ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN LANNES
SAÏD ZARATI

Sur les $\mathcal{U}$-injectifs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 19, nº 2 (1986), p. 303-333
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_2_303_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 19, 1986, p. 303 à 333.

SUR LES $\mathscr{U}$-INJECTIFS

PAR JEAN LANNES (*) ET SAÏD ZARATI (**)

ABSTRACT. — This article discusses injectives in the categorie $\mathscr{U}$ of unstable A-modules (for short : $\mathscr{U}$-injectives), A denoting the Steenrod algebra modulo a prime p, the importance of which in algebraic topology has been recently emphasized in the work of H. Miller [14] and G. Carlsson [3]. We show that, under certain conditions, the tensor product of two $\mathscr{U}$-injectives is still $\mathscr{U}$-injective. This result and those of [8] allow us to retrieve, at least for $p=2$, the main result in the work of J. F. Adams, J. Gunawardena and H. Miller [1] which implies a strong form of Segal's conjecture for elementary abelian p-groups (determination of functional duals).

AMS Subject Classification : 18 G 05.

KEY-WORDS: Steenrod algebra, unstable module, injective module, Ext-groups.

0. Introduction

Cet article traite des injectifs de la catégorie, notée $\mathscr{U}$, des A-modules instables, A désignant l'algèbre de Steenrod modulo un nombre premier p (ces notions sont précisées au premier paragraphe).

L'importance de ces injectifs en topologie algébrique a été récemment soulignée par les travaux de H. Miller [14] et G. Carlsson [3]. Dans [14], H. Miller montre, en utilisant les méthodes de G. Carlsson [3], que la cohomologie modulo p du groupe $\mathbb{Z}/p$, $H^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p)$, est un injectif de la catégorie $\mathscr{U}$ ($\mathscr{U}$-injectif) ce qui est l'ingrédient essentiel de sa solution de la conjecture de Sullivan. Dans [7] [8] [9] [10] nous montrons comment le fait que la cohomologie modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires est $\mathscr{U}$-injective, éclaire quelque peu la solution que donne G. Carlsson de la conjecture de Segal pour les 2-groupes abéliens élémentaires. Ce type de solution est généralisé pour $p>2$ par le second auteur dans [17]. Dans le même ordre d'idée on peut citer le travail du premier auteur sur le n-dual $T(n)$ du $n^{\text{ème}}$ spectre de Brown-Gitler modulo 2 où la $\mathscr{U}$-injectivité de $H^*(T(n); \mathbb{Z}/2)$ (toujours due à H. Miller) joue un rôle décisif [6].

(*) (Unité Associée au C. N. R. S., n° 169).
(**) (Unité Associée au C. N. R. S., L. P. 13).

La contribution de ce papier à l'étude des $\mathscr{U}$-injectifs est le théorème suivant :

THÉORÈME 0. — *Soient* J *et* K *deux* $\mathscr{U}$*-injectifs tels que :*

(i) *toute application* A*-linéaire de la suspension d'un* A*-module instable dans* K *est triviale ;*

(ii) J *ou* K *est graduellement fini, c'est-à-dire de dimension finie sur* $\mathbb{Z}/p$ *en chaque degré* (1), *alors le produit tensoriel de* A*-modules* $K\otimes J$ *est* $\mathscr{U}$*-injectif.*

Bien que ce théorème n'augmente pas de façon considérable le nombre d'exemples connus de $\mathscr{U}$-injectifs (2), il suffit à montrer que le produit tensoriel $H^*(V;\mathbb{Z}/p)\otimes J$ de la cohomologie modulo p d'un p-groupe abélien élémentaire V et d'un $\mathscr{U}$-injectif J est encore $\mathscr{U}$-injectif. Ce résultat et ceux de [8] nous permettent de retrouver, au moins pour $p=2$, le résultat principal du travail de J.F. Adams, J. Gunawardena, et H. Miller [1] qui implique une forme forte de la conjecture de Segal pour les p-groupes abéliens élémentaires (détermination de duaux fonctionnels).

Voici le plan du papier. Dans le premier paragraphe, on fixe quelques notations et conventions. Dans le second, on étudie la représentabilité de certains foncteurs. Dans le sixième, on montre, d'une part, que tout $\mathscr{U}$-injectif est facteur direct dans un produit de $\mathscr{U}$-injectifs $J(n)$ introduits au paragraphe 3, et d'autre part, que tout $\mathscr{U}$-injectif vérifiant la condition (i) du théorème 0 est facteur direct dans un produit de $\mathscr{U}$-injectifs $K(i)$ introduits au paragraphe 4. Dans le paragraphe 5 on montre que le produit tensoriel $K(i)\otimes J(n)$ est $\mathscr{U}$-injectif et on en déduit le théorème 0 au paragraphe 7. Dans le paragraphe 9, on démontre le théorème d'Adams-Gunawardena-Miller évoqué ci-dessus après avoir étudié au paragraphe 8 le comportement de certains foncteurs adjoints vis-à-vis du produit tensoriel. Ce papier comporte deux appendices : dans le premier, on retravaille les preuves de G. Carlsson et H. Miller de la $\mathscr{U}$-injectivité de $H^*(\mathbb{Z}/p;\mathbb{Z}/p)$, dans le deuxième, on montre que la catégorie $\mathscr{U}$ est noetherienne, résultat dû, pour $p=2$, à W. Massey et F. Peterson [13].

Il est évident que cet article a été fortement influencé par les articles de G. Carlsson [3] et H. Miller [14], le théorème 0 en particulier est en germe dans [3]. Nous tenons également à remercier J. F. Adams pour l'intérêt qu'il a manifesté pour notre travail.

1. Notations et conventions

Soit p un nombre premier, on désigne par A (ou par A_p s'il est nécessaire de préciser la notation) l'algèbre de Steenrod modulo p [16].

Soit $M=\{M^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un A-module à gauche. On dit que M est instable s'il vérifie la condition suivante (vérifiée par la cohomologie modulo p d'un espace topologique) : pour tout x appartenant à M on a

— $Sq^i x=0$ si $i>|x|$ lorsque $p=2$

— $\beta^{\varepsilon}P^i x=0$ si $2i+\varepsilon>|x|$, $\varepsilon=0, 1$, lorsque $p>2$

$|x|$ désignant le degré de x.

(1) Voir la note (3) relative à la remarque qui suit la démonstration du théorème 7.1.

(2) En fait, en un certain sens il les donne tous, voir [19].

On observera, en particulier, que ces conditions impliquent $M^n=0$ pour $n<0$.

Le produit tensoriel de deux A-modules M et N, noté $M \otimes N$, est le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}/p$ muni de l'action « diagonale » de A définie à l'aide du coproduit de A ; si M et N sont instables, il en est de même pour $M \otimes N$.

Pour parler simultanément des algèbres de Steenrod A_2 et A_p, $p>2$, nous conviendrons, comme on le fait d'habitude, que l'on a, pour $p=2$: $\beta^\varepsilon P^i = Sq^{2i+\varepsilon}$, $\varepsilon=0, 1$. Signalons cependant que cette convention est dangereuse car le véritable analogue de l'algèbre A_2 n'est pas, pour $p>2$, l'algèbre A_p mais la sous-algèbre A'_p (ou simplement A') engendrée par les opérations P^i, $i \geqslant 0$.

On désigne par $\mathscr{U}$ (ou par $\mathscr{U}_p$ si nécessaire) la catégorie dont les objets sont les A-modules instables et dont les morphismes sont les applications A-linéaires de degré zéro. On note $\mathscr{U}'$ (ou $\mathscr{U}'_p$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}$ dont les objets sont les A-modules M concentrés en degré pair : $M^n=0$ si n est impair. La catégorie $\mathscr{U}$ (resp. $\mathscr{U}'$) est une catégorie abélienne.

Rappelons qu'un injectif de la catégorie $\mathscr{U}$ (en abrégé $\mathscr{U}$-injectif) est un A-module instable M tel que le foncteur $\operatorname{Hom}_{\mathscr{U}}(\ , M)$ est exact.

2. Représentabilité de certains foncteurs

Soit R un A-module instable, alors le foncteur contravariant : $M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{U}}(M, R)$ défini sur la catégorie $\mathscr{U}$ des A-modules instables et à valeurs dans la catégorie, notée $\mathscr{E}$, des $\mathbb{Z}/p$-espaces vectoriels, est exact à droite et transforme somme directe en produit. En fait, un foncteur contravariant : $\mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{E}$ est représentable si et seulement s'il vérifie ces conditions-là. Précisons un peu. Soient m un entier et θ un élément de degré d de A, on désigne par $F(m)$ le A-module instable librement engendré par un générateur de degré m noté ι_m et par $.\theta : F(m+d) \to F(m)$ l'unique application A-linéaire telle que $\iota_{m+d}.\theta = \theta\iota_m$. A tout foncteur contravariant $T : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{E}$ on associe un A-module instable $R(T)$ de la façon suivante : on prend pour $(R(T))^m$ le $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel $T(F(m))$ et pour θ : $(R(T))^m \to (R(T))^{m+d}$ l'application $T(.\theta)$. Soit M un A-module instable. On définit une application naturelle :

$$\gamma_M : T(M) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{U}}(M, R(T))$$

en posant $\gamma_M(y)(x) = T(x)(y)$, y désignant un élément de $T(M)$ et x un élément de M que l'on identifie à une application A-linéaire de $F(|x|)$ dans M.

PROPOSITION 2.1. — *La transformation naturelle* $\gamma : T \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{U}}(\ , R(T))$ *est une équivalence si et seulement si le foncteur* T *est exact à droite et transforme somme directe en produit.*

Démonstration. — Soit $L_1 \to L_0 \to M \to 0$ le début d'une $\mathscr{U}$-résolution libre d'un A-module instable M. Par construction $\gamma_{F(m)}$ est un isomorphisme ; si T transforme somme directe en produit γ_{L_0} et γ_{L_1} sont aussi des isomorphismes ; si T est exact à droite, il en est de même pour γ_M.

COROLLAIRE 2.2. — *Soient* $\mathscr{C}$ *une catégorie abélienne et* $\Theta : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{C}$ *un foncteur covariant* *qui est exact à droite et transforme somme directe en somme directe. Un tel foncteur admet un adjoint à droite, c'est-à-dire qu'il existe un unique foncteur* $\tilde{\Theta} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ *tel que :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta \mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\mathrm{M}, \tilde{\Theta}\mathrm{N})$$

pour tout A-*module instable* M *et tout objet* N *de* $\mathscr{C}$.

Démonstration. — Soit N un objet fixé de $\mathscr{C}$. Il est clair que le foncteur $\mathrm{T_N} : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{E}$ défini par $\mathrm{T_N}(\mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\Theta\mathrm{M}, \mathrm{N})$ est représentable; on pose $\mathrm{R}(\mathrm{T_N}) = \tilde{\Theta}\mathrm{N}$.

Remarque. — Le foncteur $\tilde{\Theta}$ est exact à gauche et transforme produit en produit. Si de plus Θ est exact à gauche, alors le foncteur $\tilde{\Theta}$ transforme un objet injectif de la catégorie $\mathscr{C}$ en un injectif de la catégorie $\mathscr{U}$.

Voici des exemples de tels foncteurs Θ.

2.3. Exemples de foncteurs admettant des adjoints

Soit M un A-module instable. On définit dans [11] un A-module instable, noté ΦM, par :

$$(\Phi\mathrm{M})^n = \begin{cases} \mathrm{M}^{\frac{n}{p}} & \text{si } n \equiv 0(2p) \\ \mathrm{M}^{\frac{n-2}{p}+1} & \text{si } n \equiv 2(2p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{P}^i(\Phi x) = \Phi(\mathrm{P}^{\frac{i}{p}} x) & \text{si } |x| \equiv 0(2) \\ \mathrm{P}^i(\Phi x) = \Phi(\mathrm{P}^{\frac{i}{p}} x) + \Phi(\beta \mathrm{P}^{\frac{i-1}{p}} x) & \text{si } |x| \equiv 1(2) \\ \beta(\Phi x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{M}. \end{cases}$$

Dans ces formules on désigne par Φx l'élément de ΦM correspondant à l'élément x de M et on convient que $\mathrm{P}^{\frac{j}{p}} = 0$ si j ne divise pas p.

Le foncteur Φ ainsi défini est exact, il admet donc un adjoint à droite que nous notons $\tilde{\Phi} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\mathrm{M}, \tilde{\Phi}\mathrm{N})$ pour tous A-modules instables M et N. Il en est de même pour le foncteur suspension $\Sigma : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$; $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\mathrm{M}, \tilde{\Sigma}\mathrm{N})$. Rappelons que le foncteur $\Sigma : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ est défini par $\Sigma\mathrm{M} = \{\mathrm{M}^{n-1}\}_{n \geqslant 0}$, la structure de A-module sur ΣM étant donnée par $\theta(\Sigma x) = (-1)^{|\theta|}\Sigma(\theta x)$, θ désignant un élément de A dont le degré est noté $|\theta|$.

Remarque 2.4. — Pour $p=2$, il est facile d'expliciter le foncteur $\tilde{\Sigma}$: $\Sigma\tilde{\Sigma}\mathrm{N}$ est le sous A-module de N formé des éléments x tels que $Sq^{|x|}x = 0$.

Soit maintenant $\mathscr{U}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}$ dont les objets sont les A-modules concentrés en degré pair; il est clair que le Corollaire 2.2 reste vrai si on remplace $\mathscr{U}$ par $\mathscr{U}'$. Le foncteur oubli $\mathscr{O} : \mathscr{U}' \rightsquigarrow \mathscr{U}$ (resp. $\Psi : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}'$ défini par $\mathscr{O}\Psi = \Phi$) est exact, il admet donc un adjoint à droite que nous notons $\tilde{\mathscr{O}}$ (resp. $\tilde{\Psi}$).

Remarque 2.5. — Pour $p=2$, tout A-module instable M′ concentré en degré pair s'écrit de façon unique $\mathrm{M}' = \Psi\mathrm{M}$, ceci montre que le foncteur $\Psi : \mathscr{U}_2 \rightsquigarrow \mathscr{U}'_2$ est une équivalence de catégorie (Par contre pour $p > 2$ les catégories $\mathscr{U}_p$ et $\mathscr{U}'_p$ ne sont pas équivalentes).

3. Les $\mathscr{U}$-injectifs J(n)

On considère le foncteur : $\mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{E}$, $\mathrm{M} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p}(\mathrm{M}^n, \mathbb{Z}/p)$, que l'on note H_n; on pose $\mathrm{J}(n) = \mathrm{R}(\mathrm{H}_n)$. Le foncteur H_n est exact à droite et transforme somme directe en produit;

il est donc représentable : $H_nM = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(n))$. Puisque le foncteur H_n est aussi exact à gauche, $J(n)$ est un injectif de la catégorie $\mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$-injectif) (On observera que le A-module à gauche $J(n)$ est le dual du A-module à droite $G(n)$ introduit dans [14]). On note $[J(n)]$ « la classe canonique » de $H_nJ(n)$ correspondant à l'identité de $J(n)$.

3.1. Premières propriétés des $J(n)$

Pour exprimer ces propriétés, il peut être commode, comme l'a remarqué H. Miller [14], d'introduire la catégorie des A-bimodules instables.

