,\mathrm{V}}$, une base de Drinfel'd sur $\mathbf{L}_n$ au-dessus de S comme la donnée d'un morphisme

$$(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \to \mathbf{L}_n(\mathrm{S})$$

vérifiant la propriété analogue à la précédente. Il résulte de la théorie de Lubin-Tate que le foncteur « Ensemble des bases de Drinfel'd sur $\mathbf{L}_n$ au-dessus de S » est représentable par $\mathcal{M}_{n,\mathrm{V}}$.

1.5.3. PROPOSITION. — *Le morphisme bilinéaire* $\mathbf{e}_n$ [cf. (1.4.4)] *associe à une base de Drinfel'd sur* $\mathbf{E}_n$ *une base de Drinfel'd sur* $\mathbf{L}_n$. *Le morphisme de foncteurs ainsi défini est représentable par le morphisme de projection* $\mathbf{v} : \mathbf{M}_{n,\mathrm{H}} \to \mathcal{M}_{n,\mathrm{v}(\mathrm{H})}$. *Ce morphisme est lisse en dehors des points supersinguliers.*

1.6. RELATION DE CONGRUENCE. — 1.6.1. Utilisant les notations introduites par Langlands dans [L 1], nous notons $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ le *normalisé* du schéma $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\underset{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}{\otimes}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$. Pour toute $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$-algèbre R, nous notons de même $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\mathrm{R}$ le schéma déduit du précédent par extension des scalaires; en particulier $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$ désigne la fibre spéciale de $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$. Il résulte de ce qui précède que :

(i) $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ est un schéma régulier.

(ii) La fibre spéciale $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$ est un schéma réduit et lisse en dehors des points supersinguliers.

1.6.2. Chacun des schémas $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ est muni d'une action « à droite » du groupe de Weil $\mathrm{W}(\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}^{ab}/\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$ et sur le système projectif qu'ils constituent opère aussi à droite le groupe $\mathrm{G}(/\mathbb{A}^f)$. Notons $\mathbf{M}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$ la limite projective des $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$, elle est donc munie d'une action du groupe produit $\mathrm{G}(/\mathbb{A}^f)\times\mathrm{W}(\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}^{ab}/\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$, action qui se relève au groupe p-divisible à isogénie près $\mathbf{E}_\infty^0$ déduit du groupe $\mathbf{E}_\infty$ porté par $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$.

1.6.3. Soit A_n un facteur direct de rang 1 dans le $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$-module $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$. Nous lui associons le sous-schéma $(\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_{\mathrm{A}_n}$ de $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$ défini par l'équation :

$$\varphi_n \,|\, \mathrm{A}_n = 0$$

où φ_n désigne la base de Drinfel'd « universelle » sur $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$. C'est en fait un sous-schéma *fermé lisse* de $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$. Pour A_n variable, ces sous-schémas *recouvrent* $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$; ils se rencontrent deux à deux en chaque point supersingulier, et jamais ailleurs : L'ensemble des *branches* de $\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$ en un point supersingulier se trouve ainsi paramétré par $\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$.

1.6.4. Soit en particulier A_n le premier facteur $\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ dans $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$. Les $(\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_{\mathrm{A}_n}$ correspondants constituent alors un système projectif dont nous notons $(\mathbf{M}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_{\mathrm{A}}$ la limite [un sous-schéma de $(\mathbf{M}\bar{\otimes}\bar{\kappa})$]. Ce schéma est stable par l'action du sous-groupe de $\mathrm{G}(/\mathbb{A}^f)\times\mathrm{W}(\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}^{ab}/\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$ constitué des éléments dont la composante suivant le facteur $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$ est triangulaire supérieure. La *relation de congruence* dit alors qu'un

élément de la forme :

$$x=\left(\begin{pmatrix}[\sigma] & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \sigma\right)\in \mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_\mathfrak{p})\times \mathrm{W}(\mathrm{F}_\mathfrak{p}^{ab}/\mathrm{F}_\mathfrak{p})$$

où $[\sigma]$ désigne l'élément de $\mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$ qui correspond à σ par la théorie du corps de classes, agit sur $(\mathbf{M}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_\mathrm{A}$ comme la puissance $n(x)$-ième du Frobenius absolu F_q, avec $n(x)$ la valuation de $[\sigma]^{-1}$ dans $\mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$. Idem pour l'action de x sur $\mathbf{E}_\infty^0\,|\,(\mathrm{M}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_\mathrm{A}$.

1.7. Description de l'orbite supersingulière. — 1.7.1. Notons S l'ensemble des points supersinguliers de $\mathbf{M}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$; cet ensemble porte un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel de hauteur 2 (la restriction de $\mathbf{E}_\infty$), et le groupe $\mathrm{G}(/\mathbb{A}^f)$ agit sur S et sur $\mathbf{E}_{\infty\,|\,\mathrm{S}}^0$. Cette action se factorise en fait, via det : $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_\mathfrak{p})\to \mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$, à travers le quotient $\Gamma\times \mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$.

1.7.2. Soit $\bar{\mathrm{B}}$ l'algèbre de quaternions de centre F qu'on déduit de B en changeant les invariants aux places $\mathfrak{p}$ et τ ($\bar{\mathrm{B}}$ est donc ramifiée à ces deux places), et soit $\bar{\mathrm{G}}$ (une forme tordue intérieure de G) le groupe $\mathrm{Res}_{\mathrm{F}/\mathbb{Q}}(\bar{\mathrm{B}}^*)$. Le centre de $\bar{\mathrm{G}}$ s'identifie au centre Z de G.

1.7.3. Fixons un isomorphisme $\bar{\mathrm{B}}\otimes/\mathbb{A}\mathrm{A}_\mathrm{F}^{f,\,\mathfrak{p}}\simeq \mathrm{B}\otimes/\mathbb{A}_\mathrm{F}^{f,\,\mathfrak{p}}$, et notons $\bar{\mathrm{B}}_\mathfrak{p}=\bar{\mathrm{B}}\otimes \mathrm{F}_\mathfrak{p}$, d'où un isomorphisme $\bar{\mathrm{G}}(/\mathbb{A}^f)\simeq\Gamma\times\bar{\mathrm{B}}_\mathfrak{p}^*$. La norme réduite à la place $\mathfrak{p}$ définit une projection :

$$\bar{\mathrm{G}}(/\mathbb{A}^f)\to\Gamma\times \mathrm{F}_\mathfrak{p}^*.$$

Si $\mathrm{Z}(\mathbb{Q})^\wedge$ désigne l'adhérence de $\mathrm{Z}(\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{Z}(/\mathbb{A}^f)$, cette dernière projection envoie isomorphiquement le produit $\mathrm{Z}(\mathbb{Q})^\wedge.\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{Q})$ sur un sous-groupe de $\Gamma\times \mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$.

1.7.4. Rappelons enfin, d'après [Dr], que l'algèbre des endomorphismes d'un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel de hauteur 2 à isogénie près sur $\bar{\kappa}$ est isomorphe à l'algèbre $\bar{\mathrm{B}}_\mathfrak{p}$ (isomorphisme bien défini à un automorphisme intérieur près). Le groupe des automorphismes d'un tel objet est donc isomorphe à $\bar{\mathrm{B}}_\mathfrak{p}^*$. Nous considérons l'action à droite correspondante, pour laquelle un élément $z\in \mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$ du centre agit donc par z^{-1}.

1.7.5. Proposition. — *L'action sur* S *du groupe* $\Gamma\times \mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$ [cf. (1.7.1)] *est transitive. Le stabilisateur d'un point* s *de* S *est conjugué dans* $\Gamma\times \mathrm{F}_\mathfrak{p}^*$ *au sous-groupe image de* $\mathrm{Z}(\mathbb{Q})^\wedge.\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{Q})$ [cf. (1.7.3)]. *Ce stabilisateur opère sur* $\mathbf{E}_{\infty\,|\,s}^0$ *via le composé de la projection de* $\mathrm{Z}(\mathbb{Q})^\wedge.\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{Q})\subset\bar{\mathrm{B}}_\mathfrak{p}^*\times\Gamma$ *sur* $\bar{\mathrm{B}}_\mathfrak{p}^*$ *et d'une action à droite de* $\bar{\mathrm{B}}_\mathfrak{p}^*$ *sur* $\mathbf{E}_{\infty\,|\,s}^0$ *comme en* (1.7.4).

2. Construction du système $\{\sigma^\lambda\}$

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement — d'après [L.1], [Oh], [R.T] — comment associer à π vérifiant les hypothèses du théorème (B′), un système $\{\sigma^\lambda\}$ de représentations λ-adiques du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{\mathrm{F}}/\mathrm{F})$.

2.1. Définition d'un système de faisceaux λ-adiques sur les courbes de Shimura M_K (*voir* aussi [L.2]). — 2.1.1. Soit $\mathrm{E}\subset\mathbb{C}$ un corps de nombres galoisien se degré fini qui contient F et qui déploie l'algèbre B. Pour chaque $i\in[1, d]$, l'algèbre $\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{F}^{\tau_i}}\mathrm{E}$ est

isomorphe à $M_2(E)$, et cela définit une classe d'équivalence, notée ξ_i, de représentations du groupe $B^* = G(\mathbb{Q})$ sur l'espace $W_i = E^2$. Nous considérons le produit tensoriel :

$$\xi = \bigotimes_{i \in [1,\, d]} [(\tau_i \circ \nu)^{(w-k_i+2)/2} . \mathrm{Sym}^{k_i-2}(\xi_i)]$$

agissant sur l'espace $W = \bigotimes_E W_i$.

Cette représentation du groupe $G(\mathbb{Q})$ provient en fait d'une représentation algébrique du groupe G sur le $\mathbb{Q}$-espace sous-jacent à W. On notera qu'un élément rationnel du centre : $z \in Z(\mathbb{Q}) = F^*$ agit par multiplication par $N_{F/\mathbb{Q}}(z)^w$. C'est cette dernière propriété qui permet d'associer à ξ un système de faisceaux l-adiques.

2.1.2. On définit sur la variété analytique $M_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}^f) \times X/K$ un faisceau $\mathscr{F}_K(\mathbb{C})$ en E-vectoriels, comme le quotient :

$$\mathscr{F}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}^f) \times X \times W/K$$

où l'action sur W de $G(\mathbb{Q})$ est celle définie par ξ, et où l'action de K est triviale. Il est bien clair que, pour $K' \subset K$, le faisceau $\mathscr{F}_{K'}(\mathbb{C})$ s'identifie au pull-back, par la projection de $M_{K'}(\mathbb{C})$ sur $M_K(\mathbb{C})$, du faisceau $\mathscr{F}_K(\mathbb{C})$. Nous noterons donc souvent (abusivement) $\mathscr{F}(\mathbb{C})$ le faisceau $\mathscr{F}_K(\mathbb{C})$. Il est clair également que l'action du groupe $G(\mathbb{A}^f)$ sur le système projectif des $M_K(\mathbb{C})$ se relève naturellement en une action sur le système des $\mathscr{F}_K(\mathbb{C})$.

2.1.3. Pour λ une place finie de E, nous notons $\mathscr{F}_{\lambda,\, K}(\mathbb{C})$ le faisceau en E_λ-vectoriels $\mathscr{F}_K(\mathbb{C}) \otimes_E E_\lambda$; il s'identifie au quotient :

$$\mathscr{F}_{\lambda,\, K}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}^f) \times X \times W_\lambda/K$$

avec $W_\lambda = W \otimes_E E_\lambda$. Comme précédemment, nous omettrons souvent l'indice K.

Sur la limite projective $M(\mathbb{C}) = Z(\mathbb{Q})^\wedge . G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}^f) \times X$, le faisceau $\mathscr{F}_\lambda(\mathbb{C})$ est *trivial*. Pour le voir, on définit — en remarquant que $G(\mathbb{Q})$ opère sur W_λ via $G(\mathbb{Q}_l)$, où l désigne la caractéristique résiduelle de λ — une trivialisation $(Z(\mathbb{Q})^\wedge . G(\mathbb{Q}))$-équivariante du faisceau sur $G(\mathbb{A}^f) \times X$, par l'application :

$$(g,\, x,\, u) \to (g,\, x,\, \xi(g_l)^{-1} u)$$

où g_l désigne la composante de g en l.

Il en résulte alors que le faisceau $\mathscr{F}_{\lambda,\, K}(\mathbb{C})$ s'obtient, si K est assez petit, à partir du revêtement $M(\mathbb{C}) \to M_K(\mathbb{C})$ (galoisien de groupe $K/K \cap Z(\mathbb{Q})^\wedge$), comme le quotient :

$$\mathscr{F}_{\lambda,\, K}(\mathbb{C}) = M(\mathbb{C}) \times W_\lambda/(K/K \cap Z(\mathbb{Q})^\wedge)$$

où un élément $k \in K$ opère à droite sur W_λ par l'action de $\xi(k_l)^{-1}$ (il résulte en effet de (2.1.1) que cette action se factorise bien à travers le quotient $K/K \cap Z(\mathbb{Q})^\wedge$).

2.1.4. Interprétation algébrique des faisceaux $\mathscr{F}_\lambda(\mathbb{C})$. — Choisissons un réseau W_λ^0 dans W_λ. Si le groupe K est assez petit, il stabilise W_λ^0, et on définit alors sur $M_K(\mathbb{C})$ un

faisceau en $\mathbb{Z}_l$-modules $\mathscr{F}^0_\lambda(\mathbb{C}) \subset \mathscr{F}_\lambda(\mathbb{C})$, comme le quotient :

$$\mathscr{F}^0_\lambda(\mathbb{C}) = \mathrm{M}(\mathbb{C}) \times \mathrm{W}^0_\lambda/\mathrm{K}.$$

Soit $n \geqq 1$ un entier, et soit $\mathrm{K}' \subset \mathrm{K}$ un sous-groupe distingué qui agit trivialement sur le quotient $\mathrm{W}^0_\lambda/l^n\,\mathrm{W}^0_\lambda$. Le faisceau en $(\mathbb{Z}/l^n)$-modules $\mathscr{F}^0_\lambda(\mathbb{C}) \otimes (\mathbb{Z}/l^n)$ s'obtient alors à partir du revêtement $\mathrm{M}_{\mathrm{K}'}(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{\mathrm{K}}(\mathbb{C})$ (galoisien de groupe $\mathrm{K}/\mathrm{K}'(\mathrm{K} \cap \mathrm{Z}(\mathbb{Q}))$ comme le quotient :

$$\mathscr{F}^0_\lambda(\mathbb{C}) \otimes (\mathbb{Z}/l^n) = \mathrm{M}_{\mathrm{K}'}(\mathbb{C}) \times (\mathrm{W}^0_\lambda/l^n\,\mathrm{W}^0_\lambda)/(\mathrm{K}/\mathrm{K}').$$

D'après cette dernière formule, on définit alors un $(\mathbb{Z}/l^n)$-faisceau étale sur le F-schéma M_{K}, comme le quotient :

$$\text{« } \mathscr{F}^0_{\lambda,\,\mathrm{K}} \otimes (\mathbb{Z}/l^n) \text{ »} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{M}_{\mathrm{K}'} \times (\mathrm{W}^0_\lambda/l^n\,\mathrm{W}^0_\lambda)/(\mathrm{K}/\mathrm{K}').$$

La limite projective $\mathscr{F}^0_{\lambda,\,\mathrm{K}} = \varprojlim_n$ « $\mathscr{F}^0_{\lambda,\,\mathrm{K}} \otimes (\mathbb{Z}/l^n)$ » constitue alors un $\mathbb{Z}_l$-faisceau étale sur M_{K}. Nous noterons $\mathscr{F}_{\lambda,\,\mathrm{K}} = \mathscr{F}^0_{\lambda,\,\mathrm{K}} \otimes \mathbb{Q}_l$ le $\mathbb{Q}_l$- (en fait E_λ-) faisceau correspondant. Il est indépendant du choix de W^0_λ.

On épargne au lecteur la vérification routinière que les E_λ-faisceaux ainsi définis continuent à vérifier les compatibilités satisfaites par les $\mathscr{F}_\lambda(\mathbb{C})$, et que l'action du groupe $\mathrm{G}(\mathbb{A}^f)$ sur le système des $\mathscr{F}_\lambda(\mathbb{C})$ provient d'une action sur le système des $\mathscr{F}_\lambda$.

On remarquera aussi que, pour E′ une extension de E, les faisceaux $\mathscr{F}'_{\lambda'}$, construits à partir du corps E′ s'obtiennent à partir des $\mathscr{F}_\lambda$ par extension des scalaires : pour λ' une place relevant λ, le faisceau $\mathscr{F}'_{\lambda'}$ s'identifie à $\mathscr{F}_\lambda \otimes_{\mathrm{E}_\lambda} \mathrm{E}'_{\lambda'}$.

2.2. Cohomologie l-adique et construction du systeme $\{\sigma^\lambda\}$. — 2.2.1. Pour λ une place finie de E, et $\mathrm{K} \subset \mathrm{G}(\mathbb{A}^f)$ un sous-groupe compact ouvert, nous considérons le groupe de cohomologie l-adique :

$$\mathscr{H}^{\mathrm{K}}_\lambda = \mathrm{H}^1(\mathrm{M}_{\mathrm{K}} \otimes_{\mathrm{F}} \bar{\mathrm{F}},\ \mathscr{F}_\lambda).$$

Dans le cas particulier cependant où le corps F est égal à $\mathbb{Q}$, les courbes M_{K} ne sont plus propres, et le bon objet à considérer est le groupe de cohomologie « parabolique » (il vaudrait mieux aujourd'hui dire « d'intersection ») :

$$\mathscr{H}^{\mathrm{K}}_\lambda = \mathrm{H}^1_p(\mathrm{M}_{\mathrm{K}} \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}},\ \mathscr{F}_\lambda).$$

Pour ce dernier cas, on renvoie à [L. 1]. D'une manière générale, tout ce qui suit est rédigé dans le cas où F est différent de $\mathbb{Q}$. Nous nous contenterons de donner parfois quelques indications sur les modifications à effectuer — faciles et toujours contenues dans [L. 1] — pour traiter le cas où $\mathrm{F} = \mathbb{Q}$.

2.2.2. Pour K de plus en plus petit, les $\mathscr{H}^{\mathrm{K}}_\lambda$ constituent un système inductif, à morphismes de transition injectifs, de E_λ-vectoriels de dimension finie. Ils sont munis

d'une action (à gauche) continue du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. D'autre part, l'action à droite du groupe $G(\mathbb{A}^f)$ sur le système projectif des $(\mathscr{F}_{\lambda,\,K} \mid M_K)$ induit une action (à gauche) sur le système inductif des $\mathscr{H}_\lambda^K$.

Nous noterons $\mathscr{H}_\lambda$ la limite inductive des $\mathscr{H}_\lambda^K$: elle est munie d'une action du groupe $G(\mathbb{A}^f)$. On reconstitue $\mathscr{H}_\lambda^K$ à partir de $\mathscr{H}_\lambda$ en prenant les K-invariants. L'espace $\mathscr{H}_\lambda$ est aussi muni d'une action du groupe de Galois, laquelle commute à l'action de $G(\mathbb{A}^f)$.

Chacun des $\mathscr{H}_\lambda^K$ est muni d'une action de l'algèbre de Hecke $H(G(\mathbb{A}^f), K)$: *cf.* [L. 1] [R. T].

2.2.3. Soit π une représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ vérifiant les hypothèses du théorème (B′). Choisissons un sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbb{A}^f)$ assez petit pour que l'espace des K-invariants $(\pi^f)^K$ de la représentation $\pi^f = \bigotimes_{v \text{ finie}} \pi_v$ soit non nul. Choisissons ensuite le corps E assez gros pour qu'il contienne le corps $\mathbb{Q}(\pi)$ où sont définies toutes les composantes locales π_v aux places finies. On définit alors une E_λ-représentation galoisienne comme l'espace des entrelacements :

$$\sigma^{\lambda,\,K}(\pi) \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}_{H(G(\mathbb{A}^f),\,K)}((\pi^f)^K,\ \mathscr{H}_\lambda^K)$$

2.2.4. On montre que $\sigma^{\lambda,\,K}(\pi)$ est de *dimension* 2 (d'où il résulte que cette représentation est *indépendante du choix de* K) en calculant la cohomologie de De Rham :

$$\mathscr{H}_{DR}^K = H_{DR}^1(M_K(\mathbb{C}),\ \mathscr{F}(\mathbb{C}) \underset{E}{\otimes} \mathbb{C}).$$

Notons K_∞ le stabilisateur dans $G(\mathbb{R})$ d'un point de X, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $G(\mathbb{R})$. Il est désormais classique (*cf. loc. cit.*) que la cohomologie de De Rham se calcule comme la $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-cohomologie :

$$\mathscr{H}_{DR}^K = H^1(\mathfrak{g}, K_\infty, L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K) \otimes \xi_{\mathbb{R}}) = \bigoplus_\pi H^1(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty \otimes \xi_{\mathbb{R}}) \otimes (\pi^f)^K$$

où π décrit l'ensemble des représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$. Il est ensuite standard de vérifier (*cf. loc. cit.* ou [BW]) que $H^1(\mathfrak{g}, K_\infty, \pi_\infty \otimes \xi_{\mathbb{R}})$ est non nul si et seulement si π vérifie les hypothèses du théorème (B′), et qu'alors il est de dimension 2. (Pour les modifications à effectuer dans le cas $F = \mathbb{Q}$, *voir* [L. 1]).

2.3. Désormais, nous choisirons E tel que les faisceaux $\mathscr{F}_\lambda$ soient définis, nous fixerons une place finie λ de E (de caractéristique résiduelle notée l) et une clôture algébrique $\bar{E}_\lambda$ de E_λ. Nous choisirons un plongement de $\bar{\mathbb{Q}}(=\bar{F}=\bar{E})$ dans $\bar{E}_\lambda$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, hook] \arrow[d, loop left] & \bar{\mathbb{Q}} \arrow[r, hook] \arrow[dd] & \mathbb{C} \\
E_\lambda \arrow[d, loop left] & & \\
\bar{E}_\lambda & &
\end{tikzcd}$$

Nous considérons les $\bar{E}_\lambda$-faisceaux $\mathscr{F}_\lambda \underset{E_\lambda}{\otimes} \bar{E}_\lambda$, notés simplement $\mathscr{F}$, et les représentations :

$$\mathscr{H}^K = \mathscr{H}^K_\lambda \underset{E_\lambda}{\otimes} \bar{E}_\lambda = H^1(M_K \underset{F}{\otimes} \bar{F}, \mathscr{F}).$$

Les $\bar{E}_\lambda$-représentations galoisiennes $\sigma(\pi) = \sigma_\lambda(\pi) \underset{E_\lambda}{\otimes} \bar{E}_\lambda$ sont alors définies par la décomposition suivante de la limite inductive $\mathscr{H} = \varinjlim \mathscr{H}^K$ (une représentation du groupe produit $G(\mathbb{A}^f) \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$) :

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\pi \in C} \pi^f \otimes \sigma(\pi)$$

où C désigne l'ensemble des représentations automorphes qui vérifient les hypothèses du théorème (B′). Pour prouver le théorème (B′), il nous suffit alors de montrer que pour chaque place finie $\mathfrak{p} \neq v$ de caractéristique résiduelle $p \neq l$, telle que $\pi_\mathfrak{p}$ ne soit pas cuspidale extraordinaire, la composante locale $\pi_\mathfrak{p}$ et la restriction $\sigma_\mathfrak{p}(\pi)$ de $\sigma(\pi)$ au groupe $W(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ se correspondent par la correspondance de Hecke.

Enfin, il sera parfois commode de compléter le diagramme de corps précédent par un isomorphisme : $C \simeq \bar{E}_\lambda$.

3. Torsion et déterminant

3.1. Dans ce paragraphe, nous considérons les entiers $k_1, \ldots, k_d$ comme fixés et nous laissons variable l'entier w (sa parité est toutefois fixée). Nous notons alors $\mathscr{F}_w$ le faisceau correspondant, et C_w l'ensemble des représentations automorphes du groupe $G(\mathbb{A})$ vérifiant les hypothèses du théorème (B′) pour les entiers $k_1, \ldots, k_d$ et w. Nous notons d'autre part, pour chaque entier u, par c_u l'ensemble des grössencharaktere de $\mathbb{A}_F^*$ dont les composantes à chacune des places archimédiennes $\tau_1, \ldots, \tau_d$ de F se restreignent en le caractère $t \to t^{-u}$ de $\mathbb{R}^{*+}$. On voit aussitôt que la torsion $(\pi \to \chi . \pi)$ par un élément $\chi \in c_u$ induit une bijection : $C_w \xrightarrow{\sim} C_{w+2u}$.

3.2. Si la conclusion du théorème (B′) est vérifiée, du moins en presque chaque place de F, alors il est facile de voir que la correspondance $\pi \to \sigma(\pi)$ vérifie la compatibilité suivante à la torsion, pour $\chi \in c_u$:

$$\sigma(\chi . \pi) = \chi^{-1} . \sigma(\pi).$$

Et d'autre part, si $\chi_\pi \in c_w$ désigne le caractère central de π, on doit avoir :

$$\det \sigma(\pi) = (\chi_\pi)^{-1} . \omega^{-1}$$

où $\omega \in c_{-1}$ désigne le grössencharakter dont les composantes locales $\omega_\mathfrak{p}$ aux places de F ont été définies en (0.4).

