J.-C. YOCCOZ

Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 3 (1984), p. 333-359
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_3_333_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 333-359.

CONJUGAISON DIFFÉRENTIABLE DES DIFFÉOMORPHISMES DU CERCLE DONT LE NOMBRE DE ROTATION VÉRIFIE UNE CONDITION DIOPHANTIENNE

PAR J.-C. YOCCOZ

RÉSUMÉ. — Nous démontrons le résultat suivant, qui généralise un théorème de M. R. Herman : si le nombre de rotation d'un difféomorphisme du cercle f de classe C^∞ satisfait à une condition diophantienne, f est C^∞-conjugué à une rotation. Le résultat est optimal pour la conjugaison C^∞.

ABSTRACT. — The following result is proved, generalizing a theorem of M.R. Herman: any smooth diffeomorphism of the circle whose rotation number is of diophantine type is smoothly conjugated to a rotation. The result is the best possible for smooth conjugacy.

0. Introduction

On se propose dans cet article de généraliser un théorème de M. R. Herman ([H_1]) en donnant la condition optimale sur un nombre irrationnel α pour que tout difféomorphisme lisse du cercle préservant l'orientation dont le nombre de rotation est α soit différentiablement conjugué à une rotation.

Le cercle est noté $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On désigne par $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T}^1)$ ($r=0$, r réel $\geqq 1$, $r=+\infty$ ou $r=\omega$) le groupe des difféomorphismes de classe C^r (analytiques lorsque $r=\omega$) qui préservent l'orientation. Il est souvent plus commode de travailler dans le revêtement universel $D^r(\mathbb{T}^1)$ qui est le groupe des difféomorphismes f de classe C^r de la droite réelle tels que $f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ soit $\mathbb{Z}$-périodique. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha \in \mathbb{T}^1$), on note $R_\alpha \in D^\omega(\mathbb{T}^1)$ (resp. $\in \mathrm{Diff}^\omega_+(\mathbb{T}^1)$) l'application $x \to x+\alpha$.

On peut définir, après Poincaré, le nombre de rotation $\rho(f) \in \mathbb{R}$ (resp. $\rho(f) \in \mathbb{T}^1$) d'un difféomorphisme $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$ (resp. $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T}^1)$). Le lecteur pourra consulter les premiers chapitres de [H_1] sur les propriétés des groupes $D^r(\mathbb{T}^1)$, $\mathrm{Diff}^r_+(\mathbb{T}^1)$ et du nombre de rotation. Celles de ces propriétés qui nous serviront seront rappelées le moment venu. Signalons simplement que $\rho(R_\alpha) = \alpha$, que le nombre de rotation est invariant par conjugaison dans les groupes $D^0(\mathbb{T}^1)$ ou $\mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T}^1)$ et que $\rho(f)$ est rationnel pour $f \in \mathrm{Diff}^0_+(\mathbb{T}^1)$ si et seulement si f admet une orbite périodique.

Soit $f \in D^0(\mathbb{T}^1)$, et p, q deux entiers premiers entre eux; il est facile de voir que f est topologiquement conjugué à $R_{p/q}$ si et seulement si $f^q = R_p$, alors que $\rho(f) = p/q$ si et seulement si $f^q - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} - p$ a un zéro sur $\mathbb{R}$. La classe de conjugaison (topologique) de $R_{p/q}$ est donc de codimension infinie dans l'ensemble des difféomorphismes de nombre de rotation p/q.

Lorsque α est irrationnel (ce que nous supposerons dans la suite), Denjoy a montré au contraire qu'un difféomorphisme $f \in D^2(\mathbb{T}^1)$, dont le nombre de rotation est α, est topologiquement conjugué à R_α ([D]). (Cependant, il construit des difféomorphismes f de classe C^1 tels que $\rho(f) = \alpha$ mais f n'est pas topologiquement conjugué à R_α; on trouvera dans les chapitres VI, X de [H_1] des raffinements sur le théorème de Denjoy et ses contre-exemples).

Dès lors, la question de la différentiabilité de la conjugaison se posait : soit $\mathscr{A}$ la partie de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ constituée par les α tels que tout $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$ vérifiant $\rho(f) = \alpha$ est conjugué dans $D^\infty(\mathbb{T}^1)$ à R_α. Arnold a montré que l'inclusion $\mathscr{A} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est stricte ([A]) : il construit des difféomorphismes analytiques dont le nombre de rotation est irrationnel pour lesquels la conjugaison n'est même pas absolument continue; cette perte de régularité est due aux « petits dénominateurs », ce qui conduit à analyser les propriétés diophantiennes du nombre de rotation.

Pour β réel $\geqq 0$, on dit que $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ vérifie une condition diophantienne d'ordre β s'il existe $C > 0$ tel que $|\alpha - p/q| \geqq C/q^{2+\beta}$ pour tout rationnel p/q.

Soit C_β l'ensemble des irrationnels qui vérifient une condition diophantienne d'ordre β.

Les nombres α appartenant aux ensembles C_0, $\bigcap_{\beta > 0} C_\beta$, $\bigcup_{\beta \geqq 0} C_\beta$, $\mathbb{R} - \left(\mathbb{Q} \cup \left(\bigcup_{\beta \geqq 0} C_\beta\right)\right)$ sont respectivement dits de type constant, de type Roth, diophantiens, de Liouville.

Les nombres de Liouville forment un ensemble résiduel de la droite réelle, tandis que presque tout nombre est de type Roth. Un résultat célèbre de Roth affirme que les nombres algébriques irrationnels sont de type Roth (Liouville savait déjà qu'ils étaient diophantiens).

Le théorème de conjugaison locale, dû à Arnold et Moser ([A], [M], *voir* aussi [H_1 appendice]) affirme que « localement » $\mathscr{A}$ contient $\bigcup_{\beta \geqq 0} C_\beta$: si $f \in D^\infty(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f) = \alpha$ est diophantien, et f est suffisamment proche de R_α dans la C^∞-topologie, alors f est conjugué à R_α dans $D^\infty(\mathbb{T}^1)$.

Le pas décisif dans le cas « global » (sans condition de proximité à une rotation) a été accompli par Herman ([H_1]) : il démontre, répondant à une question d'Arnold, que $\mathscr{A}$ est de mesure de Lebesgue pleine (en particulier $\mathscr{A} \neq \varnothing$!). L'ensemble de nombres de rotation pour lesquels il prouve la C^∞-conjugaison, de définition assez technique, est cependant strictement contenu dans $\bigcap_{\beta > 0} C_\beta$. D'autre part, il montre ([H_1, chap. XI]) qu'on doit avoir $\mathscr{A} \subset \bigcup_{\beta > 0} C_\beta$ (*voir* aussi [H–S]).

J'ai récemment donné une démonstration plus simple du théorème de Herman, qui implique $C_{1/5} \subset \mathscr{A}$. Le résultat qui suit répond à une question de Herman ([H_2]) en déterminant complètement $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} = \bigcup_{\beta \geqq 0} C_\beta.$$

Plus précisément, on a :

THÉORÈME. — *Soit $f \in D^k(\mathbb{T}^1)$ k entier, $k \geqq 3$. On suppose qu'il existe $\beta \geqq 0$ tel que α appartient à C_β. Alors, si $k > 2\beta + 1$, il existe un difféomorphisme $h \in D^1(\mathbb{T}^1)$ qui conjugue f à R_α, et h est de classe $C^{k-1-\beta-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes hypothèses sur α, h est de classe C^∞ si f est de classe C^∞, analytique si f est analytique.*

Le corollaire est conséquence évidente du théorème en classe C^∞; en classe analytique il résulte du cas C^∞ : [H_1, chap. XI.6].

Ce travail n'existerait pas sans Michel Herman, dont les conseils, suggestions et encouragements m'ont toujours été très précieux. Je tiens également à remercier l'I.M.P.A. de Rio de Janeiro, où la première version de ce travail a été rédigée durant un séjour de 2 ans aussi agréable qu'enrichissant.

1. Plan de la démonstration du théorème

Le principe de base de la démonstration est le même que dans [H_1] et s'appuie sur le résultat suivant ([H_1, chap. IV]) : pour qu'un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_+^k(\mathbb{T}^1)$ soit C^r-conjugué à une rotation, il faut et il suffit que les itérés de f forment une suite bornée pour la C^r-topologie.

Cette condition est évidemment nécessaire. Pour $n \geqq 1$, le difféomorphisme $f_n = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} f^i$ vérifie :

$$f_n \circ f \circ f_n^{-1} = \mathrm{Id} + \frac{f^n - \mathrm{id}}{n} \circ f_n^{-1},$$

et le second membre de cette égalité converge uniformément vers R_α lorsque n tend vers l'infini. Si la suite des itérés de f est bornée dans la C^r-topologie, on peut par le théorème d'Ascoli extraire de la suite f_n, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite qui converge dans la $C^{r-\varepsilon}$ topologie vers $h \in D^{r-\varepsilon}(\mathbb{T}^1)$. Si r n'est pas entier, h appartient même à $D^r(\mathbb{T}^1)$ de façon évidente. Si r est entier, il est clair que $D^{r-1} h$ est Lipschitzienne et Herman montre ([H_1, chap. IV]) que h est aussi de classe C^r dans ce cas.

