ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. DERRIDJ

Le problème de Cauchy pour $\overline{\partial}$ et application

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 3 (1984), p. 439-449
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_3_439_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 439-449.

LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR $\bar\partial$ ET APPLICATION

PAR M. DERRIDJ

1. Introduction

Des résultats d'extension de formes $\bar\partial_b$ fermées, en particulier de fonctions C.R, peuvent être déduits à partir de la résolution d'un problème de Cauchy pour $\bar\partial$; plus précisément, soit U un ouvert, voisinage de l'origine 0, dans $\mathbb{C}^n$ et S un morceau d'hypersurface régulière passant par 0, définie par $\{\varphi=c\}$. On cherche à résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$(1)_q \qquad \begin{cases} \bar\partial u=f \quad \text{dans U}, \qquad f \text{ étant une } (0,\, q+1) \text{ forme}, \qquad \bar\partial f=0, \\ u\,|_{S}=0. \end{cases}$$

Dans [5], nous avons donné des conditions suffisantes pour résoudre le problème suivant :

$$(2)_q \qquad \begin{cases} \bar\partial u=\lambda f \quad \text{dans U}, \qquad f\in L^2_{(0,\, q+1)}(U), \qquad \bar\partial f=0 \ \text{Supp}\,(f)\subset \overline{U}^+, \\ \text{Supp}\,(u)\subset \overline{U}^+; \qquad U^+=U\cap\{\varphi<c\}. \end{cases}$$

où λ est une certaine fonction holomorphe.

De plus nous avons montré comment de la résolution du problème $(2)_q$, on peut déduire des résultats d'extension de fonctions holomorphes dans $U^-=\{\varphi>c\}\cap U$, en fonctions holomorphes dans un voisinage de 0. Dans un article en collaboration avec J. E. Fornaess [6], nous en avons déduit des résultats d'extension de fonctions C.R sur S en fonctions holomorphes dans un voisinage de 0, dans U^+ moyennant une hypothèse reliant S à l'ensemble des zéros de la fonction holomorphe λ. Nous utilisons des résultats de division (*voir* [6]) particuliers au cas des fonctions.

Il est toutefois clair que si l'on sait résoudre $(1)_q$, alors (*voir* la fin de cet article), on déduira des résultats d'extension dans le cas des formes $\bar\partial_b$-fermées.

Nous montrons ici, que si f est de classe C^∞ sur $\overline{U}$ (ou tout au moins suffisamment régulière) et si l'on sait résoudre $(2)_q$, alors on sait résoudre $(1)_q$ moyennant une hypothèse reliant S à λ. La formulation de cette hypothèse est différente de celle faite dans [6]; cependant elles nous semblent voisines. Il est cependant important de noter que cette hypothèse est inutile pour $q=0$.

Pour passer du problème $(2)_q$ au problème $(1)_q$, il y a deux sortes d'obstacles : le premier est de résoudre en trouvant une solution ayant, en un sens convenable, une trace sur S qui soit nulle; le deuxième obstacle est de se débarrasser du facteur λ dans le second membre de $(2)_q$. Rappelons que le problème $(2)_q$ a été étudié en utilisant les estimations L^2 avec poids et les inégalités de Carleman (L. Hörmander [7], A. Andreotti, E. Vesentini [2]). En fin de cet article nous rappelons comment de la résolution du problème $(1)_q$, on déduit des résultats d'extension de formes $\bar{\partial}_b$-fermées, en particulier de fonctions C.R ainsi qu'une classe d'exemples.