3.1.1. *La catégorie des* A-*bimodules instables.*

Un A-bimodule est un $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel bigradué $M = \{ M_n^m \}_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ muni d'applications linéaires : $A^d \otimes M_n^m \to M_n^{m+d}$, $M_n^m \otimes A^d \to M_{n-d}^m$ qui vérifient les conditions suivantes :

(i) pour tout n, $M_n^{\bullet} = \{ M_n^m \}_{m\in\mathbb{Z}}$ est un A-module à gauche;

(ii) pour tout n, $M_{\bullet}^m = \{ M_n^m \}_{n\in\mathbb{Z}}$ est un A-module à droite;

(iii) les actions à gauche et à droite de A commutent.

On dit qu'un A-bimodule M est instable si les A-modules à gauche $M_n^{\bullet}$ et les A-modules à droite $M_{\bullet}^m$ sont instables, autrement dit, si l'on a pour tout x dans M de bidegré (m, n) :

(i) $\beta^{\varepsilon}P^i x = 0$ pour $2i+\varepsilon > m$; $\varepsilon = 0,1$.

(ii) $x\beta^{\varepsilon}P^i = 0$ pour $2ip+2\varepsilon > n$; $\varepsilon = 0,1$.

Soient M et N deux A-modules; on note $M \otimes N$ le produit tensoriel de M et N sur $\mathbb{Z}/p$ (au sens bigradué) muni des actions à gauche et à droite de A définies à l'aide du coproduit de A. Si M et N sont instables, il en est de même pour $M \otimes N$.

3.1.2. *Le* A-*bimodule* J(.).

On obtient un A-bimodule instable, noté J(.), en posant $(J(.))_n^m = (J(n))^m$; l'action à droite de A sur J(.) est définie de la manière suivante : soit θ un élément de A, on note $.\theta : J(n) \to J(n-|\theta|)$ l'application A-linéaire qui représente l'élément $[J(n)] \circ \theta$ de $H_{n-|\theta|}(J(n))$.

De même, on obtient un A-bimodule instable, noté F(.), en posant $(F(.))_n^m = (F(n))^m$, $F(n)$ désignant le A-module instable librement engendré par un générateur ι_n de degré n; l'action à droite d'un élément θ de A, $.\theta : F(n) \to F(n-|\theta|)$, est définie par $\iota_n.\theta = \theta\iota_{n-|\iota|}$. Soit M un $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel bigradué, on note M^* le $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel bigradué défini par $(M^*)_n^m = (M_m^n)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/p}(M_m^n, \mathbb{Z}/p)$. Si M est un A-bimodule (resp. un A-bimodule instable), il en est de même pour M^* l'action à gauche (resp. à droite) de A sur M^* étant duale de l'action à droite (resp. à gauche) de A sur M. Il est clair que l'on a tout fait pour avoir la formule : $J(.) = (F(.))^*$.

3.1.3. *Le produit* : $J(.) \otimes J(.) \to J(.)$.

Le produit $[J(m)] \otimes [J(n)]$ est un élément de $H_{m+n}(J(m) \otimes J(n))$ qui est représenté par une application, notée $\mu_{m,n}: J(m)\otimes J(n) \to J(m+n)$. Ces applications définissent un produit : $J(.)\otimes J(.) \to J(.)$ qui est une application de bidegré $(0,0)$ A-linéaire à gauche et à droite.

3.2. Les suites exactes de Mahowald

Soient M un A-module instable et x un élément de M ; on pose $|x| = 2i+\varepsilon$ avec $\varepsilon = 0,1$. On vérifie que l'application $\lambda : \Phi M \to M, \Phi x \to \beta^{\varepsilon} P^{i} x$ est A-linéaire et que coker λ et ker λ sont des suspensions de A-modules instables que l'on note respectivement ΩM et $\Omega_1 M$ [11].

Le foncteur $\Omega : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\Sigma : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ et Ω_1 est son premier et unique foncteur dérivé. On précisera si nécessaire la notation λ ci-dessus en λ_M ; pour $p=2$, l'application λ sera également notée Sq_0.

Remarque 3.2.1. — Pour $p=2$ on a la formule $\Omega_1 M = \Sigma\Phi\tilde{\Sigma} M$. Il est à noter que dans ce cas les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'application $\lambda : \Phi M \to M$ est injective (M est λ-projectif au sens de [5] [13]).

(ii) $\tilde{\Sigma} M = 0$.

Pour $p>2$ on a seulement l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii), voir 8.1.2.

Proposition 3.2.2. — *Pour tout* A-*module instable* M *on a une suite exacte (dite de Mahowald) :*

$$0 \to \Sigma\tilde{\Sigma} M \to M \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \tilde{\Phi} M \to \Sigma R^1 \tilde{\Sigma} M \to 0$$

où l'application $\Sigma\tilde{\Sigma} M \to M$ *est l'adjointe de l'identité de* ΣM, *où* $\tilde{\lambda} : M \to \tilde{\Phi} M$ *est l'adjointe de* $\lambda : \Phi M \to M$ *et où* $R^1\tilde{\Sigma}$ *désigne le premier foncteur dérivé de* $\tilde{\Sigma}$.

Démonstration. — L'application $\lambda : \Phi F(m) \to F(m)$ est injective [11]. On a donc la suite exacte :

$$(*) \qquad \begin{array}{c} 0 \to \Phi F(m) \to F(m) \to \Sigma\Omega F(m) \to 0 \\ \hphantom{0 \to \Phi F(m) \to F(m) \to {}} \| \hphantom{{} \to 0} \\ \hphantom{0 \to \Phi F(m) \to F(m) \to {}} \Sigma F(m-1) \hphantom{{} \to 0} \end{array}$$

En considérant $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((*), M)$ on obtient :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma\Omega F(m), M) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(m), M) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi F(m), M) & \to & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{U}}(\Sigma F(m-1), M) & \to 0 \\ & \| & & \| & & \| & & & \\ & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(m), \Sigma\tilde{\Sigma} M) & & M^m & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(F(m), \tilde{\Phi} M) & & & \\ & \| & & & & \| & & & \\ & (\Sigma\tilde{\Sigma} M)^m & & & & (\tilde{\Phi} M)^m & & & \end{array}$$

La proposition résulte de la formule suivante dont la démonstration ne présente pas de difficultés : $(\Sigma R^s \tilde{\Sigma} M)^m = \mathrm{Ext}^s_{\mathscr{U}}(\Sigma F(m-1), M)$, $R^s\tilde{\Sigma}$ désignant le $s^{\text{ème}}$ foncteur dérivé de $\tilde{\Sigma}$.

Remarque 3.2.3. — Lorsque M est $\mathscr{U}$-injectif, la suite exacte ci-dessus se réduit à :

$$0 \to \Sigma\tilde{\Sigma} M \to M \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \tilde{\Phi} M \to 0.$$

On prend maintenant $M = J(n)$.

3.2.3.1. — Le cas $p=2$. Par définition même des foncteurs Σ et Φ on a $\tilde{\Sigma}J(n) = J(n-1)$ et $\tilde{\Phi}J(n) = J\left(\frac{n}{2}\right)$ ou 0 selon que n est pair ou impair; on vérifie également que l'application $\tilde{\lambda} : J(n) \to J\left(\frac{n}{2}\right)$ (n pair) coïncide avec l'application $.Sq^{\frac{n}{2}}$ introduite en 3.1.2. La proposition 3.2.2 donne donc :

(i) un isomorphisme $\Sigma J(n-1) \approx J(n)$ si n est impair;

(ii) une suite exacte $0 \to \Sigma J(n-1) \to J(n) \xrightarrow{.Sq^{\frac{n}{2}}} J\left(\frac{n}{2}\right) \to 0$ si n est pair.

Cette suite exacte, ou plutôt sa duale, est due à M. Mahowald [12].

3.2.3.2. — Le cas $p>2$. De la même manière, la Proposition 3.2.2 donne :

(i) un isomorphisme $\Sigma J(n-1) \approx J(n)$ si $n \not\equiv 0, 2 (2p)$;

(ii) deux suites exactes :

$$0 \to \Sigma J(n-1) \to J(n) \xrightarrow{.P^{\frac{n}{2p}}} J\left(\frac{n}{p}\right) \to 0 \qquad \text{si} \quad n \equiv 0 (2p);$$

$$0 \to \Sigma J(n-1) \to J(n) \xrightarrow{.\beta P^{\frac{n-2}{2p}}} J\left(\frac{n-2}{p}+1\right) \to 0 \quad \text{si} \quad n \equiv 2 (2p).$$

3.3. La taille de $J(n)$

Définition 3.3. — *Soit* M *un* A-*module gradué* $M = \{M^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. *On désigne par*

(i) $\| M \|$ *l'élément de* $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *défini par* $\| M \| = \sup\{n \in \mathbb{Z} ; M^n \neq 0\}$;

(ii) $| M |$ *l'élément de* $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *défini par* $| M | = \inf\{n \in \mathbb{Z} ; M^n \neq 0\}$.

On dit que M *est fini si* $\dim (\bigoplus_n M^n) < +\infty$.

L'égalité $J(n)^d = H_n F(d)$ montre que $J(n)$ est fini et que $\| J(n) \| = n$. Ceci résulte aussi des suites exactes précédentes qui donnent en outre, par récurrence sur n, les informations suivantes :

— si $p=2$, $| J(n) | = \alpha(n)$, $\alpha(n)$ désignant le nombre de un dans l'écriture 2-adique de n, [3];

— si $p>2$, $| J(n) | = 2\alpha(n) - \mu(n)$, $\alpha(n)$ désignant la somme des chiffres intervenant dans l'écriture p-adique de n, et $\mu(n)$ le nombre de ces chiffres qui sont non nuls [14].

4. Les $\mathcal{U}$-Injectifs $K(i)$

Dans [3] G. Carlsson considère, pour $p=2$, la limite projective du système

$$\cdots\cdots \leftarrow J(2^q i) \xleftarrow{.Sq^{2^q i}} J(2^{q+1} i) \xleftarrow{.Sq^{2^{q+1} i}} J(2^{q+2} i) \leftarrow \cdots\cdots$$

Dans [14] H. Miller considère une limite analogue pour $p>2$.

Définition 4.1. — *Pour tout entier i, on pose :* $K(i) = \varprojlim_q \{J(2p^q i), .P^{p^{q-1} i}\}$.

DÉFINITION 4.2. — *Un* A-*module* $M = \{M^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est dit graduellement fini si, pour tout* $n\in\mathbb{Z}$, M^n *est un* $\mathbb{Z}/p$-*espace vectoriel de dimension finie.*

4.3. Le lemme suivant montre que $K(i)$ est $\mathcal{U}$-injectif.

LEMME 4.3. — *Toute limite projective filtrante de* $\mathcal{U}$-*injectifs graduellement finis est* $\mathcal{U}$-*injective.*

Démonstration. — Considérons un système projectif filtrant de $\mathcal{U}$-injectifs J_α graduellement finis et $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte dans $\mathcal{U}$. On a la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M'', \varprojlim J_\alpha) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \varprojlim J_\alpha) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M', \varprojlim J_\alpha) \to \varprojlim{}^1 \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M'', J_\alpha).$$

Lorsque M'' est monogène engendré par un élément de degré n, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M'', J_\alpha)$, qui est un sous-espace de J_α^n, est de dimension finie; ce qui montre $\varprojlim^1 \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M'', J_\alpha) = 0$. Une démonstration analogue à celle de [4] page 8, montre alors que $\varprojlim J_\alpha$ est $\mathcal{U}$-injectif (cette démonstration de la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{U}}(M'', \varprojlim J_\alpha)$ sans restriction sur M'', est due à O. Gabber).

PROPOSITION 4.4. — *Le module* $\tilde{\Sigma}K(i)$ *est nul et l'application* $\tilde{\lambda} : K(i) \to \tilde{\Phi}K(i)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après 3.2.3, il suffit de vérifier l'une ou l'autre de ces affirmations. La seconde équivaut à dire que pour tout A-module instable M l'application $\lambda_M^* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(M, K(i)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi M, K(i))$ est un isomorphisme, ce qui est vrai par définition même de $K(i)$. On peut aussi montrer que $\tilde{\Sigma}K(i)$ est nul en utilisant que le foncteur $\tilde{\Sigma}$ commute aux limites projectives et que la suite : $q \mapsto |J(2ip^q - 1)|$ tend vers l'infini.

4.5. Les suites exactes introduites en 3.2 montrent que $K(i)^d \simeq J(2p^q i)^d$ pour q assez grand; ce qui prouve que $K(i)$ est graduellement fini.

5. Les $\mathcal{U}$-injectifs $K(i)\otimes Jn)$

Dans ce paragraphe nous montrons que les applications $\mu_{2p^q i, n} : J(2p^q i)\otimes J(n) \to J(2p^q i + n)$ induisent un isomorphisme : $K(i)\otimes J(n) \to \varprojlim \{J(2p^q i + n), P^{p^{q-1} i}\}$, ce qui prouve, d'après 4.3 que $K(i)\otimes J(n)$ est $\mathcal{U}$-injectif. Ce paragraphe est fortement influencé par [3]. Les énoncés de ce paragraphe sont valables pour tout nombre premier p, cependant, par souci de clarté, nous supposons dans les démonstrations $p > 2$ (pour $p = 2$, les démonstrations sont analogues).

LEMME 5.1 (Comparer avec G. Carlsson [*3*]). — *Il existe une constante* $C(i, n)$ *dépendant de* i *et de* n *telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
J(2p^{q+1}i)\otimes J(n) & \xrightarrow{\mu_{2p^{q+1}i,n}} & J(2p^{q+1}i + n) \\
\downarrow {\scriptstyle .P^{p^q i}\otimes 1} & & \downarrow {\scriptstyle .P^{p^q i}} \\
J(2p^q i)\otimes J(n) & \xrightarrow{\mu_{2p^q i,n}} & J(2p^q i + n)
\end{array}$$

est commutatif en degré $< q + C(i, n)$.

Démonstration. — Soient a un élément de $J(2p^{q+1}i)$ et b un élément de $J(n)$. La « formule de Cartan à droite » (voir 3.1.1) s'écrit :

$$(ab)P^{p^q i}=(aP^{p^q i})b+\sum_{k=1}^{p^q i}(aP^{p^q i-k})(bP^k)$$

xy désignant le produit de deux éléments x et y de $J(.)$; ou encore, puisque $J(n-2k(p-1))=0$ pour $k>\dfrac{n}{2(p-1)}$:

$$(ab)P^{p^q i}=(aP^{p^q i})b+\sum_{1\leqslant k\leqslant \frac{n}{2(p-1)}}(aP^{p^q i-k})(bP^k).$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante $C(i, n)$ dépendant de i et de n telle que les termes $aP^{p^q i-k}$, $1\leqslant k\leqslant \dfrac{n}{2(p-1)}$, sont nuls si $|a|<q+C(i, n)$ (et *a fortiori* si $|a\otimes b|<q+C(i, n)$). Pour cela on utilise le lemme suivant dont la preuve est analogue à celle donnée dans [16] page 80.