NOTATIONS ET RAPPELS. — Soit α un nombre réel irrationnel. On note $\|\alpha\|$ la distance de α au plus proche entier. Les réduites de α seront notées p_n/q_n et vérifient les propriétés fondamentales suivantes ([L], [H_1, chap. V], [S]) :

(i) $q_{n+1}^{-1} > (-1)^n (q_n \alpha - p_n) = \| q_n \alpha \| > (2\, q_{n+1})^{-1}$ pour $n \geqq 1$;

(ii) $\| j \alpha \| > \| q_n \alpha \| > \| q_{n+1} \alpha \|$ pour $n \geqq 1$, $0 < j < q_{n+1}$, $j \neq q_n$;

(iii) $\| q_n \alpha \| > 2 \| q_{n+2} \alpha \|$ pour $n \geqq 1$.

On notera $\alpha_n = (-1)^n (q_n \alpha - p_n)$ pour $n \geqq 0$. Soit l un entier; les réduites de $\alpha + l$ sont $p_n/q_n + l$, donc la suite des dénominateurs q_n et la suite des restes α_n sont définies pour $\alpha \in \mathbb{T}^1$, et notées par les mêmes lettres.

Des propriétés (i), (ii), il résulte que α vérifie une condition diophantienne d'ordre β si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$C\, \alpha_n^{1+\beta} \leqq \alpha_{n+1} < \alpha_n \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1.$$

C'est sous cette forme qu'on utilisera l'hypothèse arithmétique sur α.

Remarquons aussi que les propriétés (i), (iii) impliquent que pour tout $\varepsilon > 0$, les séries $\sum_{n \geqq 1} \alpha_n^\varepsilon$, $\sum_{n \geqq 1} q_n^{-\varepsilon}$ sont convergentes; pour tout $C > 0$, les produits $\prod_{n=n_0}^{+\infty} (1 \pm C q_n^{-\varepsilon})$, $\prod_{n=n_0}^{+\infty} (1 \pm C \alpha_n^\varepsilon)$ sont donc convergents de produit non nul pour n_0 assez grand. On fera fréquemment usage de ceci dans la suite.

Soit $f \in \mathrm{Diff}_+^0 (\mathbb{T}^1)$, $\alpha = \rho(f)$, $\tilde{f}$ un relèvement de f dans $D^0(\mathbb{T}^1)$, $\tilde{\alpha}$ le nombre de rotation de $\tilde{f}$; les dérivées successives de $\tilde{f}$ (si elles existent) sont $\mathbb{Z}$-périodiques et ne dépendent que de f; on les notera Df, $D^2 f \dots$ Soit p/q une réduite de $\tilde{\alpha}$; la fonction $\tilde{f}^q - \mathrm{id} - p$ est $\mathbb{Z}$-périodique et ne dépend que de f; on la notera $f^q - \mathrm{id}$.

Pour une fonction φ continue et $\mathbb{Z}$-périodique, on note comme d'habitude :

$$|\varphi|_0 = \|\varphi\|_0 = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

Plan de démonstration. — Le paragraphe 2 donne les formules de différentiation utilisées dans la suite; certaines font intervenir la dérivée schwarzienne $S g$ d'un difféomorphisme $g \in D^3(\mathbb{T}^1)$:

$$S g = D^2 \operatorname{Log} D g - \frac{1}{2} (D \operatorname{Log} D g)^2.$$

Le paragraphe 3 donne quelques conséquences faciles de l'inégalité de Denjoy ([D], [H, chap. VI]).

Dans le paragraphe 4, on obtient une première estimation de $|D^r \operatorname{Log} D f^n|_0$, basée sur les formules du paragraphe 2 et les résultats du paragraphe 3.

Il est essentiel pour obtenir de bonnes estimations de commencer par estimer les dérivées schwarziennes. Cette idée se trouve déjà dans [H_1].

Le paragraphe 5 est une amélioration de l'inégalité de Denjoy; si $f \in \mathrm{Diff}_+^3 (\mathbb{T}^1)$, $\rho(f)$ est irrationnel, et q est le dénominateur d'une réduite de α, on montre que :

$$|\operatorname{Log} D f^q|_0 \leqq C(f)\, |f^q - \mathrm{id}|_0^{1/2}.$$

Le paragraphe 6 est le moment crucial de la démonstration : on y obtient une estimation de $f^{q_{n+1}}(x)-x$ en fonction de $f^{q_n}-\mathrm{id}$.

Dans le paragraphe 7, on montre que cette estimation implique que $|f^{q_n}-\mathrm{id}|_0\,|(f^{q_n}-\mathrm{id})^{-1}|_0$ est une suite bornée; ceci entraîne alors facilement la C^1-conjugaison.

Dans le paragraphe 8, on utilise les formules du paragraphe 2 et les inégalités d'interpolation de Hadamard pour obtenir la conjugaison en différentiabilité supérieure.

Par rapport à [Y], les parties nouvelles sont essentiellement les paragraphes 6 et 8.

Dans toute la démonstration, la lettre C désigne des constantes (différentes) strictement positives qui peuvent dépendre de f et de l'ordre des dérivées considérées, mais pas de la puissance de f considérée.

2. Des formules

On regroupe dans ce paragraphe les formules qui seront utilisées dans la suite.

Elles sont valables pour des difféomorphismes g, h de la droite réelle, suffisamment dérivables, et préservant l'orientation (de sorte que le logarithme de la dérivée est défini).

Pour éviter une surcharge de l'écriture, on convient de noter dans tout l'article, pour un entier k et des difféomorphismes g et h :

$$D^k \operatorname{Log} D g = D^k (\operatorname{Log} D g);$$
$$D^k \operatorname{Log} D g \circ h = [D^k (\operatorname{Log} D g)] \circ h;$$
$$D^k S g \circ h = [D^k (S g)] \circ h.$$

Dans ces formules, on désigne par A_l, B_l, C_l, E_l^r, ... des polynômes universels de l variables $X_1, \ldots, X_l$; ces polynômes sont homogènes de poids l si on donne à la variable X_i le poids i, et égaux a 1 si $l=0$.

Par exemple, on a :

(A) Pour $l \geqq 0$:

$$D^{l+1} g = A_l (D \operatorname{Log} D g, \ldots, D^l \operatorname{Log} D g)\, D g.$$

Démonstration. — On a $A_0=1$. Pour $l \geqq 1$, de la formule (A) a l'ordre $l-1$, on déduit par dérivation :

$$D^{l+1} g = D g\, D \operatorname{Log} D g\, A_{l-1} (D \operatorname{Log} D g, \ldots, D^{l-1} \operatorname{Log} D g)$$
$$+ D g \sum_{i=1}^{l-1} \frac{\partial A_{l-1}}{\partial X_i} (D \operatorname{Log} D g, \ldots, D^{l-1} \operatorname{Log} D g)\, D^{i+1} \operatorname{Log} D g.$$

On obtient donc :

$$A_l = X_1 A_{l-1} + \sum_{i=1}^{l-1} X_{i+1} \frac{\partial A_{l-1}}{\partial X_i}.$$

L'homogénéité de A_l résulte donc de celle de A_{l-1}. □

Les démonstrations des formules qui suivent sont analogues à la précédente et laissées au soin du lecteur.

(B) Pour $l \geqq 1$:

$$\mathrm{D}^l \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g = \mathrm{B}_l \left(\frac{\mathrm{D}^2 g}{\mathrm{D}\, g}, \ldots, \frac{\mathrm{D}_g^{l+1}}{\mathrm{D}\, g} \right).$$

(C) Pour $l \geqq 2$:

$$\mathrm{D}^{l-2}\, \mathrm{S}\, g = \mathrm{D}^l \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g + \mathrm{C}_l (\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g, \ldots, \mathrm{D}^{l-1} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g).$$

De la formule de dérivation d'une composition :

(D) $$\operatorname{Log} \mathrm{D}\,(g \circ h) = \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g \circ h + \operatorname{Log} \mathrm{D}\, h,$$

on déduit pour un itéré de g :

(E) Pour $n \geqq 1$:

$$\operatorname{Log} \mathrm{D}\, g^n = \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g \circ g^i.$$

De même, de la formule pour la dérivée schwarzienne :

$$\mathrm{S}\,(g \circ h) = (\mathrm{S}\, g \circ h)\,(\mathrm{D}\, h)^2 + \mathrm{S}\, h,$$

on déduit :

(F) Pour $n \geqq 1$:

$$\mathrm{S}\, g^n = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{S}\, g \circ g^i)\,(\mathrm{D}\, g^i)^2.$$

Quand on dérive (D), (E) et (F), on obtient les formules suivantes :

(G) Pour $r \geqq 0$:

$$\mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D}\,(g \circ h) = (\mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g \circ h)\,(\mathrm{D}\, h)^r + \mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D}\, h$$
$$+ \sum_{l=1}^{r-1} (\mathrm{D}^{r-l} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g \circ h)\,(\mathrm{D}\, h)^{r-l}\, \mathrm{G}_l^r (\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, h, \ldots, \mathrm{D}^l \operatorname{Log} \mathrm{D}\, h).$$

(H) Pour $r \geqq 0$, $n \geqq 1$:

$$\mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g^n = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{D}^{r-l} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g \circ g^i)\,(\mathrm{D}\, g^i)^{r-l}\, \mathrm{E}_l^r (\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g^i, \ldots, \mathrm{D}^l \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g^i).$$

(I) Pour $r \geqq 0$, $n \geqq 1$:

$$\mathrm{D}^r\, \mathrm{S}\, g^n = \sum_{l=0}^{r} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathrm{D}^{r-l}\, \mathrm{S}\, g \circ g^i)\,(\mathrm{D}\, g^i)^{r-l+2}\, \mathrm{F}_l^r (\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g^i, \ldots, \mathrm{D}^l \operatorname{Log} \mathrm{D}\, g^i).$$

3. Soit f un difféomorphisme du cercle, préservant l'orientation, de classe C^2. On suppose que le nombre de rotation α de f est irrationnel.