Il est utile de remarquer que notre méthode pour déduire la résolution du problème $(1)_q$ de la résolution du problème $(2)_q$ est purement une méthode d'équations aux dérivées partielles; on aurait pu considérer un complexe de systèmes différentiels à coefficients constants :

$$C^\infty(E_0) \xrightarrow{A_1} C^\infty(E_1) \xrightarrow{A_2} C^\infty(E_2) \to \ldots \xrightarrow{A_n} 0,$$

avec une fonction λ, admettant une dérivée non nulle en 0 et telle que :

$$A_i(\lambda u)=\lambda A_i(u), \qquad u \in C^\infty(E_{i-1}), \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dans le cas de variétés C.R de codimension supérieure Baouendi-Trèves [3], et Baouendi-Chang-Trèves [4] ont introduit de nouveaux outils qui permettent d'attaquer le problème de l'extension de fonctions C.R. Il est concevable que ces outils donnent aussi des résultats dans le cas des formes $\bar{\partial}_b$-fermées. D'ailleurs, dans son cours à l'école Polytechnique [12], F. Trèves a donné un théorème d'approximation valable pour des formes.

2. Quelques notations

Soient U un ouvert voisinage de l'origine, et S une hypersurface dans U, passant par l'origine, définie par $\{\varphi=C\}$, avec $d\varphi \neq 0$ sur S. On notera :

$$U^+=\{U \cap \varphi < C\},$$
$$U^-=\{U \cap \varphi > C\},$$

Ici U est un ouvert de C^n, où les coordonnées $z_1, \ldots, z_n$ sont écrites $z_j=x_j+ix_{n+j}$. Nous pouvons toujours supposer que dans U, quitte à le rendre plus petit, S est définie par :

$$x_{2n}=F(x_1, \ldots, x_{2n-1}).$$

Nous définissons alors dans U le nouveau système de coordonnées suivant :

$$x'_{2n} = x_{2n} - \mathrm{F}(x_1, \ldots, x_{2n-1}),$$
$$x'_j = x_j, \qquad 1 \leqq j \leqq 2n-1.$$

Alors S est aussi définie par $x'_{2n}=0$; on suppose $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$.

Maintenant soit λ une fonction holomorphe dans un voisinage de U. Il existe un multi-indice γ tel que $\lambda^{(\gamma)}(0) \neq 0$. Alors si U est, de nouveau, assez petit, on peut supposer :

$$\lambda^{(\gamma)}(z) \neq 0, \qquad z \in \overline{\mathrm{U}},$$

Dorénavant, nous partons de l'hypothèse suivante :

(H_q) Il existe au voisinage V de 0 tel que :
Pour toute $(0, q+1)$ forme f dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{U})$, $\bar{\partial}$-fermée dans U telle que supp $(f) \subset \overline{\mathrm{U}}^+$, il existe une $(0, q)$ forme u dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{V})$ telle que :

$$\bar{\partial} u = \lambda f \quad \text{dans V} \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}(u) \subset \overline{\mathrm{V}}^+,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_{2n}} \text{ divisible par } \lambda \text{ dans U} \quad (\text{lorsque } q \geqq 1).$$

Nous avons donné dans [5], des conditions suffisantes sur le hessien complexe de φ, qui permettent d'avoir (H_q). [La fonction λ donne en fait une idée sur la façon dont le Hession de φ dégénère dans U; lorsqu'il y a suffisamment de valeurs propres strictement positives, on peut prendre $\lambda=1$ (ce qui n'a aucun intérêt pour nous, ici).]

Dans le système de coordonnées (x_j), l'opérateur $\bar{\partial}$ considéré comme opérateur des $(0, q)$ formes sur U dans les $(0, q+1)$ formes sur U, est un système différentiel à coefficients constants qu'on note :

$$\bar{\partial} = (\mathrm{P}_{i,j})_{i,j}.$$

Dans les coordonnées (x'_j), l'opérateur devient un système différentiel à coefficients variables que nous notons :

$$\bar{\partial} = (\tilde{\mathrm{P}}_{ij}).$$

Remarque. — Dans la suite, nous travaillerons en prenant $\mathrm{V}=\mathrm{U}$, pour faire une économie de notation, quitte à prendre f dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{U}')$, où U′ est un voisinage convenable de U.