LEMME 5.2. — *Soit m un entier. L'opération* P^m *appartient à l'idéal à droite de* A' *engendré par les* P^{p^l} *tels que* p^l *divise m.*

Il suffit donc de montrer l'existence d'une constante $C(i, n)$ telle que $aP^{p^l}=0$ si $|a|<q+C(i, n)$ pour tous les entiers l tels que p^l divise $p^q i-k$ avec $1\leqslant k\leqslant \dfrac{n}{2(p-1)}$; remarquons que ces entiers l sont majorés par une constante dépendant de i et de n que nous notons $C_1(i, n)$. L'élément aP^{p^l} appartient au module $J(2p^{q+1}i-2p^l(p-1))$, il suffit donc encore de montrer que les entiers $|J(2p^{q+1}i-2p^l(p-1))|^{-q}$ sont minorés par une constante dépendant de i et de n. Il est clair que nous pouvons supposer $q\geqslant C_1(i, n)$ et par conséquent $q\geqslant l$, nous avons :

$$\begin{aligned}|J(2p^{q+1}i-2p^l(p-1))| &=2\alpha(p^{q+1}i-p^l(p-1))-\mu(p^{q+1}i-p^l(p-1)) \quad \text{(voir 3.3)}\\ &=2\alpha(p^{q-l+1}i-(p-1))-\mu(p^{q-l+1}i-(p-1))\\ &=(2p-3)(q-l)+\gamma(i)\end{aligned}$$

$\gamma(i)$ désignant une constante dépendant de i

$$\geqslant(2p-3)q-(2p-3)C_1(i, n)+\gamma(i)$$

d'où le résultat.

5.3. Posons $L(i, n)=\varprojlim_q \{ J(2p^q i+n), .P^{p^{q-1}i} \}$. Il résulte du lemme 5.1 que les applications $\mu_{2p^q i,n}: J(2p^q i)\otimes J(n)\to J(2p^q i+n)$ induisent une application notée $\mu_n: K(i)\otimes J(n)\to L(i, n)$. Précisons un peu. Soit $T_q:\mathscr{U}\rightsquigarrow\mathscr{U}$ le foncteur défini sur les objets par $T_q M=M/M_{\geqslant q+C(i,n)}$, $M_{\geqslant q+C(i,n)}$ désignant le sous A-module formé des éléments de degré supérieur ou égal à $q+C(i, n)$. Le lemme 5.1 affirme que les $\mu_{2p^q i,n}$ induisent une application du système projectif $\{ J(2p^q i)\otimes J(n), .P^{p^{q-1}i}\otimes 1 \}$ vers le système projectif $\{ T_q J(2p^q i+n), \varphi_q \}$ où φ_q désigne la composition :

$$T_q J(2p^q i+n)\to T_{q-1}J(2p^q i+n)\xrightarrow{T_{q-1}(.P^{p^{q-1}i})} T_{q-1}J(2p^{q-1}i+n).$$

Pour définir μ_n on remarque que l'application naturelle de $L(i, n)$ vers $\varprojlim \{ T_q J(2p^q i + n), \varphi_q \}$ est un isomorphisme ; on remarquera également que l'application naturelle de $K(i) \otimes J(n)$ vers $\varprojlim \{ J(2p^q i) \otimes J(n), .P^{p^{q-1} i} \otimes 1 \}$ est un isomorphisme parce que $J(n)$ est fini.

Proposition 5.4. — *L'application* $\mu_n : K(i) \otimes J(n) \to L(i, n)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Nous procédons par récurrence sur n. Il est trivial que μ_0 est un isomorphisme ; supposons que μ_n est un isomorphisme pour $k < n$ et montrons que μ_n en est un. D'après 3.2.3.2, il suffit de considérer les cas $n \equiv 0(2p)$ et $n \equiv 2(2p)$; la démonstration est du même type dans les deux cas, aussi nous limiterons-nous au cas $n \equiv 0(2p)$. Considérons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes d'après 3.2.3.2.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma J(2p^q i) \otimes J(n-1) \arrow[r] \arrow[dd, "\Sigma\mu_{2p^q i, n-1}"'] & J(2p^q i) \otimes J(n) \arrow[r, "1 \otimes .P^{\frac{n}{2p}}"] \arrow[dd, "\Sigma\mu_{2p^q i, n}"'] & J(2p^q i) \otimes J\left(\frac{n}{p}\right) \arrow[r] \arrow[d, ".P^{p^{q-1} i} \otimes 1"] & 0 \\
 & & & J(2p^{q-1} i) \otimes J\left(\frac{n}{p}\right) \arrow[d, "\mu_{2p^{q-1} i, \frac{n}{p}}"] & \\
0 \arrow[r] & \Sigma J(2p^q i + n - 1) \arrow[r] & J(2p^q i + n) \arrow[r, ".P^{p^{q-1} i + \frac{n}{2p}}"] & J\left(2p^{q-1} i + \frac{n}{p}\right) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les applications $.P^{p^{q-1} i + \frac{n}{p}}$ définissent une application des systèmes projectifs $\{ J(2p^q i + n), .P^{p^{q-1} i} \}$ vers le système projectif $\left\{ J\left(2p^{q-1} i + \frac{n}{p}\right), .P^{p^{q-2} i} \right\}$. Ceci résulte des relations d'Adem et de l'instabilité à droite de $J(.)$. Il s'agit en fait du phénomène plus général suivant : soit x un élément d'un A-module à droite instable dont le degré est de la forme $2kp$; si l'on pose $xP_0 = xP^k$, alors on a la formule $(xP^{jp})P_0 = (xP_0)P^j$.

En passant à la limite projective en q dans le diagramme ci-dessus, on obtient le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes (on utilise là encore que les $J(m)$ sont finis).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma K(i) \otimes J(n-1) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma\mu_{n-1}"'] & K(i) \otimes J(n) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_n"'] & K(i) \otimes J\left(\frac{n}{p}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{\frac{n}{p}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma L(i, n-1) \arrow[r] & L(i, n) \arrow[r] & L\left(i, \frac{n}{p}\right) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où l'induction.

Une conséquence de 4.3 et 5.4 est :

Corollaire 5.5. — *Le module* $K(i) \otimes J(n)$ *est* $\mathscr{U}$*-injectif.*

6. Sur les résolutions $\mathscr{U}$-injectives

Ce paragraphe est un fourre-tout qui contient quelques sorites sur les résolutions dans la catégorie $\mathscr{U}$. Ces sorites seront utilisées en 7, 8 et 9.

6.1. *Existence de résolutions injectives particulières.*

PROPOSITION 6.1.1. — *Tout* A-*module instable* M *s'injecte dans un produit de modules* J(n) : M $\hookrightarrow \prod_\alpha J(n_\alpha)$. *En particulier, tout $\mathcal{U}$-injectif est facteur direct dans un produit de* J(n).

Démonstration. — Soient $\mathcal{E}^*$ la catégorie des $\mathbb{Z}/p$-espaces vectoriels gradués, $\mathcal{O}' : \mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{E}^*$ le foncteur oubli et $\tilde{\mathcal{O}}' : \mathcal{E}^* \rightsquigarrow \mathcal{U}$ son adjoint à droite : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^*}(\mathcal{O}'\mathrm{M}, \mathrm{E}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathcal{O}}'\mathrm{E})$. Il est clair que l'on a $J(n) = \tilde{\mathcal{O}}'(\Sigma^n \mathbb{Z}/p)$, $\Sigma^n \mathbb{Z}/p$ désignant le $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel gradué ayant un seul générateur en degré n. Tout $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel E est une somme directe $\bigoplus_\alpha \Sigma^{n_\alpha} \mathbb{Z}/p$, on a donc une injection : $\mathrm{E} \hookrightarrow \prod_\alpha \Sigma^{n_\alpha} \mathbb{Z}/p$. Puisque le foncteur $\tilde{\mathcal{O}}'$ préserve les injections et commute aux produits, on a une injection : $\tilde{\mathcal{O}}'\mathrm{E} \hookrightarrow \prod_\alpha \tilde{\mathcal{O}}'\Sigma^{n_\alpha}\mathbb{Z}/p = \prod_\alpha J(n_\alpha)$.

La Proposition 6.1 est maintenant une conséquence du fait que pour tout A-module instable M l'application naturelle : $\mathrm{M} \to \tilde{\mathcal{O}}'\mathcal{O}'\mathrm{M}$ est une injection.

COROLLAIRE 6.1.2. — *Tout* A-*module instable admet une résolution par des $\mathcal{U}$-injectifs qui sont des produits de* J(n).

PROPOSITION 6.1 3. — *Tout* A-*module instable fini* M *(c'est-à-dire tel que* $\dim_{\mathbb{Z}/p}(\bigoplus_n \mathrm{M}^n) < +\infty$) *admet une résolution $\mathcal{U}$-injective de longueur finie formée de produits finis de* J(n).

Démonstration. — Si M est un A-module fini, $\tilde{\mathcal{O}}'\mathcal{O}'\mathrm{M}$ est un produit fini de J(n). De plus, le conoyau C de l'injection : $\mathrm{M} \to \tilde{\mathcal{O}}'\mathcal{O}\mathrm{M}$ est un A-module instable fini tel que $\| \mathrm{C} \| \leqslant \| \mathrm{M} \| - 1$ (la notation $\| \quad \|$ est introduite en 3.3). On achève par récurrence.

Remarque. — Il est facile de voir que tout $\mathcal{U}$-injectif fini est un produit fini de J(n). De même tout $\mathcal{U}$-injectif borné ($\| \quad \| < +\infty$) est une somme directe de J(n) (une telle somme directe est $\mathcal{U}$-injective parce que la catégorie $\mathcal{U}$ est noetherienne, voir l'appendice B).

PROPOSITION 6.1.4. — *Soit* M *un* A-*module instable. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\tilde{\Sigma}\mathrm{M}$ *est nul ;*

(ii) M *s'injecte dans un produit de modules* K(i) : $\mathrm{M} \hookrightarrow \prod_\alpha \mathrm{K}(i_\alpha)$.

Démonstration de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). — Comme le foncteur $\tilde{\Sigma}$ préserve les injections et commute aux produits, elle résulte de 4.4.

La démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) se fait en deux parties, dans la première, on traite le cas $p=2$, dans la seconde, le cas $p>2$.

— *Le cas* $p=2$. On appelle Sq_0-module un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel gradué $\mathrm{F} = \{ \mathrm{F}^n \}_{n \in \mathbb{N}}$, muni d'applications linéaires : $\mathrm{F}^n \to \mathrm{F}^{2n}$ notées Sq_0. On note $\mathcal{F}$ la catégorie dont les objets sont les Sq_0-modules et les morphismes les applications linéaires de degré zéro commutant avec Sq_0 ; on note $\mathcal{O}'' : \mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{F}$ le foncteur oubli évident et $\tilde{\mathcal{O}}'' : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ son adjoint à droite. A nouveau l'application naturelle : $\mathrm{M} \to \tilde{\mathcal{O}}''\mathcal{O}''\mathrm{M}$ est une injection. Si $\tilde{\Sigma}\mathrm{M} = 0$, l'application $Sq_0 : \mathcal{O}''\mathrm{M} \to \mathcal{O}''\mathrm{M}$ est injective (cette condition équivaut à « $\mathcal{O}''\mathrm{M}$ est un projectif de la catégorie $\mathcal{F}$ », c'est là la justification de la terminologie Sq_0-projectif rappelée en 3.2.3) et $\mathcal{O}''$M est isomorphe à une somme directe $\bigoplus_\alpha F_{i_\alpha}$, F_i désignant le Sq_0-module librement engendré par un générateur de degré i :

$$F_i^n = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } n \text{ est de la forme } 2^q i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad ; \quad Sq_0 : F_i^{2^q i} \to F_i^{2^{q+1} i} \text{ est un isomorphisme.}$$

Écrivons l'entier i sous la forme $i=2^v(2j+1)$ et posons $\overline{F}_i = F_{2j+1}$ ($\overline{F}_i$ est l'enveloppe $\mathcal{F}$-injective de F_i) ; on vérifie que l'on a $K(i)=\widetilde{\mathcal{O}}''(\overline{F}_i)$. A partir de l'injection : $\mathcal{O}''M \hookrightarrow \prod_\alpha \overline{F}_{i_\alpha}$ on obtient comme précédemment une injection : $M \hookrightarrow \prod_\alpha K(i_\alpha)$.

— *Le cas* $p>2$. Considérons tout d'abord la catégorie $\mathcal{U}'$. Définissons comme aux paragraphes 3 et 4 des $\mathcal{U}$-injectifs $J'(n)$ et $K'(i)$ par les formules $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}'}(\ , J'(n))=H_n$ (si bien que $J'(n)=0$ si n est impair) et $K'(i)=\varprojlim J'(2ip^q)$; nous avons donc $J'(n)=\widetilde{\mathcal{O}}J(n)$ et $K'(i)=\widetilde{\mathcal{O}}K(i)$. Notons également $\Sigma' : \mathcal{U}' \rightsquigarrow \mathcal{U}'$ la suspension deuxième et $\tilde{\Sigma}' : \mathcal{U}' \rightsquigarrow \mathcal{U}'$ son adjoint à droite. La même démonstration que celle du cas $p=2$ montre que tout A-module instable pair N tel que $\tilde{\Sigma}'N=0$ s'injecte dans un produit de $K'(i)$.

Soit maintenant M un A-module instable tel que $\tilde{\Sigma}M=0$. Comme $\tilde{\Sigma}'\widetilde{\mathcal{O}}M=\widetilde{\mathcal{O}}\tilde{\Sigma}\tilde{\Sigma}M=0$ on peut appliquer ce qui précède à $\widetilde{\mathcal{O}}M$: $\widetilde{\mathcal{O}}M$ s'injecte dans un produit $\prod_\alpha K'(i_\alpha)$. On en déduit une injection :

$$\tilde{\Phi}M=\tilde{\Psi}\widetilde{\mathcal{O}}M \hookrightarrow \tilde{\Psi}(\prod_\alpha K'(i_\alpha))=\prod_\alpha(\tilde{\Psi}K'(i_\alpha))=\prod_\alpha K(i_\alpha)$$

en effet $\tilde{\Psi}K'(i)=\tilde{\Phi}K(i)=K(i)$ (voir 4.4).

Or d'après 3.2.2, si $\tilde{\Sigma}M=0$, M s'injecte dans $\tilde{\Phi}M$, d'où le résultat.

6.2. Δ-*modules*.

PROPOSITION-DÉFINITION 6.2.1. — *Soit* M *un* A-*module instable. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(\Sigma N, M)=0$ *pour tout* A-*module instable* N *et* $s=0,1$.

(ii) $\tilde{\Sigma}M=0$ *et* $R^1\tilde{\Sigma}M=0$.

(iii) $M \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \tilde{\Phi}M$ *est un isomorphisme.*

(iv) *Il existe un début de résolution injective de* M *de la forme*

$$0 \to M \prod_\alpha K(i_\alpha) \to \prod_\beta K(i_\beta).$$

(v) *Il existe un début de résolution injective de* M *de la forme :*

$$0 \to M \to K^0 \to K^1$$

avec K^0 *et* K^1 *deux* $\mathcal{U}$-*injectifs tels que* $\tilde{\Sigma}K^0=\tilde{\Sigma}K^1=0$.