On fixe, dans ce paragraphe et les suivants, deux réduites consécutives de α, $p/q=p_k/q_k$ et $P/Q=p_{k+1}/q_{k+1}$. On suppose, pour fixer les idées, que k est pair; alors, on a :

$$q_k\,\alpha-p_k>0>q_{k+1}\,\alpha-p_{k+1}>p_k-q_k\,\alpha$$

donc les points $f^{-q}(x)$, $f^{Q}(x)$, x, $f^{-Q}(x)$, $f^{q}(x)$ se rencontrent dans cet ordre quand on décrit $\mathbb{T}^1$ dans le sens positif.

Soit $x\in\mathbb{T}^1$; on notera I_x, J_x les intervalles $(x, f^q(x))$, $(f^{-q}(x), f^q(x))$.

LEMME 1. — *Pour tout* $x\in\mathbb{T}^1$, *les intervalles* $f^i(I_x)$, $0\leqq i<Q$, *sont disjoints, et les intervalles* $f^i(J_x)$, $0\leqq i<Q$, *forment un recouvrement de* $\mathbb{T}^1$.

Démonstration. — Par le théorème de Denjoy (*cf.* [H, chap. VI]), f est topologiquement conjugué à R_α. Comme les conclusions du lemme sont topologiques, on peut supposer que $f=R_\alpha$, $x=0$.

Soit $x_i=i\alpha\in\mathbb{T}^1$, $K=\{x_i,\ 0\leqq i<Q\}$; il suffit de prouver que la distance de deux points consécutifs de K est au moins $\|q\alpha\|$ et moindre que $2\|q\alpha\|$.

Pour $0\leqq i, j<Q$, $i\neq j$, on a :

$$\|(i-j)\alpha\|\geqq\inf\{\|l\alpha\|,\ 0<l<Q\}=\|q\alpha\|.$$

D'autre part, si $x_i\in K$, l'un des points x_{i+q}, x_{i+q-Q} appartient à K. On a :

$$d(x_{i+q}, x_i)=\|q\alpha\|;$$
$$d(x_{i+q-Q}, x_i)=\|q\alpha\|+\|Q\alpha\|<2\|q\alpha\|. \quad \square$$

Le lemme 2 rappelle l'inégalité de Denjoy, ainsi qu'une inégalité similaire ([H, chap. VI]).

LEMME 2. — *Pour* $x\in\mathbb{T}^1$, $y\in I_x$, $0\leqq i<Q$, *on a* (*avec* $C=\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,Df)$) :

$$|\mathrm{Log}\,Df^q(x)|\leqq C;$$
$$|\mathrm{Log}\,Df^i(x)-\mathrm{Log}\,Df^i(y)|\leqq C.$$

Démonstration. — *Voir* [H, chap. VI] pour l'inégalité de Denjoy. Pour la seconde inégalité, on écrit, en utilisant (E) :

$$\mathrm{Log}\,Df^i(x)-\mathrm{Log}\,Df^i(y)=\sum_{j=0}^{i-1}[\mathrm{Log}\,Df(f^j(x))-\mathrm{Log}\,Df(f^j(y))].$$

Les intervalles $f^j(I_x)$, $0\leqq j<i$, sont disjoints; donc, si $y\in I_x$, la valeur absolue du second membre est majorée par $\mathrm{Var}(\mathrm{Log}\,Df)$. $\square$

On introduit les notations suivantes :

$$m(x)=f^q(x)-x;$$
$$M=\operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{T}^1} m(x);$$
$$m=\operatorname*{Min}_{x\in\mathbb{T}^1} m(x).$$

LEMME 3. — *Pour* $l \geqq 1$, $x \in \mathbb{T}^1$, *on a :*

$$\sum_{i=0}^{Q-1} (\mathrm{D} f^i(x))^l \leqq \mathrm{C} \frac{\mathrm{M}^{l-1}}{m(x)^l}.$$

Démonstration. — On désigne par $|\mathrm{A}|$ la longueur d'un intervalle A de $\mathbb{T}^1$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $i > 0$:

$$|f^i(\mathrm{I}_x)| = \mathrm{D} f^i(\xi) | \mathrm{I}_x |, \qquad \text{avec} \quad \xi \in \mathrm{I}_x.$$

La seconde inégalité du lemme 2 implique alors :

$$\mathrm{D} f^i(x) \leqq \mathrm{C} \frac{|f^i(\mathrm{I}_x)|}{|\mathrm{I}_x|}.$$

Du lemme 1, il résulte que $\sum_{i=0}^{Q-1} |f^i(\mathrm{I}_x)| \leqq 1$; on a donc :

$$\sum_{i=0}^{Q-1} [\mathrm{D} f^i(x)]^l \leqq \frac{\mathrm{C}}{m(x)^l} \sum_{i=0}^{Q-1} |f^i(\mathrm{I}_x)|^l \leqq \mathrm{C} \frac{\mathrm{M}^{l-1}}{m(x)^l}. \quad \square$$

4. Premières estimations pour les dérivées d'ordre supérieur.

On suppose dorénavant que f est un difféomorphisme de classe C^k, $k \geqq 3$.

LEMME 4. — *Pour* $x \in \mathbb{T}^1$, $0 \leqq n \leqq \mathrm{Q}$, *on a :*

(1) $$|\mathrm{S} f^n|_0 \leqq \mathrm{C} \frac{\mathrm{M}}{m^2};$$

(2) $$|\mathrm{S} f^n(x)| \leqq \mathrm{C} \frac{\mathrm{M}}{m(x)^2};$$

(3) $$|\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{D} f^n|_0 \leqq \mathrm{C} \frac{\mathrm{M}^{1/2}}{m};$$

(4) $$|\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{D} f^n(x)| \leqq \mathrm{C} \frac{\mathrm{M}^{1/2}}{m(x)}.$$

Démonstration. — La formule (F) et le lemme 3 impliquent immédiatement les deux premières inégalités.

On a $\mathrm{S} f^n = \mathrm{D}^2 \mathrm{Log}\,\mathrm{D} f^n - 1/2 (\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{D} f^n)^2$; en un point ou $|\mathrm{D} \log \mathrm{D} f^n|$ est maximal, $\mathrm{D}^2 \mathrm{Log}\,\mathrm{D} f^n$ s'annule, donc :

$$|\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{D} f^n|_0^2 \leqq 2 |\mathrm{S} f^n|_0.$$

Ceci prouve la troisième inégalité.

Soit $1 \leqq n \leqq Q$; on a :

$$D \operatorname{Log} D f^{n+Q} = (D \operatorname{Log} D f^n \circ f^Q)\, D f^Q + D \operatorname{Log} D f^Q.$$

Ceci montre, au vu du lemme 2, que l'inégalité (3) du lemme est valable pour $0 \leqq n \leqq 2Q$, quitte à changer la constante C.