3.3. L'objet de ce paragraphe est de presque démontrer les compatibilités précédentes (nous ne prouvons la seconde relation qu'à un caractère d'ordre 2 près). Il est probable qu'avec un peu plus de soin (en contrôlant le caractère symétrique ou antisymétrique des dualités utilisées plus bas), il serait possible de vraiment calculer $\det \sigma(\pi)$. Nous préférons nous en dispenser.

PROPOSITION. — (i) *Pour tous* $\chi \in c_u$, $\pi \in C_w$, *on a* :

$$\sigma(\chi . \pi) = \chi^{-1} . \sigma(\pi).$$

(ii) *Pour toute* $\pi \in C_w$, *on a* :

$$(\det \sigma(\pi))^2 = (\chi_\pi)^{-2} . \omega^{-2}.$$

Cela va résulter des propriétés du cup-produit.

3.4. Pour chaque entier u, nous notons $\mathscr{L}^u$ le $\bar{E}_\lambda$-faisceau sur M_K associé, par la construction 2.1, au caractère rationnel de G défini par : $(N_{F/\mathbb{Q}} \circ \nu)^u$. Il est clair (*cf.* 1.1.2) que ce faisceau provient, par pull-back par le morphisme $\nu : M_K \to \mathscr{M}_{\nu(K)}$, d'un faisceau sur $\mathscr{M}_{\nu(K)}$, que nous notons encore (abusivement) $\mathscr{L}^u$.

On vérifie alors aussitôt que le produit tensoriel $\mathscr{F}_w \otimes \mathscr{L}^u$ s'identifie à $\mathscr{F}_{w+2u}$. D'autre part, il est non moins clair que le faisceau dual $\mathscr{F}_w^\vee$ est isomorphe au faisceau $\mathscr{F}_w \otimes \mathscr{L}^{-w} = \mathscr{F}_{-w}$.

3.5. Posons $h_u^K = H^0(M_K \otimes_F \bar{F}, \mathscr{L}^u) = H^0(\mathscr{M}_{\nu(K)} \otimes_F \bar{F}, \mathscr{L}^u)$. Cet espace est muni d'une action du groupe produit $G(\mathbb{A}^f) \times W(\bar{F}/F)$, laquelle action se factorise évidemment via le quotient $(\mathbb{A}_F^f)^* \times W(F^{ab}/F)$. On calcule facilement cette représentation en utilisant la loi de réciprocité (*cf.* 1.1.2). On trouve :

$$h_u^K = \bigoplus_{\chi \in c_u} (\chi^f)^{\nu(K)} \otimes \chi^{-1}.$$

Faisant alors usage du cup-produit : $h_u^K \times \mathscr{H}_w^K \to \mathscr{H}_{w+2u}^K$, la partie (i) de la proposition en découle aussitôt.

3.6. La dualité de Poincaré met en dualité les espaces $\mathscr{H}_w^K$ et $\mathscr{H}_{-w}^K(1)$, de façon compatible à l'action de l'algèbre de Hecke $H(G(\mathbb{A}^f), K)$: autrement dit, un élément h de cette algèbre admet pour adjoint l'élément h^* déduit de h en appliquant l'involution $*$ définie par l'inversion de $G(\mathbb{A}^f)$.

Or il est bien connu que la représentation contragrédiente de π^f est équivalente à la représentation $(\chi_\pi)^{-1} . \pi^f$. Le dual de $\mathscr{H}_w^K$ est donc isomorphe à la représentation suivante de $H(G(\mathbb{A}^f), K) \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$:

$$(\mathscr{H}_w^K)^\vee = \bigoplus_{\pi \in C_w} (\pi^f)^K . (\chi_\pi)^{-1} \otimes \sigma(\pi)^\vee.$$

D'autre part, la représentation $\mathscr{H}_{-w}^K(1)$ se décompose comme la somme directe :

$$\mathscr{H}_{-w}^K(1) = \bigoplus_{\pi_1 \in C_{-w}} (\pi_1^f)^K \otimes (\sigma(\pi_1)\,\omega).$$

Comparant ces deux égalités, on trouve que :

$$\sigma(\pi.\chi_\pi^{-1}).\omega=\sigma(\pi)^\vee$$

Soit

$$\sigma(\pi).\chi_\pi.\omega=\sigma(\pi)^\vee.$$

Et la partie (ii) de la proposition résulte aussitôt de cette dernière égalité.

3.7. Dans le cas où F est le corps $\mathbb{Q}$, on raisonne de même en utilisant le cup-produit et la dualité de Poincaré en cohomologie d'intersection.

4. La suite exacte des cycles évanescents

4.1. Fixons une place finie $\mathfrak{p}\neq v$ de F, de caractéristique résiduelle $p\neq l$, et limitons-nous à ne considérer que des sous-groupes K de la forme $K=K_\mathfrak{p}^n\times H$ (notations de 1.2), lesquels constituent un système cofinal. On dispose alors des schémas $\mathbf{M}_{n,\,H}$ et $\mathbf{M}_{n,\,H}\bar{\otimes}\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ dont la définition a été rappelée au paragraphe 1.

Prolongement du faisceau $\mathcal{F}$: Le E_λ-faisceau $\mathcal{F}_{\lambda,\,K}$ sur $M_{0,\,H}$ défini au paragraphe 2 s'*étend* (de façon unique) en un E_λ-*faisceau lisse*, noté $\mathcal{F}_{\lambda,\,K}$, *sur le schéma* $\mathbf{M}_{0,\,H}$. En effet, utilisant les définitions et notations de 2.1.4, on a la formule :

$$\mathcal{F}^0_{\lambda,\,K}\otimes(\mathbb{Z}/l^n)=M_{0,\,H'}\times(W^0_\lambda/l^n W^0_\lambda)/(H/H')$$

si H′ est un sous-groupe distingué assez petit de H. La formule :

$$\text{« }\mathcal{F}^0_{\lambda,\,K}\otimes(\mathbb{Z}/l^n)\text{ »}=\mathbf{M}_{0,\,H'}\times(W^0_\lambda/l^n W^0_\lambda)/(H/H')$$

définit alors (car $\mathbf{M}_{0,\,H'}$ est étale sur $\mathbf{M}_{0,\,H}$) un $(\mathbb{Z}/l^n)$-faisceau lisse qui prolonge $\mathcal{F}^0_{\lambda,\,K}\otimes(\mathbb{Z}/l^n)$, d'où, de manière évidente, la construction du prolongement voulu $\mathcal{F}_{\lambda,\,K}$. Ces faisceaux $\mathcal{F}_{\lambda,\,K}$ vérifient les mêmes compatibilités que les $\mathcal{F}_{\lambda,\,K}$, et nous utiliserons les mêmes abus de notations : l'indice K sera généralement omis, et (λ étant fixé) nous désignerons par $\mathcal{F}$ le faisceau $\mathcal{F}_\lambda\otimes_{E_\lambda}\bar{E}_\lambda$. Plus abusivement encore, pour X un schéma au-dessus de $\mathbf{M}_{0,\,H}$, nous continuerons à noter $\mathcal{F}$ le faisceau sur X obtenu par pull-back, tant que cela ne créera pas de confusion.

On remarquera que le faisceau $\mathcal{F}$ est *constant* sur la limite projective $\mathbf{M}_n$ des $\mathbf{M}_{n,\,H}$: il est isomorphe au faisceau constant de fibre $\bar{W}_\lambda=W_\lambda\otimes_{E_\lambda}\bar{E}_\lambda$.

L'action à droite du groupe $G(\mathbb{A}^f)$ sur le système projectif des $\mathbf{M}_{n,\,H}$ se relève en une action sur $\mathcal{F}$, donnée par : $w.g=\xi(g_l)^{-1}w$, pour $w\in\bar{W}_\lambda$,

4.2. La suite exacte des cycles évanescents pour le morphisme $\mathbf{M}_{n,\,H}\bar{\otimes}\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n\to\operatorname{Spec}\mathcal{O}_\mathfrak{p}^n$ et le faisceau $\mathcal{F}$ s'écrit alors. (On rappelle que F est supposé distinct de $\mathbb{Q}$) :

$$\underline{0\to\mathcal{H}_1^K\to\mathcal{H}^K\to\mathcal{H}_2^K\to\Lambda^K\to 0}$$

avec :

$$\mathscr{H}_1^{\mathrm{K}} = \mathrm{H}^1(\mathbf{M}_{n,\,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa},\ \mathscr{F})$$
$$\mathscr{H}_2^{\mathrm{K}} = \bigoplus_{x \in \mathrm{S}_{\mathrm{K}}} \mathrm{R}\,\Phi^1(\bar{\mathrm{E}}_\lambda)_x \otimes \mathscr{F}_x$$

(où S_{K} désigne l'ensemble des points supersinguliers de la fibre spéciale) et

$$\Lambda^{\mathrm{K}} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H}^2(\mathbf{M}_{n,\,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa},\ \mathscr{F}) \xrightarrow{\mathrm{sp}} \mathrm{H}^2(\mathrm{M}_{n,\,\mathrm{H}}\underset{\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}}{\otimes}\bar{\mathrm{F}}_{\mathfrak{p}},\ \mathscr{F})).$$

Cette suite exacte est $\mathrm{W}(\bar{\mathrm{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$-équivariante.

4.3. Pour K de plus en plus petit, les espaces $\mathscr{H}_1^{\mathrm{K}}$ (resp. $\mathscr{H}_2^{\mathrm{K}}$, resp Λ^{K}) constituent un système inductif à morphismes de transition injectifs. Nous en notons $\mathscr{H}_1$ (resp. $\mathscr{H}_2$, resp. Λ) la limite inductive. On reconstitue $\mathscr{H}_1^{\mathrm{K}}$ (resp. $\mathscr{H}_2^{\mathrm{K}}$, resp. Λ^{K}) en prenant les K-invariants. On obtient une suite exacte $\mathrm{G}(\mathbb{A}^f) \times \mathrm{W}(\bar{\mathrm{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$-équivariante :

$$0 \to \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H} \to \mathscr{H}_2 \to \Lambda \to 0.$$

Notons aussi $\tilde{\mathscr{H}}_2$ le noyau de la projection $\mathscr{H}_2 \to \Lambda$. Il résulte alors du paragraphe 2 qu'on a les décompositions :

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{C}} \pi^f \otimes \sigma_{\mathfrak{p}}(\pi)$$

où $\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi)$ désigne la restriction de $\sigma(\pi)$ au groupe $\mathrm{W}(\bar{\mathrm{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$,

$$\mathscr{H}_1 = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{C}} \pi^f \otimes \sigma_1(\pi)$$

avec $\sigma_1(\pi)$ une sous-représentation de $\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi)$,

$$\tilde{\mathscr{H}}_2 = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{C}} \pi^f \otimes \sigma_2(\pi)$$

avec $\sigma_2(\pi)$ le quotient $\sigma(\pi)/\sigma_1(\pi)$.

4.4. On laisse au lecteur qui le désirerait le soin de calculer la représentation Λ. Contentons-nous de remarquer que le groupe $\mathrm{G}(\mathbb{A}^{f,\,p})$ y opère (via ν) à travers le groupe $(\mathbb{A}_{\mathrm{F}}^{f,\,p})^*$. Il en résulte aussitôt qu'aucune forme automorphe parabolique n'intervient dans la décomposition de Λ. Pour ce qui nous intéresse, tout se passe donc comme si Λ était nulle. C'est d'ailleurs effectivement le cas sauf si tous les k_i sont égaux à 2.

4.5. Notons $(\widehat{\mathbf{M}_{n,\,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}}) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbf{M}_{n,\,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$ la normalisée de la fibre spéciale, et notons $\hat{\mathscr{H}}_1^{\mathrm{K}}$ la cohomologie $\mathrm{H}^1(\widehat{\mathbf{M}_{n,\,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}},\ \mathscr{F})$ de cette normalisée. On dispose d'une suite exacte :

$$0 \to {}^s\mathscr{H}_1^{\mathrm{K}} \to \mathscr{H}_1^{\mathrm{K}} \to \hat{\mathscr{H}}_1^{\mathrm{K}} \to 0$$

où ${}^s\mathscr{H}_1^K$ s'identifie au quotient de l'espace $\tilde{\mathscr{H}}_1^K$ des sections $H^0(\mathbf{M}_{n,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa}, G_n)$ du faisceau « gratte-ciel » concentré aux points supersinguliers, défini par la suite exacte :

$$0 \to \mathscr{F} \to (\mathrm{pr})_*(\mathrm{pr})^* \mathscr{F} \to G_n \to 0$$

par l'image Λ'^K de $H^0(\widehat{\mathbf{M}_{n,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa}}, \mathscr{F})$.

Pour K de plus en plus petit, on obtient encore des systèmes inductifs (à morphismes de transition injectifs), et une suite exacte des limites inductives :

$$0 \to {}^s\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_1 \to \hat{\mathscr{H}}_1 \to 0.$$

Avec ${}^s\mathscr{H}_1 = {}^s\tilde{\mathscr{H}}_1/\Lambda'$. La représentation Λ' vérifie la même propriété que la représentation Λ, et elle n'interviendra jamais. Elle est d'ailleurs nulle sauf si tous les k_i sont égaux à 2.

Il correspond à la suite exacte précédente des suites exactes, pour $\pi \in C$:

$$0 \to {}^s\sigma_1(\pi) \to \sigma_1(\pi) \to \hat{\sigma}_1(\pi) \to 0.$$

4.6. Lorsque $n=0$, le schéma $\mathbf{M}_{0,H}$ est *lisse* au-dessus de $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Il en résulte que *lorsque* $\pi_\mathfrak{p}$ *est une série principale sphérique, on a :* $\sigma_\mathfrak{p}(\pi) = \sigma_1(\pi) = \hat{\sigma}_1(\pi)$, et $\sigma_2(\pi) = {}^s\sigma_1(\pi) = 0$. (En fait, il résultera de notre étude que cela reste vrai pour toute série principale.)

4.7. Le groupe $W(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ opère sur la fibre spéciale via son quotient abélien $W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p}) \simeq F_\mathfrak{p}^*$. Il en est donc de même pour les représentations $\mathscr{H}_1$, ${}^s\mathscr{H}_1$, $\hat{\mathscr{H}}_1$, $\sigma_1(\pi)$, ${}^s\sigma_1(\pi)$, $\hat{\sigma}_1(\pi)$. On en déduit en particulier que ces représentations de $W(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ sont *continues pour la topologie discrète* sur l'espace considéré. Il résultera *a posteriori* de notre étude que cette propriété de continuité est encore vraie pour les représentations $\mathscr{H}_2$ et $\sigma_2(\pi)$.

4.8. Application du théorème de réduction semi-stable. — Les remarques qui suivent nous seront utiles plus loin pour montrer, en utilisant la théorie de Picard-Lefschetz, que si la composante locale $\pi_\mathfrak{p}$ est spéciale, alors la représentation $\sigma_\mathfrak{p}(\pi)$ est spéciale.

Soit R l'anneau des entiers d'une extension finie $F'_\mathfrak{p}$ de $F_\mathfrak{p}^n$. Le schéma $\mathbf{M}_{n,H}\bar{\otimes}R$ est alors régulier hors les points supersinguliers; il est aussi normal (étant R_1 et S_2) par le critère de normalité de Serre. Nous en considérons une désingularisation, de laquelle nous contractons les diviseurs exceptionnels. On obtient ainsi le *modèle minimal* noté $\tilde{\mathbf{M}}_{n,H,R}$, du $F'_\mathfrak{p}$-schéma $M_{n,H}\otimes F'_\mathfrak{p}$. Du fait que ([Ca. 3], 9.5) les composantes irréductibles de la fibre spéciale $\mathbf{M}_{n,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa}$ ne sont pas des droites projectives, on voit que ce modèle minimal *domine* $\mathbf{M}_{n,H}\bar{\otimes}R$: il existe un R-morphisme surjectif, propre et birationnel :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{n,H,R} \xrightarrow{e} \mathbf{M}_{n,H}\bar{\otimes}R$$

qui est un isomorphisme au-dessus du complémentaire des points supersinguliers. Le schéma $\tilde{\mathbf{M}}_{n,H,R}$ est régulier et purement de dimension 2. De plus, il résulte du main Theorem de Zariski que les fibres géométriques de e sont connexes. Si $\tilde{\mathscr{F}}$ désigne le faisceau $e^*\mathscr{F}$, on a donc l'égalité :

$$e_*\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}.$$

Il en résulte que le morphisme naturel :

$$H^1(\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa},\ \mathscr{F}) \to H^1(\tilde{\mathbf{M}}_{n,\mathrm{H},\mathrm{R}}\underset{\mathrm{R}}{\otimes}\bar{\kappa},\ \tilde{\mathscr{F}})$$

est *injectif.*

Appliquant le théorème de réduction semi-stable (*cf.* [D.M.]) nous choisirons R de sorte que $\tilde{\mathbf{M}}_{n,\mathrm{H},\mathrm{R}}$ soit *stable* sur R. La fibre spéciale $\tilde{\mathbf{M}}_{n,\mathrm{H},\mathrm{R}}\underset{\mathrm{R}}{\otimes}\bar{\kappa}$ est alors *réduite* et n'a pour singularités que des *points doubles non dégénérés.*

4.9. Dans le cas où $F=\mathbb{Q}$, tout ce qui a été dit dans ce paragraphe reste vrai à condition de remplacer $\mathscr{H}_1^{\mathrm{K}}$, $\hat{\mathscr{H}}_1^{\mathrm{K}}$ et Λ^{K} par :

$$\mathscr{H}_1^{\mathrm{K}} = H_p^1(\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa},\ \mathscr{F}),$$

$$\hat{\mathscr{H}}_1^{\mathrm{K}} = H_p^1(\widehat{\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}},\ \mathscr{F}),$$

$$\Lambda^{\mathrm{K}} = \mathrm{Ker}\,(H_p^2(\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa},\ \mathscr{F}) \xrightarrow{\mathrm{sp}} H_p^2(M_{n,\mathrm{H}}\otimes\bar{F}_{\mathfrak{p}},\ \mathscr{F})).$$

Cela résulte d'une étude « au voisinage des pointes » : *cf.* [L. 1].

5. Cohomologie de la fibre spéciale normalisée

5.1. Sur le système projectif des $(\widehat{\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}})$, et donc sur l'espace $\hat{\mathscr{H}}_1$, on dispose d'une action du groupe produit $G(\mathbb{A}^f)\times W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}) \simeq G(\mathbb{A}^f)\times F_{\mathfrak{p}}^*$. Il sera commode dans ce qui suit de considérer l'action du groupe $G(\mathbb{A}^f)$ seul, définie via le morphisme :

$$G(\mathbb{A}^f) \to G(\mathbb{A}^f)\times F_{\mathfrak{p}}^*$$
$$g \to (g,\ \det g_{\mathfrak{p}})$$

[où $g_{\mathfrak{p}}$ désigne la composante de g suivant le facteur $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$].

Notons $\hat{C}_1$ l'ensemble des $\pi\in C$ telles que $\hat{\sigma}_1(\pi)$ soit non nulle; cette représentation $\hat{\sigma}_1(\pi)$ du groupe $W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}})$ est alors la somme directe d'un ensemble « à multiplicités » $\mathscr{U}_\pi$, contenant un ou deux éléments, de caractères du groupe $W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}}) \simeq F_{\mathfrak{p}}^*$. La représentation $\hat{\mathscr{H}}_1$, vue comme représentation du groupe $G(\mathbb{A}^f)$ seul, admet alors la décomposition :

$$\hat{\mathscr{H}}_1 = \bigoplus_{\pi\in\hat{C}_1}\ \bigoplus_{\alpha\in\mathscr{U}_\pi} \pi^{f,\mathfrak{p}}\otimes(\alpha.\pi_{\mathfrak{p}}).$$

5.2. La fibre spéciale normalisée $\widehat{\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa}}$ est la réunion disjointe, indexée par les $A_n\in\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$, des composantes $(\mathbf{M}_{n,\mathrm{H}}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_{A_n}$ définies en 1.6.3, lesquelles composantes sont permutées transitivement sous l'action du groupe $GL_2(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$. En particulier (notations de 1.6.4), nous désignons pour chaque n par A_n le premier facteur $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ dans $(\mathfrak{p}^{-n}/\mathcal{O}_{\mathfrak{p}})^2$. Les composantes correspondantes constituent un système projectif; nous notons

$\hat{\mathscr{H}}_A$ la limite inductive :

$$\hat{\mathscr{H}}_A = \varinjlim_{n,\,H} H^1((\mathbf{M}_{n,\,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_A, \mathscr{F}).$$

Cet espace est l'espace d'une représentation du groupe produit $\Gamma \times P$, où P désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures dans $GL_2(F_\mathfrak{p})$ [nous considérons toujours l'action tordue comme en (5.1)].

De la *relation de congruence* 1.6.4, il résulte que l'action du sous-groupe de P constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est *triviale*. La représentation (admissible) $\hat{\mathscr{H}}_A$ du groupe $\Gamma \times P$ se décompose donc sous la forme :

$$\hat{\mathscr{H}}_A = \bigoplus_{\iota} \rho_\iota \otimes \chi_\iota$$

où les ρ_ι sont des représentations du groupe Γ, et les χ_ι des caractères de $F_\mathfrak{p}^*$, vus comme caractères de P par la formule :

$$\chi_\iota\left(\begin{pmatrix} t_1 & * \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\right) = \chi_\iota(t_2).$$

5.3. Pour $n' \geqq n$ et $H' \subset H$, $(\mathbf{M}_{n,\,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_A$ s'identifie au quotient de $(\mathbf{M}_{n',\,H'}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_A$ par le groupe $(P \cap K_\mathfrak{p}^n) \times H$ (lequel agit via un quotient fini); la cohomologie $H^1((\mathbf{M}_{n,\,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_A, \mathscr{F})$ s'identifie à l'espace des invariants $\hat{\mathscr{H}}_A^{(P \cap K_\mathfrak{p}^n) \times H}$. Correspondant à l'inclusion de $(\mathbf{M}_{n,\,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa})_A$ dans $\widehat{(\mathbf{M}_{n,\,H}\bar{\otimes}\bar{\kappa})}$, on dispose d'une projection $(P \cap K_\mathfrak{p}^0)$-équivariante :

$$\hat{\mathscr{H}}_1^{K_\mathfrak{p}^n \times H} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \hat{\mathscr{H}}_A^{(P \cap K_\mathfrak{p}^n) \times H}.$$

Pour $x \in \hat{\mathscr{H}}_1^{K_\mathfrak{p}^n \times H}$, on définit alors une fonction f_x sur $GL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p}) = K_\mathfrak{p}^0$ à valeurs dans $\hat{\mathscr{H}}_A^{(P \cap K_\mathfrak{p}^n) \times H}$ par la formule :

$$f_x(k) = \mathrm{pr}(kx).$$

Et on vérifie sans peine qu'on obtient ainsi un isomorphisme entre $\hat{\mathscr{H}}_1^{K_\mathfrak{p}^n \times H}$ et l'espace des fonctions :

$$f: \quad K_\mathfrak{p}^0/K_\mathfrak{p}^n \to \hat{\mathscr{H}}_A^H,$$

qui vérifient : $f(tk) = tf(k)$ pour $t \in P \cap K_\mathfrak{p}^0$.

Utilisant la décomposition d'Iwasawa : $GL_2(F_\mathfrak{p}) = PK_\mathfrak{p}^0$, on voit que l'espace précédent s'identifie encore à l'espace des fonctions :

$$f: \quad GL_2(F_\mathfrak{p})/K_\mathfrak{p}^n \to \hat{\mathscr{H}}_A^H,$$

qui vérifient la même relation pour $t \in P$. Par passage à la limite, on voit donc que $\hat{\mathscr{H}}_1$ s'identifie à l'induite :

$$\hat{\mathscr{H}}_1 = \mathrm{ind}_{\Gamma \times P}^{G(\mathbb{A}^f)} \hat{\mathscr{H}}_A.$$

Soit :

$$\hat{\mathscr{H}}_1 = \bigoplus_\iota \rho_\iota \otimes \mathrm{ind}_P^{GL_2(F_\mathfrak{p})}(\chi_\iota).$$

Soit encore, en termes d'induites unitaires :

$$\hat{\mathscr{H}}_1 = \bigoplus_\iota \rho_\iota \otimes \mathrm{Ind}(\omega_\mathfrak{p}^{-1/2}, \chi_\iota \omega_\mathfrak{p}^{1/2}).$$

5.4. Comparant la décomposition précédente avec la décomposition écrite en 5.1, on trouve que si $\pi \in \hat{C}_1$, *alors* $\pi_\mathfrak{p}$ *est une représentation de la série principale* (*irréductible*). De plus, si $\pi_\mathfrak{p} = \mathrm{Ind}(\xi_1, \xi_2)$ et $\chi \in \mathscr{U}_\pi$, *alors on doit avoir au moins l'une des deux égalités* :

$$\xi_1 \chi = \omega_\mathfrak{p}^{-1/2} \qquad \text{ou} \qquad \xi_2 \chi = \omega_\mathfrak{p}^{-1/2}.$$

Supposons de plus que $\hat{\sigma}_1(\pi)$ soit de dimension 2 (c'est au moins le cas si $\pi_\mathfrak{p}$ est principale sphérique). Alors trois possibilités s'offrent pour la représentation $\sigma_\mathfrak{p}(\pi) = \hat{\sigma}_1(\pi)$:

$$\hat{\sigma}_1(\pi) = \xi_1^{-1} \omega_\mathfrak{p}^{-1/2} \oplus \xi_2^{-1} \omega_\mathfrak{p}^{-1/2} \quad (= \sigma(\pi_\mathfrak{p})),$$

ou

$$\hat{\sigma}_1(\pi) = \xi_1^{-1} \omega_\mathfrak{p}^{-1/2} \oplus \xi_1^{-1} \omega_\mathfrak{p}^{-1/2},$$

ou

$$\hat{\sigma}_1(\pi) = \xi_2^{-1} \omega_\mathfrak{p}^{-1/2} \oplus \xi_2^{-1} \omega_\mathfrak{p}^{-1/2}.$$

Si l'on avait calculé vraiment au paragraphe 3 le déterminant de $\sigma(\pi)$ on conclurait aussitôt qu'on est toujours dans le premier cas. Comme nous ne l'avons fait qu'à un caractère d'ordre 2 près, une petite remarque de théorie automorphe s'avère nécessaire.