3. Les résultats

THÉORÈME 3.1. — *Supposons* (H_q) *vérifiée, soit* f *une* $(0, q+1)$ *forme de classe* C^{s+1} *dans* U, $\bar{\partial}$*-fermée dans* U, *à support dans* $\overline{\mathrm{U}}^+$.

Il existe une $(0, q)$ forme u, à coefficients distributions, qui admet une valeur au bord nulle sur S, telle que $\bar{\partial} u=f$ dans U.

Si $q=0$, u peut être choisie de classe C^s dans U, sans hypothèse de divisibilité de $\partial\lambda/\partial x'_{2n}$ par λ dans U.

Remarque. — Les propositions qui suivront donneront un sens plus précis à la valeur au bord de u.

Lemme 3.2. — *Les opérateurs* $\tilde{P}_{ij}$, *ont la forme suivante :*

$$\tilde{P}_{ij}=\sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x'_k}+\tilde{a}_{2n}^{ij}(x'_1, \ldots, x'_{2n-1}) \frac{\partial}{\partial x'_{2n}}. \tag{3.1}$$

où $\tilde{a}_k^{ij}$ *sont des coefficients constants pour* $k \leqq 2n-1$.

Démonstration. — Dans les coordonnées de départ, $\bar{\partial}$ est un opérateur à coefficients constants i. e.

$$P_{ij}=\sum_{k=1}^{2n} a_k^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

l'opérateur $\partial/\partial x_k$ se transforme en :

$$\frac{\partial}{\partial x'_k}-F'_{x_k}(x_1, \ldots, x_{2n-1}) \frac{\partial}{\partial x'_{2n}},$$

pour $k \leqq 2n-1$ et en $\partial/\partial x'_k$ si $k=2n$. Par suite on obtient :

$$\tilde{P}_{ij}=\sum_{k=1}^{2n-1} a_k^{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x'_k}-F'_{x_k}(x_1, \ldots, x_{2n-1}) \frac{\partial}{\partial x'_{2n}}\right)+a_{2n}^{ij} \frac{\partial}{x'_{2n}},$$

qui est de la forme voulue.

Corollaire 3.3. — *On a :*

$$\left[\bar{\partial}, \frac{\partial}{\partial x'_{2n}}\right]=0. \tag{3.2}$$

Dans un premier temps, nous montrons la proposition suivante :

Proposition 3.4. — *Supposons satisfaite l'hypothèse* (H_q). *Soit* f *une* $(0, q+1)$ *forme,* $\bar{\partial}$*-fermée dans* U, $f \in C^l(U)$, *supp* $(f) \subset \overline{U}^+$, $l \geqq 1$.

Il existe une $(0, q)$ *forme* u_k *telle que :*

$$\tilde{P} u_k=\lambda f \quad \text{dans U},$$
$$\operatorname{Supp}(u_k) \subset \overline{U}^+,$$
$$u_k \in C^k(x_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})); \qquad k \leqq l-1.$$

Démonstration. — Nous commencerons par faire les remarques suivantes : soit g_i une fonction dans $C^l(U)$, $l \geqq 1$, à support dans $\overline{U}^+$, et soient h_k des fonctions telles que :

$$\sum_j \tilde{P}_{ij} h_j = g_i, \qquad h_j \in L^2(U), \qquad \operatorname{supp}(h_j) \subset \overline{U}^+.$$

On en déduit aisément que :

$$\frac{\partial}{\partial x'_{2n}} (\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j) \in L^2_{x_{2n}} \quad (H^{-1}_{x''}),$$

en notant $x'' = (x''_1, \ldots, x'_{2n-1})$ (en rappelant que $\tilde{a}^{ij}_{2n}$ ne dépend pas de x'_{2n}). Il s'ensuit que la fonction $\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j$ admet une trace sur $\{x'_{2n} = 0\} = S$.