(vi) *Pour* $p=2$, *le module* M *est* Sq_0-*projectif et un élément de* M *est dans l'image de* Sq_0 *si et seulement s'il est annulé par tous les primitifs* Q_i, $i \geqslant 0$, *de* A_2.

Si M *vérifie l'une des conditions équivalentes ci-dessus, on dira que* M *vérifie la condition* Δ *ou bien que* M *est un* Δ-*module.*

Remarque. — La terminologie Δ-module est justifiée par la condition (vi); en effet, pour $p=2$, cette condition est celle qui apparaît dans [2] [15].

Démonstration de 6.2.1. — (i) $\Rightarrow$ (ii). Cette implication résulte de l'égalité $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(\Sigma(F(n), M) = (R^s\tilde{\Sigma}M)^n$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Cette équivalence résulte de la suite exacte de Mahowald introduite en 3.2.2.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). D'après 6.1.4, M s'injecte dans un produit $K = \prod_\alpha K(i_\alpha)$. Soit C le conoyau de cette injection, puisque K est $\mathcal{U}$-injectif et que $\tilde{\Sigma}K$ est nul (voir 4.4), on a un isomorphisme $\tilde{\Sigma}C \simeq R^1\tilde{\Sigma}M$. On peut donc appliquer à nouveau 6.1.4 à C.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Il suffit de prendre $K^0 = \prod_\alpha K(i_\alpha)$ et $K^1 = \prod_\beta K(i_\beta)$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Complétons la suite exacte : $0 \to M \to K^0 \to K^1$ en une résolution $\mathcal{U}$-injective de $M : 0 \to M \to J^*$. On a $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(\Sigma N, M) = H^s \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Sigma N, J^*)$, d'où le résultat.

Supposons $p=2$ et montrons que (ii) est équivalent à (vi). On vérifie que la suite suivante :

$$\bigoplus_{i\geq 1} F(2n+2^i-1) \xrightarrow{d_1} F(2n) \xrightarrow{d_0} F(n) \xrightarrow{d_{-1}} \Sigma F(n-1) \to 0$$

où $d_{-1}(\iota_n) = \Sigma\iota_{n-1}$, $d_0(\iota_{2n}) = Sq_0\iota_n$ et $d_1(\iota_{2n+2^i-1}) = Q_{i-1}\iota_{2n}$, est exacte; elle constitue donc un début de résolution projective dans $\mathcal{U}$ de $\Sigma F(n-1)$. La condition (ii) équivaut à $\mathrm{Ext}^s_{\mathcal{U}}(\Sigma F(n-1), M) = 0$, $s=0,1$, pour tout n, c'est-à-dire à l'exactitude des suites :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(n), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(F(2n), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\bigoplus_i F(2n+2^i-1), M)$$

ou encore :

$$0 \to M^n \xrightarrow{Sq_0} M^{2n} \xrightarrow{\prod_{i\geq 1} Q_{i-1}} \prod_i M^{2n+2^i-1}.$$

6.3. *Un critère d'équivalence pour certains foncteurs.*

PROPOSITION 6.3. — *Soient* T_0, T_1 *deux foncteurs covariants définis sur* $\mathcal{U}$ *à valeurs dans une catégorie abélienne* $\mathcal{C}$, *et* $\alpha : T_0 \to T_1$ *une transformation naturelle. On suppose que* T_0 *et* T_1 *sont exacts à gauche, alors :*

(i) *l'application* $\alpha_M : T_0M \to T_1M$ *est un isomorphisme pour tout* A-module *instable fini* M *si et seulement si* $\alpha_{J(n)} : T_0J(n) \to T_1J(n)$ *est un isomorphisme pour tout* n.

On suppose en outre que les foncteurs T_0 *et* T_1 *commutent aux produits, alors :*

(ii) *la transformation* α *est une équivalence si et seulement si* $\alpha_{J(n)} : T_0J(n) \to T_1J(n)$ *est un isomorphisme pour tout* n;

(iii) *l'application* $\alpha_M : T_0M \to T_1M$ *est un isomorphisme pour tout* Δ-module M *si et seulement si* $\alpha_{K(i)} : T_0K(i) \to T_1K(i)$ *est un isomorphisme pour tout* i.

Démonstration de (i). — Soit M un A-module instable fini. D'après 6.1.3, on a une suite exacte : $0 \to M \to J^0 \to J^1$ où J^0 et J^1 sont des produits finis de $J(n)$. Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & T_0M & \to & T_0J^0 & \to & T_0J^1 \\ & \downarrow{\scriptstyle \alpha_M} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{J^0}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{J^1}} \\ 0 \to & T_1M & \to & T_1J^0 & \to & T_1J^1 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, montre que α_M est un isomorphisme dès que α_{J^0} et α_{J^1} sont des isomorphismes.

Les points (ii) et (iii) se démontrent de la même façon en utilisant respectivement 6.1.2 et 6.2.1 (iv).

6.4. On termine ce paragraphe par la proposition suivante dont la preuve est « routine » :

PROPOSITION 6.4. — *Soient $\mathcal{I}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}$ dont les objets sont les $\mathcal{U}$-injectifs et* $T_0, T_1 : \mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ *(une catégorie abélienne) deux foncteurs covariants exacts à gauche. L'application* $\mathrm{Hom}(T_0, T_1) \to \mathrm{Hom}(T_{0|\mathcal{I}}, T_{1|\mathcal{I}})$ *qui associe à une transformation naturelle :* $T_0 \to T_1$ *la transformation naturelle induite :* $T_{0|\mathcal{I}} \to T_{1|\mathcal{I}}$ *est un isomorphisme.*

7. Produit tensoriel de $\mathcal{U}$-injectifs

En général le produit tensoriel de deux injectifs de la catégorie $\mathcal{U}$ n'est pas injectif. Par exemple, le module $\Sigma J(n-1) = (\Sigma\mathbb{Z}/p)\otimes J(n-1)$, $n \equiv 0(2p)$, n'est pas $\mathcal{U}$-injectif; en effet, on a l'isomorphisme suivant pour tout $\mathcal{U}$-injectif K : $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{U}}(M, \Sigma K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Omega_1 M, K)$.

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème 0 dont voici l'énoncé reformulé à l'aide de la notation $\tilde{\Sigma}$ introduite en 2.3.

THÉORÈME 7.1. — *Soient* J *et* K *deux $\mathcal{U}$-injectifs tels que :*

(i) $\tilde{\Sigma}K = 0$

(ii) J *ou* K *graduellement fini.*

Alors, le produit tensoriel $K\otimes J$ *est $\mathcal{U}$-injectif.*

Démonstration. — Supposons par exemple que K est graduellement fini. D'après 6.1.1 $K\otimes J$ est facteur direct dans $K\otimes(\prod_\alpha J(n_\alpha)) = \prod_\alpha (K\otimes J(n_\alpha))$.

D'après 6.1.4, le module K est facteur direct dans $\prod_\beta K(i_\beta)$. Il en résulte que $K\otimes J$ est facteur direct dans $\prod_{\alpha,\beta}(K(i_\beta)\otimes J(n_\alpha))$. Comme chaque $K(i_\beta)\otimes J(n_\alpha)$ est $\mathcal{U}$-injectif (voir 5.5) il en est de même pour $K\otimes J$.

Remarque. — Nous ne savons pas si la condition (ii) est superflue ou non. Il se peut que l'on puisse se débarrasser de cette condition en utilisant que la catégorie $\mathcal{U}$ est noethérienne (voir l'appendice B) (3).

COROLLAIRE 7.2 (comparer avec [3]). — *Soit* V *un p-groupe abélien élémentaire (c'est-à-dire un $\mathbb{Z}/p$-espace vectoriel de dimension finie) alors, le* A*-module instable* $H^*(V; \mathbb{Z}/p)$ *est $\mathcal{U}$-injectif.*

Démonstration. — La $\mathcal{U}$-injectivité de $H^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p)$ est démontrée dans [14] (voir l'appendice A du présent papier). D'autre part, l'application $\lambda : \Phi H^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p) \to H^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p)$ est injective, ce qui montre que $\tilde{\Sigma}H^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p)$ est nul. D'après le théorème 7.1, $H^*(\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p)\otimes J$ est $\mathcal{U}$-injectif dès que J est $\mathcal{U}$-injectif. Le corollaire se démontre par récurrence sur $\dim_{\mathbb{Z}/p} V$.

(3) Elle est superflue, voir [19].

8. Foncteurs $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\mathcal{O}}$, et produit tensoriel

Dans le paragraphe 9.1 nous aurons besoin de formules décrivant dans certains cas le comportement des foncteurs $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\Phi}$ vis-à-vis du produit tensoriel. La formule relative à $\tilde{\Sigma}$ permet aussi de montrer que le module $\tilde{\Sigma}H^*((\mathbb{Z}/p)^k ; \mathbb{Z}/p)$ est nul (voir [17]).

8.1. *Foncteur $\tilde{\Sigma}$ et produit tensoriel*

Soient M et N deux A-modules instables. On note $\beta_N : \Sigma\tilde{\Sigma}N \to N$ l'adjointe de l'identité de $\tilde{\Sigma}N$ et $\gamma_{M,N} : M \otimes \tilde{\Sigma}N \to \tilde{\Sigma}(M \otimes N)$ l'adjointe de l'application

$$\Sigma(M \otimes \tilde{\Sigma}N) = M \otimes \Sigma\tilde{\Sigma}N \xrightarrow{1 \otimes \beta_N} M \otimes N.$$

PROPOSITION 8.1.1. — *Soit* M *un* A-*module instable tel que* $\tilde{\Sigma}M = 0$. *Alors, pour tout* A-*module instable* N, *l'application* $\gamma_{M,N} : M \otimes \tilde{\Sigma}N \to \tilde{\Sigma}(M \otimes N)$ *est un isomorphisme.*

Cette proposition sera démontrée en 8.1.6.

Lorsque $p=2$, la proposition 8.1.1 est évidente d'après la remarque 2.4.

Soit V un p-groupe abélien élémentaire avec $p>2$ et $\dim_{\mathbb{Z}/p} V \geqslant 2$, alors l'application $\lambda : \Phi H^*(V ; \mathbb{Z}/p) \to H^*(V ; \mathbb{Z}/p)$ n'est plus injective. Par contre la proposition 8.1.1 et la nullité de $\tilde{\Sigma}H^*(\mathbb{Z}/p ; \mathbb{Z}/p)$ montrent :

COROLLAIRE 8.1.2. — *Le module* $\tilde{\Sigma}H(V ; \mathbb{Z}/p)$ *est nul pour tout p-groupe abélien élémentaire* V.

LEMME 8.1.3. — *L'application* $\gamma_{K(i),J(n)} : K(i) \otimes \tilde{\Sigma}J(n) \to \tilde{\Sigma}(K(i) \otimes J(n))$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — C'est une conséquence de 5.4 et de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
K(i) \otimes \tilde{\Sigma}J(n) \arrow[rr, "\gamma_{K(i),J(n)}"] \arrow[d, equal] & & \tilde{\Sigma}(K(i) \otimes J(n)) \arrow[d, equal] \\
(\varprojlim J(2p^q i)) \otimes J(n-1) \arrow[d] & & \tilde{\Sigma}((\varprojlim J(2p^q i)) \otimes J(n)) \arrow[d] \\
\varprojlim J(2p^q i + n - 1) = & \varprojlim (\tilde{\Sigma}J(2p^q i + n)) = & \tilde{\Sigma}(\varprojlim J(2p^q i + n))
\end{tikzcd}$$

SCHOLIE 8.1.4. — *L'application* $\gamma_{K(i),N} : K(i) \otimes \tilde{\Sigma}N \to \tilde{\Sigma}(K(i) \otimes N)$ *est un isomorphisme pour tout* N *instable.*

LEMME 8.1.5. — *Soient* M *un* A-*module instable et* M′ *un sous*-A-*module, alors* $\Sigma\tilde{\Sigma}M = M' \cap \Sigma\tilde{\Sigma}M$.

Démonstration. — Ceci résulte du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma\tilde{\Sigma}M \arrow[r] & M \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] & \tilde{\Phi}M \\
0 \arrow[r] & \Sigma\tilde{\Sigma}M' \arrow[r] \arrow[u, hook] & M' \arrow[r, "\tilde{\lambda}"] \arrow[u, hook] & \tilde{\Phi}M'. \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

8.1.6. *Démonstration de 8.1.1.* — Supposons tout d'abord que N est graduellement fini. D'après 6.1.4, M s'injecte dans un produit $K=\prod_\alpha K(i_\alpha)$, et $M\otimes N$ dans $K\otimes N$. D'après le lemme 8.1.5 :

$$\begin{aligned}
\Sigma\tilde{\Sigma}(M\otimes N) &= (M\otimes N)\cap\Sigma\tilde{\Sigma}(K\otimes N)\\
&= (M\otimes N)\cap\Sigma\tilde{\Sigma}((\prod_\alpha K(i_\alpha))\otimes N)\\
&= (M\otimes N)\cap\Sigma\tilde{\Sigma}\prod_\alpha(K(i_\alpha)\otimes N) \quad \text{car N est graduellement fini}\\
&= (M\otimes N)\cap\prod_\alpha\Sigma\tilde{\Sigma}(K(i_\alpha)\otimes N)\\
&= (M\otimes N)\cap\prod_\alpha(K(i_\alpha)\otimes\Sigma\tilde{\Sigma}N) \quad \text{d'après 8.1.4.}\\
&= (M\otimes N)\cap(K\otimes\Sigma\tilde{\Sigma}N)\\
&= M\otimes\Sigma\tilde{\Sigma}N.
\end{aligned}$$

Pour passer du cas où N est graduellement fini au cas général, on utilise les points suivants :

— Tout A-module instable est limite inductive de ses sous-A-modules de type fini.

— Un A-module de type fini est graduellement fini.

— Le foncteur $\tilde{\Sigma}$ commute aux limites inductives (voir l'appendice B).

— Le produit tensoriel commute aux limites inductives.

8.2. *Foncteurs $\tilde{\Phi}$ et produit tensoriel*

Soit M un A-module instable. Considérons les foncteurs T_0 et T_1 : $\mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ définis par $T_0(N)=M\otimes\tilde{\Phi}N$ et $T_1(N)=\tilde{\Phi}(M\otimes N)$; ces deux foncteurs sont exacts à gauche. D'après 6.4, pour définir une application naturelle $\delta_{M,N}: M\otimes\tilde{\Phi}N \to \tilde{\Phi}(M\otimes N)$, il suffit de la définir lorsque N est $\mathscr{U}$-injectif. Dans ce cas, considérons le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes d'après 3.2.3.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M\otimes\Sigma\tilde{\Sigma}N & \to & M\otimes N & \to & M\otimes\tilde{\Phi}N & \to & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\gamma_{M,N}} & & \| & & & & \\
0 & \to & \Sigma\tilde{\Sigma}(M\otimes N) & \to & M\otimes N & \to & \tilde{\Phi}(M\otimes N) & &
\end{array}$$

$\delta_{M,N}: M\otimes\tilde{\Phi}N \to \tilde{\Phi}(M\otimes N)$ est l'unique application qui complète le diagramme ci-dessus en un diagramme commutatif.