Soit $z \in \mathbb{T}^1$ tel que $m(z) = m$, et $x \in \mathbb{T}^1$; par le lemme 1, il existe $t \in J_z$, $0 \leqq i < Q$, tels que $x = f^i(t)$. La formule (G) donne :

$$D \operatorname{Log} D f^{n+i}(t) = D \operatorname{Log} D f^n(x)\, D f^i(t) + D \operatorname{Log} D f^n(t).$$

Donc :

$$(a) \qquad |D \operatorname{Log} D f^n(x)| \leqq C \frac{M^{1/2}}{m} [D f^i(t)]^{-1}.$$

D'autre part $|I_x| = m(x) = D f^i(\xi)\, |I_t|$, pour un certain $\xi \in I_t$. Mais I_t est contenu dans $[f^{-q}(z), f^{2q}(z)]$, et la longueur de ce dernier intervalle est, en vertu du lemme 2, majorée par $C m$. On a donc, en utilisant une autre fois le lemme 2 :

$$(b) \qquad [D f^i(t)]^{-1} \leqq C [D f^i(\xi)]^{-1} = C \frac{|I_t|}{m(x)} \leqq C \frac{m}{m(x)}.$$

En joignant les estimations (*a*) et (*b*) on obtient la quatrième inégalité du lemme. □

On arrive maintenant à l'estimation cruciale :

LEMME 5. — *Pour* $1 \leqq r \leqq k-1$, $0 \leqq n \leqq Q$, $x \in \mathbb{T}^1$, *on a :*

$$|D^r \operatorname{Log} D f^n(x)| \leqq C \left[\frac{M^{1/2}}{m(x)}\right]^r.$$

Démonstration. — Le cas $r=1$ est une partie du lemme 4. Le cas $r=2$ résulte également du lemme 4 :

$$|D^2 \operatorname{Log} D f^n(x)| \leqq |S f^n(x)| + \frac{1}{2} |D \operatorname{Log} D f^n(x)|^2 \leqq C \frac{M}{m(x)^2}.$$

Supposons le lemme démontré jusqu'à l'ordre $r \geqq 2$. Alors, dans les formules (C) et (I) les polynômes C_{r+1} et F_l^{r-1}, $0 \leqq l \leqq r-1$, vérifient les estimations, pour $0 \leqq n \leqq Q$:

$$|C_{r+1}(D \operatorname{Log} D f^n(x), \ldots, D^r \operatorname{Log} D f^n(x))| \leqq C \left[\frac{M^{1/2}}{m(x)}\right]^{r+1};$$

$$|F_l^{r-1}(D \operatorname{Log} D f^n(x), \ldots, D^l \operatorname{Log} D f^n(x))| \leqq C \left[\frac{M^{1/2}}{m(x)}\right]^l.$$

Cette dernière estimation, introduite dans la formule (I), donne en utilisant le lemme 3 :

$$|D^{r-1}\,S\,g^n(x)| \leqq C \sum_{l=0}^{r-1} \frac{M^{r-l}}{m(x)^{r-l+1}} \left[\frac{M^{1/2}}{m(x)}\right]^l \leqq C \left[\frac{M^{1/2}}{m(x)}\right]^{r+1}.$$

La formule (C) et l'estimation précédente pour C_{r+1} achèvent la démonstration de l'inégalité à l'ordre $r+1$. □

5. Une amélioration de l'inégalité de Denjoy

Proposition 1. — $|\mathrm{Log}\,D f^q|_0 \leqq CM^{1/2}$.

Démonstration. — Soit $z \in \mathbb{T}^1$ tel que $m(z)=m$; pour tout $x \in \mathbb{T}^1$, il existe $t \in J_z$, $0 \leqq i < Q$, tels que $x=f^i(t)$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\,D f^q(x) &= \mathrm{Log}\,D f^{q+i}(t) - \mathrm{Log}\,D f^i(t)\\ &= \mathrm{Log}\,D f^q(t) + [\mathrm{Log}\,D f^i(f^q(t)) - \mathrm{Log}\,D f^i(t)];\end{aligned}$$

$$|\mathrm{Log}\,D f^i(f^q(t)) - \mathrm{Log}\,D f^i(t)| \leqq |D\,\mathrm{Log}\,D f^i|_0\,|I_t|;$$

$$|\mathrm{Log}\,D f^q(t)| = |\mathrm{Log}\,D f^q(t) - \mathrm{Log}\,D f^q(z)| \leqq |D\,\mathrm{Log}\,D f^q|_0\,|J_z|,$$

car $D f^q - 1$ s'annule au point z.

Les intervalles I_t et J_z sont contenus dans $(f^{-q}(z), f^{2q}(z))$, dont la longueur est majorée par $C\,m$.

La troisième inégalité du lemme 4 donne alors :

$$|\mathrm{Log}\,D f^q(x)| \leqq C\,m\,(|D\,\mathrm{Log}\,D f^i|_0 + |D\,\mathrm{Log}\,D f^q|_0) \leqq CM^{1/2}. \quad \square$$

L'estimation de la proposition implique immédiatement une estimation similaire pour $D f^q - 1$:

$$|D f^q - 1|_0 \leqq CM^{1/2}.$$

6. Estimations de $f^Q(x)-x$

On note $\alpha_q = |q\alpha - p|$, $\alpha_Q = |Q\alpha - P|$, et $\tilde{m}(x) = |f^Q(x) - x|$ pour $x \in \mathbb{T}^1$. On fixe un entier N supérieur a $k/2$, et on note K_x l'intervalle $[f^{-Nq}(x), f^{(N+1)q}(x)]$, pour $x \in \mathbb{T}^1$. Le but de ce paragraphe est de démontrer la :

Proposition 2. — *Pour tout* $x \in \mathbb{T}^1$, *on a :*

$$\left|\tilde{m}(x) - \frac{\alpha_Q}{\alpha_q} m(x)\right| \leqq C\,[M^{(k-1)/2}\,m(x) + M^{1/2}\,\tilde{m}(x)].$$

LEMME 6. — *Pour tout* $x \in \mathbb{T}^1$, *il existe* $y \in [x, f^q(x)]$, $z \in [f^Q(x), x]$ *tels que :*

$$\tilde{m}(y) = \frac{\alpha_Q}{\alpha_q} m(z).$$

Démonstration. — On note $\varphi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ une application qui relève l'identité de $\mathbb{T}^1$ dans l'intervalle $[f^Q(x), f^q(x)]$. Soit μ l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{T}^1$ invariante par f; on a, pour tout $x \in \mathbb{T}^1$:

$$\int_x^{f^q(x)} (f^Q - \mathrm{id})\, d\mu = \int_{f^Q(x)}^{f^{Q+q}(x)} \varphi\, d\mu - \int_x^{f^q(x)} \varphi\, d\mu$$
$$= \int_{f^q(x)}^{f^{q+Q}(x)} \varphi\, d\mu - \int_x^{f^Q(x)} \varphi\, d\mu = \int_x^{f^Q(x)} (f^q - \mathrm{id})\, d\mu.$$

D'autre part, la mesure de probabilité μ vérifie :

$$\int_x^{f^q(x)} d\mu = \alpha_q, \quad \int_x^{f^Q(x)} d\mu = -\alpha_Q.$$

Le lemme résulte donc du théorème de la moyenne.

La proposition 2 est maintenant démontrée en examinant les deux termes d'une alternative (Lemmes 7 et 8).

LEMME 7. — *Supposons que* $\tilde{m}$ *est monotone sur un intervalle* I_z, $z \in \mathbb{T}^1$.
Alors, pour tout $x \in \mathbb{T}^1$, *tout* $y \in I_x$, *on a :*

$$\left| \frac{\tilde{m}(y)}{\tilde{m}(x)} - 1 \right| \leqq CM^{1/2}.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathbb{T}^1$; on a :

$$|\tilde{m}(f^q(x)) - \tilde{m}(x)| = |m(f^Q(x)) - m(x)| \leqq CM^{1/2}\, \tilde{m}(x)$$

par la proposition 1.

Si $\tilde{m}$ est monotone sur I_z, on a donc :

$$\left| \frac{\tilde{m}(t)}{\tilde{m}(z)} - 1 \right| \leqq CM^{1/2} \qquad \text{pour} \quad t \in [f^{-2q}(z), f^q(z)];$$

$$\left| \frac{\tilde{m}(t')}{\tilde{m}(t)} - 1 \right| \leqq CM^{1/2} \qquad \text{pour} \quad t, t' \in [f^{-2q}(z), f^q(z)].$$

Soit $x \in \mathbb{T}^1$, $y \in I_x$; le lemme 1 montre qu'on peut choisir $0 \leqq j < Q$ et $t, t' \in [f^{-2q}(z), f^q(z)]$ vérifiant $f^j(t) = x$, $f^j(t') = y$.

On a alors :

$$\tilde{m}(x)=\tilde{m}(t)\,\mathrm{D}f^{j}(\xi), \qquad \tilde{m}(y)=\tilde{m}(t')\,\mathrm{D}f^{j}(\xi'),$$

avec $\xi, \xi' \in [f^{-3q}(z), f^{q}(z)]$.

On a $|\xi-\xi'| \leqq \mathrm{C}\,m(z)$ et $m(t) \geqq \mathrm{C}^{-1} m(z)$ pour $t \in [f^{-3q}(z), f^{q}(z)]$; en intégrant l'inégalité (4) du lemme 4, on a donc :

$$|\operatorname{Log} \mathrm{D} f^{j}(\xi)-\operatorname{Log} \mathrm{D} f^{j}(\xi')| \leqq \mathrm{CM}^{1/2}.$$

Finalement, on obtient :

$$\left|\frac{\tilde{m}(y)}{\tilde{m}(x)}-1\right|=\left|\frac{\tilde{m}(t')}{\tilde{m}(t)}\,\frac{\mathrm{D}f^{j}(\xi')}{\mathrm{D}f^{j}(\xi)}-1\right| \leqq \mathrm{CM}^{1/2}. \quad \square$$

Lemme 8. — *Si $\tilde{m}$ n'est monotone sur aucun intervalle de la forme I_z, $z \in \mathbb{T}^1$, alors pour tout $x \in \mathbb{T}^1$, tout $y \in \mathrm{I}_x$, on a :*

$$|\tilde{m}(y)-\tilde{m}(x)| \leqq \mathrm{CM}^{(k-1)/2}\, m(x).$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que la proposition 1 implique $|\mathrm{K}_x| \leqq \mathrm{C}\,m(x)$, et $\mathrm{C}^{-1} m(x) \leqq m(t) \leqq \mathrm{C}\,m(x)$ pour $t \in \mathrm{K}_x$.