D'après les conditions de support faites sur h_j et g_i, cette trace est nulle. De cela on déduit l'égalité suivante :

$$\text{(3.4)} \qquad \int_0^{x'_{2n}} \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} (\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j)(x'_1, \ldots, x'_{2n-1}) \, t) \, dt = (\sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n} h_j) \quad (x').$$

Considérons maintenant la forme $(\lambda f)'_{x'_{2n}}$; elle est dans $L^2(U)$, car $f \in C^l(U)$ avec $l \geqq 1$; de plus, comme λ est holomorphe et que $[\bar{\partial}, \partial/\partial x'_{2n}] = 0$, elle est $\bar{\partial}$-fermée. En outre on garde la condition $\operatorname{supp}(\lambda f)'_{x'_{2n}} \subset \overline{U}^+$. D'après l'hypothèse (H_q), il existe une $(0, q)$ forme u dans $L^2(U)$ telle que :

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{cases} \tilde{P} u = (\lambda f)'_{x'_{2n}}, \\ \operatorname{Supp}(u) \subset \overline{U}^+. \end{cases}$$

Posons alors :

$$v(x'_1, \ldots, x'_{2n}) = \int_0^{x'_{2n}} u(x'_1, \ldots, x'_{2n-1}, t) \, dt.$$

Nous commençons par remarquer que l'on obtient immédiatement que :

$$v \in C^0(x'_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})),$$
$$\operatorname{supp}(v) \subset \overline{U}^+.$$

Maintenant notre but est de montrer que $\tilde{P} v = \lambda f$.

$$\sum_j \tilde{P}_{ij} v_j(x') = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ j}}^{2n-1} \tilde{a}^{ij}_k \frac{\partial}{\partial x'_k} + \tilde{a}^{ij}_{2n}(x'') \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \right) v_j(x')$$

$$= \int_0^{x'_{2n}} \sum_{\substack{k=1 \\ j}}^{2n-1} \tilde{a}^{ij}_k \frac{\partial u_j}{\partial x'_k}(x'', t) \, dt + \sum_j \tilde{a}^{ij}_{2n}(x'') \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \int_0^{x'_{2n}} u_j(x'', t) \, dt$$

$$= \int_0^{x'_{2n}} \sum_{\substack{k=1 \\ j}}^{2n-1} \tilde{a}^{ij}_k \frac{\partial u_j}{\partial x'_k}(x'', t) \, dt + \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} \int_0^{x'_{2n}} \sum_j a^{ij}_{2n}(x'') u_j(x'', t) \, dt,$$

d'après (3.4), c'est égal à :

$$\sum_j \left\{ \int_0^{x'_{2n}} \sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_k^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x'_k} (x'', t)\, dt + \tilde{a}_{2n}^{ij} (x'')\, u_j (x') \right\}$$

$$= \sum_j \left\{ \int_0^{x'_{2n}} \sum_{k=1}^{2n-1} \tilde{a}_k^{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x'_k} (x'', t)\, dt + \int_0^{x'_{2n}} \frac{\partial}{\partial x'_{2n}} (\tilde{a}_{2n}^{j} (x'')\, u_j (x'', t))\, dt \right\}$$

$$= \int_0^{x'_{2n}} \sum_j \mathrm{P}_{ij}\, u (x'', t)\, dt = \int_0^{x'_{2n}} (\lambda f_i)'_{x'_{2n}} (x'', t)\, dt = (\lambda^{\sim} f_i) (x').$$

Donc on a obtenu $v \in \mathrm{C}^0 (x'_{2n}, \mathrm{L}^2 (x''))$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathrm{P}}\, v = \lambda f, \\ \operatorname{supp} (v) \subset \mathrm{U}^+. \end{array} \right. \tag{3.6}$$

Un procédé itératif, montre alors que l'on a la proposition 3.3.