Remarque. — Pour $p=2$, l'application $\delta_{M,N}$ peut se définir plus simplement. Dans ce cas, on a la formule $\Phi(M_1\otimes M_2)=\Phi M_1\otimes\Phi M_2$ (on n'a pas de telle formule pour $p>2$). L'adjointe de $\delta_{M,N}$:

$$\Phi(M\otimes\tilde{\Phi}N)=\Phi M\otimes\Phi\tilde{\Phi}N \to M\otimes N$$

est le produit tensoriel $\lambda_M\otimes\varepsilon_N$, ε_N désignant l'adjointe de l'identité de $\tilde{\Phi}N$.

PROPOSITION 8.2.1. — *Soit* M *un* A-*module instable vérifiant la condition* Δ *(voir 6.2). Alors, pour tout* A-*module instable* N, *l'application* $\delta_{M,N}: M\otimes\tilde{\Phi}N \to \tilde{\Phi}(M\otimes N)$ *est un isomorphisme.*

En utilisant la même méthode qu'en 8.1.6, on peut se limiter au cas où N est graduellement fini. La proposition 8.2.1 résulte alors de 6.3 (iii) et du lemme suivant.

LEMME 8.2.2. — *Soit* J *un* $\mathcal{U}$*-injectif. L'application* $\delta_{K(i),J} : K(i)\otimes\tilde{\Phi}J \to \tilde{\Phi}(K(i)\otimes J)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Par définition de $\delta_{K(i),J}$ le diagramme suivant, dont les lignes sont exactes d'après 3.2.3 et 7.1, est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K(i)\otimes\Sigma\tilde{\Sigma}J \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma_{\gamma_{K(i),J}}"'] & K(i)\otimes J \arrow[r] \arrow[d, equal] & K(i)\otimes\tilde{\Phi}J \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{K(i),J}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma\tilde{\Sigma}(K(i)\otimes J) \arrow[r] & K(i)\otimes J \arrow[r] & \tilde{\Phi}(K(i)\otimes J) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le lemme est maintenant une conséquence de 8.1.1.

8.3. On peut montrer par les mêmes méthodes que précédemment :

PROPOSITION 8.3. — *Soit* M *un* A*-module instable tel que* $\tilde{\Sigma}M=0$, *alors, pour tout* A*-module instable* N *les modules* $\tilde{\mathcal{O}}(M\otimes N)$ *et* $(\tilde{\mathcal{O}}M)\otimes(\tilde{\mathcal{O}}N)$ *sont naturellement isomorphes.*

9. Un théorème d'Adams-Gunawardena-Miller [1]

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment les résultats des paragraphes précédents et ceux de [8] permettent de retrouver, au moins pour $p=2$, le théorème 1.1 de [1] dont voici un énoncé provisoirement approximatif qui sera précisé en 9.2.3.

THÉORÈME 9. — *Soient* U *et* V *deux p-groupes abéliens élémentaires. Soit* M *un* A*-module (pas nécessairement instable !) que l'on suppose graduellement fini et borné inférieurement (c'est-à-dire qu'il existe un entier* n_0 *tel que* $M^n=0$ *pour* $n<n_0$*). Alors le groupe* $\mathrm{Ext}_A^{s,s}(H^*V, H^*U\otimes M)$ *s'exprime comme une somme de groupes de la forme* $\mathrm{Ext}_A^{s',s'}(H^*W, M)$ *où* W *est encore un p-groupe abélien élémentaire (*H^*U, H^*V, H^*W *désignent la cohomologie modulo p des groupes* U, V, W*).*

Ce théorème, qui est le résultat principal de [1], implique une forme forte de la conjoncture de Segal pour les p-groupes abéliens élémentaires (détermination de duaux fonctionnels). Nous nous proposons de le démontrer par des méthodes « instables » sensiblement différentes de celles de [1]. Pour des raisons de simplicité nous supposons $p=2$.

Commençons par le cas $s=0$.

9.1. *Étude de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(H^*V, M\otimes N)$

Soit V un 2-groupe abélien élémentaire. Considérons le foncteur T défini sur la catégorie $\mathcal{U}$ à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels, défini par : $M \mapsto T(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(H^*V, M)$. Dans ce paragraphe nous étudions le comportement du foncteur T vis-à-vis du produit tensoriel de A-modules instables. Cette étude est à comparer avec celle de l'appendice de [8].

Soient M et N deux A-modules instables. On note $\mu_{M,N} : T(M)\otimes T(N) \to T(M\otimes N)$ l'application naturelle correspondant à l'application bilinéaire : $T(M)\times T(N) \to T(M\otimes N)$

induite par le coproduit : $H^*V \to H^*V \otimes H^*V$. Nous allons montrer que l'application $\mu_{M,N}$ est un isomorphisme sous certaines conditions.

THÉORÈME 9.1.1. — *Soit* M *un* A-*module instable vérifiant la condition* Δ. *Alors, pour tout* A-*module instable* N *l'application* $\mu_{M,N}$ *est un isomorphisme dans les deux cas suivants :*

(i) N *fini.*

(ii) M *graduellement fini et* T(M) *fini.*

Ce théorème résulte du lemme ci-dessous et de la proposition 6.3 (i), (ii) et (iii).

LEMME 9.1.2. — *Soit* K *un* A-*module* $\mathscr{U}$-*injectif et* Sq_0-*projectif. L'application* $\mu_{K,J(n)}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — En associant à un élément F de H^nV, qui est un polynôme homogène de degré n sur V, sa différentielle dF, qui est un élément de $V^* \otimes H^{n-1}V$, on définit une application A-linéaire de degré zéro, notée $d : H^*V \to \Sigma V^* \otimes H^*V \simeq \Sigma H^1V \otimes H^*V$ (H^1V est ici considéré comme un A-module trivial concentré en degré zéro). Un polynôme F est un carré si et seulement si $dF = 0$, autrement dit, la suite :

$$0 \to \Phi H^*V \xrightarrow{Sq_0} H^*V \xrightarrow{d} \Sigma H^1V \otimes H^*V$$

est exacte.

Plus généralement, soit d_n la composition suivante :

$$\Sigma^n H^nV \otimes H^*V \xrightarrow{1 \otimes d} \Sigma^n H^nV \otimes (\Sigma H^1V \otimes H^*V) \simeq \Sigma^{n+1}(H^nV \otimes H^1V) \otimes H^*V \xrightarrow{\Sigma^{n+1}\text{ produit} \otimes 1} \Sigma^{n+1}H^{n+1}V \otimes H^*V$$

(les H^nV sont là encore considérés comme des A-modules triviaux concentrés en degré zéro). La longue suite :

$$(*) \quad 0 \to \Phi H^*V \xrightarrow{Sq_0} H^*V \to \Sigma H^1V \otimes H^*V \to \ldots \to \Sigma^{n-1}H^{n-1} \otimes H^*V \xrightarrow{d_n} \Sigma^n H^nV \otimes H^*V \to \ldots$$

est exacte. En effet, soit C(V) le complexe de cochaines suivant :

$$H^*V \xrightarrow{d_0} \Sigma H^1V \otimes H^*V \xrightarrow{d_1} \Sigma^2 H^2V \otimes H^*V \to \ldots$$

on vérifie que pour tous 2-groupes abéliens élémentaires V, W les complexes $C(V \otimes W)$ et $C(V) \otimes C(W)$ sont isomorphes ; il suffit donc de montrer que la suite (*) est exacte lorsque $\dim_{\mathbb{Z}/2} V = 1$ et dans ce cas c'est facile. On vérifie ensuite qu'est commutatif le diagramme suivant dont les lignes sont exactes parce que, d'après 7.1, le module $K \otimes J(n)$ est $\mathscr{U}$-injectif.

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma^2H^2V \otimes H^*V, K \otimes J(n)) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma H^1V \otimes H^*V, K \otimes J(n)) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\wr"] & T(K \otimes J(n)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi H^*V, K \otimes J(n)) \arrow[r] \arrow[d, dash, "\wr"] & 0 \\
& H^2V \otimes T(\tilde{\Sigma}^2(K \otimes J(n))) \arrow[d, dash, "\wr"] & H^1V \otimes T(\tilde{\Sigma}(K \otimes J(n))) \arrow[d, dash, "\wr"] & & T(\tilde{\Phi}(K \otimes J(n))) \arrow[d, dash, "\wr"] & \\
& H^2V \otimes T(K \otimes \tilde{\Sigma}^2 J(n)) & H^1V \otimes T(K \otimes \tilde{\Sigma} J(n)) & & T(K \otimes \tilde{\Phi} J(n)) & \\
& H^2V \otimes (T(K) \otimes T(\tilde{\Sigma}^2 J(n))) \arrow[u, "1 \otimes \mu_{K,\tilde{\Sigma}^2 J(n)}"'] \arrow[d, dash, "\wr"] & H^1V \otimes (T(K) \otimes T(\tilde{\Sigma} J(n))) \arrow[u, "1 \otimes \mu_{K,\tilde{\Sigma} J(n)}"'] \arrow[d, dash, "\wr"] & & T(K) \otimes T(\tilde{\Phi} J(n)) \arrow[u, "\mu_{K,\tilde{\Phi} J(n)}"'] \arrow[d, equal] & \\
\ldots \arrow[r] & T(K) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma^2H^2V \otimes H^*V, J(n)) \arrow[r] & T(K) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma H^1V \otimes H^*V, J(n)) \arrow[r] & T(K) \otimes T(J(n)) \arrow[r] \arrow[uuuu, "\mu_{K,J(n)}"'] & T(K) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi H^*V, J(n)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En utilisant les égalités $\tilde{\Sigma}^k J(n) = J(n-k)$ et $\tilde{\Phi} J(n) = J\left(\frac{n}{2}\right)$ (avec $J\left(\frac{n}{2}\right) = 0$ si n est impair) on prouve le lemme 9.1.2 par récurrence sur n (il est trivial que $\mu_{K,J(0)}$ est un isomorphisme).

9.1.3. Soient U, V deux $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{L}(U, V)$ l'ensemble des applications linéaires de U dans V, et $\mathbb{Z}/2[\mathscr{L}(U, V)]$ le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de base $\mathscr{L}(U, V)$; alors le prolongement linéaire : $\mathbb{Z}/2[\mathscr{L}(U, V)] \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V, H^*U)$ de l'application (ensembliste) naturelle : $\mathscr{L}(U, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V, H^*U)$ est un isomorphisme. Il s'agit là du corollaire A.2.3 de [8], ce résultat peut aussi se démontrer à l'aide du théorème 9.1.1 (ii) et du théorème A.1.2 de [8] (on se ramène au cas $\dim U = \dim V = 1$).

En appliquant le (ii) du théorème 9.1.1 nous obtenons :

COROLLAIRE 9.1.3. — *Pour tout* A-*module instable* M *le groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V, H^*U \otimes M)$ *est naturellement isomorphe à* $\mathbb{Z}/2[\mathscr{L}(U, V)] \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V, M)$.

Remarque 9.1.4. — Soit M un A-module instable graduellement fini alors M est la limite projective des A-modules finis $M/M_{>n}$, $M_{>n}$ désignant le sous-A-module de M engendré par les éléments de degré $>n$; dans ce cas T(M) est un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel profini c'est-à-dire une limite projective de $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient M et N deux A-modules instables graduellement finis. L'application $\mu_{M,N}$ définie en 9.1 se prolonge en une application linéaire continue $\hat{\mu}_{M,N} : T(M) \hat{\otimes} T(N) \to T(M \otimes N)$, $\hat{\otimes}$ désignant le produit tensoriel dans la catégorie des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels profinis (voir par exemple l'appendice de [8]).

On a le résultat suivant dont la première partie généralise en quelque sorte le (i) de 9.1.1.

THÉORÈME 9.1.4. — *Soient* M *et* N *deux* A-*modules instables graduellement finis.*

(i) *Si* M *vérifie la condition* Δ *alors, l'application* $\hat{\mu}_{M,N}$ *est un isomorphisme.*

(ii) *Si* M *et* N *sont* Sq_0-*projectifs alors, l'application* $\hat{\mu}_{M,N}$ *est un isomorphisme.*

Remarque 9.1.5. — Les résultats 9.1.1, 9.1.2, 9.1.3 et 9.1.4 s'étendent *mutatis mutandis*, au cas $p>2$. Il suffit en fait d'étendre le lemme 9.1.2. On étend tout d'abord ce lemme à la catégorie $\mathscr{U}'_p$ pour $p>2$ qui est le véritable analogue de $\mathscr{U}_2$. Cette idée a déjà été utilisée en 6.1.4, et sera utilisée dans les appendices A et B, voir aussi [17]. Le rôle de H*V pour $p=2$ est tenu dans $\mathscr{U}'_p$ pour $p>2$ par la « partie polynomiale » de H*V notée PV. Pour passer ensuite de $\mathscr{U}'_p$, $p>2$, à $\mathscr{U}_p$, $p>2$, on utilise essentiellement qu'il existe une filtration $PV = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{\dim V} = H^*V$ telle que : $F_k/F_{k-1} = \Sigma^k \Lambda^k V^* \otimes PV$.

9.2. *Étude de* $\mathrm{Ext}_A^{s,s}(H^*V, H^*U \otimes M)$ *lorsque* M *est un* A-*module instable*, $\mathscr{U}$-*injectif*

9.2.1. Posons, pour tout A-module M, $G^s(M) = \mathrm{Ext}_A^{s,s}(H^*V, H^*U \otimes M)$. Si M est $\mathscr{U}$-injectif il en est de même, d'après le théorème 7.1, pour $H^*U \otimes M$. On peut donc appliquer la proposition 5.4.1 de [8] :

$$G^s(M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_s H^*V, H^*U \otimes M).$$

Le calcul de $R_s H^*V$ se fait par récurrence sur s à l'aide des formules 4.4.6.1 et 4.4.6.4 de [8]. On pose $V_s = (\mathbb{Z}/2)^s \oplus V$, on obtient que $R_s H^*V$ est le sous-module de H^*V_s formé des invariants sous l'action du sous-groupe de $GL(V_s)$, noté $GL(V_s, V)$, des automorphismes de V_s qui induisent l'identité sur V : $R_s H^*V \simeq (H^*V_s)^{GL(V_s, V)}$. Il est à remarquer que $R_s H^*V$

est canoniquement isomorphe à $(H^*W)^{GL(W,V)}$ pour tout $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel W contenant V tel que $\dim W - \dim V = s$. Il vient :

$$G^s(M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((H^*V_s)^{GL(V_s,V)}, H^*U \otimes M).$$

Puisque $H^*U \otimes M$ est $\mathscr{U}$-injectif le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\ , H^*U \otimes M)$ « transforme invariants (pour l'action d'un groupe ayant un nombre fini de générateurs) en co-invariants » :

$$G^s(M) = (\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V_s, H^*U \otimes M))_{GL(V_s,V)}.$$

On utilise alors le corollaire 9.1.3 :

$$G^s(M) = (\mathbb{Z}/2[\mathscr{L}(U, V_s)] \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V_s, M))_{GL(V_s,V)}.$$

Cette expression se décompose en une somme directe indexée par les orbites, sous l'action de $GL(V_s, V)$, de l'ensemble $\mathscr{L}(U, V_s)$. Le sous-groupe d'isotropie d'un élément φ de $\mathscr{L}(U, V_s)$ est $GL(V_s, W(\varphi))$, $W(\varphi)$ désignant le sous-espace $V + \mathrm{Im}\,\varphi$ de V_s, et le terme correspondant à l'orbite de φ, noté $F^s_\varphi(M)$, est le suivant :

$$F^s_\varphi(M) = (\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V_s, M))_{GL(V_s,W(\varphi))}$$

ou encore :

$$F^s_\varphi(M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}((H^*V_s)^{GL(V_s,W(\varphi))}, M).$$

Notons $s(\varphi)$ la codimension de V dans $W(\varphi)$, alors la codimension de $W(\varphi)$ dans V_s est $s - s(\varphi)$ et le module $(H^*V_s)^{GL(V_s,W(\varphi))}$ s'identifie à $R_{s-s(\varphi)}H^*W(\varphi)$. On peut appliquer à nouveau la proposition 5.4.1 de [8] :

$$F^s_\varphi(M) = \mathrm{Ext}_A^{s-s(\varphi),s-s(\varphi)}(H^*W(\varphi), M).$$

On a donc obtenu, lorsque M est $\mathscr{U}$-injectif, un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}_A^{s,s}(H^*V, H^*U \otimes M) \simeq \bigoplus_\varphi \mathrm{Ext}_A^{s-s(\varphi),s-s(\varphi)}(H^*W(\varphi), M)$$

la somme directe étant indexée sur un système de représentants pour l'ensemble quotient $GL(V_s, V)\backslash\mathscr{L}(U, V_s)$.