5.5. Fixons donc maintenant $\pi \in C$ et faisons varier $\mathfrak{p}$. Pour presque chaque place $\mathfrak{p}$, la composante locale $\pi_\mathfrak{p}$ est une série principale sphérique $\mathrm{Ind}(\xi_1^\mathfrak{p}, \xi_2^\mathfrak{p})$, et la restriction $\sigma_\mathfrak{p}(\pi)$ de la représentation $\sigma(\pi)$ au groupe $W(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$ est donnée par l'une ou l'autre des trois formules précédentes.

Le déterminant de $\sigma_\mathfrak{p}(\pi)$ est alors donné par :

$$\det \sigma_\mathfrak{p}(\pi) = \omega_\mathfrak{p}^{-1} (\chi_\pi)_\mathfrak{p}^{-1} \qquad \text{ou} \qquad \omega_\mathfrak{p}^{-1} (\chi_\pi)_\mathfrak{p}^{-1} \left(\frac{\xi_1^\mathfrak{p}}{\xi_2^\mathfrak{p}}\right)^{-1} \qquad \text{ou} \qquad \omega_\mathfrak{p}^{-1} (\chi_\pi)_\mathfrak{p}^{-1} \left(\frac{\xi_2^\mathfrak{p}}{\xi_1^\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

D'autre part, il résulte du paragraphe 3 que $\det \sigma$ et $\omega^{-1} \chi_\pi^{-1}$ diffèrent par un grössencharakter d'ordre 2, que nous notons α. En presque chaque place, on a donc la relation :

$$\alpha_\mathfrak{p} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha_\mathfrak{p} = \frac{\xi_1^\mathfrak{p}}{\xi_2^\mathfrak{p}} = \frac{\xi_2^\mathfrak{p}}{\xi_1^\mathfrak{p}} \quad (\text{car } \alpha^{-1} = \alpha\,!)$$

d'où il résulte que la représentation tordue $\alpha_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à $\pi_{\mathfrak{p}}$. Globalement, la représentation tordue $\alpha.\pi$ est donc isomorphe à π. Du paragraphe 3, il résulte alors que la représentation tordue $\alpha.\sigma(\pi)$ est isomorphe à $\sigma(\pi)$. De cela, on déduit aussitôt, en examinant les trois cas possibles, que $\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi)$ est presque toujours ce que l'on espère. Le grössencharakter α est donc en définitive trivial. □

5.6. Résumé des résultats obtenus jusqu'à présent. — 5.6.1. Pour chaque $\pi \in C$, *le déterminant de* $\sigma(\pi)$ *est égal à* $\chi_\pi^{-1}\omega^{-1}$, où χ_π désigne le caractère central de π.

5.6.2. Si $\hat{\sigma}_1(\pi)$ *est non nulle*, alors la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$ est une *série principale* (irréductible).

5.6.3. Lorsque $\hat{\sigma}_1(\pi)$ est de *dimension* 2, et donc égale à $\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi)$ (c'est le cas presque partout), alors la conclusion du théorème (B′) est vérifiée.

Dans la suite de ce travail, nous montrerons par défaut (les séries principales ne pouvant intervenir en dehors de $\hat{\mathscr{H}}_1$) que, pour chaque $\pi \in C$ telle que $\pi_{\mathfrak{p}}$ soit principale, alors $\hat{\sigma}_1(\pi)$ est de dimension 2.

5.7. Dans le cas où F est le corps $\mathbb{Q}$, on démontre les mêmes résultats avec les changements habituels (remplacer partout cohomologie par cohomologie parabolique). Dans [L. 1] ces résultats sont démontrés par une méthode différente, fondée sur la formule des traces. On obtient alors directement le fait que, pour $\pi_{\mathfrak{p}}$ principale, $\hat{\sigma}_1(\pi)$ est de dimension 2. Les méthodes employées par Langlands pourraient d'ailleurs être étendues au cas présent.

6. Calcul de ${}^s\mathscr{H}_1$

6.1. Dans ce paragraphe, nous allons calculer la représentation ${}^s\mathscr{H}_1$ en utilisant un cas dégénéré de la méthode de Deligne, qui nous servira plus tard à évaluer la représentation $\mathscr{H}_2$. Il nous sera commode pour ce faire de choisir un isomorphisme $\bar{E}_\lambda \simeq \mathbb{C}$ comme en 2.3 et d'étendre les scalaires de $\bar{E}_\lambda$ à $\mathbb{C}$. Cela rend les choses plus faciles à exprimer, car la notion de représentation automorphe sur un corps de nombres se définit naturellement en termes de représentations complexes (du fait de la présence de facteurs archimédiens). Le lecteur à qui cela déplairait trop n'aura pas de mal à vérifier qu'on pourrait se dispenser de procéder ainsi, et que nos résultats ne dépendent donc pas de l'axiome du choix (*cf.* infra, 6.8).

Nous notons donc ${}^s\mathscr{H}_{1,\mathbb{C}}$ la représentation complexe qui correspond à ${}^s\mathscr{H}_1$. Mêmes notations, $W_{\mathbb{C}}$ pour l'espace complexe qui correspond à $W \otimes \bar{E}_\lambda$, etc.

6.2. En 1.7.5 nous avons donné une description de l'orbite supersingulière. Notons $S_{n,H}$ l'ensemble des points supersinguliers de $\mathbf{M}_{n,H} \bar{\otimes} \bar{\kappa}$, et S la limite projective des $S_{n,H}$. Nous avons défini dans (*loc. cit.*) un groupe $\bar{G}$ (déduit de G par une torsion intérieure aux places $\mathfrak{p}$ et τ), et montré que S était en bijection $G(\mathbb{A}^f)$-équivariante avec le quotient :

$$S \simeq Z(\mathbb{Q})^\wedge . \bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^*$$

ou, si l'on préfère :

$$S_{n,H} \simeq \bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^* / H \times U_{\mathfrak{p}}^n.$$

Il résulte de 4.1 que le faisceau $\mathscr{F}$ restreint à S admet une description $G(\mathbb{A}^f)$-équivariante comme le quotient :

$$\mathscr{F}_{|S} = Z(\mathbb{Q})^\wedge . \bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^* \times \bar{W}_\lambda$$

où $Z(\mathbb{Q})^\wedge . \bar{G}(\mathbb{Q})$ opère sur $\bar{W}_\lambda$, via $\bar{G}(\mathbb{Q}_l) \simeq G(\mathbb{Q}_l)$, par la représentation ξ. D'après 1.6.3, la fibre en un point supersingulier de la projection de $\widehat{\mathbf{M}_{n,H} \bar{\otimes} \bar{\kappa}}$ sur $\mathbf{M}_{n,H} \bar{\otimes} \bar{\kappa}$ est paramétrée par l'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$; le faisceau gratte-ciel G_n sur $S_{n,H}$ défini en 4.5 s'identifie alors au produit tensoriel de $\mathscr{F}_{|S_{n,H}}$ par le faisceau constant de fibre le quotient $\bar{E}_\lambda^{\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)}/\bar{E}_\lambda$ (le sous-espace $\bar{E}_\lambda$ étant plongé diagonalement).

6.3. L'espace ${}^s\tilde{\mathscr{H}}_1^{n,H}$ s'identifie donc à l'espace des fonctions :

$$f: \quad \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^* \to (\bar{E}_\lambda^{\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)}/\bar{E}_\lambda) \otimes \bar{W}_\lambda$$

qui vérifient, pour tous $(\gamma, t) \in \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^*$, $h \in H$, $u \in U_{\mathfrak{p}}^n$ et $\theta \in \bar{G}(\mathbb{Q})$, la relation :

$$f(\theta(\gamma, t)(h, u)) = \xi(\theta_l) . f(\gamma, t).$$

Étendons maintenant les scalaires de $\bar{E}_\lambda$ à $\mathbb{C}$. Alors $\bar{G}(\mathbb{Q})$ opère sur $W_{\mathbb{C}}$, via son facteur archimédien $\bar{G}(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{H}^*)^d$, par une représentation $\xi_{\mathbb{R}}$ isomorphe, avec les notations de l'introduction, au produit tensoriel des contragrédientes $\bigotimes_{i \in [1,d]} (\bar{D}_{k_i, w})^\vee$.

L'espace ${}^s\tilde{\mathscr{H}}_{1,\mathbb{C}}^{n,H}$ s'identifie alors à l'espace des fonctions :

$$f: \quad \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^* \to (\mathbb{C}^{\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)}/\mathbb{C}) \otimes W_{\mathbb{C}}$$

qui vérifient la relation :

$$f(\theta(\gamma, t)(h, u)) = \xi_{\mathbb{R}}(\theta) f(\gamma, t).$$

Une telle fonction étant donnée, on lui associe la fonction :

$$f': \quad \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^* \times \bar{G}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)}/\mathbb{C}) \otimes W_{\mathbb{C}}$$

définie par : $f'(\gamma, t, g_{\mathbb{R}}) = \xi_{\mathbb{R}}(g_{\mathbb{R}})^{-1} f(\gamma, t)$.

On constate alors sans peine que l'application $f \to f'$ identifie l'espace ${}^s\tilde{\mathscr{H}}_{1,\mathbb{C}}^{n,H}$ à l'espace des fonctions

$$f': \quad \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^* \times \bar{G}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{P}^1(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)}/\mathbb{C}) \otimes W_{\mathbb{C}}$$

qui sont invariantes à gauche par $\bar{G}(\mathbb{Q})$, à droite par $H \times U_{\mathfrak{p}}^n$, et qui vérifient la relation fonctionnelle, pour $x \in \Gamma \times F_{\mathfrak{p}}^* \times \bar{G}(\mathbb{R})$ et $g_{\mathbb{R}} \in \bar{G}(\mathbb{R})$:

$$f'(x g_{\mathbb{R}}) = \xi_{\mathbb{R}}(g_{\mathbb{R}})^{-1} f'(x).$$

6.4. Notons Sp le quotient de l'espace des fonctions complexes localement constantes sur $\mathbb{P}^1(F_\mathfrak{p})$ par le sous-espace des fonctions constantes. Cet espace Sp, où opère de façon évidente (à gauche) le groupe $GL_2(F_\mathfrak{p})$, est l'espace de *la représentation spéciale* de ce groupe, laquelle est notée habituellement $\pi(\omega_\mathfrak{p}^{1/2}, \omega_\mathfrak{p}^{-1/2})$ (c'est l'unique constituant irréductible de dimension infinie de l'induite unitaire $\mathrm{Ind}(\omega_\mathfrak{p}^{1/2}, \omega_\mathfrak{p}^{-1/2})$.

Nous considérons d'autre part l'espace :

$$^sL_{W_\mathbb{C}^\vee} \underset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{H,\, n} [L^2(\bar{G}(\mathbb{Q})\backslash\Gamma \times F_\mathfrak{p}^* \times \bar{G}(\mathbb{R})/H \times U_\mathfrak{p}^n) \otimes W_\mathbb{C}]^{\bar{G}(\mathbb{R})}$$

c'est l'espace d'une représentation de l'algèbre de Hecke $H(\bar{G}(\mathbb{A}^f))$, et il se décompose comme la somme directe (théorème de multiplicité 1 pour $\bar{G}$) :

$$^sL_{W_\mathbb{C}^\vee} = \bigoplus_{\bar{\pi} \in {}^s\bar{C}} \bar{\pi}^f$$

où $^s\bar{C}$ désigne l'ensemble des représentations automorphes du groupe $\bar{G}(\mathbb{A})$ de composantes à l'infini données par : $\bar{\pi}_{\tau_i} \simeq \bar{D}_{k_i,\, w}$, et dont la composante locale en $\mathfrak{p}$ est de dimension 1.

De ce qui précède, il résulte alors sans peine que l'espace $^s\tilde{\mathscr{H}}_{1,\mathbb{C}}$ s'identifie au produit tensoriel :

$$^sL_{W_\mathbb{C}^\vee} \otimes \mathrm{Sp}.$$

On voit aussi facilement que l'action du groupe $G(\mathbb{A}^f) = \Gamma \times GL_2(F_\mathfrak{p})$ sur $^s\tilde{\mathscr{H}}_{1,\mathbb{C}}$ s'obtient, à partir de l'action sur l'espace ci-dessus du produit $\Gamma \times F_\mathfrak{p}^* \times GL_2(F_\mathfrak{p})$, à travers l'application :

$$(\gamma, g_\mathfrak{p}) \to (\gamma, \det g_\mathfrak{p}, g_\mathfrak{p}).$$

De la relation de congruence 1.6.4 on déduit aussi que l'action du groupe $W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p}) \simeq F_\mathfrak{p}^*$ s'obtient comme *l'inverse* de l'action de $F_\mathfrak{p}^*$ sur l'espace ci-dessus.

En définitive, on voit donc que $^s\tilde{\mathscr{H}}_{1,\mathbb{C}}$ se décompose comme la somme :

$$^s\tilde{\mathscr{H}}_{1,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\bar{\pi} \in {}^s\bar{C}} \bar{\pi}^{f,\mathfrak{p}} \otimes (\bar{\pi}_\mathfrak{p}\, \mathrm{Sp}) \otimes \bar{\pi}_\mathfrak{p}^{-1}$$

où Γ opère sur le premier facteur du produit tensoriel, $GL_2(F_\mathfrak{p})$ sur le second, et $W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$ sur le troisième. (On rappelle que $\bar{\pi}_\mathfrak{p}$ est un caractère. Il s'identifie donc aussi à un caractère de $GL_2(F_\mathfrak{p})$ et de $W(F_\mathfrak{p}^{ab}/F_\mathfrak{p})$).

6.6. Par la correspondance (locale) de Jacquet-Langlands, ([J.L.], § 15) il correspond à la représentation $\chi.\mathrm{Sp}$ du groupe $GL_2(F_\mathfrak{p})$ le caractère χ du groupe $\bar{G}_\mathfrak{p} = \bar{B}_\mathfrak{p}^*$. La correspondance globale ([J.L.], § 16) fait se correspondre bijectivement les $\bar{\pi}$ qui figurent dans la somme ci-dessus, qui ne sont pas des caractères, et les éléments $\pi \in C$ tels que la composante locale $\pi_\mathfrak{p}$ soit une représentation spéciale.

D'autre part, il correspond, par la correspondance de Hecke, à la représentation $\chi.\mathrm{Sp}$ la *représentation spéciale* $\chi^{-1}.\mathrm{Sp}(2)$ du groupe de Weil-Deligne local $W'_{F_\mathfrak{p}}$. C'est l'unique

représentation non décomposable qui s'insère dans une suite exacte :

$$1 \to \chi^{-1} \to \chi^{-1}.\mathrm{Sp}(2) \to \chi^{-1}.\omega^{-1} \to 1.$$

6.7. Il résulte de 4.5 qu'on a aussi la décomposition suivante de ${}^s\mathscr{H}_{1,\mathbb{C}}$:

$${}^s\mathscr{H}_{1,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\pi \in C} \pi^f \otimes {}^s\sigma_1(\pi).$$

Comparant avec 6.5, et compte tenu de 6.6, on en déduit aussitôt la :

PROPOSITION. — *Soit $\pi \in C$. La représentation ${}^s\sigma_1(\pi)$ est non nulle si et seulement si la composante locale $\pi_\mathfrak{p}$ est une représentation spéciale $\chi.\mathrm{Sp}$. Dans ce cas, la représentation ${}^s\sigma_1(\pi)$ est l'unique caractère (à savoir χ^{-1}) qui apparaît comme sous-représentation de la représentation spéciale $\chi^{-1}.\mathrm{Sp}(2)$ correspondant à $\pi_\mathfrak{p}$ par la correspondance de Hecke.*

Dans le cas où tous les k_i sont égaux à 2, il figure dans la somme donnant ${}^s\tilde{\mathscr{H}}_{1,\mathbb{C}}$ des caractères de $\bar{G}(\mathbb{A})$. La somme correspondant à ces caractères constitue la représentation Λ' de 4.5.

Remarque. — Soit $\pi \in C$ telle que $\pi_\mathfrak{p}$ soit spéciale. D'après le paragraphe précédent, la représentation $\hat{\sigma}_1(\pi)$ est nulle. La représentation $\sigma_2(\pi)$ est alors de dimension 1, et [du fait que le déterminant de $\sigma_\mathfrak{p}(\pi)$ est connu] $\sigma_2(\pi)$ est ce que l'on attend, à savoir l'unique quotient de dimension 1 de la représentation spéciale correspondant à $\pi_\mathfrak{p}$.

Nous laissons provisoirement en suspens la question de savoir si $\sigma_\mathfrak{p}(\pi)$ est bien la représentation spéciale de $W(\bar{F}_\mathfrak{p}/F_\mathfrak{p})$, i. e. si l'extension

$$0 \to \sigma_1(\pi) \to \sigma(\pi) \to \sigma_2(\pi) \to 0$$

n'est pas scindée. Cela résultera de la formule de Picard-Lefschetz.

6.8. Le lecteur à qui déplairait trop l'usage d'un isomorphisme entre $\bar{E}_\lambda$ et $\mathbb{C}$ pourra préférer procéder autrement. Pour cela, il suffit de constater que l'on peut définir de façon purement algébrique ce qu'est la « partie finie d'une représentation automorphe de $\bar{G}(\mathbb{A})$ de composantes à l'infini isomorphes à $\bar{D}_{k_i,w}$ » : c'est une composante irréductible de la représentation de $\bar{G}(\mathbb{A})$ sur l'espace des fonctions :

$$f: \quad \bar{G}(\mathbb{A}^f) \to W \underset{E}{\otimes} \bar{\mathbb{Q}}$$

qui sont invariantes à droite par un sous-groupe ouvert, et qui vérifient pour $\theta \in \bar{G}(\mathbb{Q})$ la relation fonctionnelle :

$$f(\theta g) = \bar{\xi}(\theta) f(g)$$

(avec $\bar{\xi}$ le composé $\bar{G}(\mathbb{Q}) \subsetneq \bar{G}(\bar{\mathbb{Q}}) \simeq G(\bar{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\xi} \mathrm{End}(W \underset{E}{\otimes} \bar{\mathbb{Q}})$).

Cette vision est compatible avec les propriétés de rationalité du paragraphe 2 et de [W].

7. — Un formalisme pour les $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules divisibles de hauteur 2 supersinguliers

Ce paragraphe est consacré à la définition et à l'étude de l'ensemble des « polarisations » d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module supersingulier. Dans le cas classique où $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}_p$, une telle polarisation est la donnée d'un morphisme antisymétrique du groupe formel considéré dans son dual de Cartier. La généralisation de cette notion au cas des $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules pose problème, dans la mesure où on ne dispose pas encore d'une théorie très élaborée (il devrait en particulier exister une théorie de la dualité de Cartier à valeurs dans le groupe de Lubin-Tate, et aussi une théorie cristalline — ébauchée dans [Dr. 2] — où l'anneau des vecteurs de Witt $W(\bar{\kappa})$ serait remplacé par l'anneau $W_{\mathcal{O}}(\bar{\kappa}) = \mathcal{O}^{nr}$). Dans ce qui suit, nous nous débrouillons avec les moyens du bord, utilisant surtout l'étude que nous avons déjà effectuée pour décrire la mauvaise réduction des courbes de Shimura.

7.1. Nous fixons désormais une uniformisante $\mathfrak{p}$ du corps local $F_{\mathfrak{p}}$. Ce choix détermine alors un groupe de Lubin-Tate L sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$. Pour tout entier n, nous notons L_n le module de $\mathfrak{p}^n$-torsion de L.

Pour simplifier les notations, nous désignons par $\bar{s} = \operatorname{Spec} \bar{\kappa}$ le point fermé géométrique de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, et $\eta = \operatorname{Spec} F_{\mathfrak{p}}$ (resp. $\hat{\eta}^{nr} = \operatorname{Spec} \hat{F}_{\mathfrak{p}}^{nr}$, resp. $\bar{\eta} = \operatorname{Spec} \bar{F}_{\mathfrak{p}}$, resp. $\hat{\bar{\eta}} = \operatorname{Spec} \hat{\bar{F}}_{\mathfrak{p}}$) son point générique (resp. celui de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}$, resp. celui de l'anneau des entiers de $\bar{F}_{\mathfrak{p}}$, resp. celui du complété de ce dernier).

Le module de Tate TL est le faisceau en $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules libres de rang 1 au-dessus du point générique η défini par : $TL = \varprojlim L_{n,\eta}$ (les morphismes de transition étant déterminés par l'uniformisante $\mathfrak{p}$). Sa fibre au-dessus du point générique géométrique $TL_{\bar{\eta}}$ est donc un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module libre de rang 1 où opère le groupe $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$, via son quotient $W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}})$.

De la théorie de Lubin-Tate, il résulte que l'élément de $W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}})$ correspondant à un élément $u\mathfrak{p}^n \in F_{\mathfrak{p}}^*$ (où u est une unité) opère sur $TL_{\bar{\eta}}$ par l'action de $u^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ (on rappelle que les actions galoisiennes considérées sont les actions « à droite »). D'autre part, le morphisme de Frobenius relatif $F_{q/\bar{\kappa}}$ agit sur la fibre spéciale $L_{\bar{s}}$ comme l'uniformisante $\mathfrak{p}$.

7.2. Soit Σ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$ (il n'en existe d'ailleurs qu'un seul à isomorphisme près). D'après ([Ca.3], App. et [Dr.1]) le foncteur des déformations de Σ est représentable par une $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}$-algèbre D_0^{Σ}, isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}[[t]]$. Nous notons $\tilde{\Sigma}$ la déformation universelle de Σ.

Du « théorème de Serre-Tate » (*cf.* 1.4.3), et des propriétés de l'accouplement e_n défini en 1.3.2, il résulte alors qu'il existe au-dessus de $(\operatorname{Spec} D_0^{\Sigma})_{\hat{\eta}^{nr}}$ des isomorphismes de $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules :

$$\bigwedge_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}^{2} \tilde{\Sigma}_n \simeq L_n.$$

Le faisceau $Hom_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}(L_n, \bigwedge_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}^{2} \tilde{\Sigma}_n)$ est alors *constant* sur $(\operatorname{Spec} D_0^{\Sigma})_{\hat{\eta}^{nr}}$. Or, sur un schéma connexe, on peut parler de *la* fibre d'un faisceau étale fini constant.

On définit donc un $(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^n)$*-module de rang un* $t_n(\Sigma)$ *comme la fibre du faisceau* $Hom_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}(\mathrm{L}_n, \bigwedge^2_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \tilde{\Sigma}_n)$. Le *module dual* $t_n^{\vee}(\Sigma)$ *s'identifie à la fibre du faisceau* $Hom_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}}\left(\bigwedge^2_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \tilde{\Sigma}_n, \mathrm{L}_n\right)$.

Pour n de plus en plus grand, les $t_n(\Sigma)$ [resp. les $t_n^{\vee}(\Sigma)$] constituent de façon évidente un système projectif dont nous notons $t(\Sigma)$ [resp. $t^{\vee}(\Sigma)$] la limite. Ce sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules libres de rang 1.