Remarque. — Dans le cas $q=0$, la proposition précédente est évidemment inutile, car dans ce cas l'hypoellipticité du $\bar{\partial}$ entraîne que si $f \in \mathrm{C}^l(\mathrm{U})$, alors u solution de $\bar{\partial} u = \lambda f$ dans U entraîne aussi que $u \in \mathrm{C}^l (\mathrm{U})$.

Parvenus à ce stade, nous aimerions maintenant nous débarrasser de la fonction λ qui apparaît dans l'équation $\bar{\partial} u = \lambda f$.

PROPOSITION 3.5. — *Supposons* (H_q) *satisfaite. Supposons que f est une* $(0, q+1)$ *forme, $\bar{\partial}$-fermée dans* U, *de classe* $\mathrm{C}^{s+l}(\mathrm{U})$, $l \geqq 1$, *à support dans* $\overline{\mathrm{U}^+}$. *Il existe une* $(0, q)$ *forme u dans* U *telle que :*

$$\begin{array}{c} \bar{\partial} u = f \quad \text{dans U}, \\ u \in \mathrm{C}^{l-1} \qquad (x'_{2n}, \mathrm{H}^{-s} (x'')), \\ \operatorname{supp} (u) \subset \overline{\mathrm{U}^+}. \end{array} \tag{3.7}$$

Pour démontrer la proposition 3.5, nous utilisons le lemme suivant, en rappelant que l'on a $\lambda^{(\gamma)} \neq 0$ dans U, $|\gamma| = s$.

LEMME 3.6. — *Soit h une distribution dans* U, *on a :*

$$h = \frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} \mathrm{C}_{\alpha\beta} (\lambda\, h^{(\alpha)})^{(\beta)} \quad \textit{dans } \mathrm{U}, \tag{3.8}$$

où le signe $^{(\alpha)}$ *désigne la dérivée d'ordre* α, *dans le système* (x_j).

Démonstration du lemme 3.6. — Nous procédons par récurrence : si (θ) est une dérivation d'ordre 1 on a trivialement :

$$\lambda^{(\theta)}\, h = (\lambda\, h)^{(\theta)} - \lambda\, h^{(\theta)}. \tag{3.9}$$

Supposons qu'on ait montré (3.8) pour $|\theta| \leqq p$ et soit θ un multi-indice de longueur $p+1$: on écrit :

$$\theta=\theta'+\theta'' \qquad \text{où} \quad |\theta'|=p, \quad |\theta''|=1;$$

alors :

$$\lambda^{(\theta)}\, h=(\lambda^{\theta'})^{\theta''}, \qquad h=((\lambda^{(\theta')}\, h)^{(\theta'')}-\lambda^{\theta'}\, h^{(\theta'')},$$

mais, par récurrence, nous savons que :

$$\lambda^{(\theta')}\, h=\sum_{\alpha+\beta=\theta'} C_{\alpha\beta}^{\theta'}\, (\lambda\, h^{(\alpha)})^{(\beta)},$$

ce qui implique :

$$\lambda^{(\theta)}\, h=\sum_{\alpha+\beta=\theta'} C_{\alpha\beta}^{\theta'}\, (\lambda\, h^{(\alpha)})^{(\beta+\theta'')}-\lambda^{(\theta')}\, h^{(\theta'')},$$

d'autre part, toujours par récurrence :

$$\lambda^{(\theta')}\, h^{(\theta'')}=\sum_{\alpha+\beta=\theta'} C_{\alpha\beta}^{\theta'}\, (\lambda\, h^{(\alpha+\theta'')})^{(\beta)}.$$

Si nous regroupons les termes, on obtient bien :

$$\lambda^{(\theta)}\, h=\sum_{\alpha+\beta=\theta} C_{\alpha\beta}\, (\lambda\, h^{(\alpha)})^{(\beta)}.$$