A présent, afin de remplacer la somme ci-dessus par une somme indexée sur un ensemble qui soit indépendant de s, il nous faut introduire la notion suivante.

9.2.2. *L'ensemble des classes d'isomorphismes de* (U, V)-*ensemble irréductibles* [1].

Soient U et V deux 2-groupes abéliens élémentaires. On appelle (U, V)-ensemble, un ensemble fini X muni d'une action du groupe $U \oplus V$ dont la restriction à V est libre ; on dit que X est irréductible si l'action de $U \oplus V$ est transitive ou ce qui revient au même si l'action induite de U sur X/V est transitive. On note $\mathscr{B}(U, V)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de (U, V) ensembles irréductibles.

Soit X un (U, V)-ensemble irréductible. On note $s(X)$ l'entier tel que $\#(X/V) = 2^{s(X)}$ $(0 \leqslant s(X) \leqslant \dim U)$. Soit s un entier, on note $\mathscr{B}_s(U, V)$ le sous-ensemble de $\mathscr{B}(U, V)$ formé des classes d'isomorphismes tels que $s(X) \leqslant s$.

Soit maintenant W(X) le groupe des automorphismes de X en tant que (U, V)-ensemble. L'application naturelle : $U \oplus V \to W(X)$ est une surjection, ce qui montre que W(X) est aussi un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel, dont la restriction à V est une injection qui identifie V à un sous-espace de W(X). D'autre part X est un espace affine sous W(X). Soit X avec $s(X) \leqslant s$, on choisit une injection linéaire $i : W(X) \to V_s = (\mathbb{Z}/2)^s \oplus V$ prolongeant l'injection naturelle de V dans V_s (ceci est possible car $s(X)$ est la codimension de V dans W(X)) et on note φ la composition : $U \to W(X) \xrightarrow{i} V_s$. L'élément φ de $\mathscr{L}(U, V_s)$ ainsi obtenu est déterminé modulo l'action de $GL(V_s, V)$ sur $\mathscr{L}(U, V_s)$. Ceci donne une application canonique : $\mathscr{B}_s(U, V) \to GL(V_s, V)\backslash\mathscr{L}(U, V_s)$.

PROPOSITION 9.2.2. — *L'application canonique :*

$$\mathscr{B}_s(U, V) \to GL(V_s, V)\backslash\mathscr{L}(U, V_s)$$

est une bijection.

Démonstration. — L'application inverse fait correspondre à la classe de φ la classe du (U, V)-ensemble irréductible $W(\varphi) = V + \operatorname{Im} \varphi$.

9.2.3. Posons, pour tout A-module M, $F^s_X(M) = \operatorname{Ext}_A^{s-s(X), s-s(X)}(H^*W(X), M)$, en convenant que $F^s_X(M)$ est nul si $s < s(X)$, et $F^s(M) = \bigoplus_X F^s_X(M)$, la somme directe étant indexée sur un système de représentants de l'ensemble $\mathscr{B}(U, V)$ des classes d'isomorphismes de (U, V)-ensembles irréductibles. Il résulte des points 9.2.1 et 9.2.2 qu'il existe, pour tout A-module instable $\mathscr{U}$-injectif M, un isomorphisme naturel de $F^s(M)$ sur $G^s(M)$ que nous noterons $\alpha^s(M) = \bigoplus_X \alpha^s_X(M)$.

On note, $e(X)$ l'élément $\alpha_X^{s(X)}(H^*W(X))(1_{H^*W(X)})$ de $G^{s(X)}(H^*W(X))$, $\omega^s_X(M)$ la composition : $F^s_X(M) \xrightarrow{1_{H^*U}\otimes} \operatorname{Ext}_A^{s-s(X), s-s(X)}(H^*U \otimes H^*W(X), H^*U \otimes M) \xrightarrow{e(X)\cup} G^s(M)$, et $\omega^s(M)$ la somme directe $\bigoplus_X \omega^s_X(M)$; nous sommes maintenant en mesure de préciser l'énoncé 9 :

THÉORÈME 9.2.3. — *L'application naturelle* $\omega^s(M) : F^s(M) \to G^s(M)$ *est un isomorphisme si le* A-*module* M *est borné inférieurement et graduellement fini*

9.2.4. *Démonstration du théorème* 9.2.3.

Première étape : $\omega^s(M)$ est un isomorphisme si M est un A-module instable $\mathscr{U}$-injectif.

Démonstration. — On vérifie que si M est un A-module instable $\mathscr{U}$-injectif les applications $\alpha^s(M)$ et $\omega^s(M)$ coïncident.

Deuxième étape : $\omega^s(M)$ est un isomorphisme si M est un A-module instable fini.

Démonstration. — On utilise les deux points suivants :

— Pour toute suite exacte de A-module $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ on a des connectants : $F^{s-1}(\Sigma M'') \xrightarrow{\partial} F^s(M')$, $G^{s-1}(\Sigma M'') \xrightarrow{\partial} G^s(M)$ et des longues suites exactes compatibles avec les ω^s.

— Tout A-module instable fini admet une résolution de longueur finie par des $\mathscr{U}$-injectifs finis (voir 6.1.3).

On achève par récurrence, à la fois sur s et la longueur de cette résolution.

Troisième étape : $\omega^s(\Sigma^n \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme pour tout n dans $\mathbb{Z}$.

Démonstration. — Pour $n \geqslant 0$ on vient de le montrer. Pour $n < 0$ $F^s(\Sigma^n \mathbb{Z}/2)$ et $G^s(\Sigma^n \mathbb{Z}/2)$ sont nuls d'après la proposition 5.4.7.1 de [8].

Quatrième étape : $\omega^s(M)$ est un isomorphisme si M est fini.

Démonstration. — A l'aide de la troisième étape et du lemme des cinq.

Dernière étape : on passe à la limite en M.

Soient K et L deux A-modules, on suppose que L est graduellement fini et est une limite projective de A-modules L_i graduellement finis, alors $\mathrm{Ext}_A^{**}(K, L) = \varprojlim \mathrm{Ext}_A^{**}(K, L_i)$. En effet sous ces hypothèses on peut « dualiser » et utiliser que le foncteur $\mathrm{Tor}_{**}^A(\ ,K)$ commute aux limites inductives (il s'agit du même argument que celui de la démonstration de la proposition 1.2 de [1]). On complète la démonstration du théorème 9.2.3 en remarquant qu'un A-module M borné inférieurement et graduellement fini est limite projective des A-modules finis $M/M_{>n}$ (notation de 9.1.4) et en appliquant ce qui précède.

9.3. *Un analogue instable du théorème d'Adams-Gunawardena-Miller*

THÉORÈME 9.3. — *Soient* V *un p-groupe abélien élémentaire et* K, M *deux* A-*modules instables, l'application naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V, K) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathscr{U}}^s(H^*V, M) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{U}}^s(H^*V, K \otimes M)$$

induite par le coproduit de H^*V, *est un isomorphisme si l'on suppose que* K *est* $\mathscr{U}$-*injectif graduellement fini avec* $\tilde{\Sigma}K = 0$ *et que* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*V, K)$ *est fini. En particulier le groupe* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{U}}^s(H^*V, H^*U \otimes M)$, U, V *désignant deux p-groupes abéliens élémentaires, est naturellement isomorphe au produit tensoriel* $\mathbb{Z}/p[\mathscr{L}(U, V)] \otimes \mathrm{Ext}_{\mathscr{U}}^s(H^*V, M)$.

Démonstration. — On remarque tout d'abord que si $0 \to M \to J^*$ est une résolution $\mathscr{U}$-injective de M alors $0 \to K \otimes M \to K \otimes J^*$ est, d'après 7.1 une résolution $\mathscr{U}$-injective de $K \otimes M$. On applique ensuite le théorème 9.1.1 (ii) (pour $p > 2$ voir la remarque 9.1.5).

APPENDICE A

$\mathscr{U}$-INJECTIVITÉ DE $H^*(\mathbb{Z}/p\,;\mathbb{Z}/p)$

L'objet de cet appendice est de montrer que pour tout nombre premier p le A-module instable $H^*(\mathbb{Z}/p\,;\mathbb{Z}/p)$ (ou, ce qui revient au même, $\tilde{H}^*(\mathbb{Z}/p\,;\mathbb{Z}/p)$ puisque $H^*(\mathbb{Z}/p\,;\mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p \oplus \tilde{H}^*(\mathbb{Z}/p\,;\mathbb{Z}/p)$) est $\mathscr{U}$-injectif. L'historique de la question est le suivant. Dans [3] G. Carlsson montre que le A-module $\tilde{H}^*(\mathbb{Z}/2\,;\mathbb{Z}/2)$ est facteur direct dans la limite projective K(1) des A-modules $J(2^q)$ (voir les paragraphes 3 et 4). Dans [14] H. Miller remarque que cette factorisation implique que $\tilde{H}^*(\mathbb{Z}/2\,;Z/2)$ est $\mathscr{U}$-injectif et montre par les mêmes méthodes que $\tilde{H}^*(\mathbb{Z}/p\,;\mathbb{Z}/p)$ est $\mathscr{U}$-injectif. Cet appendice est juste un « remake », avec quelques modifications de détails, des preuves de G. Carlsson et H. Miller, nous espérons cependant qu'il pourra être utile au lecteur.

A.1. COMMENT SE DÉBARRASSER DU BOCKSTEIN

Dans ce paragraphe, p désigne un nombre premier impair. Considérons les foncteurs $\mathcal{O}$, $\tilde{\mathcal{O}}$, Ψ, $\tilde{\Psi}$, introduits en 2.3. L'exactitude du foncteur $\mathcal{O}$ (resp. Ψ) entraîne que $\tilde{\mathcal{O}}$ (resp. $\tilde{\Psi}$) transforme un $\mathcal{U}$-injectif en un $\mathcal{U}'$-injectif (resp. un $\mathcal{U}'$-injectif en un $\mathcal{U}$-injectif). Cette propriété des foncteurs $\tilde{\mathcal{O}}$ et $\tilde{\Psi}$, la formule $\tilde{\Phi}=\tilde{\Psi}\tilde{\mathcal{O}}$, et la suite exacte 3.2.3, nous donnent :

PROPOSITION A.1.1. — *Soit* K *un* A*-module instable. Les deux conditions sont équivalentes :*

(i) K *est* $\mathcal{U}$*-injectif et* $\tilde{\Sigma}$K *est nul.*

(ii) *l'adjointe* $\tilde{\lambda}:\mathrm{K}\to\tilde{\Phi}\mathrm{K}$ *de l'application* λ *définie en 3.2 est un isomorphisme (c'est-à-dire, en utilisant la terminologie de 6.2.1,* K *est un* Δ*-module) et* $\tilde{\mathcal{O}}$K *est* $\mathcal{U}'$*-injectif.*

A.1.2. Posons $\mathrm{H}=\mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/p\,;\mathbb{Z}/p)$ et notons P la partie paire de H qui est un sous-A-module de H et donc un objet de $\mathcal{U}'$.

PROPOSITION A.1.2. — (i) *L'application adjointe de l'inclusion :* $\mathcal{O}\mathrm{P}\hookrightarrow\mathrm{H}$ *est un isomorphisme :* $\mathrm{P}\simeq\tilde{\mathcal{O}}\mathrm{H}$.

(ii) *L'application* $\tilde{\lambda}:\mathrm{H}\to\tilde{\Phi}\mathrm{H}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit M un A-module concentré en degré pair, le (i) est juste la traduction de l'isomorphisme : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathcal{O}\mathrm{M},\mathrm{H})=\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}'}(\mathrm{M},\mathrm{P})$.

Montrer (ii) est équivalent à montrer que $\lambda_{\mathrm{M}}^*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathrm{M},\mathrm{H})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi\mathrm{M},\mathrm{H})$ est un isomorphisme pour tout A-module instable M.

Soit g un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi\mathrm{M},\mathrm{H})$; puisque λ_{H} est un isomorphisme de ΦH sur le sous-module de H formé des éléments dont le degré est congru à 0 ou 2 modulo $2p$, il existe une unique application de degré zéro $f:\mathrm{M}\to\mathrm{H}$, $\mathbb{Z}/p$-linéaire, telle que $\lambda_{\mathrm{H}}(\Phi f(x))=g(\Phi x)$ pour tout x dans M. Montrons que cette application f est en fait A-linéaire. La définition même de la structure de A-module de ΦM (voir 2.3) montre $f(\mathrm{P}^i x)=\mathrm{P}^i f(x)$, pour tout x et pour tout i, et $f(\beta x)=\beta f(x)$ pour tout x de degré impair. Reste à vérifier l'égalité $f(\beta x)=\beta f(x)$ pour x de degré pair. Or, les deux membres de cette égalité sont nuls, le premier parce que $\beta:\mathrm{H}^{|x|+1}\to\mathrm{H}^{|x|+2}$ est injectif et que $\beta f(\beta x)$ est nul ; le deuxième parce que $\beta:\mathrm{H}^{|x|}\to\mathrm{H}^{|x|+1}$ est trivial. La A-linéarité de f implique $f\circ\lambda=g$, ce qui achève la démonstration.