L'estimation du lemme 5 implique donc :

$$|\mathrm{D}^{k-1} \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{Q}}(t)| \leqq \mathrm{C}\left[\frac{\mathrm{M}^{1/2}}{m(x)}\right]^{k-1} \qquad \text{pour} \quad t \in \mathrm{K}_x.$$

L'hypothèse sur $\tilde{m}$ entraîne l'existence de $2\mathrm{N} \geqq k$ zéros distincts de $\mathrm{D}f^{\mathrm{Q}}-1$ (ou $\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{\mathrm{Q}}$) dans l'intervalle K_x.

L'application réitérée du théorème de Rolle montre que les fonctions $\mathrm{D}^{j}\operatorname{Log}\mathrm{D}f^{\mathrm{Q}}$, $0 \leqq j \leqq k-1$ ont toutes des zéros dans K_x. L'intégration de l'inégalité précédente donne alors :

$$|\operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{Q}}(t)| \leqq \mathrm{CM}^{(k-1)/2} \qquad \text{pour} \quad t \in \mathrm{K}_x.$$

Le lemme suit immédiatement. $\square$

Démonstration de la proposition 2. — Soit $x \in \mathbb{T}^1$, $y \in \mathrm{I}_x$, $z \in [f^{\mathrm{Q}}(x), x]$ les points donnés par le lemme 6. On a :

$$|\tilde{m}(y)-\tilde{m}(x)| \leqq \mathrm{C}\,(\mathrm{M}^{1/2}\,\tilde{m}(x)+\mathrm{M}^{(k-1)/2}\, m(x))$$

par les lemmes 7 et 8;

$$|m(z)-m(x)| \leqq \mathrm{CM}^{1/2}\,|z-x| \leqq \mathrm{CM}^{1/2}\,\tilde{m}(x)$$

par la proposition 1.

La proposition 2 en résulte. $\square$

COROLLAIRE. — *Soit* $\tilde{\mathrm{M}}=\underset{x\in \mathrm{T}^1}{\mathrm{Max}}\,\tilde{m}(x)$, $\tilde{m}=\underset{x\in \mathrm{T}^1}{\mathrm{Min}}\,\tilde{m}(x)$. *On a :*

$$\tilde{\mathrm{M}} \leqslant \mathrm{M}\,\frac{(\alpha_{\mathrm{Q}}/\alpha_q)+\mathrm{CM}^{(k-1)/2}}{1-\mathrm{CM}^{1/2}};$$

$$\tilde{m} \geqq m\,\frac{(\alpha_{\mathrm{Q}}/\alpha_q)-\mathrm{CM}^{(k-1)/2}}{1+\mathrm{CM}^{1/2}}.$$

7. Démonstration de la C^1-conjugaison

7.1. Soit (p_n/q_n) la suite des réduites de α. On introduit les notations suivantes :

$$\alpha_n=|\,q_n\,\alpha-p_n\,|$$
$$\mathrm{M}_n=\underset{x\in \mathrm{T}^1}{\mathrm{Max}}\,|\,f^{q_n}(x)-x\,|,$$
$$m_n=\underset{x\in \mathrm{T}^1}{\mathrm{Min}}\,|\,f^{q_n}(x)-x\,|.$$

De l'inégalité du corollaire :

$$\mathrm{M}_{n+1} \leqq \mathrm{M}_n\,\frac{(\alpha_{n+1}/\alpha_n)+\mathrm{CM}_n^{(k-1)/2}}{1-\mathrm{CM}_n^{1/2}}, \tag{1}$$

on va déduire, d'une manière analogue à [Y], que M_n/α_n est une suite bornée. Le corollaire impliquera alors que α_n/m_n est également bornée, et la C^1-conjugaison en résultera.

Comme $\int_{\mathbb{T}^1}|\,f^{q_n}-\mathrm{id}\,|\,d\mu=\alpha_n$ (où μ est la mesure de probabilité invariante par f), on a :

$$\mathrm{M}_n \geqq \alpha_n \geqq m_n.$$

Rappelons également que la condition diophantienne implique l'estimation :

$$\alpha_n \geqq \alpha_{n+1} \geqq \mathrm{C}\,\alpha_n^{1+\beta}.$$

On suppose dorénavant que f est de classe C^k, $k > 2\beta+1$.

7.2. Par le théorème de Denjoy, M_n tend vers zéro. On commence par montrer que M_n décroît au moins géométriquement.

Comme M_n tend vers zéro, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité (1) implique pour n assez grand :

$$\mathrm{M}_{n+1} \leqq \mathrm{M}_n\left((1+\varepsilon)\,\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}+\varepsilon\right);$$

donc aussi :

$$\mathrm{M}_{n+2} \leqq \mathrm{M}_n\left((1+\varepsilon)\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}+\varepsilon\right)\left((1+\varepsilon)\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}}+\varepsilon\right) \leqq \mathrm{M}_n\left[(1+\varepsilon)^2\frac{\alpha_{n+2}}{\alpha_n}+\varepsilon^2+2\,\varepsilon\,(1+\varepsilon)\right].$$

Mais $\alpha_{n+2}/\alpha_n \leqq 1/2$ pour tout $n \geqq 0$, et $\varepsilon > 0$ est arbitraire. On a donc, lorsque n est assez grand :

$$\mathrm{M}_{n+2} \leqq \frac{2}{3}\mathrm{M}_n.$$

7.3. Comme $k > 2\beta+1$, on peut choisir $\theta > 0$, fixé dans la suite, qui vérifie :

$$\frac{k+1}{2}-\theta > (1+\beta+\theta)(1+\theta).$$

Soit alors n_0 un entier tel que tout $n \geqq n_0$ vérifie :

(i) $$\mathrm{M}_{n+2} \leqq \frac{2}{3}\mathrm{M}_n,$$

(ii) $$\mathrm{CM}_n^{1/2} \leqq 1/2,$$

(iii) $$\alpha_{n+1} \geqq \alpha_n^{1+\beta+\theta}.$$

Les relations (i) et (ii) montrent que le produit :

$$\prod_{n=n_0}^{+\infty}\left(\frac{1+\mathrm{M}_n^{\theta}}{1-\mathrm{CM}_n^{1/2}}\right)$$

est convergent, et permettent d'en calculer un majorant $\mathrm{A}\,(>1)$. On peut supposer que $\mathrm{A}^{1-\theta} > 4\,\mathrm{C}$. On choisit alors $n_1 \geqq n_0$ tel que $\mathrm{M}_{n_1} < \mathrm{A}^{-2}$.

7.4. Définissons $a_{n_1}=\mathrm{A}^{-2}$, et ρ_{n_1} par la relation $\mathrm{M}_{n_1}=a_{n_1}\,\alpha_{n_1}^{\rho_{n_1}}$; on a donc $0 < \rho_{n_1} < 1$ (car $a_{n_1} > \mathrm{M}_{n_1} \geqq \alpha_{n_1}$).

On va montrer qu'il est possible de construire par récurrence des suites a_n, ρ_n vérifiant :

(a) $$\mathrm{M}_n \leqq a_n\,\alpha_n^{\rho_n}$$

(b) $$(\mathrm{R}_n)\quad a_{n+1}=a_n\frac{1+\mathrm{M}_n^{\theta}}{1-\mathrm{CM}_n^{1/2}},\qquad \rho_{n+1}=\rho_n;$$

ou

$$(\mathrm{R}'_n)\; a_{n+1}=a_n,\qquad \rho_{n+1}=(1+\theta)\,\rho_n.$$

Supposons la construction effectuée jusqu'à l'ordre r; on a alors :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n_1}=A^{-2} \leqq a_n \leqq \prod_{j=n_1}^{+\infty} \dfrac{1+M_j^\theta}{1-CM_j^{1/2}} a_{n_1} \leqq A^{-1} < 1; \\ \alpha_n^{\rho_n} > a_n \alpha_n^{\rho_n} \geqq M_n \geqq \alpha_n \quad \Rightarrow \quad \rho_n < 1; \\ \rho_n > 0 \text{ par les relations de récurrence.} \end{array}\right.$$

1^er^ *cas.* — $CM_n^{(k+1)/2-\theta} \leqq M_n \alpha_{n+1}/\alpha_n$. L'inégalité (1) implique :

$$M_{n+1} \leqq M_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \frac{1+M_n^\theta}{1-CM_n^{1/2}}.$$

On utilise (R_n) pour définir a_{n+1}, ρ_{n+1}. Cela donne :

$$M_{n+1} \leqq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \frac{1+M_n^\theta}{1-CM^{1/2}} a_n \alpha_n^{\rho_n} \leqq a_{n+1} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \alpha_n^{\rho_n} \leqq a_{n+1} \alpha_{n+1}^{\rho_{n+1}},$$

car $\alpha_{n+1} \leqq \alpha_n$, $0 < \rho_n < 1$.