Démonstration de la proposition 3.5. — D'après la proposition 3.4, il existe, pour $k \leqq l-1$, une $(0, q)$ forme dans $C^k(x'_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1}))$ telle que, si h est C^l, $\bar{\partial}$-fermée et à support dans $\overline{U}^+$:

$$\begin{cases} \bar{\partial} u=\lambda\, h, \\ \operatorname{supp}(u) \subset \overline{U}^+. \end{cases}$$

Comme $f \in C^{s+l}(\overline{U})$, d'après le lemme 3.6, on peut écrire :

$$f=\frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta}\, (\lambda\, f^{(\alpha)})^{(\beta)} \qquad \text{avec} \quad \lambda\, f^{(\alpha)} \in C^{1+s-|\alpha|}(\overline{U}).$$

Soit alors u_α une solution dans :

$$C^{l-1+s-|\alpha|}(x'_{2n}, L^2(x'_1, \ldots, x'_{2n-1})),$$

de :

$$\begin{cases} \bar{\partial} u_\alpha=\lambda\, f^{(\alpha)}, \\ \operatorname{supp} u_\alpha \subset \overline{U}^+. \end{cases}$$

Si nous posons :

$$u=\frac{1}{\lambda^{(\gamma)}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} C_{\alpha\beta}\, u_\alpha^{(\beta)}.$$

On a bien :

$$\left\{\begin{array}{c}\bar\partial u=f,\\ \operatorname{supp}(u)\subset \overline{\mathrm{U}}^{+},\\ u\in \mathrm{C}^{l-1}(x'_{2n}, \mathrm{H}^{-s}(x'_1,\ldots,x'_{2n-1})).\end{array}\right.$$

La proposition 3.5 entraîne et précise le théorème 3.1.

Cas particulier des fonctions ($q=0$). — Dans ce cas, il s'avère que nous n'avons pas besoin de l'hypothèse $\partial\lambda/\partial x_{2n}\neq\lambda$ sur U. Une application du lemme 3.6 et de l'hypoellipticité de $\bar\partial$ entraîne la :

PROPOSITION 3.7. — *Supposons que* (2) *est résoluble. Soit f une* (0,1) *forme,* $\bar\partial$*-fermée dans* U, *supp* $(f)\subset\overline{\mathrm{U}}^{+}$, *de classe* C^∞ (*ou* C^{N}, N *assez grand). Il existe u solution de :*

$$\begin{gathered}\bar\partial u=f \quad \textit{dans } \mathrm{V},\\ u\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V}) \quad (\textit{ou } \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathrm{V})),\\ \textit{Supp}\,(u)\subset\overline{\mathrm{V}}^{+} \quad (\textit{en particulier } u\,|_{\mathrm{S}}=0).\end{gathered}$$

Démonstration. — En utilisant le lemme 3.6 on résoud de nouveau $\bar\partial u_\alpha=\lambda f^{(\alpha)}$, avec $\operatorname{supp}(u_\alpha)\subset\overline{\mathrm{V}}^{+}$.

On pose :

$$u=\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\mathrm{C}_{\alpha\beta}\,u_\alpha^{(\beta)};$$

alors :

$$\bar\partial u=f \qquad \text{et} \qquad \operatorname{supp}(u)\subset\overline{\mathrm{V}}^{+}, \quad u\in\mathscr{D}'(\mathrm{V}).$$

Mais comme :

$$f\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V}) \quad (\text{ou } \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathrm{V})), \qquad u\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V}) \quad (\text{ou } \mathrm{C}^{\mathrm{N}}(\mathrm{V})),$$

ce qui donne la proposition 3.7.

Remarque. — Ceci montre que pour $f\in\mathrm{C}^{\mathrm{N}}$, N assez grand on peut se passer, dans le cas d'extension des fonctions, de l'hypothèse liant $\mathrm{Z}(\lambda)$ à S. Cependant notons que dans [6] avec l'hypothèse $\mathrm{Z}(\lambda)$, on considère des fonctions de classe C^4, pour l'extension.