Pour toute déformation $\tilde{\Sigma}$ de Σ sur un $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schéma local complet noetherien de point fermé $\bar{s}$ on dispose donc au-dessus de la fibre générale $\mathrm{S}_{\hat{\eta}^{nr}}$ d'isomorphismes canoniques :

$$\bigwedge^2_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \tilde{\Sigma}_n \simeq t_n(\Sigma) \otimes \mathrm{L}_n,$$

et (désignant par $\mathrm{T}\tilde{\Sigma}$ le module de Tate de $\tilde{\Sigma}$) :

$$\bigwedge^2_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{T}\tilde{\Sigma} \simeq t(\Sigma) \otimes \mathrm{TL}.$$

7.3. Fonctorialité par transport de structure. — Soit $\sigma \in \mathrm{W}(\bar{\kappa}/\kappa)$. Pour Σ comme ci-dessus, on définit par transport de structure : $\Sigma^{\sigma} = \Sigma \underset{\bar{\kappa}}{\otimes} \nearrow_{\sigma^{-1}} \bar{\kappa}$. L'automorphisme σ se relève en un automorphisme de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}$ et l'on obtient alors par transport de structure une déformation de Σ^{σ} :

$$\mathrm{D}_0^{\Sigma^{\sigma}} = \mathrm{D}_0^{\Sigma} \underset{\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}}{\otimes} \nearrow_{\sigma^{-1}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr} \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Sigma}^{\sigma} = \tilde{\Sigma} \underset{\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}}{\otimes} \nearrow_{\sigma^{-1}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}.$$

D'autre part, il résulte de ce que L est défini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ que L^{σ} s'identifie canoniquement à L. Le transport de structure induit donc un isomorphisme canonique :

$$t(\Sigma^{\sigma}) \simeq t(\Sigma).$$

7.4. Fonctorialité par isogénies. — Soit $\alpha : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ une isogénie entre deux $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-modules formels de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$. Nous allons montrer qu'il existe alors un morphisme :

$$t(\alpha) : t(\Sigma_1) \to t(\Sigma_2)$$

caractérisé par la propriété suivante : pour tout couple de déformations $\tilde{\Sigma}_1$, $\tilde{\Sigma}_2$ de Σ_1 et Σ_2 sur un $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}$-schéma S local complet noetherien de point fermé $\bar{s}$ et de fibre générale $\mathrm{S}_{\hat{\eta}^{nr}}$ non vide, et pour toute déformation $\tilde{\alpha} : \tilde{\Sigma}_1 \to \tilde{\Sigma}_2$ de l'isogénie α [il est facile de voir

qu'il existe toujours un tel système $(S, \tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \tilde{\alpha})$] alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \overset{2}{\wedge}\, T\tilde{\Sigma}_1 & \xrightarrow{\sim} & t(\Sigma_1)\otimes TL \\ \downarrow \overset{2}{\wedge}\, T\tilde{\alpha} & & \downarrow t(\alpha)\otimes 1 \\ \overset{2}{\wedge}\, T\tilde{\Sigma}_2 & \xrightarrow{\sim} & t(\Sigma_2)\otimes TL \end{array}$$

est *commutatif.*

Pour définir $t(\alpha)$, nous allons en fait définir son transposé : $t^\vee(\alpha): t^\vee(\Sigma_2) \to t^\vee(\Sigma_1)$. Pour cela, commençons par noter le fait suivant, qui résulte du théorème « de Serre-Tate » 1.4.3 et de la propriété de prolongement 1.4.4 :

Soit $\varphi \in t_n^\vee(\Sigma)$. Il définit un morphisme $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-bilinéaire alterné au-dessus de $D_0^\Sigma \underset{\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^{nr}}{\otimes} \hat{F}_\mathfrak{p}^{nr}$:

$$e_n(\varphi): \quad \tilde{\Sigma}_n \times \tilde{\Sigma}_n \to L_n,$$

et alors *ce dernier morphisme s'étend en un morphisme au-dessus de* D_0^Σ *tout entier.* Par restriction au point fermé de Spec D_0^Σ, cela définit donc une application ($\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-linéaire) :

$$t_n^\vee(\Sigma) \to BA(\Sigma_n \times \Sigma_n, L_{n,\bar{s}})$$

où BA désigne l'ensemble des morphismes $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-bilinéaires alternés.

Que l'on puisse définir, pour $\alpha: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ une isogénie, un morphisme $t^\vee(\alpha): t^\vee(\Sigma_2) \to t^\vee(\Sigma_1)$ tel que son transposé $t(\alpha)$ vérifie la propriété écrite ci-dessus, résultera de façon immédiate du :

LEMME. — *L'application* ($\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-linéaire)

$$e: \quad t^\vee(\Sigma) \to \varprojlim_n BA(\Sigma_n \times \Sigma_n, L_{n,\bar{s}})$$

(limite projective des applications précédemment définies) *est injective.*

7.5. PREUVE DU LEMME. — Choisissons $\varphi \in t^\vee(\Sigma)$ tel qu'il constitue une *base* du $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module $t^\vee(\Sigma)$: cela signifie que, pour chaque n, la dualité qu'il définit sur $\tilde{\Sigma}_{n,\eta}$ est *non dégénérée.* Pour prouver l'injectivité de l'application précédente, il suffit par exemple de montrer que, pour chaque $n \geqq 3$, le morphisme bilinéaire associé à φ :

$$\mathbf{e}_n(\varphi): \Sigma_n \times \Sigma_n \to L_{n,\bar{s}}$$

ne se factorise pas à travers le sous-groupe $L_{n-2,\bar{s}}$.

Notons D_n^Σ la $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^{nr}$-algèbre qui classifie les déformations de Σ munies d'une base de Drinfel'd de niveau n (*cf.* [Ca.3], App.), et notons Ω_n le sous-schéma fermé de L_n

« constitué » des bases de Drinfel'd de niveau n du groupe de Lubin-Tate (*cf. loc. cit.* 8.4 : le schéma Ω_n n'est autre que le spectre de l'extension totalement ramifiée $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^n$ de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}$ correspondant, par la théorie du corps de classes, au sous-groupe $U^n \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$ des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{p}^n$). D'après (*loc. cit.* 9.2), l'accouplement $\mathbf{e}_n(\varphi)$, appliqué à la base de Drinfel'd universelle sur D_n^Σ, définit un morphisme :

$$\operatorname{Spec} D_n^\Sigma \xrightarrow{\nu_n(\varphi)} \Omega_n.$$

Notant s_0 le point fermé de $\operatorname{Spec} D_0^\Sigma$, et s_n le sous-schéma (réduit à un point) de $\operatorname{Spec} D_n^\Sigma$ qu'on en déduit par pull-back, il nous suffit donc de montrer que le morphisme composé :

$$s_n \hookrightarrow \operatorname{Spec} D_{n,\bar{s}}^\Sigma \xrightarrow{\nu_n(\varphi)} \Omega_{n,\bar{s}}$$

ne se factorise pas à travers l'intersection $\Omega_{n,\bar{s}} \cap L_{n-2,\bar{s}}$. Remarquant que cette intersection est un sous-schéma *strict* de $\Omega_{n,\bar{s}}$ (en effet, le rang sur $\bar{\kappa}$ de $\Omega_{n,\bar{s}}$ est égal à $(q-1)q^{n-1}$, celui de $L_{n-2,\bar{s}}$ à q^{n-2}), il suffit en fait de montrer que le morphisme précédent est *plat*. Or ce morphisme s'obtient par pull-back à partir du morphisme (produit fibré de la projection naturelle de $\operatorname{Spec} D_n^\Sigma$ sur $\operatorname{Spec} D_0^\Sigma$ et de $\nu_n(\varphi)$) :

$$\operatorname{Spec} D_n^\Sigma \to \operatorname{Spec} D_0^\Sigma \underset{\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{nr}}{\times} \Omega_n$$

lequel est bien *plat* : en effet, $\operatorname{Spec} D_n^\Sigma$ est régulier, et il en est de même du produit fibré du membre de droite (isomorphe au spectre de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^n[[t]]$). Or une extension finie d'anneaux locaux réguliers de même dimension est toujours plate. □

7.6. Exemple : le Frobenius. — Considérons l'isogénie : $F_{q/\bar{\kappa}} : \Sigma \to \Sigma^\sigma$ où $\sigma \in W(\bar{\kappa}/\kappa)$ désigne l'élément de Frobenius géométrique.

Proposition. — *Le morphisme* $t(F_{q/\bar{\kappa}}) : t(\Sigma) \to t(\Sigma^\sigma) \simeq t(\Sigma)$ *est la multiplication par l'uniformisante* $\mathfrak{p}$.

Preuve. — Soit $\varphi \in t^\vee(\Sigma)$ et soit φ' l'image de φ par l'action de l'isogénie de Frobenius. Utilisant les notations de 7.4, on voit que $e_n(\varphi')$ s'obtient à partir de $e_n(\varphi)$ comme le composé :

$$\Sigma_n \times \Sigma_n \xrightarrow{F_{q/\bar{\kappa}}} \Sigma_n^\sigma \times \Sigma_n^\sigma \xrightarrow{e_n(\varphi)^\sigma} L_n^\sigma \simeq L_n.$$

Parce que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_n \times \Sigma_n \arrow[r, "e_n(\varphi)"] \arrow[d, "F_{q/\bar{\kappa}}"] & L_n \arrow[d, "F_{q/\bar{\kappa}}"] \arrow[ddr, "\mathfrak{p}"] & \\
\Sigma_n^\sigma \times \Sigma_n^\sigma \arrow[r, "e_n(\varphi)^\sigma"] & L_n^\sigma \arrow[r] & L_n
\end{tikzcd}$$

on a donc la relation pour chaque n :

$$e_n(\varphi') = \mathfrak{p}\, e_n(\varphi).$$

D'où :

$$\varphi' = \mathfrak{p}\, \varphi.$$

Donc $F_{q/\bar{\kappa}}$ agit sur $t^\vee(\Sigma)$ par multiplication par $\mathfrak{p}$. Par dualité, il en est de même sur $t(\Sigma)$.

Q.E.D.

7.7. Les $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules formels a isogénie près. — 7.7.1. Nous nous intéressons maintenant à la catégorie déduite de la catégorie des $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules divisibles en rendant inversibles les isogénies. Il suffit évidemment de rendre inversibles les isogénies provenant de l'action de l'anneau $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$. Pour Σ un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module divisible sur $\bar{\kappa}$, nous noterons $\Sigma \otimes F_\mathfrak{p}$ le $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module à isogénie près correspondant.

Soit Σ un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$. Nous posons alors : $v(\Sigma) = t(\Sigma) \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} F_\mathfrak{p}$.

Il est clair que *v définit un foncteur covariant de la catégorie des $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules formels de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$ à isogénie près dans la catégorie des $F_\mathfrak{p}$-vectoriels de dimension* 1.

Pour Σ_1 et Σ_2 deux $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules formels de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$, et $\alpha : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ une isogénie, la *hauteur* $h(\alpha)$ de α est l'entier h tel que le noyau de α soit de rang q^h (*cf.* [Dr.1] ou ([Ca.3], app.)). Alors $t(\alpha)$ est une injection dont l'image est d'indice q^h. D'autre part, une isogénie est un isomorphisme si et seulement si sa hauteur est nulle, et deux isogénies de même hauteur se déduisent l'une de l'autre par composition par un automorphisme de Σ_1 (ou de Σ_2 si l'on préfère).

De ce qui précède, il résulte que si $\bar{\Sigma}$ est un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel de hauteur 2 à isogénie près sur $\bar{\kappa}$, *alors la catégorie des couples constitués d'un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel Σ de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$ et d'un isomorphisme $\Sigma \otimes F_\mathfrak{p} \simeq \bar{\Sigma}$ est équivalente à la catégorie des réseaux $t(\Sigma) \subset v(\bar{\Sigma})$.*

7.7.2. Pour Σ un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module divisible, on note $V\Sigma \underset{\text{def}}{=} T\Sigma \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} F_\mathfrak{p}$. Le foncteur V ainsi défini se prolonge à la catégorie des $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-modules divisibles à isogénie près.

Considérons alors un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel Σ à isogénie près sur $\bar{\kappa}$, de hauteur 2, et soit $\tilde{\Sigma}$ un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module divisible à isogénie près, déformation de Σ sur un $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^{nr}$-schéma local complet noetherien S de point fermé $\bar{s}$. Il résulte alors de 7.2 que l'on dispose au-dessus de la fibre générale de S d'un isomorphisme canonique :

$$\overset{2}{\underset{F_\mathfrak{p}}{\wedge}} V\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\sim} v(\Sigma) \underset{F_\mathfrak{p}}{\otimes} VL.$$

8. Construction de la déformation universelle, avec structure de niveau, d'un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel de hauteur 2 à isogénie près polarisé

8.1. Nous notons $V_\mathfrak{p}$ l'espace vectoriel $F_\mathfrak{p}^2$ où opère à gauche le groupe $GL_2(F_\mathfrak{p})$. Nous

fixons un sous-groupe compact-ouvert $K \subset GL_2(F_\mathfrak{p})$ [pour ne pas embrouiller la construction qui suit, on ne suppose pas que K est un groupe de congruence dans $GL_2(\mathcal{O}_\mathfrak{p})$]. Nous notons $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^K$ le complété de l'anneau des entiers de l'extension abélienne de $F_\mathfrak{p}^{nr}$ qui correspond au sous-groupe $\det K \subset \mathcal{O}_\mathfrak{p}^*$; le point générique de $\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^K$ est noté $\hat{\eta}^K$.

Nous nous donnons d'autre part Σ, un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel à isogénie près de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$, muni d'une classe $\bar{\psi}$ modulo $\det K$ d'isomorphismes :

$$\overset{2}{\underset{F_\mathfrak{p}}{\wedge}} V_\mathfrak{p} \overset{\psi}{\xrightarrow{\sim}} v(\Sigma) \underset{F_\mathfrak{p}}{\otimes} VL_{\bar{\eta}}.$$

A ces données, nous allons associer de manière naturelle un schéma local $N = N_K(\Sigma, \bar{\psi})$, muni d'un morphisme (à fibre générale géométriquement connexe) dans $\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^K$, un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module divisible à isogénie près $\tilde{\Sigma}$ sur N relevant Σ, et une classe $\bar{\varphi}$ modulo K d'isomorphismes au-dessus de la fibre générale :

$$\varphi : \quad V_\mathfrak{p} \to V\tilde{\Sigma}_{\hat{\eta}^K}$$

de sorte que l'on ait, au-dessus de la fibre générale géométrique, l'égalité $\overset{2}{\wedge} \varphi = \psi$ modulo $\det K$ (*cf.* 7.7.2).

Intuitivement, il faut penser que $N_K(\Sigma, \bar{\psi})$ « classifie » de tels couples $(\tilde{\Sigma}, \bar{\varphi})$.

8.2. Fixons Σ, K et $\psi \in \bar{\psi}$. Pour construire N, nous avons besoin d'effectuer des choix auxiliaires. Nous montrerons ensuite que le résultat obtenu ne dépend pas des choix effectués.

Nous choisissons donc un *réseau* $A \subset V_\mathfrak{p}$ qui soit K-stable. Ensuite, nous choisissons un entier n assez grand pour que le groupe K_A^n des automorphismes de V qui fixent A et agissent trivialement sur $(A/\mathfrak{p}^n A)$ soit contenu dans K.

Le choix de A détermine un réseau $t(\Sigma_A)$ dans $v(\Sigma)$, tel que ψ se restreigne en un isomorphisme :

$$\overset{2}{\underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\wedge}} A \xrightarrow{\sim} t(\Sigma_A) \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} TL_{\hat{\bar{\eta}}}$$

et donc un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module formel Σ_A muni d'un isomorphisme $\Sigma_A \otimes F_\mathfrak{p} \simeq \Sigma$.

Notant $A_n = \mathfrak{p}^{-n} A/A$, on dispose donc via ψ d'un isomorphisme :

$$\overset{2}{\underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\wedge}} A_n \simeq t_n(\Sigma_A) \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} L_{n, \hat{\bar{\eta}}}.$$

Nous considérons alors le schéma $D_n^{\Sigma_A} \otimes \hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^n$ qui classifie les déformations de Σ_A au-dessus des $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}^n$-schémas, munies d'une base de Drinfel'd de niveau n :

$$\varphi_n : \quad A_n \to \operatorname{Mor}(S, \Sigma_{A,n})$$

et nous notons $N^{(n)}$ le sous-schéma du précédent défini par la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\overset{2}{\underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\Lambda}} A_n \arrow[r, "\overset{2}{\Lambda}\varphi_n"] \arrow[dr, "\sim"'] & \overset{2}{\underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\Lambda}} \mathrm{Mor}(S, \Sigma_{A,n}) \rightarrow t_n(\Sigma_A) \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} L_n(S) \arrow[d, "\sim"] \\
& t_n(\Sigma_A) \underset{\mathcal{O}_\mathfrak{p}}{\otimes} L_{n,\hat{\bar{\eta}}}
\end{tikzcd}$$

[La flèche de restriction $L_n(S) \rightarrow L_{n,\hat{\bar{\eta}}}$ est un isomorphisme, car le groupe L_n est constant sur $\hat{F}^n_\mathfrak{p}$, et toute section s'étend à $\hat{\mathcal{O}}^n_\mathfrak{p}$].

Le $\hat{\mathcal{O}}^n_\mathfrak{p}$-schéma $N^{(n)}$ que nous venons de construire n'est rien d'autre, à un isomorphisme près, que le schéma $\operatorname{Spec} D_n^{\Sigma_A}$ au-dessus de Ω_n déjà rencontré en 7.5. Au-dessus, on dispose de la déformation universelle $\tilde{\Sigma}_A$, et de la structure de niveau universelle φ_n. Au-dessus de la fibre générale, on peut voir cette dernière comme une classe modulo K^n_A d'isomorphismes :

$$\varphi : \quad A \xrightarrow{\sim} T\tilde{\Sigma}_A$$

ou si l'on préfère :

$$\varphi : \quad V_\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} V\tilde{\Sigma}_A.$$

Le groupe K agit sur le triple $(N^{(n)}, \tilde{\Sigma}_A, \varphi_n)$ en respectant le morphisme composé $N^{(n)} \rightarrow \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}^n_\mathfrak{p} \rightarrow \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}^K_\mathfrak{p}$, et le sous-groupe K^n_A agit trivialement. Cela nous permet de définir un $\hat{\mathcal{O}}^K_\mathfrak{p}$-schéma $N^{(n)}_A$ comme le *quotient* de $N^{(n)}$ par le groupe fini (K/K^n_A). Il est clair que ce quotient ne dépend pas de n, nous le notons donc simplement N_A. On voit aussi facilement qu'il ne dépend que de la classe $\bar{\psi}$ de ψ modulo $\det K$. Il porte un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module $\tilde{\Sigma}_A$, lequel est muni au-dessus de la fibre générale d'une classe $\bar{\varphi}_A$ modulo K d'isomorphismes :

$$\varphi_A : \quad V_\mathfrak{p} \xrightarrow{\sim} V\tilde{\Sigma}_{A,\hat{\eta}^K}.$$

8.3. Proposition. — *Le triple constitué de* N_A, *du* $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$*-module* $\tilde{\Sigma}_A$ *vu comme module à isogénie près, et de* $\bar{\varphi}_A$ *est canoniquement indépendant du réseau* A. *Plus précisément, pour deux réseaux* A *et* B, *il existe un isomorphisme de* $\hat{\mathcal{O}}^K_\mathfrak{p}$*-schémas*

$$N_A \xrightarrow[\sim]{i} N_B$$

se relevant en une quasi-isogénie $\tilde{\Sigma}_A \xrightarrow{j} i^* \tilde{\Sigma}_B$ *prolongeant l'identité de* Σ *et telle que le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} V\tilde{\Sigma}_{A,\hat{\eta}^K} \arrow[r, "Vj"] & i^* V\tilde{\Sigma}_{B,\hat{\eta}^K} \\ V_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\bar{\varphi}_A"] \arrow[ur, "\bar{\varphi}_B"'] & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Le couple (i, j) *est alors uniquement déterminé par ces conditions.*

Preuve. — Pour *l'unicité*, on se ramène à supposer que $A = B$. Parce que $\bar{\varphi}_A$ envoie bijectivement A sur $T\tilde{\Sigma}_A$, on voit que j est en fait un *automorphisme* de $\tilde{\Sigma}_A$. Parce que cet automorphisme prolonge l'identité de Σ_A, le couple (i, j) relève l'identité de la déformation universelle sur $\operatorname{Spec} D_0^{\Sigma_A}$. Il est alors facile, utilisant la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} V\tilde{\Sigma}_{A,\hat{\eta}^K} \arrow[r, "Vj"] & i^* V\tilde{\Sigma}_{B,\hat{\eta}^K} \\ V_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\bar{\varphi}_A"] \arrow[ur, "\bar{\varphi}_A"'] & \end{tikzcd}$$

d'en déduire que le couple (i, j) est l'identité.

Pour *l'existence*, on se ramène à supposer que $A \subset B$. L'identité de Σ se matérialise alors en une isogénie $\Sigma_A \to \Sigma_B$ de hauteur $\log_q(|B/A|)$.

Choisissons des entiers n (resp. m) vérifiant les conditions de 7.2 pour le réseau A (resp. B) et tels qu'on ait l'inclusion : $\mathfrak{p}^{-m} B \subset \mathfrak{p}^{-n} A$.

Au-dessus de $N_A^{(n)}$, on dispose d'une déformation universelle $\tilde{\Sigma}_A$, et d'une structure de niveau universelle :

$$\varphi_A : \quad \mathfrak{p}^{-n} A/A \to \operatorname{Mor}(N_A^{(n)}, \tilde{\Sigma}_{A,n}).$$

Notons H le sous-groupe de $\tilde{\Sigma}_{A,n}$ défini par :

$$H = \sum_{x \in (B/A)} [\varphi_A(x)] \qquad (cf.\ [\text{Ca.3}], \text{App})$$

et soit $\tilde{\Sigma}_H$ le quotient $\tilde{\Sigma}_A/H$. Ce quotient est de façon naturelle une déformation de Σ_B (il existe un unique isomorphisme entre Σ_B et la fibre Σ_H de $\tilde{\Sigma}_H$ au point fermé de $N_A^{(n)}$ faisant commuter le triangle $\begin{tikzcd} \Sigma_A \arrow[r] \arrow[dr] & \Sigma_B \arrow[d, "\sim"] \\ & \Sigma_H \end{tikzcd}$).

De plus le morphisme composé :

$$\mathfrak{p}^{-m}\mathrm{B}/\mathrm{A} \to \mathrm{Mor}(\mathrm{N}_{\mathrm{A}}^{(n)}, \tilde{\Sigma}_{\mathrm{A},n}) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{N}_{\mathrm{A}}^{(n)}, \tilde{\Sigma}_{\mathrm{H},n})$$

se factorise à travers $(\mathfrak{p}^{-m}\mathrm{B}/\mathrm{B})$ et définit une structure de niveau m sur $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{H}}$. On obtient ainsi un morphisme :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{A}}^{(n)} \to \mathrm{N}_{\mathrm{B}}^{(m)}$$

lequel se reléve en une isogénie $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{A}} \to \tilde{\Sigma}_{\mathrm{B}}$. Passant ensuite au quotient par l'action du groupe K, il est facile de vérifier qu'on obtient un isomorphisme :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{A}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}_{\mathrm{B}}$$

se relevant en une isogénie $\tilde{\Sigma}_{\mathrm{A}} \to \tilde{\Sigma}_{\mathrm{B}}$, le tout vérifiant les conditions de la proposition 8.3.

8.4. Nous notons donc $\mathrm{N}_{\mathrm{A}} = \mathrm{N}_{\mathrm{K}}(\Sigma, \bar{\psi})$. Il porte un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module à isogénie près noté $\tilde{\Sigma} = \Sigma_{\mathrm{K}}(\Sigma, \bar{\psi})$. Ce dernier est un relèvement de Σ.

Soient maintenant $(\Sigma_1, \bar{\psi}_1)$ et $(\Sigma_2, \bar{\psi}_2)$ deux couples comme en 8.1. Soit aussi $\alpha : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ un isomorphisme (= une quasi-isogénie), et donnons-nous $g \in \mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif (modulo det K) :

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^2_{\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{V}_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\bar{\psi}_1"] & v(\Sigma_1) \otimes_{\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{VL}_{\hat{\eta}} \arrow[d, "v(\alpha)\otimes 1"] \\
\bigwedge^2_{\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{V}_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\det g"] \arrow[r, "\bar{\psi}_2"] & v(\Sigma_2) \otimes_{\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}} \mathrm{VL}_{\hat{\eta}}
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION. — *Il existe alors un isomorphisme de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^{\mathrm{K}}$-schémas :*

$$i : \quad \mathrm{N}_{\mathrm{K}}(\Sigma_1, \bar{\psi}_1) \to \mathrm{N}_{g^{-1}\mathrm{K}g}(\Sigma_2, \bar{\psi}_2)$$

et un isomorphisme $\tilde{\alpha} : \tilde{\Sigma}_1 \to i^* \tilde{\Sigma}_2$ relevant α, de sorte que le diagramme suivant au-dessus de la fibre générale soit commutatif (modulo K) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V}_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\varphi_1"] & \mathrm{V}\tilde{\Sigma}_{1,\hat{\eta}^{\mathrm{K}}} \arrow[d, "\mathrm{V}(\tilde{\alpha})"] \\
\mathrm{V}_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\varphi_2"] & i^* \mathrm{V}\tilde{\Sigma}_{2,\hat{\eta}^{\mathrm{K}}}
\end{tikzcd}$$

Le couple $(i, \tilde{\alpha})$ *est uniquement déterminé par ces conditions.*

Preuve. — L'unicité résulte aussitôt de l'unicité dans la proposition 8.3. Pour voir l'existence d'un tel couple $(i, \tilde{\alpha})$, on choisit un réseau A, stabilisé par K, et on prend $A_2 = g^{-1} A_1$. Avec les notations de 8.2, l'isomorphisme α définit un isomorphisme :

$$\alpha : \Sigma_{1,\, A_1} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{2,\, A_2}.$$

Il existe alors un couple (unique) (i_n, α_n) constitué d'un isomorphisme :

$$i_n : \quad N^{(n)}_{A_1,\, \Sigma_1} \to N^{(n)}_{A_2,\, \Sigma_2}$$

et d'un isomorphisme $\tilde{\alpha}_n : \tilde{\Sigma}_{1,\, A_1} \to i_n^* \tilde{\Sigma}_{2,\, A_2}$ relevant α, tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}^{-n} A_1/A_1 & \xrightarrow{\varphi_1^{(n)}} & \mathrm{Mor}(N^{(n)}_{A_1,\, \Sigma_1}, \tilde{\Sigma}_{1,\, A_1}) \\ {\scriptstyle g}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathfrak{p}^{-n} A_2/A_2 & \xrightarrow{\varphi_2^{(n)}} & \mathrm{Mor}(N^{(n)}_{A_2,\, \Sigma_2}, \tilde{\Sigma}_{2,\, A_2}) \end{array}$$

soit commutatif. Le couple $(i, \tilde{\alpha})$ cherché s'en déduit alors par passage au quotient.