2^e^ *cas.* — $CM_n^{(k+1)/2-\theta} > M_n \alpha_{n+1}/\alpha_n$. Comme $CM_n^{1/2} \leqq 1/2$, l'inégalité (1) implique :

$$M_{n+1} \leqq 4\, CM_n^{(k+1)/2-\theta}.$$

On définit a_{n+1}, ρ_{n+1} par la relation (R_n'). Comme $k \geqq 3$, $a_n \leqq A^{-1}$, on a :

$$a_n^{(k+1)/2} \leqq a_n^{2-\theta} \leqq a_n A^{\theta-1} \leqq \frac{a_n}{4\,C};$$

$$\begin{aligned} M_{n+1} &\leqq 4\,C\,[a_n \alpha_n^{\rho_n}]^{(k+1)/2-\theta} \leqq a_n \alpha_n^{\rho_n((k+1)/2-\theta)} \\ &\leqq a_n \alpha_n^{\rho_n(1+\theta)(1+\beta+\theta)} \leqq a_n \alpha_{n+1}^{\rho_n(1+\theta)} = a_{n+1} \alpha_{n+1}^{\rho_{n+1}}. \end{aligned}$$

Ceci complète la construction des suites a_n et ρ_n, vérifiant (a) et (b).

7.5. Comme on doit avoir $0 < \rho_n < 1$, le second cas, qui implique $\rho_{n+1}=(1+\theta)\rho_n$, ne se produit qu'un nombre fini de fois. Il existe donc un entier $n_2 \geqq n_1$ tel que, pour $n \geqq n_2$:

$$M_{n+1} \leqq M_n \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \frac{1+M_n^\theta}{1-CM_n^{1/2}};$$

ceci implique :

$$\frac{M_n}{\alpha_n} \leqq A \frac{M_{n_2}}{\alpha_{n_2}};$$

la suite M_n/α_n est donc bornée.

De la seconde inégalité du corollaire de la proposition 2, on déduit alors :

$$\frac{\alpha_{n+1}}{m_{n+1}} \leqq \frac{\alpha_n}{m_n} \frac{1+\mathrm{C}\,\alpha_n^{1/2}}{1-\mathrm{C}\,\alpha_n^{(k+1)/2}\,\alpha_{n+1}^{-1}},$$

pour n assez grand.

La condition diophantienne sur α donne :

$$\alpha_n^{(k+1)/2}\,\alpha_{n+1}^{-1} \leqq \mathrm{C}\,\alpha_n^{\rho}, \qquad \text{avec} \quad \rho = \frac{k+1}{2} - (1+\beta) > 0.$$

La suite α_n décroit au moins géométriquement ($\alpha_{n+2} \leqq 1/2\,\alpha_n$). Donc, pour n_3 assez grand, le produit :

$$\prod_{n=n_3}^{+\infty} \frac{1+\mathrm{C}\,\alpha_n^{1/2}}{1-\mathrm{C}\,\alpha_{n+1}^{-1}\,\alpha_n^{(1+k)/2}}$$

est convergent. Ceci implique que la suite α_n/m_n est également bornée.

7.6. Montrons que les itérés de f forment une suite bornée pour la C^1 topologie. Soit $x \in \mathbb{T}^1$, $i \in \mathbb{N}$; pour tout n pair $\geqq 0$, il existe $\xi \in [x, f^{q_n}(x)]$ tel que :

$$f^{q_n+i}(x) - f^i(x) = \mathrm{D} f^i(\xi)\,(f^{q_n}(x) - x).$$

On a donc :

$$\mathrm{C}^{-1} \leqq \frac{m_n}{\mathrm{M}_n} \leqq \mathrm{D} f^i(\xi) \leqq \frac{\mathrm{M}_n}{m_n} \leqq \mathrm{C}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, on obtient :

$$\mathrm{C}^{-1} \leqq \mathrm{D} f^i(x) \leqq \mathrm{C}.$$

et ceci prouve la C^1-conjugaison. □

8. Différentiabilité supérieure

8.1. Comme précédemment, on se donne un difféomorphisme du cercle f, préservant l'orientation. On suppose que le nombre de rotation α de f vérifie une condition diophantienne d'ordre β, et que f est de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 3$, $k > 2\beta+1$. Sous ces hypothèses, on a montré dans le paragraphe précédent que f est conjugué à la rotation R_α par un difféomorphisme h de classe C^1. Notre but dans ce paragraphe est de prouver que h est de classe $\mathrm{C}^{k-1-\beta-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Pour ceci, il suffit de voir, comme on l'a rappelé dans l'introduction, que les itérés de f forment une suite bornée pour la $\mathrm{C}^{k-1-\beta-\varepsilon}$ topologie, pour tout $\varepsilon > 0$—([H, chap. IV]).

La méthode pour montrer ce dernier résultat est la suivante : on suppose que h est de classe $\mathrm{C}^{1+\gamma}$, pour un certain réel $\gamma \geqq 0$. On sait que ceci est vrai pour $\gamma = 0$. On tire alors parti des inégalités de convexité de Hadamard pour montrer d'abord que la suite $|D^{k-1}\operatorname{Log} D f^{q_n}|_0 q_n^{-1}$ est bornée lorsque n varie, puis on prouve que ceci implique que la suite des itérés de f est bornée dans la $C^{1+\gamma'}$ topologie pour tout $\gamma' < g(\gamma) = [(k-2-\beta)+\gamma(1+\beta)]/(2+\beta)$.

L'application $\gamma \to g(\gamma)$ sur l'intervalle $[0, k-2-\beta]$ vérifie $g(k-2-\beta)=k-2-\beta$, et $g(x) > x$ pour $0 \leqq x < k-2-\beta$. Donc il suffit d'itérer le raisonnement précédent (c'est-à-dire itérer g) pour prouver que h est de classe $C^{k-1-\beta-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$.

La même technique de méthode itérative se trouve déjà dans [H_1, chap. IX].

8.2. On identifie, comme il est usuel, les fonctions définies sur $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et les fonctions $\mathbb{Z}$-périodiques d'une variable réelle.

Soit $0 < \gamma < 1$; on dit que $\varphi \in C^0(\mathbb{T}^1)$ vérifie une condition de Hölder d'ordre γ si :

$$|\varphi|_\gamma = \operatorname*{Sup}_{x \neq y} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\gamma} < +\infty.$$

Ces fonctions forment un espace vectoriel noté $C^\gamma(\mathbb{T}^1)$; muni de la norme $\|\varphi\|_\gamma = \operatorname{Max}(\|\varphi\|_0, |\varphi|_\gamma)$, $C^\gamma(\mathbb{T}^1)$ est un espace de Banach.

On vérifie immédiatement que $C^\gamma(\mathbb{T}^1)$ est un anneau (pour la multiplication des fonctions), et que, si φ, $\psi \in C^\gamma(\mathbb{T}^1)$, on a :

$$(2) \qquad \begin{cases} |\varphi\psi|_\gamma \leqq \|\varphi\|_0 |\psi|_\gamma + |\varphi|_\gamma \|\psi\|_0, \\ \|\varphi\psi\|_\gamma \leqq \|\varphi\|_0 |\psi|_\gamma + \|\varphi\|_\gamma \|\psi\|_0. \end{cases}$$

Soit γ un réel $\geqq 1$; on écrit alors, ici et dans la suite, $\gamma = r+\gamma'$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $0 \leqq \gamma' < 1$. Une fonction $\varphi \in C^r(\mathbb{T}^1)$ est dite de classe C^γ si $D^r\varphi \in C^{\gamma'}(\mathbb{T}^1)$. L'espace de ces fonctions est noté $C^\gamma(\mathbb{T}^1)$ et est muni de la norme d'espace de Banach :

$$\|\varphi\|_\gamma = \operatorname{Max}\Big(\operatorname*{Max}_{0 \leqq j \leqq r} \|D^j\varphi\|_0, |D^r\varphi|_{\gamma'}\Big).$$

Le lemme suivant est évident mais simplifie les calculs lorsque φ possède un zéro sur $\mathbb{T}^1$.