4. Extension de formes $\bar\partial_b$-fermées sur $\partial\mathrm{U}^+$

Nous commençons par énoncer le résultat d'extension pour des fonctions, dans la mesure où la notion de valeur au bord est plus précise dans ce cas. La démonstration est standard; nous la donnons pour la commodité du lecteur.

PROPOSITION 4.1. — *Supposons* (H_0) *vérifiée.*

Soit f une fonction C.R. sur $\partial\mathrm{U}^+$, *de classe* C^∞. *Il existe une fonction holomorphe* F *dans* U^+, *de classe* C^∞ *dans* U^+ *telle que* $\mathrm{F}\,|_{\mathrm{S}}=f$.

Démonstration. — Comme f est C.R. sur $\bar{\partial}U^+$, on peut (*voir* [1]) trouver une extension de f en une fonction $\tilde{f}$ de classe C^∞ sur U^+ telle que $\bar{\partial}\tilde{f}$ s'annule à l'ordre infini sur ∂U^+. Soit :

$$g=\begin{cases} \bar{\partial}\tilde{f} & \text{sur } U^+, \\ 0 & \text{sur } U\setminus U^+, \end{cases}$$

g est une (0, 1) forme de classe C^∞ sur U, $\bar{\partial}$-fermée à support dans U^+. Il existe d'après les résultats précédents une fonction h de classe C^∞ dans U telle que :

$$\begin{cases} \bar{\partial}u=g & \text{dans } U, \\ \operatorname{supp}(u) \subset \overline{U}^+. \end{cases}$$

Il s'en suit que $\tilde{f}-u$ est holomorphe dans U^+, de classe $C^\infty(\overline{U}^+)$ et sa restriction à ∂U^+ est f.

Proposition 4.2. — *Supposons* (H_q) *vérifiée. Soit* f *une* (0, q) *forme* $\bar{\partial}_b$*-fermée sur* S, *de classe* C^∞. *Pour tout entier* k, *il existe une* (0, q) *forme* f, $\bar{\partial}_b$*-fermée dans* U^+, *telle que :*

$$\tilde{f}\in C^k_{x_{2n}}(H^{-s}_{x'}), \qquad \tilde{f}\,|_s=f.$$

La démonstration est la même que celle de la proposition 4.1.

Remarque 4.3. — Les résultats précédents montrent qu'il n'est pas nécessaire de supposer que f soit de classe C^∞, ni même que S soit de classe C^∞. Il suffit que f et S soient de classe C^N, N assez grand, son ordre de grandeur étant lié à l'entier s.

5. Une classe de domaines vérifiant (H_q)

Considérons dans C^n, avec $n \geqq q+2$, la classe d'hypersurfaces suivante, qui sera notée $(\mathscr{S})$:

$$\left\{\begin{array}{c} S\in(\mathscr{S}) \Leftrightarrow \text{S est définie par } \{r=0\} \text{ avec :} \\ r=2\operatorname{Re} z_n+\Phi(z') \qquad \text{où} \quad z'=(z_1, \ldots, z_{n-1}), \\ \Phi(z')\geqq 0, \\ \operatorname{Hess}(\Phi)\geqq |h| \text{ où } h \text{ est une fonction holomorphe, } \not\equiv 0, \\ \Phi(z')\to 0 \;\Rightarrow\; z'\to 0. \end{array}\right.$$

Proposition. — *L'hypothèse* (H_q) *est satisfaite par la classe* $\mathscr{S}$, *en posant* $\lambda=h^2$.

Démonstration. — U^+ peut être définie par $\{\varphi < 1\}$, avec $\varphi=\exp(r)$. Comme :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_n\,\partial\bar{z}_n}=\varphi, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}=\varphi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}_j}\right), \qquad i, j\leqq n-1$$

et :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_n} = 0 \qquad \text{si} \quad i \leqq n-1;$$

on voit que, au voisinage de 0, Hess $(\varphi) \geqq |h|$.