Remarque. — Il est clair que, réciproquement, l'existence d'un tel couple $(i, \tilde{\alpha})$ entraîne la commutativité de diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \wedge^2 V_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_1} & v(\Sigma_1) \otimes TL_{\hat{\eta}} \\ {\scriptstyle \det g}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle v(\alpha)\otimes 1} \\ \wedge^2 V_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_2} & v(\Sigma_1) \otimes TL_{\hat{\eta}} \end{array}$$

8.5. Pour un couple (Σ, ψ) fixé, constitué d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel de hauteur 2 à isogénie près sur $\bar{\kappa}$ et d'un isomorphisme :

$$\wedge^2_{F_{\mathfrak{p}}} V_{\mathfrak{p}} \xrightarrow[\sim]{\psi} v(\Sigma) \otimes_{F_{\mathfrak{p}}} VL_{\hat{\eta}}$$

les $N_K(\Sigma, \psi)$ correspondants constituent, lorsque K devient de plus en plus petit, un système projectif. Leur limite projective $N(\Sigma, \psi)$ est un $\hat{\bar{\mathcal{O}}}_{\mathfrak{p}}$-schéma où opère, d'après ce qui précède, le groupe $SL(V_{\mathfrak{p}})$.

Nous nous intéresserons surtout aux fibres géométriques générales :

$$\mathscr{V}_K(\Sigma, \bar{\psi}) = N_K(\Sigma, \bar{\psi}) \underset{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^K}{\otimes} \hat{\bar{F}}$$

et à leurs cohomologies

$$\Phi^K(\Sigma, \bar{\psi}) = H^1(N_K(\Sigma, \bar{\psi}) \otimes \hat{\bar{F}}, \bar{E}_\lambda).$$

Choisissant un réseau $A \subset V_{\mathfrak{p}}$, la variété $\mathscr{V}_K(\Sigma, \bar{\psi})$ s'identifie au revêtement de la fibre générale géométrique de la base de la déformation universelle de Σ_A, qui classifie les classes modulo K d'isomorphismes :

$$A \xrightarrow{\varphi} T\tilde{\Sigma}_A$$

vérifiant : $\overset{2}{\wedge} \varphi = \bar{\psi}$ (modulo det K).

Si un représentant $\psi \in \bar{\psi}$ est fixé, c'est encore le classifiant des classes modulo $K \cap SL(V_{\mathfrak{p}})$ d'isomorphismes

$$A \xrightarrow{\varphi} T\tilde{\Sigma}_A$$

tels que $\overset{2}{\wedge} \varphi = \psi$.

Pour ψ fixé, $\mathscr{V}_K(\Sigma, \psi)$ ne dépend donc que de l'intersection $K \cap SL(V_{\mathfrak{p}})$. Si K' est un sous groupe distingué dans K, alors $\mathscr{V}_K(\Sigma, \psi)$ s'identifie au quotient de $\mathscr{V}_{K'}(\Sigma, \psi)$ par le groupe fini $[(K \cap SL(V_{\mathfrak{p}}))/(K' \cap SL(V_{\mathfrak{p}}))]$. La cohomologie $\Phi^K(\Sigma, \psi)$ s'identifie alors au sous-espace des invariants dans $\Phi^{K'}(\Sigma, \psi)$ par le même groupe.

9. L'orbite supersingulière revisitée

9.1. A tout point supersingulier $x \in S_{n,H}$ de la fibre spéciale de $(\mathbf{M}_{n,H} \bar{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n)$ correspond, par définition de ce dernier, un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel Σ_x^0 de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$ et une classe modulo $K_{\mathfrak{p}}^n$ d'isomorphismes entre $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^2$ et le module de Tate de la déformation de Σ_x^0 sur le complété de l'hensélisé $(\mathbf{M}_{n,H} \bar{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n)_{(x)}$. Le point supersingulier considéré est donc en particulier muni d'un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel à isogénie près $\Sigma_x = \Sigma_x^0 \otimes F_{\mathfrak{p}}$ « polarisé », i. e. donné avec une classe $\bar{\psi}_x$ modulo $U_{\mathfrak{p}}^n = \det K_{\mathfrak{p}}^n$ d'isomorphismes :

$$\psi_x : \quad \underset{F_{\mathfrak{p}}}{\overset{2}{\wedge}} V_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} v(\Sigma_x) \underset{F_{\mathfrak{p}}}{\otimes} VL_{\hat{\eta}}.$$

La construction du paragraphe précédent nous permet alors de reconstituer le complété $(\mathbf{M}_{n,H} \bar{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n)_{(x)}^{\wedge}$ à partir du couple $(\Sigma_x, \bar{\psi}_x)$, comme le schéma $N_{K_{\mathfrak{p}}^n}(\Sigma_x, \bar{\psi}_x)$.

L'orbite supersingulière $S = \varprojlim S_{n,\,H}$, munie du groupe à isogénie près Σ, a été décrite en 1.7. Dans ce paragraphe, nous allons réinterpréter cette description en faisant usage du formalisme développé au paragraphe 7.

Commençons par tirer une conséquence de notre description : sur $N(\Sigma, \psi)$, muni du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module à isogénie près universel $\tilde{\Sigma}$, agit d'après (*loc. cit.*) le groupe $\bar{G}(\mathbb{Q})$ (déduit de G par une torsion intérieure aux places $\mathfrak{p}$ et τ). Ce groupe agit sur Σ par son facteur local en $\mathfrak{p}$, à savoir le groupe multiplicatif $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$ du corps de quaternions de centre $F_{\mathfrak{p}}$ (on rappelle qu'il s'agit de l'action *inverse* de l'action naturelle déduite d'un isomorphisme entre l'algèbre $\bar{B}_{\mathfrak{p}}$ et l'algèbre End Σ, un élément z du centre agissant donc par $z^{-1} \in F_{\mathfrak{p}}^*$). Il agit d'autre part sur la polarisation « universelle » de $\tilde{\Sigma}_{\hat{\eta}}$ par multiplication par la norme réduite $\bar{\nu}$.

Il en résulte que pour α *un élément de* $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$, *alors* $v(\alpha) = \bar{\nu}^{-1}(\alpha)$: *cf.* en effet la remarque suivant la proposition 8.4.

9.2. Fixons désormais un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module formel à isogénie près de hauteur 2 sur $\bar{\kappa}$, noté Σ, et aussi des isomorphismes : $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^* \simeq \mathrm{Aut}\,\Sigma$

$$\bar{B} \otimes \mathbb{A}_F^{f,\,\mathfrak{p}} \simeq B \otimes \mathbb{A}_F^{f,\,\mathfrak{p}}$$

comme en 1.7.3 et 1.7.4.

Considérons le produit :

$$\tilde{\Delta} = W(\bar{\kappa}/\kappa) \times \mathrm{Isom}\,(\overset{2}{\wedge}\, V_{\mathfrak{p}},\, v(\Sigma) \otimes VL_{\hat{\eta}}).$$

A chaque élément $\tilde{\delta} = (w, \psi)$ *de* $\tilde{\Delta}$ correspond comme suit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module polarisé $(\Sigma(\tilde{\delta}), \psi(\tilde{\delta}))$ sur $\bar{\kappa}$: le module $\Sigma(\tilde{\delta})$ se déduit de Σ par transport de structure :

$$\Sigma(\tilde{\delta}) \underset{\mathrm{def}}{=} \Sigma^w$$

et la polarisation $\psi(\tilde{\delta})$ est le composé :

$$\overset{2}{\wedge}\, V_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\psi} v(\Sigma) \otimes VL_{\hat{\eta}} \simeq v(\Sigma^w) \otimes VL_{\hat{\eta}}.$$

L'ensemble $\tilde{\Delta}$ est de façon naturelle un espace principal homogène sous le groupe produit $W(\bar{\kappa}/\kappa) \times F_{\mathfrak{p}}^*$. Intéressons-nous au sous-groupe, isomorphe à $\mathbb{Z}$, formé des couples $(\sigma^n, \mathfrak{p}^n)$ où σ désigne le Frobenius géométrique. L'action d'un tel couple transforme $\tilde{\delta} = (w, \psi)$ en $\tilde{\delta}.n = (w\sigma^n, \psi\mathfrak{p}^n)$. On a alors :

$$\Sigma(\tilde{\delta}.n) = \Sigma(\tilde{\delta})^{\sigma^n},$$

et $\psi(\tilde{\delta}.n)$ est le composé :

$$\overset{2}{\wedge}\, V_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\mathfrak{p}^n \psi(\tilde{\delta})} v(\Sigma(\tilde{\delta})) \otimes VL_{\hat{\eta}} \xrightarrow{\sim} v(\Sigma(\tilde{\delta})^{\sigma^n}) \otimes VL_{\hat{\eta}}.$$

La puissance n-ième de l'isogénie de Frobenius définit un isomorphisme :

$$F^n_{q/\bar{\varkappa}} : \quad \Sigma(\tilde{\delta}) \xrightarrow{\sim} \Sigma(\tilde{\delta}.n),$$

et il résulte de 7.6 que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
v(\Sigma(\tilde{\delta})) \arrow[r, "v(F^n_{q/\bar{\varkappa}})"] & v(\Sigma(\tilde{\delta}.n)) \\
\overset{2}{\wedge} V_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\psi(\tilde{\delta})"] \arrow[ur, "\psi(\tilde{\delta}.n)"'] &
\end{tikzcd}$$

En d'autres termes, l'isogénie de Frobenius définit un relèvement de l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\tilde{\Delta}$ en une action sur le $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module supersingulier à isogénie près « porté » par $\tilde{\Delta}$. Par passage au quotient, on *obtient donc sur l'ensemble* $\Delta = \tilde{\Delta}/\mathbb{Z}$ *un* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$*-module supersingulier à isogénie près polarisé.*

9.3. L'ensemble Δ est de façon évidente un espace principal homogène sous le groupe $F^*_{\mathfrak{p}}$. Sur $\tilde{\Delta}$, et donc, par passage au quotient, sur Δ, agissent « à droite » les trois groupes :

(i) $W(F^{ab}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$, via son action sur $W(\bar{\kappa}/\kappa)$ et sur $TL_{\hat{\eta}}$. On voit aussitôt que l'action sur Δ est donnée par l'*inverse* de l'action de $F^*_{\mathfrak{p}}$, modulo l'isomorphisme de la théorie du corps de classes.

(ii) $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$, via son action sur $V_{\mathfrak{p}}$. Un élément $g \in GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ agit sur Δ par multiplication par $\det g$.

(iii) $\operatorname{Aut}\Sigma \simeq \bar{B}^*_{\mathfrak{p}}$, via son action sur $v(\Sigma)$. Un élément $\alpha \in \bar{B}^*_{\mathfrak{p}}$ agit par multiplication par $\bar{\nu}^{-1}(\alpha)$.

Du caractère naturel de la construction de 9.2, il résulte que ces trois actions se relèvent de façon naturelle au $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-module à isogénie près Σ_Δ porté par Δ, muni de sa polarisation. Plus précisément, le groupe de Weil agit par transport de structure, le groupe $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ agit via le déterminant en modifiant la polarisation; enfin l'action de $\operatorname{Aut}\Sigma$ sur Σ_Δ s'obtient par transport de structure à partir de l'action sur Σ. On constatera en particulier que :

(*a*) Un élément $(w, g) \in W(F^{ab}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \times GL_2(F_{\mathfrak{p}})$, tel que w et $\det g$ se correspondent par l'isomorphisme de la théorie du corps de classes, agit trivialement sur Δ et induit sur chaque fibre Σ_δ la puissance n-ième du Frobenius absolu, où n désigne la valuation de $(\det g)^{-1}$.

(*b*) Pour $z \in F^*_{\mathfrak{p}}$, l'élément $(z, z) \in GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times B^*_{\mathfrak{p}}$ agit trivialement sur Σ_Δ.

9.4. Il résulte alors de notre description de l'orbite supersingulière, de la remarque (a) précédente et de la relation de congruence 1.6.4, que *l'orbite supersingulière* S, *munie du* $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$*-module universel à isogénie près polarisé, admet une description*

$G(\mathbb{A}^f) \times W(F_{\mathfrak{p}}^{ab}/F_{\mathfrak{p}})$-*équivariante comme l'ensemble quotient :*

$$S \simeq \Delta \underset{Z(\mathbb{Q})^\wedge . \bar{G}(\mathbb{Q})}{\times} \Gamma,$$

muni du $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$-*module à isogénie près :*

$$\Sigma \simeq \Sigma_\Delta \underset{Z(\mathbb{Q})^\wedge . \bar{G}(\mathbb{Q})}{\times} \Gamma$$

[où $Z(\mathbb{Q})^\wedge . \bar{G}(\mathbb{Q})$ agit à gauche sur Γ via l'isomorphisme entre $\bar{B} \otimes \mathbb{A}_F^{f,\,\mathfrak{p}}$ et $B \otimes \mathbb{A}_F^{f,\,\mathfrak{p}}$, et à droite sur Δ et Σ_Δ via le facteur local $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$].

10. — La représentation locale fondamentale

10.1. Soit $x \in S_{n,\,H}$ un point supersingulier de la fibre spéciale de $\mathbf{M}_{n,\,H} \bar{\otimes} \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$. Il résulte d'un travail de Brylinski (*cf.* Appendice, th. 1) que le groupe des cycles évanescents correspondants $R\,\Phi^1(\bar{E}_\lambda)_x$ s'obtient comme la cohomologie de la fibre générale géométrique du *complété* de l'hensélisé $(\mathbf{M}_{n,\,H} \bar{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n)_{(x)}$. *Il* s'identifie donc, avec les notations de 8.5, au groupe $\Phi^{K_\delta^n}(\Sigma_x, \bar{\psi}_x)$. Nous allons en déduire dans la suite, en utilisant la description donnée au paragraphe précédent de l'orbite supersingulière, une expression de la représentation $\mathscr{H}_2^K$ « évanescente » de (4.2) en termes d'une représentation « locale » du groupe produit $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \times GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times \bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$.

10.2. Le « fibré » sur Δ des cycles évanescents. — A chaque élément $\delta \in \Delta$ correspond l'espace vectoriel $\Phi(\delta) = \Phi(\Sigma(\delta), \psi(\delta))$ sur le corps $\bar{E}_\lambda$. Pour K un sous-groupe compact-ouvert de $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$, l'espace $\Phi^K(\delta)$ s'identifie à l'espace des invariants sous l'intersection $K \cap SL_2(F_{\mathfrak{p}})$ dans $\Phi(\delta)$, et il est de dimension finie. Pour δ décrivant Δ, les $\Phi(\delta)$ constituent un « fibré » sur Δ (cela doit doit être compris ensemblistement).

Les actions sur Δ des trois groupes $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}})$, $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ et $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$ se relèvent en des actions (qui commutent entre elles) sur le fibré Φ_Δ : le groupe de Weil agit par transport de structure, et l'action des deux autres s'obtient grâce à la proposition (8.4). Sur chaque fibre $\Phi_\delta (\delta \in \Delta)$ agissent les sous-groupes $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}^{ab})$, $SL_2(F_{\mathfrak{p}})$, et le sous-groupe $(\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*)_1$ de $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$ formé des éléments de norme 1. Il est bien clair que l'action du groupe $SL_2(F_{\mathfrak{p}})$ est *lisse* (i.e. le stabilisateur de tout vecteur est *ouvert*). Il en est de même, en vertu de (app, cor. du th. 1 et prop. 1), pour l'action du groupe $(\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*)_1$. Il résultera *a posteriori* de notre étude que l'action de $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}^{ab})$ est elle aussi lisse.

10.3. Sur l'espace des sections $H^0(\Delta, \Phi_\Delta)$ agit donc le groupe produit $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \times GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times \bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$. La *représentation locale fondamentale* $\mathscr{U}$ sera par définition le sous-espace des sections laissées invariantes par un sous-groupe ouvert du centre $F_{\mathfrak{p}}^*$ de $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$ (ou, ce qui revient au même, du centre de $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$). On peut encore voir $\mathscr{U}$ comme la limite inductive :

$$\mathscr{U} = \varinjlim_{K} H^0(\Delta/K, \Phi^K).$$

C'est une représentation du groupe produit $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \times GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times \bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$, lisse sous $GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times \bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$.

Pour χ un caractère du centre de $F_{\mathfrak{p}}^*$, nous noterons $\mathscr{U}_\chi$ le sous-espace de $\mathscr{U}$ où le centre de $GL_2(F_{\mathfrak{p}}^*)$ agit par le caractère χ (le centre de $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$ agit alors par le caractère χ^{-1}). On remarquera que pour chaque caractère μ de $F_{\mathfrak{p}}^*$, la multiplication par une fonction s sur Δ vérifiant :

$$s(\delta . \alpha) = \mu(\alpha) s(\delta) \quad (\forall \alpha \in F_{\mathfrak{p}}^*, \delta \in \Delta)$$

induit un isomorphisme entre $\mathscr{U}_\chi$ et $\mathscr{U}_{\chi\mu^{-2}}$. La représentation $\mathscr{U}_{\chi\mu^{-2}}$ se déduit donc de $\mathscr{U}_\chi$ par torsion par le caractère

$$(\mu \circ \rho) \otimes (\mu \circ \det)^{-1} \otimes (\mu \circ \bar{\nu})$$

du groupe $W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \times GL_2(F_{\mathfrak{p}}) \times \bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$, où $\rho : W(\bar{F}_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}) \mapsto F_{\mathfrak{p}}^*$ est le morphisme de la théorie du corps de classes, et où $\bar{\nu}$ désigne la norme réduite sur $\bar{B}_{\mathfrak{p}}$.

10.4. Théorie globale. — De ce qui précède, de la description 9.4 de l'orbite supersingulière, et de la proposition 8.4, il résulte que l'espace $\mathscr{H}_2^{n,\,H}$ de cohomologie évanescente de $\mathbf{M}_{n,\,H} \bar{\otimes} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^n$ s'identifie naturellement à l'espace des sections au-dessus de $(\Delta/K_{\mathfrak{p}}^n \underset{\bar{G}(\mathbb{Q})}{\times} \Gamma/H)$ du fibré

$$\bar{G}(\mathbb{Q}) \backslash [(\Phi^{K_{\mathfrak{p}}^n} \underset{\bar{E}_\lambda}{\otimes} \bar{W}_\lambda) \times (\Gamma/H)]$$

où $\bar{G}(\mathbb{Q})$ agit sur $\bar{W}_\lambda$, comme en 6.2, via $\bar{G}(\mathbb{Q}_l) \simeq G(\mathbb{Q}_l)$, par la représentation ξ.

L'espace $\mathscr{H}_2^{n,\,H}$ s'identifie donc à l'espace des fonctions :

$$f : \quad \Gamma \to \mathscr{U}^{K_{\mathfrak{p}}^n} \underset{\bar{E}_\lambda}{\otimes} \bar{W}_\lambda$$

qui vérifient pour tous $\gamma \in \Gamma$, $h \in H$, $\theta \in \bar{G}(\mathbb{Q})$ la relation :

$$f(\theta \gamma h) = \theta_{\mathfrak{p}} . \xi(\theta_l) f(\gamma).$$

De la même manière qu'en 6.3, nous étendons les scalaires de $\bar{E}_\lambda$ à $\mathbb{C}$. L'espace $\mathscr{H}_{2,\,\mathbb{C}}^{n,\,H}$ s'identifie à l'espace des fonctions :

$$f : \quad \Gamma \to \mathscr{U}_{\mathbb{C}}^{K_{\mathfrak{p}}^n} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_{\mathbb{C}}$$

qui vérifient la relation fonctionnelle :

$$f(\theta \gamma h) = \theta_{\mathfrak{p}} . \xi_{\mathbb{R}}(\theta) . f(\gamma).$$

Une telle fonction étant donnée, on lui associe la fonction :

$$f' : \quad \Gamma \times \bar{B}_{\mathfrak{p}}^* \times \bar{G}(\mathbb{R}) \to \mathscr{U}_{\mathbb{C}}^{K_{\mathfrak{p}}^n} \otimes W_{\mathbb{C}}$$

définie par : $f'(\gamma, \bar{g}_{\mathfrak{p}}, \bar{g}_{\mathbb{R}}) = \bar{g}_{\mathfrak{p}}^{-1} . \xi_{\mathbb{R}}(\bar{g}_{\mathbb{R}})^{-1} . f(\gamma)$.

On constate alors de façon analogue à 6.3 que l'application $f \to f'$ identifie l'espace $\mathscr{H}^{n,\,\mathrm{H}}_{2,\,\mathbb{C}}$ à l'espace des fonctions :

$$f' : \quad \bar{\mathrm{G}}(\mathbb{A}) \to \mathscr{U}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{K}_{\mathfrak{p}}^n} \otimes \mathrm{W}_{\mathbb{C}}$$

qui sont invariantes à gauche par $\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{Q})$, à droite par H, et qui vérifient, pour $g_{\mathfrak{p}} \in \bar{\mathrm{B}}_{\mathfrak{p}}^*$ et $g_{\mathbb{R}} \in \bar{\mathrm{G}}(\mathbb{R})$, la relation fonctionnelle :

$$f'(x g_{\mathfrak{p}} g_{\mathbb{R}}) = g_{\mathfrak{p}}^{-1} . \xi_{\mathbb{R}}(g_{\mathbb{R}})^{-1} f'(x).$$

10.5. Notons, de façon analogue à 6.4 :

$$\mathrm{L}_{\mathrm{W}_{\mathbb{C}}^{\vee}} \underset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{n,\,\mathrm{H}} [\mathrm{L}^2(\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{Q}) \backslash \bar{\mathrm{G}}(\mathbb{A}) / \bar{\mathrm{K}}_{\mathfrak{p}}^n \times \mathrm{H}) \otimes \mathrm{W}_{\mathbb{C}}]^{\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{R})}$$

(où $\bar{\mathrm{K}}_{\mathfrak{p}}^n$ désigne le sous-groupe de n-congruence dans $\bar{\mathrm{B}}_{\mathfrak{p}}^*$).

C'est l'espace d'une représentation de l'algèbre de Hecke $\mathrm{H}(\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{A}^f))$, et il se décompose comme la somme directe :

$$\mathrm{L}_{\mathrm{W}_{\mathbb{C}}^{\vee}} = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{C}} \bar{\pi}^f$$

où maintenant $\bar{\mathrm{C}}$ désigne l'ensemble des représentations automorphes du groupe $\bar{\mathrm{G}}(\mathbb{A})$, de composantes archimédiennes données par : $\bar{\pi}_{\tau_i} \simeq \bar{\mathrm{D}}_{k_i,\,w}$.