LEMME 10. — *Soit* $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in C^\gamma(\mathbb{T}^1)$; *on a :*

$$\|\varphi\|_\gamma \leqq \|D^r\varphi\|_{\gamma'} + \operatorname*{Inf}_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|.$$

Démonstration. — Si $\gamma < 1$, $\gamma = \gamma'$, $r=0$, le lemme est évident. Si $r=1$, et $|\varphi|$ atteint son maximum en x, on a, par le théorème des accroissements finis $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqq \|D\varphi\|_0$ pour $|x-y| \leqq 1$, et le lemme en résulte. Si $r \geqq 2$, les fonctions $D^j\varphi$, $1 \leqq j \leqq r-1$, possèdent des zéros sur $\mathbb{T}^1$. Le cas $r=1$ donne $\|D^j\varphi\|_0 \leqq \|D^{j+1}\varphi\|_0$, donc $\|D\varphi\|_0 \leqq \|D^r\varphi\|_{\gamma'}$, et on termine la démonstration comme pour $r=1$. □

Pour $\gamma \geqq 1$, on définit aussi $D^\gamma(\mathbb{T}^1)$ comme le sous-espace de $D^1(\mathbb{T}^1)$ constitué des difféomorphismes h tels que $h - \mathrm{id} \in C^\gamma(\mathbb{T}^1)$.

LEMME 11. — *Soit* $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $h \in \mathrm{D}^{\mathrm{Max}(1,\gamma)}(\mathbb{T}^1)$; *il existe une constante* $\mathrm{C}(h)$ *telle que, si* $\varphi \in \mathrm{C}^\gamma(\mathbb{T}^1)$, *alors* $\varphi \circ h \in \mathrm{C}^\gamma(\mathbb{T}^1)$ *et on a :*

$$\| \varphi \circ h \|_\gamma \leqq \| \varphi \|_\gamma \| \mathrm{D}h \|_0^\gamma \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqq \gamma < 1;$$
$$\| \varphi \circ h \|_\gamma \leqq \mathrm{C}(h) \| \varphi \|_\gamma \qquad \textit{pour} \quad \gamma \geqq 1.$$

Démonstration. — Pour $0 \leqq \gamma < 1$, on a $\| \varphi \circ h \|_0 = \| \varphi \|_0$ et, si $x \neq y$ et $\gamma > 0$:

$$| \varphi(h(x)) - \varphi(h(y)) | \leqq | \varphi |_\gamma | h(x) - h(y) |^\gamma \leqq | \varphi |_\gamma \| \mathrm{D}h \|_0^\gamma | x - y |^\gamma,$$

ce qui démontre la première inégalité. La seconde résulte de la formule de Faa-di-Bruno pour $\mathrm{D}^r(\varphi \circ h)$ et de la relation (2). □

8.3. *Inégalités de Convexité de Hadamard.* — Les normes $\| \ \|_\gamma$, lorsque γ varie dans $\mathbb{R}^+$ sont reliées entre elles par des inégalités de convexité, dites de Hadamard.

Proposition 3. — *Soient* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}^+$ *avec* $\gamma_3 \geqq \gamma_2 \geqq \gamma_1$, $\gamma_1 \neq \gamma_3$. *Il existe une constante* C *ne dépendant que de* γ_3 *telle que pour tout* $\varphi \in \mathrm{C}^{\gamma_3}(\mathbb{T}^1)$ *on ait :*

$$\| \varphi \|_{\gamma_2} \leqq \mathrm{C} \| \varphi \|_{\gamma_1}^{(\gamma_3 - \gamma_2)/(\gamma_3 - \gamma_1)} \| \varphi \|_{\gamma_3}^{(\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_3 - \gamma_1)}.$$

Démonstration. — *Voir* par exemple, l'appendice de [Ho]. □

8.4. Soit f un difféomorphisme du cercle vérifiant les hypothèses de 8.1. Les itérés de f forment alors une suite bornée dans la C^1-topologie. Comme dans le reste de l'article, C désigne diverses constantes strictement positives qui ne dépendent que de f et de l'ordre de différentiabilité considéré. Le lemme 11 donne, pour $0 \leqq \gamma < 1$, $\varphi \in \mathrm{C}^\gamma(\mathbb{T}^1)$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\| \varphi \circ f^n \|_\gamma \leqq \mathrm{C} \| \varphi \|_\gamma. \tag{3}$$

La proposition 3 donne, pour $0 \leqq \gamma_1 \leqq \gamma_2 \leqq k-1$, $\gamma_2 \neq 0$, et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_{\gamma_1} \leqq \mathrm{C} \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_{\gamma_2}^{\gamma_1/\gamma_2}; \\ \| \mathrm{D} f^n - 1 \|_{\gamma_1} \leqq \mathrm{C} \| \mathrm{D} f^n - 1 \|_{\gamma_2}^{\gamma_1/\gamma_2}. \end{cases} \tag{4}$$

Pour $n \geqq 0$, $j \in \mathbb{Z}$, on a $\| (\mathrm{D} f^n)^j \|_0 \leqq \mathrm{C}(j)$ et, pour $0 < \gamma < 1$:

$$| (\mathrm{D} f^n)^j |_\gamma \leqq \mathrm{C}(j) | \mathrm{D} f^n - 1 |_\gamma.$$

Donc, pour $0 \leqq \gamma < 1$, $\varphi \in \mathrm{C}^\gamma(\mathbb{T}^1)$, on obtient, par la relation (2) :

$$\| \varphi . (\mathrm{D} f^n)^j \|_\gamma \leqq \mathrm{C}(j) (\| \varphi \|_\gamma + \| \mathrm{D} f^n - 1 \|_\gamma \| \varphi \|_0). \tag{5}$$

8.5. Soit $\Delta = \mathrm{X}_1^{j_1} \ldots \mathrm{X}_m^{j_m}$ un monôme de m variables, et $l = \sum_{p=1}^{m} p j_p \geqq 1$. Soit $0 \leqq \gamma < 1$, $n \in \mathbb{Z}$. On estime $\| \Delta \|_\gamma$ lorsque $\mathrm{X}_i = \mathrm{D}^i \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n$ ou lorsque $\mathrm{X}_i = \mathrm{D}^{i+1} f^n$ en supposant que $m \leqq k-1$ et $l + \gamma \leqq k-1$.

La relation (2) permet de majorer $\|\Delta\|_\gamma$ par une somme de termes de la forme $\|X_p\|_\gamma \|\Delta/X_p\|_0$, $1 \leqq p \leqq m$, $j_p \neq 0$. Par la relation (4), on a :

$$\| D^p \operatorname{Log} D f^n \|_\gamma \leqq C \| \operatorname{Log} D f^n \|_{l+\gamma}^{(p+\gamma)/(l+\gamma)};$$

$$\| D^{p+1} f^n \|_\gamma \leqq C \| D f^n - 1 \|_{l+\gamma}^{(p+\gamma)/(l+\gamma)};$$

$$\left\| \frac{\Delta(D \operatorname{Log} D f^n, \ldots, D^m \operatorname{Log} D f^n)}{D^p \operatorname{Log} D f^n} \right\|_0 \leqq C \| \operatorname{Log} D f^n \|_{l+\gamma}^{((\Sigma k j_k)-p)/(l+\gamma)};$$

$$\left\| \frac{\Delta(D^2 f^n, \ldots, D^{m+1} f^n)}{D^{p+1} f^n} \right\|_0 \leqq C \| D f^n - 1 \|_{l+\gamma}^{((\Sigma k j_k)-p)/(l+\gamma)}.$$

On obtient donc $\|\Delta\|_\gamma \leqq C \|\operatorname{Log} D f^n\|_{l+\gamma}$ lorsque $X_i = D^i \operatorname{Log} D f^n$, $\|\Delta\|_\gamma \leqq C \| D f^n - 1\|_{l+\gamma}$ lorsque $X_i = D^{i+1} f^n$.

Ceci permet d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 12. — *Soit* P *un polynôme de m variables* $X_1 \ldots X_m$, *homogène de poids l si* X_i *a pour poids i. Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *tout* $0 \leqq \gamma < 1$, *on a :*

$$\| P(D \operatorname{Log} D f^n, \ldots, D^m \operatorname{Log} D f^n) \|_\gamma \leqq C(P) \| \operatorname{Log} D f^n \|_{l+\gamma};$$

$$\left\| P\left(\frac{D^2 f^n}{D f^n}, \ldots, \frac{D^{m+1} f^n}{D f^n} \right) \right\|_\gamma \leqq C(P) \| D f^n - 1 \|_{l+\gamma}.$$

Démonstration. — La première inégalité résulte immédiatement de la discussion précédente. Quant à la seconde, un monôme Δ' de P est produit d'une puissance de $D f^n$ et d'un monôme Δ en $D^2 f^n, \ldots, D^{m+1} f^n$. Par la relation (5), on a :

$$\| \Delta' \|_\gamma \leqq C(\| \Delta \|_\gamma + \| \Delta \|_0 \| D f^n - 1 \|_\gamma).$$

La discussion précédant le lemme donne :

$$\| \Delta \|_\gamma \leqq C \| D f^n - 1 \|_{l+\gamma}, \qquad \| \Delta \|_0 \leqq C \| D f^n - 1 \|_l.$$