A.1.3. D'après les propositions A.1.1 et A.1.2, il est équivalent de montrer que H est $\mathcal{U}$-injectif ou bien que P est $\mathcal{U}'$-injectif. Posons : $\mathrm{P}=\mathbb{Z}/p\oplus\overline{\mathrm{P}}$; le A-module $\overline{\mathrm{P}}$ se décompose en la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p-1}\mathrm{P}_i$, P_i désignant le sous-module de $\overline{\mathrm{P}}$ formés des éléments dont le degré est congru à $2i$ modulo $2(p-1)$; il faut donc montrer que chaque P_i est $\mathcal{U}'$-injectif. Or, la preuve de la $\mathcal{U}'$-injectivité de P_i est formellement la même que celle de la $\mathcal{U}$-injectivité de $\tilde{\mathrm{H}}^*(\mathbb{Z}/2\,;\mathbb{Z}/2)$. En effet, comme nous l'avons déjà dit, le véritable analogue de la catégorie $\mathcal{U}_2$ n'est pas la catégorie $\mathcal{U}_p$, mais la catégorie $\mathcal{U}'_p$. C'est pourquoi nous allons dans la suite nous borner à détailler la preuve de la $\mathcal{U}$-injectivité de $\tilde{\mathrm{H}}^*(\mathbb{Z}/2\,;\mathbb{Z}/2)$ et à indiquer brièvement les modifications qu'il faut y apporter pour avoir celle de la $\mathcal{U}'$-injectivité de P_i.

A.2. $\mathcal{U}$-INJECTIVITÉ DE $\tilde{\mathrm{H}}^*(\mathbb{Z}/2\,;\,\mathbb{Z}/2)$

Compte tenu de 4.3, cette $\mathcal{U}$-injectivité est un corollaire du théorème suivant :

THÉORÈME A.2 (G. Carlsson [3]). — *Le* A-*module* $\tilde{\mathrm{H}}^*(\mathbb{Z}/2\,;\,\mathbb{Z}/2)$ *se plonge comme facteur direct dans* K(1).

Démonstration. — Posons $\overline{\mathrm{P}}=\tilde{\mathrm{H}}^*(\mathbb{Z}/2\,;\,\mathbb{Z}/2)$. Le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\overline{\mathrm{P}}, \mathrm{K}(1))$, qui est par définition la limite projective du système $\{\tilde{\mathrm{H}}_{2^q}(\mathbb{Z}/2\,;\,\mathbb{Z}/2), .Sq^{2^{q-1}}\}$, est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$; on note f l'unique application A-linéaire non triviale : $\overline{\mathrm{P}} \to \mathrm{K}(1)$. Le problème est de montrer qu'il existe $g : \mathrm{K}(1) \to \overline{\mathrm{P}}$ telle que $g \circ f = 1_{\overline{\mathrm{P}}}$. On ne peut cette fois invoquer de raisons « universelles », aussi va-t-on dans les points suivants expliciter K(1) avant d'exhiber une telle application g en A.2.4.

A.2.1. ρ-*Objets.*

Nous avons vu en 3.1.1, comment H. R. Miller décrit certaines propriétés de la famille des modules J(n) à l'aide du formalisme des A-bimodules. Ce formalisme est inadapté à la famille des K(i), aussi allons-nous introduire les définitions *ad hoc* ci-dessous.

Posons $\mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]=\bigcup_{q\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^q}\mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord qu'une famille $\mathrm{M}=\{\mathrm{M}(i)\}_{i\in\mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]}$ de $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués M(i), i parcourant $\mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]$ peut être considérée comme un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel $\left(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]\right)$-gradué en posant $\mathrm{M}_i^m=(\mathrm{M}(i))^m$.

Nous dirons qu'un tel M est un ρ-$\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel si l'on se donne en outre des applications linéaires de degré zéro $\rho_i : \mathrm{M}(i) \to \mathrm{M}\left(\frac{i}{2}\right)$ (notées simplement ρ s'il n'y a pas de confusion possible). Le produit tensoriel de deux ρ-$\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels M′ et M″ est défini par :

$$(\mathrm{M}'\otimes\mathrm{M}'')(i)=\bigoplus_{i'+i''=i}\mathrm{M}'(i')\otimes\mathrm{M}''(i'')\,;\quad \rho_i=\bigoplus_{i'+i''=i}\rho_{i'}\otimes\rho_{i''}.$$

Les ρ-$\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels sont les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les applications linéaires de bidegré (0, 0) commutant avec ρ. Un ρ-$\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel M est une ρ-$\mathbb{Z}/2$-algèbre si l'on se donne un morphisme : M⊗M → M qui fait de M une algèbre commutative et unitaire.

Un ρ-A-module instable est un ρ-$\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel M tel que les M(i) sont des A-modules instables et les ρ_i des applications A-linéaires. Il est clair que l'on a un produit tensoriel de ρ-A-modules instables. Les morphismes de ρ-A-modules instables sont les applications de bidegré (0, 0), A-linéaires, commutant avec ρ.

Nous dirons enfin que M est une ρ-A-algèbre instable si l'on se donne un morphisme de ρ-A-modules instables : M⊗M → M qui fait de M une algèbre associative commutative et unitaire où « l'élévation au carré » est reliée à la structure de ρ-A-module instable par la formule

(C) $$Sq_0 x=\rho(x^2)=(\rho x)^2.$$

Les morphismes de ρ-A-algèbres instables sont les morphismes de ρ-A-modules instables respectant le produit.

Exemples

Étendons la définition, donnée au paragraphe 3, des A-modules $J(i)$, i parcourant $\mathbb{N}$ à i parcourant $\mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]$, en convenant que $J(i)=0$ si $i \notin \mathbb{N}$; les applications $\rho_i : J(i) \to J\left(\frac{i}{2}\right)$ sont celles que l'on a notées $.Sq^{\frac{i}{2}}$ si $i \in 2\mathbb{N}$ et sont triviales sinon. Posons également $K(i) = \varprojlim \{ J(2^q i), \rho_{2^q i} : q \in \mathbb{N} \}$; pour i appartenant à $\mathbb{N}$, on retrouve la définition du paragraphe 4. Les applications $\rho_{2^q i} : J(2^q i) \to J\left(2^q \frac{i}{2}\right)$ induisent des applications que nous notons encore $\rho_i : K(i) \to K\left(\frac{i}{2}\right)$ (ces applications sont des isomorphismes). Les ρ-A-modules instables $\{ J(i) \}_{i \in \mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]}$, $\{ K(i) \}_{i \in \mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]}$ sont notés respectivement $J(.)$ et $K(.)$.

Les applications $\mu_{m,n} : J(m) \otimes J(n) \to J(m+n)$ définissent des produits : $J(.) \otimes J(.) \to J(.)$ et $K(.) \otimes K(.) \to K(.)$ qui font de $J(.)$ et $K(.)$ des ρ-A-algèbres instables ; la raison pour laquelle la formule (C) est vérifiée dans les deux cas, est que l'application $Sq_0 : \Phi J(n) \to J(n)$ se factorise en $\rho_{2n} \circ \sigma_n$, σ_n désignant l'application : $\Phi J(n) \to J(2n)$ correspondant à $[J(n)]$ via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(\Phi J(n), J(2n)) \simeq H_n J(n)$.

De même, la famille $\{ J(2^q i) \}_{i \in \mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]}$, q fixé dans $\mathbb{N}$, est une ρ-A-algèbre instable, que nous notons $J(2^q.)$. Les applications $\rho_{2^{q+1} i} : J(2^{q+1} i) \to J(2^q i)$ définissent un morphisme de ρ-A-algèbres instables : $J(2^{q+1}.) \to J(2^q.)$ et nous avons tout fait pour que la ρ-A-algèbre $K(.)$ soit la limite projective des ρ-A-algèbres instables $J(2^q.)$.

A.2.2. *Structure de* $J(.)$

Considérons maintenant les suites exactes de Mahowald :

$$0 \to \Sigma J(n-1) \to J(n) \xrightarrow{\rho} J\left(\frac{n}{2}\right) \to 0$$

introduites en 3.2 (n est un entier positif et on convient que $J\left(\frac{n}{2}\right)=0$ si n est impair). On note ξ_0 l'élément de bidegré $(1, 1)$ générateur de $J(1) \simeq \Sigma J(0) \simeq \Sigma \mathbb{Z}/2$. Il est clair que les applications : $\Sigma J(n-1) \to J(n)$ ci-dessus correspondent à la multiplication par ξ_0 dans $J(.)$. On note enfin ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, l'élément de $J(.)$ de bidegré $(1, 2^k)$ inductivement défini par $\rho \xi_k = \xi_{k-1}$ ($\rho : (J(n))^1 \to \left(J\left(\frac{n}{2}\right)\right)^1$ est un isomorphisme pour $n \geqslant 2$, puisque dans ce cas $(J(n-1))^0 = 0$, ce qui montre que $(J(n))^1 = \mathbb{Z}/2$ ou 0 selon que n est une puissance de 2 ou non).

PROPOSITION A.2.2 (H. Miller [14]). — *L'algèbre* $J(.)$ *est l'algèbre polynomiale bigraduée librement engendrée par les éléments* ξ_k, $k \in \mathbb{N}$:

$$J(.) = \mathbb{Z}/2\,[\xi_k \,;\, k \in \mathbb{N}].$$

La structure de A-*module à gauche de* J(.) *est donnée par les formules :*

$$Sq\xi_0=\xi_0\,;\quad Sq\xi_k=\xi_k+\xi_{k-1}^2,\quad k\geqslant 1$$

l'application $\rho : \mathrm{J}(.) \to \mathrm{J}(.)$ *par les formules :*

$$\rho\xi_0=0\,;\quad \rho\xi_k=\xi_{k-1},\quad k\geqslant 1.$$

Démonstration. — La formule pour $\rho\xi_k$ est la définition même des ξ_k. La formule pour $Sq^1\xi_k$ est un cas particulier de (C).

Démontrons maintenant la première partie de la proposition. Soient $\mathrm{S}=\mathbb{Z}/2\,[x_k\,;k\in\mathbb{N}]$ l'algèbre polynomiale bigraduée engendrée par des indéterminées x_k de bidegré $(1, 2^k)$ et $\varphi : \mathrm{S} \to \mathrm{J}(.)$ l'application d'algèbres telle que $\varphi(x_k)=\xi_k$. On fait de S une ρ-$\mathbb{Z}/2$-algèbre et de φ un morphisme de ρ-$\mathbb{Z}/2$-algèbres en prenant pour $\rho : \mathrm{S} \to \mathrm{S}$ l'application d'algèbres telle que $\rho(x_0)=0$ et $\rho(x_k)=x_{k-1}$, $k\geqslant 1$. Notons $\mathrm{S}(n)$ le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel gradué $\{\mathrm{S}_n^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ et convenons que $\mathrm{S}\left(\frac{n}{2}\right)=0$ si n est impair, nous avons une suite exacte courte :

$$0 \to \Sigma\mathrm{S}(n-1) \xrightarrow{x_0\cdot} \mathrm{S}(n) \xrightarrow{\rho} \mathrm{S}\left(\frac{n}{2}\right) \to 0$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma\mathrm{S}(n-1) \arrow[r, "x_0\cdot"] \arrow[d, "\Sigma\varphi"] & \mathrm{S}(n) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{S}\left(\frac{n}{2}\right) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma\mathrm{J}(n-1) \arrow[r, "\xi_0\cdot"] & \mathrm{J}(n) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{J}\left(\frac{n}{2}\right) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On raisonne alors par récurrence sur n; puisque $\varphi : \mathrm{S}(0) \to \mathrm{J}(0)$ est un isomorphisme il en est de même pour $\varphi : \mathrm{S}(n) \to \mathrm{J}(n)$ pour tout entier n.

Nous mettrons un point final à A.2.2 en observant que les formules qui donnent $\rho\xi_k$ équivalent aux suivantes :

$$\xi_0 Sq=\xi_0\,;\quad \xi_k Sq=\xi_k+\xi_{k-1}$$

qui déterminent la structure de A-module à droite de J(.) (voir 3.1.2 et [14]).

A.2.3. *Structure de* K(.).

La suite $\{\xi_q\}_{q\in\mathbb{N}}$ définie ci-dessus est un élément de la limite projective K(1) que l'on note ξ; $\rho^{-k}\xi$, k appartenant à $\mathbb{Z}$, est un élément de K(.) de bidegré $(1, 2^k)$ que l'on note encore ξ_k.

Proposition A.2.3 (Comparer avec G. Carlsson [3] (4)). — *L'algèbre* K(.) *est l'algèbre polynomiale bigraduée librement engendrée par les éléments* ξ_k, $k\in\mathbb{Z}$ *:*

$$\mathrm{K}(.)=\mathbb{Z}/2\,[\xi_k\,;k\in\mathbb{Z}].$$

(4) Comparer également avec [18].

La structure de A-*module à gauche de* K(.) *est donnée par les formules :*

$$Sq\xi_k = \xi_k + \xi_{k-1}^2$$

l'application ρ : K(.) $\to$ K(.) *par les formules*

$$\rho\xi_k = \xi_{k-1}.$$

Démonstration. — Comme précédemment la formule pour $\rho\xi_k$ est la définition même des ξ_k et la formule pour $Sq^1\xi_k$ est un cas particulier de (C).

Notons toujours ξ_k, $k \geqslant -q$, l'image de $\rho^{-k}\xi$ dans $J(2^q.)$ par l'application naturelle : $K(.) \to J(2^q.)$; pour $q=0$ cette notation est bien compatible avec celle de A.2.2. D'après A.2.2 l'algèbre $J(2^q.)$ est l'algèbre polynomiale bigraduée engendrée par les éléments ξ_k :

$$J(2^q.) = \mathbb{Z}/2\,[\xi_k\,;\,k \geqslant -q]$$

en effet $J(2^q.)$ n'est jamais qu'une version regraduée de $J(.)$: $J(2^q.)_i^m = (J(.))_{2^q i}^m$. Comme la ρ-A-algèbre instable K(.) est la limite projective des $J(2^q.)$ on obtient la proposition A.2.3 en passant à la limite projective. Précisons un peu. Posons $T = \mathbb{Z}/2\,[x_k\,;\,k \in \mathbb{Z}]$, $S_q = \mathbb{Z}/2\,[x_k\,;\,k \geqslant -q]$, x_k désignant des indéterminées de bidegré $(1, 2^k)$. Notons respectivement $\nu_q : T \to S_q$, $\pi_q : S_q \to S_{q-1}$ les homomorphismes d'algèbres définis par

$$\nu_q(x_k) = \begin{cases} x_k & \text{si} \quad k \geqslant -q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \pi_q(x_k) = \begin{cases} x_k & \text{si} \quad k \geqslant -q+1 \\ 0 & \text{si} \quad k = -q \end{cases}$$

La proposition A.2.3 résulte de ce que l'application induite $\nu : T \to \varprojlim \{S_q, \pi_q\}$ est un isomorphisme. La surjectivité de ν vient de ce qu'en bidegré (m, i) fixé l'application $\pi_q : S_q \to S_{q-1}$ est un isomorphisme pour q assez grand (voir 3.2.3.1 et 3.3), l'injectivité est évidente.

A.2.4. *Fin de la démonstration du théorème* A.2.