Il résulte alors de ce qui précède que la représentation $\mathscr{H}_{2,\,\mathbb{C}}$ s'identifie à l'espace des $(\bar{\mathrm{B}}_{\mathfrak{p}}^*)$-invariants dans le produit tensoriel :

$$\mathrm{L}_{\mathrm{W}_{\mathbb{C}}^{\vee}} \otimes \mathscr{U}_{\mathbb{C}}.$$

Autrement dit, si pour chaque représentation lisse irréductible $\bar{\pi}_{\mathfrak{p}}$ du groupe $\bar{\mathrm{B}}_{\mathfrak{p}}^*$ nous notons $\mathscr{U}_{\mathbb{C}}(\bar{\pi}_{\mathfrak{p}})$ la composante isotypique correspondante [c'est donc une représentation du groupe produit $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}) \times \mathrm{W}(\bar{\mathrm{F}}_{\mathfrak{p}}/\mathrm{F}_{\mathfrak{p}})$], on a la décomposition :

$$\mathscr{H}_{2,\,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{C}} \bar{\pi}^{f,\,\mathfrak{p}} \otimes \mathscr{U}_{\mathbb{C}}(\bar{\pi}_{\mathfrak{p}}^{\vee}).$$

10.6. Nous comparons maintenant la décomposition précédente à la décomposition 4.3 de son sous-espace $\tilde{\mathscr{H}}_{2,\,\mathbb{C}}$:

$$\tilde{\mathscr{H}}_{2,\,\mathbb{C}} = \bigoplus_{\pi \in \mathrm{C}} \pi^f \otimes \sigma_2(\pi)_{\mathbb{C}}.$$

Parce que la correspondance de Jacquet-Langlands fait se correspondre bijectivement les $\pi \in \mathrm{C}$ dont la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$ est essentiellement de carré intégrable et les $\bar{\pi} \in \bar{\mathrm{C}}$ qui ne sont pas des caractères, la comparaison des deux formules précédentes nous donne (compte tenu des résultats des paragraphes 5 et 6), la proposition :

PROPOSITION. — *Soit $\pi \in \mathrm{C}$. La représentation $\sigma_2(\pi)$ est non nulle si et seulement si la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$ est essentiellement de carré intégrable. Dans ce cas la représentation $\sigma_2(\pi)$ se calcule « localement » par la formule : $\pi_{\mathfrak{p}} \otimes \sigma_2(\pi)_{\mathbb{C}} = \mathscr{U}_{\mathbb{C}}(\bar{\pi}_{\mathfrak{p}}^{\vee})$, où $\bar{\pi}_{\mathfrak{p}}$ désigne la*

représentation de $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$ *qui correspond à* $\pi_{\mathfrak{p}}$ *par la correspondance de Jacquet-Langlands. En particulier, elle ne dépend que de la composante locale* $\pi_{\mathfrak{p}}$.

Dans le cas où tous les k_i sont égaux à 2, il figure dans la somme ci-dessus donnant $\mathscr{H}_{2,\mathbb{C}}$ des caractères de $\bar{G}(\mathbb{A})$. La somme correspondant à ces termes constitue la représentation Λ de 4.3.

Remarque. — On peut se dispenser, si on le désire, de faire usage dans ce qui précède d'un isomorphisme entre $\bar{E}_\lambda$ et $\mathbb{C}$. Pour cela, la méthode est la même que celle esquissée en 6.8.

11. Preuve du théorème (B)

11.1. Soit π une représentation automorphe du groupe $GL_2(\mathbb{A}_F)$ vérifiant les hypothèses du théorème (B). La construction du paragraphe 2, via la correspondance de Jacquet-Langlands, associe alors alors à π un système $\sigma^\lambda(\pi)$ de représentations λ-adiques du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. En une place finie $\mathfrak{p} \neq v$ de F, la représentation $\sigma_{\mathfrak{p}} = \sigma_{\mathfrak{p}}^\lambda(\pi)$ du groupe de Weil local s'insère dans le diagramme suivant de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & {}^s\sigma_1 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
0 & \to & \sigma_1 & \to & \sigma_{\mathfrak{p}} & \to & \sigma_2 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & \hat{\sigma}_1 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Rappelons les implications suivantes, prouvées dans les paragraphes précédents:

5.6.1. $\det \sigma_{\mathfrak{p}} = \det \sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$.

5.6.2. $\hat{\sigma}_1 \neq 0 \Rightarrow \pi_{\mathfrak{p}}$ principale.

5.6.3. $\dim \hat{\sigma}_1 = 2 \Rightarrow \sigma_{\mathfrak{p}} = \hat{\sigma}_1 = \sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$.

6.7. ${}^s\sigma_1 \neq 0 \Leftrightarrow \pi_{\mathfrak{p}}$ spéciale, et alors ${}^s\sigma_1$ est l'unique sous-représentation de dimension 1 de la représentation (spéciale) $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$.

10.6. $\sigma_2 \neq 0 \Leftrightarrow \pi_{\mathfrak{p}}$ spéciale ou cuspidale, et alors σ_2 ne dépend que de la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$.

Combinant ces résultats, on trouve que:

(*a*) Si $\pi_{\mathfrak{p}}$ est principale, alors (d'après 5.6.3, 6.7 et 10.6) la conclusion du théorème (B′), et donc celle du théorème (B), est prouvée à la place $\mathfrak{p}$.

(*b*) Si $\pi_{\mathfrak{p}}$ est spéciale, alors (d'après 5.6.1 et 6.7) la représentation $\sigma_{\mathfrak{p}}$ a même semi-simplifiée que $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$. Pour conclure, il nous faudra encore prouver que $\sigma_{\mathfrak{p}}$ est *indécomposable.*

(*c*) Si $\pi_{\mathfrak{p}}$ est cuspidale, alors (d'après 5.6.2, 6.7 et 10.6) la représentation $\sigma_{\mathfrak{p}} = \sigma_2$ ne dépend que de la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$.

11.2. Soit π comme ci-dessus, telle qu'en une place $\mathfrak{p} \neq v$ la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$ soit cuspidale *ordinaire.* Il existe donc une extension quadratique $L_{\mathfrak{p}}$ de $F_{\mathfrak{p}}$ et un caractère $\zeta_{\mathfrak{p}}$ de $L_{\mathfrak{p}}^*$ telle que $\pi_{\mathfrak{p}}$ soit isomorphe à la représentation $\mathscr{W}(L_{\mathfrak{p}}^*, \zeta_{\mathfrak{p}})$ obtenue par la construction de Weil (*cf.* par exemple [Gel], § 7). D'autre part, la représentation $D_{k,w}$ s'obtient par la représentation de Weil archimédienne, comme la représentation $\mathscr{W}(\mathbb{C}, \zeta_{k,w})$, où $\zeta_{k,w}$ désigne le caractère suivant de $\mathbb{C}^*$:

$$z \to (z\bar{z})^{(-w-k+1)/2} z^{k-1}.$$

Il est standard de vérifier qu'il existe un couple (L, ζ) formé d'une extension quadratique imaginaire L de F et d'un grössencharakter ζ de $\mathbb{A}_L^*$, vérifiant les propriétés suivantes:

(*a*) $L \underset{F}{\otimes} F_{\mathfrak{p}} \simeq L_{\mathfrak{p}}$, et la composante locale de ζ en $\mathfrak{p}$ est égale à $\zeta_{\mathfrak{p}}$.

(*b*) $\zeta_{\tau_i} \simeq \zeta_{k_i, w}$.

(*c*) L'extension L/F n'est pas décomposée en v, et ζ_v ne se factorise pas à travers la norme de L_v^* à F_v^*.

Il correspond alors à ζ, par la construction de Weil globale, une représentation automorphe $\pi' = \mathscr{W}(L, \zeta)$ du groupe $GL_2(\mathbb{A}_F)$, vérifiant les hypothèses du théorème (B), et admettant la même composante locale en $\mathfrak{p}$ que π. Le calcul de $\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi)$ se ramène donc au calcul de $\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi')$, d'après 11.1.*c*.

11.3. Pour une extension quadratique L_w/F_w de corps locaux (éventuellement décomposée) et pour un caractère ζ_w de L_w^*, il correspond par la correspondance de Hecke à la représentation $\mathscr{W}(L_w, \zeta_w)$ du groupe $GL_2(F_w)$ la représentation $\mathrm{Ind}_{W_{L_w}}^{W_{F_w}}(\zeta_w^{-1}\omega_w^{-1/2})$ du groupe de Weil local W_{F_w}.

Au grössencharakter $\zeta^{-1}\omega^{-1/2}$ de $\mathbb{A}_L^*$, dont les composantes archimédiennes sont donc données par

$$z \to z^{(w-k_i)/2}\, \bar{z}^{((w+k_i)/2)-1},$$

il correspond par la théorie du corps de classes global un système $\{\alpha^\lambda\}$ de caractères continus λ-adiques du groupe Gal $(\bar{L}/L)$. Induisant à Gal $(\bar{F}/F)$, on obtient un système de représentations λ-adiques de dimension 2 de ce dernier.

En presque chaque place w de F, π'_w est principale, et d'après 11.1.*a* la restriction $\sigma_w(\pi')$ est équivalente à la restriction $(\mathrm{Ind}\,\alpha)_w$. Du théorème de Čebotarev, il résulte alors que $\sigma(\pi')$ est équivalente à $(\mathrm{Ind}\,\alpha)$. On a donc en particulier:

$$\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi') \simeq \mathrm{Ind}_{W_{L_{\mathfrak{p}}}}^{W_{F_{\mathfrak{p}}}}(\zeta_{\mathfrak{p}}^{-1}\omega_{\mathfrak{p}}^{-1/2}).$$

Cela prouve le théorème (B) en une place $\mathfrak{p} \neq v$ de F où la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$ est cuspidale ordinaire.

11.4. Pour parachever la preuve du théorème (B), il ne nous reste qu'à prouver que, lorsque la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$ est spéciale, la représentation réductible $\sigma_{\mathfrak{p}}(\pi)$ n'est pas décomposée. Pour K un sous-groupe de $G(\mathbb{A}^f)$ comme en 4.1, il résulte de tout ce qui précède que le logarithme N de la partie unipotente de la monodromie (SGA7, I) envoie $\mathscr{H}^K(1)$ dans ${}^s\mathscr{H}_1^K$. Il nous faut montrer que l'image de N est ${}^s\mathscr{H}_1^K$ tout entier. Pour cela, on considère un modèle stable $\tilde{\mathbf{M}}_{n,H,R}$ comme en 4.8. Il résulte de 4.8 que ${}^s\mathscr{H}_1^K$ s'injecte dans l'objet analogue défini en termes de ce modèle stable: à savoir, notant pour simplifier $X=\tilde{\mathbf{M}}_{n,H,R}$, et considérant la normalisée $\hat{X}_{\bar{s}}$ de la fibre spéciale $X_{\bar{s}}$ de X, le noyau du morphisme (surjectif):

$$H^1(X_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}}) \to H^1(\hat{X}_{\bar{s}}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}}).$$

Désignant par $X_{\bar{\eta}}$ la fibre géométrique générique de X, il nous suffit donc de prouver la proposition suivante:

PROPOSITION. — *Le morphisme* N *envoie surjectivement* $H^1(X_{\bar{\eta}}, \tilde{\mathscr{F}})(1)$ *sur* $\operatorname{Ker}(H^1(X_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}}) \to H^1(\hat{X}_{\bar{s}}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}}))$.

Dans le cas où $F=\mathbb{Q}$, cette proposition — modifiée pour tenir compte de la non-compacité de X — est prouvée à la fin de l'article [L.1] en application de la théorie de Picard-Lefschetz. La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration (identique) dans le cas général où F est différent de $\mathbb{Q}$. Nous supposerons choisi dans la suite un isomorphisme entre $\bar{\mathbb{Q}}_l$ et $\bar{\mathbb{Q}}_l(1)$, ce qui nous dispensera d'écrire les twists à la Tate.

11.5. REMARQUES SUR LE FAISCEAU $\mathscr{F}$. — On a vu en 4.1 comment le faisceau $\mathscr{F}$ s'obtenait à partir du revêtement $\mathbf{M}_n \to \mathbf{M}_{n,H}$ et de la représentation ξ_l du groupe $G(\mathbb{Q}_l)$. Cette dernière représentation est algébrique absolument irréductible, et il en est de même de sa restriction au groupe dérivé $G_1(\mathbb{Q}_l)$. On en déduit sans peine que deux cas sont possibles:

— Ou bien tous les k_i sont égaux à 2, et alors le faisceau $\mathscr{F}$ est trivial sur chaque composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathbf{M}_{n,H}$.

— Sinon, pour chaque composante irréductible C de la fibre spéciale, on a: $H^0(C, \mathscr{F})=0$. Utilisant la dualité de Poincaré, on voit aussi qu'on a alors: $H^2(C, \mathscr{F})=0$ (rappelons que C est lisse).

Il en résulte que, dans tous les cas, pour chaque composante connexe $\hat{C}$ de $\hat{X}_{\bar{s}}$:

— ou bien $\hat{\tilde{\mathscr{F}}} \mid \hat{C}$ est constant;

— ou bien $H^0(\hat{C}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}}) = H^2(\hat{C}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}}) = 0$.

11.6. Notons pour simplifier $R\Phi_x^1 = R\Phi_x^1(\bar{E}_\lambda) = R\Phi_x^1(\bar{\mathbb{Q}}_l)$; comme $\mathscr{F}$ est lisse, on a: $R\Phi_x^1(\mathscr{F}) = R\Phi_x^1 \underset{\bar{E}_\lambda}{\otimes} \mathscr{F}_x$, et la suite exacte des cycles évanescents pour le morphisme $X \to \operatorname{Spec} R$ s'écrit:

$$0 \to H^1(X_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}}) \to H^1(X_{\bar{\eta}}, \tilde{\mathscr{F}}) \to \bigoplus_{x \in \tilde{S}} R\Phi_x^1 \otimes \tilde{\mathscr{F}}_x \to H^2(X_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}}) \to H^2(X_{\bar{\eta}}, \tilde{\mathscr{F}}) \to 0$$

où $\tilde{S}$ désigne l'ensemble des points singuliers de $X_{\bar{s}}$. Le morphisme N se calcule à l'aide

du diagramme commutatif (*cf.* SGA 7, XIII, 2.4.6):

$$\begin{array}{ccc} H^1(X_{\bar\eta}, \tilde{\mathscr{F}}) & \xrightarrow{N} & H^1(X_{\bar\eta}, \tilde{\mathscr{F}}) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \bigoplus_{x\in\tilde S} R\,\Phi^1_x \otimes \tilde{\mathscr{F}}_x & \xrightarrow{\oplus N_x \otimes 1} & \bigoplus_{x\in\tilde S} \mathbb{H}^1_{\{x\}}(X_{\bar s}, R\,\psi(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \otimes \tilde{\mathscr{F}}_x \end{array}$$

où, pour chaque $x \in \tilde{S}$, N_x désigne le logarithme de la variation locale en x.

11.7. Pour $x \in \tilde{S}$ notons B_x l'ensemble à deux éléments constitué des *branches* de $X_{\bar s}$ en x. Pour un tel point x, on dispose d'un isomorphisme (SGA7, XV, 3.3):

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^1_{\{x\}}(X_{\bar s}, R\,\psi(\bar{\mathbb{Q}}_l)) &\simeq H^1_{\{x\}}(X_{\bar s}, \bar{\mathbb{Q}}_l) \\ &\simeq \bar{\mathbb{Q}}_l^{B_x}/\bar{\mathbb{Q}}_l \end{aligned}$$

(où $\bar{\mathbb{Q}}_l$ est plongé diagonalement dans $\bar{\mathbb{Q}}_l^{B_x}$), et d'une suite exacte:

$$0 \to R\,\Phi^1_x \to H^2_{\{x\}}(X_{\bar s}, \bar{\mathbb{Q}}_l) \to \mathbb{H}^2_{\{x\}}(X_{\bar s}, R\,\psi(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \to 0$$

avec $H^2_{\{x\}}(X_{\bar s}, \bar{\mathbb{Q}}_l) \simeq \bar{\mathbb{Q}}_l^{B_x}$. D'autre part, le morphisme trace identifie $\mathbb{H}^2_{\{x\}}(X_{\bar s}, R\,\psi(\bar{\mathbb{Q}}_l))$ à $\bar{\mathbb{Q}}_l$. Il résulte de la formule de Picard-Lefschetz que N_x est un *isomorphisme* entre $R\,\Phi^1_x$ et $\mathbb{H}^1_{\{x\}}(X_{\bar s}, R\,\psi(\bar{\mathbb{Q}}_l))$ (*cf.* SGA7, XV, 3.3).

11.8. Notons $\hat{\tilde{S}}$ l'image inverse de $\tilde{S}$ dans $\hat{X}_{\bar s}$. On dispose d'un diagramme commutatif dont les lignes horizontales sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^0(X_{\bar s}, \mathscr{F}) & \to & H^0(X_{\bar s} - \tilde{S}, \tilde{\mathscr{F}}) & \to & H^1_{\tilde S}(X_{\bar s}, \tilde{\mathscr{F}}) & \to & H^1(X_{\bar s}, \tilde{\mathscr{F}}) & \to & H^1(X_{\bar s} - \tilde{S}, \tilde{\mathscr{F}}) \\ & & \wr\| & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| \\ 0 & \to & H^0(X_{\bar s}, \mathscr{F}) = H^0(X_{\bar s} - S, \mathscr{F}) & \to & H^1_{\hat{\tilde S}}(\hat X_{\bar s}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}}) & \to & H^1(\hat X_{\bar s}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}}) & \to & H^1(\hat X_{\bar s} - \hat{\tilde S}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}}) \end{array}$$

(la nullité de $H^1_{\hat{\tilde S}}(\hat X_{\bar s}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}})$ résulte de la lisseté de $\hat X_{\bar s}$ et de $\mathscr{F}$).

D'où il résulte l'égalité:

$$\operatorname{Ker}(H^1(X_{\bar s}, \tilde{\mathscr{F}}) \to H^1(\hat X_{\bar s}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}})) = \operatorname{Im}(H^1_{\tilde S}(X_{\bar s}, \tilde{\mathscr{F}}) \to H^1(X_{\bar s}, \tilde{\mathscr{F}})).$$

Pour prouver la proposition 11.3, il nous suffit maintenant de montrer que l'isomorphisme composé:

$$\bigoplus_{x\in\tilde S} R\,\Phi^1_x \otimes \tilde{\mathscr{F}}_x \xrightarrow{\oplus N_x \otimes 1} \bigoplus_{x\in\tilde S} \mathbb{H}^1_{\{x\}}(X_{\bar s}, R\,\psi(\bar{\mathbb{Q}}_l)) \otimes \tilde{\mathscr{F}}_x \xrightarrow{\sim} H^1_{\tilde S}(X_{\bar s}, \tilde{\mathscr{F}})$$

induit un isomorphisme entre le sous-espace de $\oplus \mathrm{R}\,\Phi_x^1 \otimes \tilde{\mathscr{F}}_x$ constitué des éléments d'image nulle dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$ et le quotient de $\mathrm{H}^1_{\tilde{\mathrm{S}}}(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$ par l'image de $\mathrm{H}^0(\hat{\mathrm{X}}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$. Or ces deux espaces ont même dimension (parce qu'il en est ainsi (*cf.* 11.5) pour $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$ et $\mathrm{H}^0(\hat{\mathrm{X}}_{\bar{s}}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}})$ d'une part, et pour $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{\eta}}, \tilde{\mathscr{F}})$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$ d'autre part), et il suffit donc de montrer que l'application induite est injective.

11.9. Nous introduisons maintenant le graphe ayant pour sommets l'ensemble $\mathscr{C}$ des composantes irréductibles de $\mathrm{X}_{\bar{s}}$ (ou ce qui revient au même, l'ensemble des composantes connexes de $\hat{\mathrm{X}}_{\bar{s}}$) et pour arêtes l'ensemble $\tilde{\mathrm{S}}$. Les deux extrémités (éventuellement confondues) d'une arête x sont les composantes passant par x. Nous choisissons de plus pour chaque $x \in \tilde{\mathrm{S}}$ un ordre sur B_x, et cela définit une orientation de notre graphe. Notons enfin $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}$ l'ensemble des composantes où $\mathscr{F}$ est constant.

Les espaces isomorphes $\bigoplus_{\tilde{\mathrm{S}}} \mathrm{R}\,\Phi_x^1 \otimes \mathscr{F}_x$ et $\mathrm{H}^1_{\tilde{\mathrm{S}}}(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$ s'identifient alors à la somme directe: $\bigoplus_{x \in \tilde{\mathrm{S}}} \bar{\mathrm{W}}_\lambda$, autrement dit à l'espace des applications de l'ensemble des arêtes du graphe dans l'espace $\bar{\mathrm{W}}_\lambda$ (*cf.* 6.2).

L'espace $\mathrm{H}^0(\hat{\mathrm{X}}_{\bar{s}}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}})$ s'identifie à la somme $\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathscr{C}_1} \bar{\mathrm{W}}_\lambda$, espace des applications de $\mathscr{C}_1$ dans $\bar{\mathrm{W}}_\lambda$. Il s'envoie dans l'espace ci-dessus de la manière suivante: à une application g de $\mathscr{C}_1$ dans $\bar{\mathrm{W}}_\lambda$, prolongée par zéro à $\mathscr{C}$ tout entier, on fait correspondre l'application f qui à une arête a d'origine $o(a)$ et d'extrémité $e(a)$ associe:

$$f(a) = g(o(a)) - g(e(a)).$$

L'espace $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$ s'identifie à la même somme $\bigoplus_{\mathscr{C}_1} \bar{\mathrm{W}}_\lambda$. L'application de $\bigoplus_{\tilde{\mathrm{S}}} \mathrm{R}\,\Phi_x^1 \otimes \tilde{\mathscr{F}}_x$ dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_{\bar{s}}, \tilde{\mathscr{F}})$ se calcule de la façon suivante: à une fonction f définie sur les arêtes du graphe à valeurs dans $\bar{\mathrm{W}}_\lambda$, on associe la fonction g sur $\mathscr{C}_1$ définie par:

$$g(\mathrm{C}) = \sum_{a \text{ d'origine } \mathrm{C}} f(a) - \sum_{b \text{ d'extrémité } \mathrm{C}} f(b).$$

11.10. Il nous faut montrer que le noyau du morphisme qu'on vient de définir admet une intersection réduite à zéro avec l'image de $\mathrm{H}^0(\hat{\mathrm{X}}_{\bar{s}}, \hat{\tilde{\mathscr{F}}})$. Pour cela, on considère les espaces déduits des précédents en remplaçant $\bar{\mathrm{W}}_\lambda$ par $\mathbb{Q}$, autrement dit les espaces $\bigoplus_{x \in \tilde{\mathrm{S}}} \mathbb{Q}$ et $\bigoplus_{\mathscr{C}_1} \mathbb{Q}$. On voit aussitôt que tous les morphismes précédemment définis proviennent, par produit tensoriel par l'identité de $\bar{\mathrm{W}}_\lambda$, de morphismes entre $\bigoplus_{x \in \tilde{\mathrm{S}}} \mathbb{Q}$ et $\bigoplus_{\mathscr{C}_1} \mathbb{Q}$. Le lemme suivant sera donc suffisant pour achever la démonstration:

LEMME. — $\mathrm{Im}(\bigoplus_{\mathscr{C}_1} \mathbb{Q} \to \bigoplus_{\tilde{\mathrm{S}}} \mathbb{Q})$ *et* $\mathrm{Ker}(\bigoplus_{\tilde{\mathrm{S}}} \mathbb{Q} \to \bigoplus_{\mathscr{C}_1} \mathbb{Q})$ *sont orthogonaux pour le produit scalaire standard sur* $\bigoplus_{\tilde{\mathrm{S}}} \mathbb{Q}$.

En effet, soit $f_1 \in \mathrm{Im}$ correspondant à la fonction caractéristique de $C \in \mathscr{C}_1$, et soit $f_2 \in \mathrm{Ker}$. On a, pour $a \in \tilde{S}$:

$$f_1(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est d'origine C et d'extrémité distincte,} \\ -1 & \text{si } a \text{ est d'extrémité C et d'origine distincte,} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

et donc:

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{a \text{ d'origine } C} f_2(a) - \sum_{b \text{ d'extrémité } C} f_2(b) = 0.$$

Q.E.D.

12. — Preuve du théorème (A) (par « changement de base »)

12.1. Rappels et compléments sur les représentations galoisiennes locales primitives. — 12.1.1. Soit σ une représentation de degré 2 irréductible du groupe de Weil W_F d'un corps local F. La représentation *projective* associée

$$P\sigma: \quad W_F \to PGL_2(\mathbb{C})$$

admet alors pour image un sous-groupe *fini* de $PGL_2(\mathbb{C})$. Il est bien connu que les sous-groupes finis du groupe $PGL_2(\mathbb{C})$ [isomorphe au groupe orthogonal SO (3)] sont de l'un des types suivants:

(1) Les groupes *cycliques*: ils correspondent aux représentations *réductibles.*

(2) Les groupes *diédraux*: ils correspondent aux représentations σ qui sont *irréductibles monomiales.*

(3) Le groupe des *rotations du tétraèdre* régulier (isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$).

(4) Le groupe des *rotations du cube ou de l'octaèdre* régulier (isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$).

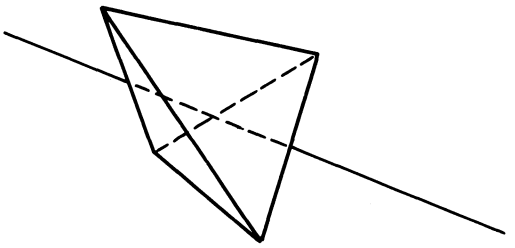
(5) Le groupe des *rotations de l'isocaèdre ou du dodécaèdre* (isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$).

Parce que les groupes de Weil locaux sont *résolubles*, le dernier cas ne se présente pas. L'image de la représentation projective associée à une représentation *primitive* du groupe W_F est donc isomorphe soit au groupe $\mathfrak{A}_4$ (cas « tétraédal ») soit au groupe $\mathfrak{G}_4$ (cas « octaédral »).