Montrons que si V est un voisinage de 0, il existe une fonction φ_V telle que :

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \varphi_V(0) > 1, \\ \{\varphi < 1\} \cap \{\varphi_V > 1\} \subset V, \\ \text{Hess}(\varphi_V) \geqq |h|. \end{cases}$$

Soit $\varphi_V = \exp(r_1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ à choisir, $r_1 = 2\,\mathscr{R}e\, z_n + \Phi/2 - \dfrac{|z_n|^2}{2}$.

On a bien $\varphi_V(0) = \exp(\varepsilon) > 1$.

Soit $z \in \{\varphi < 1\} \cap \{\varphi_V > 1\}$; cela donne :

$$\text{(5.2)} \qquad \begin{cases} 2\,\mathscr{R}e\, z_n + \varphi(z') < 0, \\ 2\,\mathscr{R}e\, z_n + \dfrac{\Phi}{2}(z') > -\varepsilon_1, \text{ avec } \varepsilon_1 \text{ petit avec } \varepsilon. \end{cases}$$

Cela entraîne $\Phi/2(z') \leqq \varepsilon_1$; donc si ε est assez petit, on a $|z'| \leqq \eta$, η petit, d'après une des conditions que satisfait Φ.

Combiné avec (5.2), cela entraîne que $|z| \leqq \eta_1$, η_1 petit. D'après [5], [6] et (5.1) entraîne qu'on peut résoudre le problème $(2)_q$. Il nous reste, pour satisfaire à la condition (H_q), si on prend $\lambda = h^2$, à montrer que $\partial h/\partial x'_{2n} = 0$; ceci découle du fait que :

$$h(z) = h(z') \qquad (\text{ici } x'_{2n} = \mathscr{R}e\, z_n + \varphi(z')/2).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Andreotti et C. D. Hill, E. E. Convexity, and H. Lewy, *Problem; Part I: reduction to vanishing theorems* (*Ann. Scuola Normale Pisa*, vol. 26, 1972); *Part II: Vanishing theorems* (*Ann. Scuola Normale*, Pisa, vol. 26, 1972).

[2] A. Andreotti et E. Vesentini, *Carleman Estimates for the Laplace-Beltrani Equation on Complex Manifolds*, Publ. I.H.E.S., vol. 24-25.

[3] M. S. Baouendi et F. Treves, *A Property of the Functions* (*Ann. Maths.*, vol. 113, 1981, p. 387-421).

[4] M. S. Baouendi, C. H. Chang et F. Treves, *Microlocal Hypo-analyticity and Extension of C.F. Function:* preprint.

[5] M. Derridj, *Inégalités de Carleman et Extension locale des fonctions holomorphes* (*Ann. Scuola Normale*, Pisa, vol. IX-4, 1982.

[6] M. Derridj et J. E. Fornaess, *A Result on Extension of C.R. Functions* (*Ann. Inst. Fourier*, Fasc. 3, tome 33, 1983).

[7] L. Hörmander, *L^2-estimates and Existence Theorems for the $\bar{\partial}$-operator* (*Acta Math.*, vol. 113, 1965).

[8] L. Hörmander, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand.

[9] J. J. KOHN et H. ROSSI, *On the Extension of Holomorphic Functions from the Boundary of a Complex Manifold* (*Ann. Math.*, vol. 81, 1965).
[10] H. LEWY, *On the Local Character* (*Ann. Math.*, vol. 64, 1956).
[11] R. NIRENBERG, *On the H. Lewy Extension Phenomenon* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 168, 1972).
[12] F. TREVES, *Cours à l'École Polytechnique*, mai 1981.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1983,
révisé le 6 juillet 1983.)

M. DERRIDJ,
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
Mathématique,
Bât. n° 425,
91405 Orsay Cedex.