Posons $K = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}\left[\frac{1}{2}\right]} K(i)$, K est un A-module instable muni d'un produit A-linéaire : $K \otimes K \to K$ qui fait de K une algèbre associative commutative et unitaire (cependant K n'est pas une A-algèbre instable au sens habituel à cause de la formule (C)) ; posons $P = H^*(\mathbb{Z}/2\,;\,\mathbb{Z}/2)$, P est une A-algèbre instable. Notons $h : K = \mathbb{Z}/2\,[\xi_k\,;\,k \in \mathbb{Z}] \to P = \mathbb{Z}/2\,[u]$, u désignant le générateur de P^1, l'application d'algèbres telle que $h(\xi_k) = u$. Il est clair que h est A-linéaire (le sous-espace de K formé des éléments x tels que $hSq^i x = Sq^i hx$ pour tout i est une sous-algèbre qui contient les ξ_k).

Soit maintenant $g : K(1) \to \overline{P}$ l'application induite par h ; par construction $g \circ f : \overline{P} \to \overline{P}$ est l'identité en degré un ce qui implique que $g \circ f$ est l'identité de $\overline{P}$.

A.3. $\mathscr{U}'$-INJECTIVITÉ DE P_i (NOTATION DE A.1.3)

On revient sur le cas $p > 2$. On pose comme précédemment $K'(.) = \{K'(i)\}_{i \in \mathbb{N}\left[\frac{1}{p}\right]}$ ($K'(i)$, i appartenant à $\mathbb{N}$, est défini au cours de la démonstration de 6.1.4) ; K′(.) est une algèbre polynomiale bigraduée librement engendrée par des éléments ξ_k, k appartenant à $\mathbb{Z}$, de bidegré $(2, p^k)$ et la structure de A-module à gauche de $K'(.)$ est déterminée par la formule $P\xi_k=\xi_k+\xi_{k-1}^p$. On pose $K'=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}\left[\frac{1}{p}\right]} K'(i)$ et on note $h: K'=\mathbb{Z}/p\left[\xi_k ; k\in\mathbb{Z}\right] \rightarrow P=\mathbb{Z}/p[v]$ (v est cette fois de degré 2) l'application d'algèbres telle que $h(\xi_k)=v$; h est un $\mathscr{U}'$-morphisme.

Soit i un entier avec $1 \leqslant i \leqslant p-1$. On a l'inclusion : $h(K'(i)) \subset P_i$ car le bidegré (m, j) d'un élément non nul de $K'(.)$ vérifie la congruence $m \equiv 2j \bmod. 2(p-1)$; on note $g_i : K'(i) \rightarrow P_i$ l'application induite par h. Cette construction montre à nouveau que P_i est facteur direct dans $K'(i)$. En effet on vérifie que les deux $\mathbb{Z}/p$-espaces vectoriels $\operatorname{Hom}_{\mathscr{U}'}(P_i, K'(i))$ et $\operatorname{Hom}_{\mathscr{U}'}(P_i, P_i)$ sont de dimension 1 et que l'application $(g_i)_*$ de l'un vers l'autre est non triviale.

Remarquons pour finir que ce qui précède montre aussi que le A-module $\tilde{H}^*(\mathbb{Z}/p ; \mathbb{Z}/p)=\tilde{\Psi}\overline{P}$ est facteur direct dans $\tilde{\Psi}\left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} K'(i)\right)=\bigoplus_{i=1}^{p-1} K(i)$ [14].

APPENDICE B

La catégorie $\mathscr{U}$ est noetherienne

On montre dans cet appendice que la catégorie $\mathscr{U}$ est noetherienne c'est-à-dire que tout sous-A-module d'un A-module instable de type fini est encore de type fini (rappelons qu'on dit qu'un A-module est de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments). Ce résultat est dû pour $p=2$ à W. Massey et F. Peterson, il s'étend sans difficultés au cas $p>2$ ([5]). Nous l'utilisons pour montrer que certains foncteurs adjoints commutent aux limites inductives.

B.1. *La catégorie $\mathscr{U}_2$ est noetheorienne*

On suppose $p=2$.

Théorème B.1.1 (W. Massey et F. Peterson [13]). — *Tout sous-A-module d'un A-module instable de type fini est encore de type fini.*

Par des arguments standards, ce théorème se réduit à la proposition suivante.

Proposition B.1.2. — *Tout sous-A-module de $F(n)$ est de type fini.*

On reprend la démonstration de Massey et Peterson. On procède par récurrence sur n ; le cas $n=0$ est trivial. Rappelons que l'on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \Phi F(n) \xrightarrow{\lambda} F(n) \rightarrow \Sigma F(n-1) \rightarrow 0.$$

L'injection λ permet d'identifier $\Phi F(n)$ à un sous-module de $F(n)$. Soit M un sous-module

([5]) W. Massey nous a aimablement signalé que N. Steenrod lui avait communiqué une preuve du résultat pour $p>2$, analogue à celle que nous décrivons, preuve qu'à sa connaissance il n'a jamais publié.

de F(n), on définit inductivement une suite croissante $\{ M_k \}_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-modules de F(n) de la façon suivante :

$$M_0 = M\,; \quad \Phi M_{k+1} = M_k \cap \Phi F(n).$$

On note $\Sigma M'_k$ l'image de M_k dans $\Sigma F(n-1)$, on a donc le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes par définition :

$$(E_k) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Phi M_{k+1} & \to & M_k & \to & \Sigma M'_k & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \Phi M_{k+2} & \to & M_{k+1} & \xrightarrow[l]{} & \Sigma M'_{k+1} & \to & 0 \end{array}$$

et la suite exacte ci-dessous :

$$(\overline{E}_k) \qquad 0 \to \Phi(M_{k+2}/M_{k+1}) \to M_{k+1}/M_k \to \Sigma(M'_{k+1}/M'_k) \to 0.$$

Par hypothèse de récurrence il existe un entier k_0 tel que $M'_k = M'_{k+1}$ pour $k \geqslant k_0$ (en effet $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M'_k$, qui est un sous-module de $F(n-1)$, est de type fini). La suite exacte $(\overline{E}_k)$ montre que l'on a pour $k \geqslant k_0$ l'égalité :

$$| M_{k+1}/M_k | = 2\, | M_{k+2}/M_{k+1} |$$

et de proche en proche :

$$| M_{k+1}/M_k | = 2^l\, | M_{k+l+1}/M_{k+l} |$$

d'où l'inégalité

$$| M_{k+1}/M_k | \geqslant 2^l n \qquad \forall l \in \mathbb{N}$$

qui prouve que $M_k = M_{k+1}$ pour $k \geqslant k_0$. La suite exacte (E_{k_0}) montre ensuite que M'_{k_0} est isomorphe à ΩM_{k_0}. On utilise alors le lemme suivant :

LEMME B.1.3. — *Soit* M *un* A-*module instable connexe* ($M^0 = 0$). *Si* ΩM *est de type fini, alors il en est de même pour* M.

Démonstration (valable pour tout nombre premier p). — Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$, m éléments de M dont les images engendrent ΩM et $f : F = \bigoplus_{i=1}^{m} F(| x_i |) \to M$ l'application A-linéaire correspondante. Puisque, par hypothèse, l'application $\Omega f : \Omega F \to \Omega M$ est surjective et que le foncteur Ω est exact à droite, le module $\Omega(\operatorname{coker} f)$ est nul. Ceci entraîne que coker f est nul, en effet puisque l'application $\lambda : \Phi(\operatorname{coker} f) \to \operatorname{coker} f$ est surjective et que M est connexe on a les inégalités :

$$| \operatorname{coker} f | \geqslant 2\, | \operatorname{coker} f |\,; \quad | \operatorname{coker} f | > 0.$$

Le lemme ci-dessus et l'hypothèse de récurrence montre que M_{k_0} est de type fini. En considérant enfin les suites exactes (E_k), $k = k_0 - 1, k_0 - 2, \ldots, 0$ on montre par récurrence descendante que $M = M_0$ est de type fini à l'aide du lemme suivant :

LEMME B.1.4. — *Soit* M *un* A-*module de type fini alors le* A-*module* ΦM *est encore de type fini.*

Démonstration (ici la restriction $p = 2$ est nécessaire). — La formule $Sq^{2i}\Phi x = \Phi Sq^i x$ montre que si M est engendré par une famille $\{ x_\alpha \}$ alors ΦM est engendré par la famille $\{ \Phi x_\alpha \}$.

B.2. *La catégorie $\mathscr{U}'_p$ est noetherienne*

On ne fait plus de restriction sur le nombre premier p. En vertu du principe : « quand on sait faire pour $\mathscr{U}_2$ on sait faire pour $\mathscr{U}'_p$ », nous avons :

THÉORÈME B.2. — *Les sous-*A*-modules d'un* A*-module instable de type fini concentré en degré pair sont encore de type fini.*

B.3. *La catégorie $\mathscr{U}_p$, $p>2$, est noetherienne*

On suppose $p>2$.

THÉORÈME B.3.1. — *Tout sous-*A*-module d'un* A*-module instable de type fini est encore de type fini.*

Démonstration. — Soit M un A-module instable. En tant que A′-module M se décompose fonctoriellement en une somme directe $M_0 \oplus \Sigma M_1$ (partie paire et partie impaire), M_0 et M_1 désignant deux objets de $\mathscr{U}'$. On voit donc, grâce à B.2, que si M est de type fini en tant que A′-module (en abrégé A′-t.f.) alors tout sous A-module de M est A′-t.f. et *a fortiori* de type fini en tant que A-module (A-t.f.). Le théorème B.3.1 est une conséquence du lemme suivant qui implique l'équivalence « M est A′-t.f. $\Leftrightarrow$ M est A-t.f. ».

LEMME B.3.2. — *Le* A*-module* $F(n)$ *est de type fini en tant que* A′*-module.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur n.

Rappelons que nous notons $\mathscr{O} : \mathscr{U}' \rightsquigarrow \mathscr{U}$ le foncteur oubli, $\Psi : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}'$ le foncteur défini par $\Phi = \mathscr{O}\Psi$, $\Sigma' : \mathscr{U}' \rightsquigarrow \mathscr{U}'$ la suspension deuxième ; nous notons en outre $\Omega' : \mathscr{U}' \to \mathscr{U}'$ l'adjoint à gauche de Σ'. La formule suivante est immédiate : $\Sigma^2 \mathscr{O} \Omega' \Psi = \Phi \Sigma \Omega$; en particulier $\Sigma^2 \mathscr{O} \Omega' \Psi F(n) = \Phi \Sigma F(n-1)$.

Par hypothèse de récurrence $\Sigma F(n-1)$ est A′-t.f. Le même argument qu'en B.1.4 montre alors que $\Phi \Sigma F(n-1)$ est A′-t.f. ou encore d'après la formule ci-dessus que $\Omega' \Psi F(n)$ est A′-t.f. Le même argument qu'en B.1.3 donne ensuite que $\Psi F(n)$ (ou $\Phi F(n)$!) est A′-t.f. La suite exacte $0 \to \Phi F(n) \to F(n) \to \Sigma F(n-1)$ montre enfin que $F(n)$ est A′-t.f.

B.4. *Foncteurs $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Phi}$ et limites inductives*

PROPOSITION B.4.1. — *Soient $\Theta : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ un foncteur covariant, exact à droite, transformant somme directe en somme directe, et $\tilde{\Theta} : \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ son adjoint à droite. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *pour tout entier n le* A*-module* $\Theta F(n)$ *est de type fini ;*

(ii) *les foncteurs dérivés $R^s\tilde{\Theta}$, $s \geqslant 0$, commutent aux limites inductives ;*

(iii) *le foncteur $\tilde{\Theta}$ commute aux limites inductives.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{U}$ est noetherienne la condition « $\Theta F(n)$ est de type fini » équivaut à « $\Theta F(n)$ admet une résolution projective de type fini ». A partir de là la proposition résulte sans difficultés de la formule : $(R^s\tilde{\Theta} M)^n = \mathrm{Ext}^s_{\mathscr{U}}(\Theta F(n), M)$.

COROLLAIRE B.4.2. — *Les foncteurs $\tilde{\Sigma}$ et $\tilde{\Phi}$ commutent aux limites inductives.*

REFERENCES

[1] J. F. ADAMS, J. GUNAWARDENA and H. MILLER, *The Segal conjecture for* $(\mathbb{Z}/p)^k$; à paraître.
[2] J. F. ADAMS and C. W. WILKERSON, *Finite* H-*spaces and algebras over the Streenrod algebra* (*Ann. of Math.*, vol. 111, 1980, p. 95-143).
[3] G. CARLSSON. G. B., *Segal Burnside ring conjecture for* $(\mathbb{Z}/2)^k$ (*Topology*, vol. 22, n° 1, 1983, p. 83-103).
[4] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological algebra;* Princeton Univ. Press, 1956.
[5] J. R. HARPER, H-*spaces with torsion* (*Memoirs of the A.M.S.*, n° 223, vol. 22, 1979).
[6] J. LANNES, *Sur le n-dual du* $n^{\text{ème}}$ *spectre de Brown-Gitler;* preprint 1984, à paraître.
[7] J. LANNES et S. ZARATI, *Foncteurs dérivés de la déstabilisation* (*Note aux C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. 296, 1983, p. 573-576).
[8] J. LANNES et S. ZARATI, *Foncteurs dérivés de la déstabilisation;* preprint 1983, à paraître.
[9] J. LANNES et S. ZARATI, *Invariants de Hopf d'ordre supérieur et suite spectrale d'Adams* (*Note aux C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. 296, 1983, p. 695-698).
[10] J. LANNES et S. ZARATI, *Invariants de Hopf d'ordre supérieur et suite spectrale d'Adams;* à paraître.
[11] W. H. LI, *Iterated loop functors and the homology of the Steenrod algebra* A(p); Thesis, Fordham Univ., New York, 1980.
[12] M. MAHOWALD, *A new infinite family in* ${}_2\pi_*^S$ (*Topology*, vol. 16, 1977, p. 249-254).
[13] W. S. MASSEY and F. P. PETERSON, *The mod. 2 cohomology structure of certain fibre spaces* (*Memoirs of the A.M.S.*, n° 74, 1967).
[14] H. MILLER, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces* (*Ann. of Math.*, vol. 120, 1984, p. 39-87).
[15] L. SMITH and R. W. SWITZER, *Polynomial algebras over the Steenrod algebra: variations on a theorem of Adams and Wilkerson* (*Proc. of the Edinburg Math. Soc.*, vol. 27 (series 11), Part 1, 1984, p. 11-19).
[16] N. E. STEENROD and D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology operations;* Princeton Univ. Press, 1962.
[17] S. ZARATI, *Dérivés du foncteur de déstabilisation en caractéristique impaire et applications*, Thèse de Doctorat d'État, Orsay, 1984.
[18] D. M. DAVIS, *A family of unstable Steenrod-modules wich includes those of G. Carlsson* (*Jour. of Pure and Appl. Alg.*, vol. 35, 1985, p. 253-267).
[19] J. LANNES et Lionel SCHWARTZ, *Sur la structure des* A-*modules instables injectifs;* à paraître.

(Manuscrit reçu le 29 janvier 1985)

Jean LANNES
École Polytechnique,
Centre de Mathématiques,
Route de Saclay,
F-91128, Palaiseau, Cedex

Saïd ZARATI,
Université Paris-Sud,
Mathématiques, bâtiment 425
F-91405, Orsay, Cedex

Adresse permanente :
Université de Tunis,
Faculté des Sciences-Mathématiques,
Le campus universitaire,
1060 Tunis, Tunisie