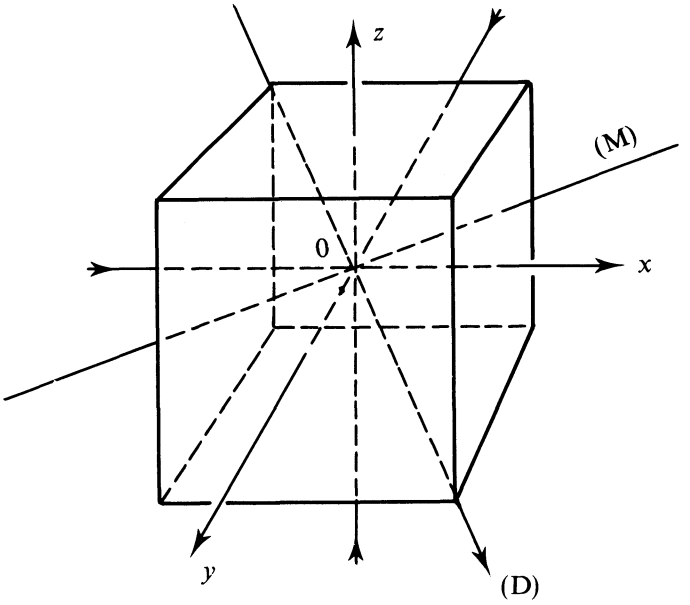
12.1.2. *Sous-groupes d'indice* 3 *des groupes* $\mathfrak{A}_4$ *et* $\mathfrak{S}_4$. — Dans chacun de ces deux groupes, un 2-groupe de Sylow est un sous-groupe d'indice 3 de type diédral. Nous donnons ci-dessous des renseignements supplémentaires et la réalisation géométrique de ces sous-groupes de Sylow.

(*a*) *Cas tétraédral.* — Le groupe des rotations du tétraèdre est isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ par l'application qui associe à une telle rotation la permutation des sommets qu'elle induit. Le sous-groupe constitué de l'identité et des trois retournements autour des trois axes joignant les milieux des arêtes opposées est alors un 2-sous-groupe de

Sylow (isomorphe au produit $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$) et il est *distingué*. C'est donc l'*unique* sous-groupe d'indice 3 dans $\mathfrak{A}_4$.



(*b*) *Cas octaédral.* — Le groupe des rotations du cube est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ par l'application qui associe à une rotation la permutation des quatre *diagonales* (droites joignant deux sommets opposés) qu'elle induit. Notons Ox, Oy, Oz les trois axes joignant les milieux de deux faces opposées, et nommons *médianes* les droites joignant les milieux de deux arêtes opposées.



Voici la liste des rotations du cube. Nous notons successivement l'axe de la rotation, son angle, le nombre de rotations d'un type considéré, et un signe + ou − suivant

qu'on est ou non dans le sous-groupe $\mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{S}_4$.

.....identité.....		1	+
Ox, Oy ou Oz	$\pm\pi/2$	6	−
Ox, Oy ou Oz	π	3	+
Médiane	π	6	−
Diagonale	$\pm\frac{2\pi}{3}$	8	+

On obtient alors un 2-groupe de Sylow H comme le stabilisateur de l'un des Ox, Oy ou Oz. Il existe donc dans ce cas *trois* sous-groupes d'indice trois possibles (deux à deux conjugués). Celui correspondant à Ox se compose de :

– l'identité,

– les rotations d'axe Ox d'angle $\pm\pi/2$ ou π,

– les retournements par rapport à l'une des deux médianes perpendiculaires à Ox,

– les retournements par rapport à Oy ou Oz.

On voit aussitôt, en consultant la liste précédente, que tout élément de $\mathfrak{S}_4$ est *conjugué* à un élément de la réunion $H \cup \mathfrak{A}_4$.

12.1.3. *Restriction d'une représentation primitive du groupe* W_F. – Soit σ comme en 12.1.1 une représentation primitive du groupe W_F et choisissons comme en 12.1.2 un sous-groupe d'indice 3, noté H, dans l'image de la représentation projective $P\sigma$. L'image inverse de H est alors un sous-groupe d'indice 3 dans W_F, auquel correspond une extension cubique L de F (galoisienne dans le cas tétraédral mais non dans le cas octaédral). La restriction de σ au groupe W_L est alors une représentation irréductible monomiale. Le lemme suivant joue un rôle crucial dans notre démonstration du théorème (A):

LEMME. – *Soit σ comme ci-dessus, et soit σ' une autre représentation (de degré 2) du groupe W_F. Supposons que la restriction $\sigma' | W_L$ soit équivalente à la restriction $\sigma | W_L$ et que le déterminant de σ' soit égal à celui de σ. Alors les représentations σ et σ' sont équivalentes.*

12.1.4. *Preuve du lemme.* – (*a*) Dans le cas tétraédral, c'est bien connu. On utilise l'égalité:

$$\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_F}(\sigma | W_L) = \sigma \oplus \sigma . \chi \oplus \sigma . \chi^2$$

où χ désigne l'un des deux caractères non triviaux du groupe quotient W_F/W_L. L'égalité analogue vaut pour la représentation σ', d'où il résulte que σ et σ' diffèrent par une torsion par un caractère d'ordre divisant 3; l'équivalence de σ et σ' découle alors aussitôt de l'égalité des déterminants.

(*b*) Plaçons-nous maintenant dans le cas octaédral. Notons alors W_M le sous-groupe d'indice 2 de W_F, image réciproque par $P\sigma$ du sous-groupe d'indice 2 (isomorphe à $\mathfrak{A}_4$) de l'image de $P\sigma$ (isomorphe à $\mathfrak{S}_4$). Il résulte alors de (*a*) que la restriction $\sigma' | W_M$ est équivalente à la restriction $\sigma | W_M$. Les *caractères* des représentations σ et σ' coïncident

donc sur la réunion $W_L \cup W_M$. Mais il résulte de la remarque finale de 12.1.2 que tout élément de W_F est conjugué à un élément de cette réunion. Étant invariants par conjugaison, les deux caractères sont donc égaux; d'où le lemme dans le cas octaédral.

12.2. Le changement de base cubique. — 12.2.1. La théorie du changement de base pour GL_2 a été développée par Langlands [L.2], en faisant usage de la formule des traces de Selberg, dans le cas d'une extension *galoisienne cyclique* de corps (locaux ou globaux). Cependant, des arguments fondés sur la théorie des fonctions L ont permis à Jacquet, Piatetskii-Shapiro et Shalika [J.P.S.S.] de définir aussi un tel changement de base dans le cas d'une extension *cubique non galoisienne*. Nous renvoyons le lecteur aux deux articles précités, et nous nous bornons à rappeler les généralités suivantes:

(*a*) Soit L/F une extension de degré 1, 2 ou 3 de corps locaux (le cas $L=F$ est trivial). Pour π une représentation admissible irréductible du groupe $GL_2(F)$, on définit alors un *relèvement local* $\Pi=\pi_{L/F}$; c'est une représentation admissible irréductible du groupe $GL_2(L)$. La relation entre π et Π s'exprime soit en termes de caractères [L.2], soit en termes de facteurs L et ε [J.P.S.S.].

(*b*) Ces relèvements locaux se recollent en un *relèvement global*: soit L/F une extension de degré $\leqq 3$ de corps de nombres, et soit $\pi=\otimes\pi_v$ une représentation automorphe parabolique du groupe $GL_2(\mathbb{A}_F)$. Alors il existe une représentation automorphe $\Pi=\otimes\Pi_w$ du groupe $GL_2(\mathbb{A}_L)$, telle que pour chaque place w de L au-dessus d'une place v de F, la composante locale Π_w soit le relèvement (pour l'extension L_w/F_v) de la composante locale π_v. Des critères faciles permettent de voir si Π est ou non parabolique.

12.2.2. Plaçons-nous dans le cas d'une extension locale L/F. Par la correspondance de Langlands (dont l'existence a été prouvée par Kutzko [Ku]), il correspond à chaque représentation admissible irréductible π du groupe $GL_2(F)$ une représentation σ du groupe de Weil-Deligne W'_F. Au relèvement $\Pi=\pi_{L/F}$ correspond une représentation Σ du groupe de Weil-Deligne W'_L. Le principe général du changement de base est le suivant: *la représentation Σ doit être la restriction à W'_L de la représentation σ*. Malheureusement, je ne connais pas de référence pour cette affirmation. Cela découle toutefois des définitions des articles précités dans le cas d'une représentation π de la série principale; on le vérifie aussi sans trop de mal dans le cas d'une représentation spéciale ou cuspidale ordinaire. Le cas qui nous intéresse ici est le cas cuspidal extraordinaire, et j'indique ci-dessous un argument (de nature globale) qui permet de le traiter.

Proposition. — *Soit* L/F *une extension de degré $\leqq 3$ de corps p-adiques, et soit π une représentation cuspidale extraordinaire du groupe $GL_2(F)$. Notons σ la représentation irréductible de degré 2 du groupe W_F qui correspond à π. Alors le relèvement $\Pi=\pi_{L/F}$ correspond à la restriction Σ de σ au groupe W_L.* (Noter que cette dernière restriction est irréductible).

Remarque. — Des compatibilités simples entre relèvement, torsion par un caractère non ramifié, et passage aux contragrédientes (pour lesquelles on renvoie aux articles précités) permettent de remplacer partout dans ce qui précède la correspondance de Langlands par celle « de Hecke ». Nous utiliserons la proposition précédente sous cette dernière forme.

12.2.3. *Preuve.* — On peut se ramener à supposer, après une éventuelle torsion par un caractère non ramifié, que le caractère central de π est d'ordre fini, et l'image de σ est alors finie. D'après ([Tu.1], th. 1.3) il existe un corps de nombres $\mathfrak{F}$, une place v_0 de $\mathfrak{F}$, un isomorphisme entre le complété $\mathfrak{F}_{v_0}$ et F, et une représentation $\boldsymbol{\sigma}$ du groupe Gal $(\bar{\mathscr{F}}/\mathscr{F})$, d'image finie, de type tétraédral ou octaédral, telle que sa restriction $\boldsymbol{\sigma}_{v_0}$ au groupe Gal$(\bar{\mathscr{F}}_{v_0}/\mathscr{F}_{v_0})$ soit isomorphe à σ. D'autre part, il résulte de [L.2] (dans le cas tétraédral) et de [Tu.2] (dans le cas octaédral) que la représentation $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie la conjecture d'Artin. D'après le chapitre 12 de [J.L], il existe alors une représentation automorphe parabolique $\boldsymbol{\pi}=\otimes\,\boldsymbol{\pi}_v$ du groupe $\mathrm{GL}_2\,(\mathbb{A}_{\mathfrak{F}})$ telle que, pour chaque place v de $\mathscr{F}$, la composante locale $\boldsymbol{\pi}_v$ corresponde par la correspondance de Langlands, à la restriction locale $\boldsymbol{\sigma}_v$. En particulier, $\boldsymbol{\pi}_{v_0}$ est donc isomorphe à π.

On voit sans peine qu'il est possible de choisir une extension $\mathfrak{L}/\mathfrak{F}$, telle qu'on ait un isomorphisme de F-extensions:

$$\mathfrak{L}\underset{\mathfrak{F}}{\otimes}\mathrm{F}\simeq\mathrm{L}.$$

Nous fixons un tel isomorphisme; autrement dit, notant w_0 la place de $\mathfrak{L}$ au-dessus de v_0, un isomorphisme $\mathfrak{L}_{w_0}\simeq\mathrm{L}$.

Notons $\boldsymbol{\Sigma}$ la restriction de $\boldsymbol{\sigma}$ au groupe Gal $(\bar{\mathfrak{L}}/\mathfrak{L})$. Cette restriction vérifie encore la conjecture d'Artin, et il lui correspond comme ci-dessus une représentation automorphe parabolique $\boldsymbol{\Pi}$ du groupe $\mathrm{GL}_2\,(\mathbb{A}_{\mathfrak{L}})$. Parce que l'on sait que, pour une représentation de la série principale, le relèvement automorphe correspond à la restriction galoisienne, on voit que pour presque tout couple (v, w) constitué d'une place v de $\mathfrak{F}$ et d'une place w de $\mathfrak{L}$ relevant v, la représentation $\boldsymbol{\Pi}_w$ est le relèvement de la représentation $\boldsymbol{\pi}_v$. En presque toute place, $\boldsymbol{\Pi}$ est donc le relèvement de $\boldsymbol{\pi}$. C'est donc vrai partout: en particulier, $\boldsymbol{\Pi}_{w_0}$ est le relèvement de $\boldsymbol{\pi}_{v_0}\simeq\pi$. Mais π correspond à σ, et $\boldsymbol{\Pi}_{w_0}$ à Σ.

Q.E.D.

12.3. Preuve du théorème (A). — Soit $\pi=\otimes\,\pi_w$ comme dans l'énoncé du théorème (A). Dans le cas où le degré d de F est pair, nous fixons une place finie v_0 où π_{v_0} est essentiellement de carré intégrable. Notons σ la représentation λ-adique de Gal $(\bar{\mathrm{F}}/\mathrm{F})$ qui correspond à π par le théorème (B).

12.3.1. Commençons par prouver la conclusion du théorème (A) en une place $\mathfrak{p}\neq v_0$. Le seul cas non traité par le théorème (B) est celui où la composante locale $\pi_{\mathfrak{p}}$ est cuspidale extraordinaire. Nous nous plaçons donc dans ce cas. Soit $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$ la représentation (primitive) de $\mathrm{W}_{\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}}$ qui correspond à $\pi_{\mathfrak{p}}$ par la correspondance de Hecke. Il nous faut montrer que la restriction $\sigma_{\mathfrak{p}}$ de σ à $\mathrm{W}_{\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}}$ est équivalente à $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$.

Nous choisissons comme en 12.1.3 une extension cubique de $\mathrm{F}_{\mathfrak{p}}$ telle que la restriction de $\sigma(\pi_{\mathfrak{p}})$ au groupe de Weil de ladite extension soit monomiale. Il est trivial qu'une telle extension locale peut s'obtenir à partir d'une extension cubique globale L/F, telle que L n'admette au-dessus de $\mathfrak{p}$ qu'une seule place $\mathfrak{p}'$, comme le complété $\mathrm{L}_{\mathfrak{p}'}$. On peut de plus supposer que sont satisfaites les conditions suivantes:

(*a*) L est totalement réelle,

(*b*) L est décomposée au-dessus de v_0.

Nous notons alors Π le relèvement de π à L. C'est une représentation automorphe parabolique du type considéré dans l'énoncé du théorème (B) (avec v l'une des trois places au-dessus de v_0). Nous notons Σ la représentation λ-adique du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ qui correspond à Π.

Pour presque tout couple (w, w') constitué d'une place w de F et d'une place w' de L qui la relève, on a :

$$\sigma_w = \sigma(\pi_w)$$
$$\Sigma_{w'} = \sigma(\Pi_{w'})$$

et donc, parce que le relèvement automorphe correspond, du moins presque partout, à la restriction galoisienne, on a presque partout :

$$\Sigma_{w'} = \mathrm{Res}^{W_L}_{W_{F_w}}(\sigma_w).$$

Appliquant le théorème de Čebotarev, on en déduit alors que :

$$\Sigma = \mathrm{Res}^{\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)}_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)}(\sigma).$$

D'où en particulier :

$$\Sigma_{\mathfrak{p}'} = \mathrm{Res}^{W_L}_{W_{F_\mathfrak{p}}}(\sigma_\mathfrak{p}).$$

La représentation $\sigma(\Pi_{\mathfrak{p}'})$ qui correspond à $\Pi_{\mathfrak{p}'}$ par la correspondance de Hecke n'est autre, d'après la proposition 12.2.2 et la remarque qui suit, que la restriction au groupe $W_{L_{\mathfrak{p}'}}$ de la représentation $\sigma(\pi_\mathfrak{p})$. La composante locale $\Pi_{\mathfrak{p}'}$ est donc cuspidale ordinaire, et le théorème (B) appliqué à Π nous fournit alors l'équivalence :

$$\sigma(\Pi_{\mathfrak{p}'}) \simeq \Sigma_{\mathfrak{p}'}$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{Res}^{W_L}_{W_{F_\mathfrak{p}}}\sigma(\pi_\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{Res}^{W_L}_{W_{F_\mathfrak{p}}}(\sigma_\mathfrak{p}).$$

On a d'autre part (*cf.* 5.6.1) :

$$\det\sigma(\pi_\mathfrak{p}) = \det\sigma_\mathfrak{p}$$

On conclut alors à l'équivalence $\sigma(\pi_\mathfrak{p}) \simeq \sigma_\mathfrak{p}$ par application du lemme 12.1.3.

12.3.2. La conclusion du théorème (A) est maintenant prouvée sauf dans le cas suivant : il existe une unique place finie v de F où la composante locale π_v est essentiellement de carré intégrable, et $\mathfrak{p} = v$. Pour traiter ce dernier cas, on considère alors une extension quadratique totalement réelle L/F décomposée en v. Le théorème (A) étant maintenant valide pour le relèvement Π de π à L — lequel admet deux composantes locales finies essentiellement de carré intégrable — un argument évident, analogue (mais beaucoup plus simple) à ce qui précède, et que nous laissons au lecteur, permet de conclure.

Q.E.D.

12.4. Remarque finale. — Pour terminer, nous revenons à la *représentation locale* fondamentale de 10.3. La proposition qui suit résulte aussitôt du théorème (A), de la proposition 10.6, de la remarque finale de 10.3, et du fait bien connu suivant (*cf.* [L.2], § 11) : soit $\pi_\mathfrak{p}$ une représentation essentiellement de carré intégrable du groupe $GL_2(F_\mathfrak{p})$. Après une torsion éventuelle par un caractère non ramifié, on peut

alors supposer que $\pi_{\mathfrak{p}}$ est la composante locale en $\mathfrak{p}$ d'une représentation automorphe π comme dans l'énoncé du théorème (A).

PROPOSITION. — *Soit χ un caractère de $F_{\mathfrak{p}}^*$. La représentation $\mathscr{U}_\chi$ de* 10.3 *se décompose alors comme la somme directe :*

$$\mathscr{U}_\chi = \bigoplus_{\pi} \sigma_2(\pi) \otimes \pi \otimes \bar{\pi}^\vee$$

où π décrit l'ensemble des représentations essentiellement de carré intégrable et de caractère central χ du groupe $GL_2(F_{\mathfrak{p}})$; pour une telle π, la représentation $\bar{\pi}$ est la représentation de $\bar{B}_{\mathfrak{p}}^*$ qui correspond à π par la correspondance de Jacquet-Langlands, et $\bar{\pi}^\vee$ sa contragrédiente; enfin, si π est cuspidale, $\sigma_2(\pi) = \sigma(\pi)$ est la représentation du groupe $W_{F_{\mathfrak{p}}}$ qui correspond à π par la correspondance de Hecke, et si π est spéciale, $\sigma_2(\pi)$ est l'unique quotient de dimension 1 *de $\sigma(\pi)$.*

On voit donc que, pour chaque corps p-adique, la représentation locale fondamentale « réalise » à la fois la correspondance de Langlands-Hecke locale et la correspondance de Jacquet-Langlands locale. Cette représentation locale fondamentale est aussi définie pour un corps local de caractéristique positive, et la proposition précédente doit être vraie aussi dans ce cas : cela doit résulter de la théorie des modules de Drinfel'd. Je n'en ai pas écrit la démonstration.

APPENDICE

par J. L. BRYLINSKI

Un lemme sur les cycles évanescents en dimension relative 1

Soit $S = \mathrm{Spec}(V)$ un trait hensélien, de point fermé s et de point générique η. Choisissons un point géométrique générique $\bar{\eta}$ de S, et soit $\bar{s}$ le point géométrique localisé en s. On note $\bar{S}$ le spectre du normalisé de V dans $k(\bar{\eta})$, de corps résiduel une extension inséparable de $k(\bar{s})$. On note $\mathrm{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ le groupe de Galois de $k(\bar{\eta})$ sur $k(\eta)$. Soit X un schéma au-dessus de S, soit $X_s = X \times_S s$, etc. On a un diagramme commutatif [SGA 7, exposé XIII, 1.3.2.1].

$$\begin{tikzcd}
X_{\bar{s}} \arrow[r, hook, "\bar{i}"] \arrow[d] & \bar{X} \arrow[r, hook, "\bar{j}"'] \arrow[d] & X_{\bar{\eta}} \arrow[d] \\
X_s \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[r, hook, "j"'] & X_\eta
\end{tikzcd}$$

Soit Λ un anneau de torsion, première à la caractéristique résiduelle p de S. Pour F un faisceau étale de Λ-modules sur X (ou, plus généralement, pour un objet de $D^+(X, \Lambda)$), et pour i un entier, Deligne définit un faisceau $R^i\psi_\eta(F)$ de Λ-modules sur $X_{\bar{s}}$, muni d'une action continue de Gal $(\bar{\eta}/\eta)$ (*loc. cit.*, construction 1.2.4, § 1.3 et § 2.1). On a $R^i\psi_\eta(F)_{\bar{x}} = H^i(X_{(\bar{x})} \times_{\eta_{nr}} \bar{\eta}, F)$ pour $\bar{x}$ un point fermé de $X_{\bar{s}}$, $X_{(\bar{x})}$ l'hensélisé strict de X en $\bar{x}$ (schéma au-dessus de l'hensélisé strict S_{nr} de S, de point géométrique η_{nr}) (*loc. cit.*, prop. 2.1.4).

Soit $I = \mathrm{Gal}\,(\bar{\eta}/\eta_{nr})$ le « groupe d'inertie ». Comme I agit continûment sur $R^i\psi_\eta(F)$, donc sur sa fibre en $\bar{x}$, on a :

$$R^i\psi_\eta(F)_{\bar{x}} = \varinjlim_{\eta'} H^i(X_{(\bar{x})} \times_{S_{nr}} \eta', F)$$

la limite inductive étant prise sur les points η' tels que $\eta' \to \eta_{nr} \to \eta$, η' étant fini sur η_{nr}.

Pour disposer de résultats de finitude sur ces groupes, nous supposerons

— V_{nr} excellent (ce qui est automatique, d'après EGA IV, 7.8.3, (iii), si V est d'inégale caractéristique).

— Λ noethérien.

— X de type fini sur S.

D'après [SGA 4.1/2, théorèmes de finitude en cohomologie l-adique] les faisceaux $R^i\psi_\eta(F)$ sont constructibles; en particulier, $R^i\psi_\eta(F)_{\bar{x}}$ est un Λ-module de type fini.

Soit alors S′ le normalisé de S_{nr} dans η', pour $\eta' \to \eta_{nr} \to \eta$, η' fini sur η_{nr}. D'après la première hypothèse, S′ est fini sur S_{nr}; soit $X' = X \times_S S'$, et (avec les notations évidentes) considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X_{\bar{s}} \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "\pi"] & X_{\eta'} \arrow[l, hook', "j'"'] \arrow[d, "\pi_\eta"] \\
X_s \arrow[r, hook, "i"] & X & X_\eta \arrow[l, hook', "j"']
\end{tikzcd}$$

Le groupe $H^i(X_{(\bar{x})} \times_{S_{nr}} \eta', F)$ est la fibre en $\bar{x}$ du faisceau $i'^* R^i j'_*(F_{\eta'})$ où on a noté $F_{\eta'} = j'^* \pi^*(F) = \pi_\eta^*(F_\eta)$. La constructibilité de $i'^* R^i j'_*(F_{\eta'})$ résulte de (*loc. cit.*, corollaire 1.5). On a donc démontré le

LEMME 1. — *Sous les hypothèses précédentes, les Λ-modules $R^i\psi_\eta(F)_{\bar{x}}$ et $H^i(X_{(\bar{x})} \times_{S_{nr}} \eta', F)$ sont de type fini.*

Remarquons maintenant que pour $\Lambda = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$, F le faisceau constant de valeur Λ, tout automorphisme du S_{nr}-schéma $X_{(\bar{x})}$ agit de manière compatible sur les Λ-modules précédents. Pour établir un résultat de continuité pour cette action, nous sommes contraints d'utiliser la résolution des singularités pour les schémas excellents de dimension 2, établie par Lipman [Desingularization of two-dimensional schemes, *Ann. of Math.*, 107, 1978, pp. 151-207]. Nous ferons donc les hypothèses :

HYPOTHÈSES. — X est de dimension 2 et X_η est lisse sur η.

Alors X est excellent, car de type fini sur V_{nr} (*cf* EGA IV, 7.8.3, (ii)).

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses précédentes, pour η' fixé :*

(i) *le morphisme canonique*

$$H^i(X_{(\bar{x})} \underset{S_{nr}}{\times} \eta', \mathbb{Z}/l^n.\mathbb{Z}) \to H^i(\hat{X}_{(\bar{x})} \underset{\hat{S}_{nr}}{\times} \hat{\eta}', \mathbb{Z}/l^n.\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $n \geqq 1$. En particulier, l'action sur le premier groupe du groupe des automorphismes du S_{nr}-schéma $X_{(\bar{x})}$ se prolonge en une action du groupe des automorphismes du $\hat{S}_{nr}$-schéma $\hat{X}_{(\bar{x})}$.

(ii) *il existe un entier m tel que, pour tout automorphisme φ du $\hat{S}_{nr}$-schéma $\hat{X}_{(\bar{x})}$, induisant l'identité sur le voisinage infinitésimal d'ordre m de $\bar{x}$ dans $X_{(\bar{x})}$, l'automorphisme de $H^i(X_{(\bar{x})} \underset{S_{nr}}{\times} \eta', \mathbb{Z}/l^n.\mathbb{Z})$ induit par φ est l'identité pour tout n.*

Remarque. — Pour V d'égale caractéristique, ce théorème se trouve dans la thèse de G. Laumon, p. 35, 6.3.1. La démonstration — alambiquée — que l'on présente ici, n'a donc d'intérêt que pour V d'inégale caractéristique.

De ce théorème et du lemme 1, on déduit :

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un entier m tel que pour tout automorphisme φ du $\hat{S}_{nr}$-schéma $\hat{X}_{(\bar{x})}$, induisant l'identité sur le voisinage infinitésimal d'ordre m de $\bar{x}$ dans $X_{(\bar{x})}$, l'automorphisme de $R^i\psi_\eta(\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})_{\bar{x}}$ induit par φ est l'identité pour tout n.*

L'énoncé (i) du théorème 1 se ramène par dévissage au cas $n=1$. Si alors on a prouvé l'énoncé (ii) pour $n=1$, on l'obtient pour tout n en observant que l'image du groupe des automorphismes de $\hat{X}_{(\bar{x})}$ tangents à l'identité à l'ordre m dans $\mathrm{Aut}\, H^i(X_{(\bar{x})} \underset{S_{nr}}{\times} \eta', \mathbb{Z}/l^n)$ est un l-groupe fini, et en utilisant le

LEMME 2. — *Pour $m \geqq 1$, le groupe des automorphismes de $\hat{X}_{(\bar{x})}$ tangents à l'identité à l'ordre m est l-divisible.*

Preuve. — Soit en effet $Y_{(k)} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}/\mathcal{M}_{X,\bar{x}}^{k+1})$ le voisinage infinitésimal d'ordre k de $\bar{x}$ dans X. Il suffit de montrer que pour $k \geqq m \geqq 1$, $\ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(m)})]$ est *uniquement* l-divisible (ceci signifie que l'application $y \mapsto y^l$ de ce groupe dans lui-même est une bijection). On a une suite exacte :

$$1 \to \ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k+1)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(k)})] \to \ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k+1)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(m)})]$$
$$\to \ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(m)})].$$

Or $\ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k+1)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(k)})]$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\hat{X},\bar{x}}, \mathcal{M}_{\hat{X},\bar{x}}^k/\mathcal{M}_{\hat{X},\bar{x}}^{k+1})$,

puisque $k \geqq 1$; c'est donc un $\mathbb{Z}/p.\mathbb{Z}$-module dont tout sous-groupe est dès lors uniquement l-divisible. De plus, c'est un sous-groupe central de $\ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k+1)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(m)})]$ vu que $m \geqq 1$, comme on le vérifie aisément.

Supposons connu que tout sous-groupe de $\ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(m)})]$ est uniquement l-divisible. Tout sous-groupe H de $\ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k+1)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(m)})]$ s'inscrit dans une suite exacte $1 \to N \to H \xrightarrow{\varphi} K \to 1$ où N est central dans H, N et K étant uniquement l-divisibles. Soit $x \in H$; il existe un unique $\bar{y} \in K$ tel que $\bar{y}^l = \varphi(x)$. Soit $y \in \varphi^{-1}(\bar{y})$; on a $y^l x^{-1} \in N$; il existe un unique $z \in N$ tel que $z^l = y^l x^{-1}$, on a $x = y^l z^{-l} = (yz^{-1})^l$ puisque z est central. Supposons $y^l = u^l$ pour y, $u \in H$; on a donc $\varphi(y) = \varphi(n)$, i. e. $y = nz$ avec $z \in N$. Comme z est central, $y^l = u^l z^l$, donc $z^l = 1$, donc $z = 1$, donc $y = u$.

Donc H est uniquement l-divisible. Ceci permet de prouver, par induction sur k, que tout sous-groupe de $\ker[\mathrm{Aut}(Y_{(k)}) \to \mathrm{Aut}(Y_{(m)})]$ est uniquement l-divisible.

C.Q.F.D.

Ce lemme prouve de même l'indépendance de m par rapport à n dans le corollaire.

Prouvons donc le théorème 1 (i) et (ii) dans le cas $n = 1$.

Un point central de la démonstration consistera à comparer la géométrie du morphisme $X_{(\bar{x})} \to S_{nr}$ à celle du morphisme entre complétés $\hat{X}_{(\bar{x})} \to \hat{S}_{nr}$. Remarquons que S_{nr} et $\hat{S}_{nr}$ ont même point fermé, donc la fibre spéciale de $\hat{X}_{(\bar{x})}$ est le complété en $\bar{x}$ de la fibre spéciale de $X_{(\bar{x})}$. On peut donc considérer $\bar{x}$ comme point géométrique de $\hat{X}_{(\bar{x})}$.

Réduction au cas $\eta' = \eta_{nr}$, $X' = X$, X normal.

Soit $n : \tilde{X}' \to X'$ la normalisation, qui est un isomorphisme en dehors de $X'_{\bar{s}}$ (d'après nos hypothèses). De plus X' étant excellent, n est fini [EGA IV, § 7.8]. On a alors

$$X'_{(\bar{x})} \underset{S'}{\times} \eta' = \coprod_{y \in n^{-1}(\bar{x})} \tilde{X}'_{(y)} \underset{S'}{\times} \eta'$$

et *idem* pour les complétés.

Ceci achève la réduction pour (i).

Pour (ii) on utilise de plus le lemme suivant, dont le rapporteur a demandé que la démonstration soit supprimée.

LEMME 3. — *Pour tout entier* $m \geqq 0$, *il existe un entier* $M \geqq 0$ *tel que tout automorphisme de* $X_{(\bar{x})}$ (*resp.* $\hat{X}_{(\bar{x})}$) *tangent à l'identité à l'ordre* M *se relève, pour tout* $y \in n^{-1}(\bar{x})$, *en un automorphisme de* $\tilde{X}'_{(y)}$ (*resp. du complété de* $\tilde{X}'_{(y)}$), *tangent à l'identité à l'ordre* m.

Il reste à démontrer le théorème 1 lorsque $n = 1$, $\eta' = \eta_{nr}$, $X' = X$ et X est normal. D'après Lipman (*loc. cit.*) il existe un morphisme $p : Z \to X_{(\bar{x})}$ tel que :

(i) Z est régulier,

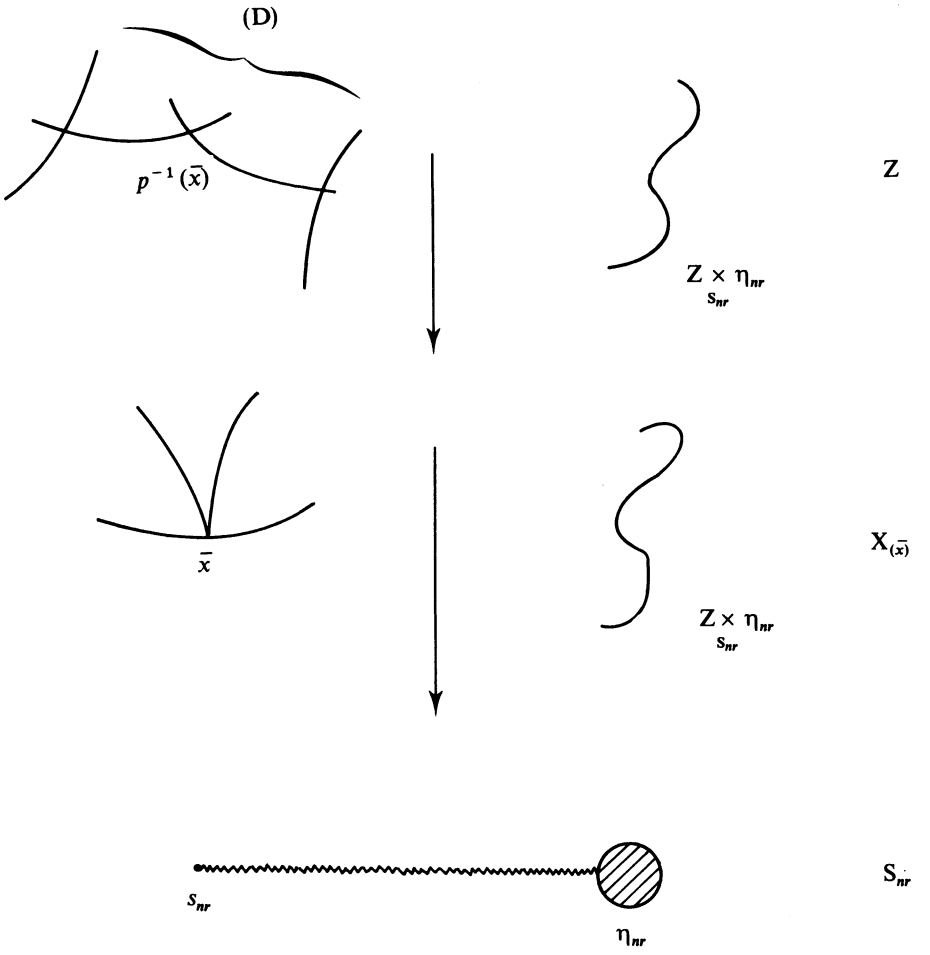
(ii) p est propre, et induit un isomorphisme au-dessus de $X_{(\bar{x})} - \{\bar{x}\}$ (on invoque ici la normalité de $X_{(\bar{x})}$).

Un argument classique, exposé par exemple par Lipman (*loc. cit.*) permet de s'assurer l'existence d'un tel Z vérifiant de plus

(iii) $D = p^{-1}(X_{(\bar{x})} \underset{S_{nr}}{\times} \bar{s})$ est un diviseur à croisements normaux dans Z; il en est de même de $p^{-1}(\bar{x})$.

De plus, il résulte de Lipman (*loc. cit.*) que p est l'éclatement d'un faisceau cohérent $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{O}_{X_{(\bar{x})}}$ tel que $\mathfrak{J}$ contienne une puissance $\mathcal{M}^{m_0}_{X_{(\bar{x})},\bar{x}}$ de l'idéal maximal $\mathcal{M}_{X_{(\bar{x})},\bar{x}}$. Dès lors, tout automorphisme du S_{nr}-schéma $X_{(\bar{x})}$, tangent à l'identité à l'ordre m_0, se relève canoniquement en un automorphisme du S_{nr}-schéma Z.

LEMME 4. — *Un automorphisme* φ *du* S_{nr}*-schéma* $X_{(\bar{x})}$, *tangent à l'identité à l'ordre* $2m_0$, *se relève en un automorphisme* $\tilde{\varphi}$ *de* Z *qui agit trivialement sur* $p^{-1}(\bar{x})$ *et stabilise chaque composante irréductible de* D *qui rencontre* $p^{-1}(\bar{x})$.



Preuve. — Soit T le schéma local artinien $T = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}/\mathfrak{J}_{\bar{x}})$. On a canoniquement $p^{-1}(T) = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} [\mathfrak{J}^n_{\bar{x}}/\mathfrak{J}^{n+1}_{\bar{x}}])$, d'où $p^{-1}(\bar{x}) = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} [\mathfrak{J}^n_{\bar{x}}/\mathcal{M}_{\bar{x}}\mathfrak{J}^n_{\bar{x}}])$ (on suppose $\mathfrak{J}_{\bar{x}} \neq \mathcal{O}_{X_{(\bar{x})},\bar{x}}$, sinon il n'y a rien à démontrer). Il est immédiat que l'action induite par φ sur $\mathfrak{J}^n_{\bar{x}}/\mathcal{M}_{\bar{x}} \cdot \mathfrak{J}^n_{\bar{x}}$ est triviale, d'où la première assertion du lemme. Soit alors E une composante de D, non contenue dans $p^{-1}(\bar{x})$, telle qu'il existe un point y commun à E

et à $p^{-1}(\bar{x})$; comme E est la seule composante de D passant par y qui n'est pas incluse dans $p^{-1}(\bar{x})$ et comme $\tilde{\varphi}$ fixe y et stabilise $p^{-1}(\bar{x})$, $\tilde{\varphi}$ stabilise E.

C.Q.F.D.

On a un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} X_{(\bar{x})} \underset{S_{nr}}{\times} \eta_{nr} \arrow[r, hook, "j_1"] & Z \arrow[d, "p"] \\ & X_{(\bar{x})} \arrow[ul, hook, "j_2"] \end{tikzcd}$$

d'où une suite spectrale de terme initial

$$E_2^{a,b} = H^a(p^{-1}(\bar{x}), R^b j_{1,*}(\mathbb{Z}/l))$$

convergeant vers $H^*(X_{(\bar{x})} \underset{S_{nr}}{\times} \eta_{nr}, \mathbb{Z}/l)$ (en effet, p étant propre, le théorème du changement de base propre [SGA IV, tome 3, exposé XII, *Springer Lecture Notes in Math.*, n° 305] assure que $H^a(p^{-1}(\bar{x}), R^b j_{1,*}(\mathbb{Z}/l))$ est la fibre en $\bar{x}$ du faisceau $R^a p_*(R^b j_{1,*}(\mathbb{Z}/l))$.

Sur cette suite spectrale opère le groupe des automorphismes du S_{nr}-schéma $X_{(\bar{x})}$ tangents à l'identité à l'ordre m_0.

Soit $\hat{Z} = Z \underset{X_{(\bar{x})}}{\times} \hat{X}_{(\bar{x})}$ le complété de Z le long de $p^{-1}(\bar{x})$. On sait que $\hat{Z}$ est régulier, donc $\hat{p} : \hat{Z} \to \hat{X}_{(\bar{x})}$ satisfait les mêmes hypothèses que p. On note $\hat{D} = \hat{p}^{-1}(\hat{X}_{(\bar{x})} \underset{S_{nr}}{\times} \bar{s})$: c'est un diviseur à croisements normaux dans $\hat{Z}$. L'analogue du lemme précédent vaut pour $\hat{X}_{(\bar{x})}$ et $\hat{Z}$. Un triangle commutatif analogue au précédent définit une suite spectrale $\hat{E}_r^{a,b}$. On a un morphisme naturel de E vers $\hat{E}$.

Preuve de (i). — Il suffit donc d'établir que le morphisme naturel de faisceaux sur $p^{-1}(\bar{x}) = \hat{p}^{-1}(\bar{x})$

$$i^* R^b j_{1,*}(\mathbb{Z}/l) \to \hat{i}^* R^b \hat{j}_{1,*}(\mathbb{Z}/l)$$

est un isomorphisme (où $i : p^{-1}(\bar{x}) \hookrightarrow Z$, resp. $\hat{i} : \hat{p}^{-1}(\bar{x}) \hookrightarrow \hat{Z}$).

On choisit un isomorphisme $(\mathbb{Z}/l)_{S^{nr}} \xrightarrow{\sim} (\mu_l)_{S^{nr}}$ et on est ramené à prouver le même énoncé pour le faisceau μ_l.

D'après [SGA IV, tome 3, exposé XIX, lemme 2.2], on a

$$R^b j_{1,*}(\mu_l) = \Lambda^b_{\mathbb{Z}/l} R^1 j_{1,*}(\mu_l) \underset{\mathbb{Z}/l}{\otimes} \mu_l^{\otimes(1-b)}$$

et itou pour $R^b \hat{j}_{1,*}(\mu_l)$.

— Soit y un point géométrique de $p^{-1}(\bar{x})$. Soit A l'anneau des fonctions régulières sur le complémentaire de D dans l'hensélisé strict de Z en y. Définissons de même $\hat{A}$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^*\otimes(\mathbb{Z}/l) & \xrightarrow{\sim} & R^1 j_{1,*}(\mu_l)_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}^*\otimes(\mathbb{Z}/l) & \xrightarrow{\sim} & R^1 \hat{j}_{1,*}(\mu_l)_y \end{array}$$

De plus, soit I l'ensemble des composantes irréductibles de l'hensélisé de D en y (Card I = 1 ou 2). On a un isomorphisme $A^* \otimes (\mathbb{Z}/l) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/l)^{\mathrm{I}}$ obtenu en associant à $F \in A^*$ le I-uple des réductions modulo l des valuations de F à l'égard des diverses composantes de D en y.

De même $\hat{A}^* \otimes (\mathbb{Z}/l) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/l)^{\mathrm{I}}$ et le triangle

$$\begin{array}{ccc} A^*\otimes(\mathbb{Z}/l) & \rightarrow & \hat{A}^*\otimes(\mathbb{Z}/l) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & (\mathbb{Z}/l)^{\mathrm{I}} \end{array}$$

est commutatif. Tout ceci démontre l'énoncé (i).

Preuve de (ii). — Tout automorphisme de $\hat{X}_{(\bar{x})} \to \hat{S}_{nr}$ tangent à l'identité à l'ordre $2\,m_0$ se relève en un automorphisme $\tilde{\varphi}$ de $\hat{Z}$ qui fixe $\hat{p}^{-1}(\bar{x})$ et stabilise chaque composante de $\hat{D}$ (lemme 4). Pour tout point géométrique y de $\hat{p}^{-1}(\bar{x})$, $\tilde{\varphi}$ définit un automorphisme de $\hat{Z}_y$ *qui agit trivialement sur* $\hat{A}^* \otimes (\mathbb{Z}/l)$, car son action sur I est triviale. Ainsi $\tilde{\varphi}$ induit l'automorphisme trivial du faisceau $R^1 \hat{j}_{1,*}(\mathbb{Z}/l)$ et par conséquent de $R^b \hat{j}_{1,*}(\mathbb{Z}/l)$ pour tout b. Il en résulte que l'action de $\tilde{\varphi}$ sur $H^i(\hat{X}_{(\bar{x})} \times_{\hat{S}_{nr}} \hat{\eta}_{nr}, \mathbb{Z}/l)$ est triviale sur les sous-quotients de la filtration provenant de la suite spectrale $\hat{E}$. Le groupe des automorphismes d'un $(\mathbb{Z}/l)$-espace vectoriel de dimension finie, qui préservent une filtration donnée et agissent trivialement sur les sous-quotients de cette filtration est un l-groupe fini. Comme tout automorphisme d'un groupe l-divisible vers un l-groupe fini est trivial, le théorème 1 résulte alors du lemme 2.

Dans l'application que nous avons en vue du corollaire du théorème 1, nous utiliserons la :

PROPOSITION 1. — *Supposons* $\bar{x}$ *localisé en un point* $x \simeq \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. *Soit* G *un groupe algébrique sur* $\mathbb{Q}_p$, *égal à son groupe dérivé, et soit* K *un sous-groupe compact ouvert de* $G(\mathbb{Q}_p)$. *Soit* ρ *un homomorphisme du groupe* K *vers le groupe des automorphismes*

du $\hat{S}$*-schéma* $\hat{X}_{(x)}$, *le complété de* X *en* x. *Alors pour tout entier* m, *le sous-groupe des* $g \in K$ *tels que* $\rho(g)$ *soit tangent à l'identité à l'ordre* m *est* <u>*ouvert*</u> *dans* K.

Démonstration. — Soit H le groupe des automorphismes du $\hat{S}$-schéma $\hat{X}_{(x)}$ et $H_{(m)} \subset H$ le groupe des automorphismes tangents à l'identité à l'ordre m. On a $(H_{(m)}, H_{(m')}) \subset H_{(m+m')}$. Par ailleurs, vu l'hypothèse sur G, pour tout sous-groupe ouvert L de K, (L, L) est ouvert. Il suffit donc de prouver que $\rho^{-1}(H_{(1)})$ est ouvert dans K. Quitte à remplacer K par un sous-groupe compact ouvert, on peut supposer que K est un pro-p-groupe [Bourbaki, Groupes et Algèbres de Lie, chapitre III, § 7, n° 3 et 4]. Le groupe $H/H_{(1)}$ est fini et on a le

LEMME 5. — *Si* $F : K \to \Gamma$ *est un homomorphisme de* K *vers un groupe fini* Γ, $F(K)$ *est un* p*-groupe.*

Parmi les éléments de F (K) d'ordre premier à p, prenons γ d'ordre r maximal. D'après Euclide, il existe un nombre premier $l \neq p$. Soit $\gamma = F(k)$, et soit $k' \in K$ tel que $k = (k')^l$; alors ou bien $F(k')$ est d'ordre rl, ou bien $r = 1$. Comme r était maximal, on a $r = 1$. Il en résulte que F (K) est un p-groupe.

L'image du morphisme composé $\overbrace{K \xrightarrow{\rho} H \to H/H_{(1)}}^{\bar{\rho}}$ est donc un p-groupe Λ. Soient $\Lambda^{(m)}$ les sous-groupes de Λ définis de la manière suivante : $\Lambda^{(0)} = \Lambda$, $\Lambda^{(m)} = (\Lambda^{(m-1)}, \Lambda^{(m-1)})$. On a $\Lambda^{(k)} = \{1\}$ pour k entier convenable, puisque Λ est un p-groupe. On voit aisément, par récurrence sur m, que $\bar{\rho}^{-1}(\Lambda^{(m)})$ est ouvert dans K. Donc $\rho^{-1}(H_{(1)})$ est ouvert dans K.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[B.W.] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups* (*Ann. of Math. Studies*, Princeton University Press, 1980).

[Ca.1] H. CARAYOL, *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 296, série I, 1983, p. 557).

[Ca.2] H. CARAYOL, *Sur les représentations l-adiques attachées aux formes modulaires de Hilbert* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 296, série I, 1983, p. 629).

[Ca.3] H. CARAYOL, *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura* [*Compositio Math.* (à paraître)].

[D.1] P. DELIGNE, *Formes modulaires et représentations de* GL_2, Antwerp II (*Lecture Notes*, vol. n° 349, Springer-Verlag, 1973, p. 55-106).

[D.2] P. DELIGNE, *Lettre à Piatetskii-Shapiro*, 1973.

[D.M.] P. DELIGNE et D. MUMFORD, *On the Irreducibility of the Space of Curves of a Given Genus* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 36, 1968).

[Dr.1] V. G. DRINFEL'D, *Elliptic Modules* (*Math. U.S.S.R., Sbornik*, vol. 23, n° 4, 1974).

[Dr.2] V. G. DRINFEL'D, *Coverings of p-Adic Symmetric Regions* (*Funct. Anal. Appl.*, vol. 10, 1976, p. 29).

[Ge] S. GELBART, *Automorphic Functions on Adele Groups* (*Ann. of Math. Studies*, n° 83, Princeton Univ. Press, Princeton, 1975).

[J.L.] H. JACQUET et R. P. LANGLANDS, *Automorphic Forms on* GL(2) (*Lecture Notes in Math.*, vol. n° 114, Springer-Verlag, 1970).

[J.P.S.S.] H. JACQUET, I. I. PIATETSKII, SHAPIRO et J. SHALIKA, *Relèvement cubique non normal* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 292, série I, 1981, p. 567).

[Ku] Ph. KUTZKO, *The Local Langlands Conjecture for* GL(2) (*Ann. of Math.*, vol. 112, 1980, p. 381).

[L.1] R. P. LANGLANDS, *Modular Forms and l-adic Representations*, Antwerp II (*Lecture Notes*, n° 349, Springer-Verlag, 1973, p. 361-500).

[L.2] R. P. LANGLANDS, *Base Change for* GL(2) (*Annals of Math. Studies*, Princeton University Press, 1980).

[L.3] R. P. LANGLANDS, *On the Zeta Functions of Some Simple Shimura Varietes* (*Canad. J. Math.*, vol. 31, n° 6, 1979, p. 1121).

[Og] A. P. OGG, *Elliptic Curves and Wild Ramification* (*Amer. J. of Math.*, vol. 89, 1967, p. 1-21).

[Oh] M. OHTA, *On the Zeta Function of an Abelian Scheme Over the Shimura Curve* (*Japan. J. Math.*, vol. 9, 1983, p. 1-26).

[P.S.] I. I. PIATETSKII-SHAPIRO, *Zeta Functions of Modular Curves* (*Lecture Notes in Math.*, n° 349, Springer-Verlag, 1973, p. 317).

[R.T.] J. D. ROGAWSKI et J. B. TUNNELL, *On Artin L-Functions Associated to Hilbert Modular Forms of Weight One* (*Inv. Math.*, vol. 74, 1983, p. 1-42).

[Ta] J. TATE, *Number Theoretic Background, in Automorphic Forms, Representations and L-Functions* (*Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 33, part. 2, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1979).

[Tu.1] J. B. TUNNELL, *On the Local Langlands Conjecture for* GL(2) (*Inv. Math.*, vol. 46, 1978, p. 179-200).

[Tu.2] J. B. TUNNELL, *Artin's Conjecture for Representations of Octahedral Type* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 5, n° 2, sept. 1981, p. 173).

[W] J. L. WALDSPURGER, *Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur* GL (2) (Compositio Math., vol. 54, n° 2, 1985, p. 121-171).

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1984,
révisé le 4 juin 1985.)

Henri CARAYOL
Université Louis-Pasteur,
Département de Mathématiques,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.