Mais, par la relation (4), on a :

$$\| D f^n - 1 \|_l \| D f^n - 1 \|_\gamma \leqq C \| D f^n - 1 \|_{l+\gamma},$$

ce qui achève la démonstration du lemme 12. □

Corollaire. — *Pour* $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq \gamma \leqq k-1$, *on a :*

$$C^{-1} \| D f^n - 1 \|_\gamma \leqq \| \operatorname{Log} D f^n \|_\gamma \leqq C \| D f^n - 1 \|_\gamma.$$

Démonstration. — Pour $0 \leqq \gamma < 1$, cela se vérifie directement sans difficultés. Pour $\gamma \geqq 1$, $\gamma = r + \gamma'$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqq \gamma' < 1$, le lemme 10 donne :

$$\| D f^n - 1 \|_\gamma = \| D^{r+1} f^n \|_{\gamma'}, \| \operatorname{Log} D f^n \|_\gamma = \| D^r \operatorname{Log} D f^n \|_{\gamma'},$$

puisque $\int_0^1 \mathrm{D} f^n(t)\,dt = 1$ et donc $\operatorname{Log} \mathrm{D} f^n$ et $\mathrm{D} f^n - 1$ ont un zéro sur $\mathbb{T}^1$. La formule (B) du paragraphe 2 et le lemme 12 donnent alors l'inégalité de droite. La formule (A) du paragraphe 2 et le lemme 12 donnent :

$$\left\| \frac{\mathrm{D}^{r+1} f^n}{\mathrm{D} f^n} \right\|_\gamma \leqq \mathrm{C} \, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_{r+\gamma'};$$

En utilisant la relation (5) on obtient alors :

$$\| \mathrm{D}^{r+1} f^n \|_{\gamma'} \leqq \mathrm{C} \, (\| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_{r+\gamma'} + \| \mathrm{D} f^n - 1 \|_{\gamma'} \, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_r);$$

$$\| \mathrm{D} f^n - 1 \|_{\gamma'} \, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_r \leqq \mathrm{C} \, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_{\gamma'} \, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_r$$

$$\leqq \mathrm{C} \, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^n \|_{r+\gamma'} \quad \text{par la relation (4),}$$

ce qui donne l'autre moitié de l'inégalité du Corollaire. □

8.6. On suppose maintenant que $f = h \circ \mathrm{R}_\alpha \circ h^{-1}$, avec $h \in \mathrm{D}^{1+\gamma}(\mathbb{T}^1)$ $0 \leqq \gamma_0 < k - 2 - \beta$.

PROPOSITION 4. — *Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$\| f^n - \mathrm{id} - n\alpha \|_{\gamma_0} \leqq \mathrm{C} \, \| n\alpha \|.$$

Démonstration. — On commence par estimer $\| h \circ \mathrm{R}_{n\alpha} - h - n\alpha \|_{\gamma_0}$; cette fonction a un zéro sur $\mathbb{T}^1$, donc, si $\gamma_0 = r + \gamma'_0$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqq \gamma'_0 < 1$, on a :

$$\| h \circ R_{n\alpha} - h - n\alpha \|_{\gamma_0} = \| \mathrm{D}^r (h \circ R_{n\alpha} - h - n\alpha) \|_{\gamma_0},$$

On a certainement $\| \mathrm{D}^r (n\alpha) \|_{\gamma'_0} \leqq \| n\alpha \|$, et par le théorème des accroissements finis :

$$\| \mathrm{D}^r h \circ \mathrm{R}_{n\alpha} - \mathrm{D}^r h \|_0 \leqq \| \mathrm{D}^{r+1} h \|_0 \, \| n\alpha \|.$$

Soit p l'entier le plus proche de $n\alpha$, $\alpha' = n\alpha - p$, donc $|\alpha'| = \| n\alpha \|$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{D}^r h(x + n\alpha) - \mathrm{D}^r h(x) = \alpha' \int_0^1 \mathrm{D}^{r+1} h(x + t\alpha')\, dt.$$

Si $\gamma'_0 > 0$, $x \neq y$, on a, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$| \mathrm{D}^{r+1} h(x + t\alpha') - \mathrm{D}^{r+1} h(y + t\alpha') | \leqq | x - y |^{\gamma'_0} \, \| \mathrm{D} h \|_{r+\gamma'_0},$$

donc

$$| \mathrm{D}^r h \circ \mathrm{R}_{n\alpha} - \mathrm{D}^r h |_{\gamma'_0} \leqq \| h \circ \mathrm{R}_{n\alpha} - h - n\alpha \|_{\gamma_0} \leqq \mathrm{C} \, \| n\alpha \|.$$

Comme $f^n - \mathrm{id} - n\alpha = (h \circ \mathrm{R}_{n\alpha} - h - n\alpha) \circ h^{-1}$, la proposition est maintenant une conséquence du lemme 11.

8.7. Comme précédemment, on désigne par (p_n/q_n) la suite des réduites de α, et on note $\alpha_n = (-1)^n (q_n \alpha - p_n) > 0$. Rappelons qu'on a alors $q_{s+1} \leqq \alpha_s^{-1} \leqq 2 q_{s+1}$ pour $s \geqq 0$. On a donc montré au paragraphe 7 que pour $t \in \mathbb{R}$, $s \geqq 0$:

$$\mathrm{C}^{-1} q_{s+1}^{-1} \leqq | f^{q_s}(t) - t - p_s | \leqq \mathrm{C} \, q_{s+1}^{-1}.$$

Posons $\Delta_s = \| D^{k-1} \operatorname{Log} D f^{q_s} \|_0 + \alpha_s$, pour $s \geqq 0$. Par le lemme 10 et le corollaire du lemme 12, on a :

$$\| f^{q_s} - \mathrm{id} - q_s \alpha \|_k = \| D f^{q_s} - 1 \|_{k-1} \leqq C \| \operatorname{Log} D f^{q_s} \|_{k-1} \leqq C \Delta_s.$$

Compte tenu de l'estimation précédente pour $| f^{q_s} - \mathrm{id} - p_s |$, on a montré dans le lemme 5 que $\Delta_s \leqq C q_s^{(k-1)/2}$ pour $s \geqq 0$.

Lemme 13. — *Pour* $\gamma \in [0, k-1]$, *soit* $\rho = \operatorname{Max}(0, (\gamma + 1 - \gamma_0)/k - \gamma_0)$; *alors, pour* $s \geqq 0$, *on a :*

$$\| \operatorname{Log} D f^{q_s} \|_\gamma \leqq C q_{s+1}^{-1} (q_{s+1} \Delta_s)^\rho.$$

Démonstration. — Pour $\gamma \leqq \gamma_0 - 1$, cela résulte de la proposition 4. Pour $\gamma > \gamma_0 - 1$, le corollaire du lemme 12, la proposition 4 et les inégalités de convexité donnent :

$$\begin{aligned} \| \operatorname{Log} D f^{q_s} \|_\gamma &\leqq C \| D f^{q_s} - 1 \|_\gamma \\ &\leqq C \| f^{q_s} - \mathrm{id} - q_s \alpha \|_{\gamma_0}^{1-\rho} \| f^{q_s} - \mathrm{id} - q_s \alpha \|_k^\rho \\ &\leqq C \alpha_s (\Delta_s \alpha_s^{-1})^\rho \leqq C q_{s+1}^{-1} (q_{s+1} \Delta_s)^\rho. \quad \square \end{aligned}$$

8.8. La condition diophantienne sur α implique $q_{s+1} \leqq C q_s^{1+\beta}$; on a alors $\Delta_s q_{s+1} q_s^{-k} \leqq C q_s^{(k-1)/2 + 1 + \beta - k}$, et :

$$(\Delta_s q_{s+1})^{1/k} q_s^{-1} \leqq C q_s^{-\varepsilon}, \qquad \text{avec} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1 + 2\beta}{2k} > 0.$$

On fait momentanément l'hypothèse qu'il existe $\varepsilon(\gamma_0) > 0$ tel que :

(6) $$(\Delta_s q_{s+1})^{1/(k-\gamma_0)} q_s^{-1} \leqq C q_s^{-\varepsilon(\gamma_0)}.$$

On vient de voir que (6) est vérifiée si $\gamma_0 = 0$. On va démontrer que ceci implique l'estimation $\Delta_s \leqq C q_s$ (proposition 5). On aura alors, si $\gamma_0 < k - 2 - \beta$:

$$(\Delta_s q_{s+1})^{1/(k-\gamma_0)} q_s^{-1} \leqq C q_s^{-\varepsilon(\gamma_0)}, \qquad \text{avec} \quad \varepsilon(\gamma_0) = \frac{k - 2 - \beta - \gamma_0}{k - \gamma_0},$$

donc l'hypothèse (6) sera vérifiée pour $\gamma_0 < k - 2 - \beta$.

LEMME 14. — *Soit* $\gamma \in [0, k-1]$, $\rho = \operatorname{Max}(0, (\gamma + 1 - \gamma_0)/(k - \gamma_0))$; *pour* $s \geqq 0$, $0 \leqq n \leqq q_{s+1}/q_s$, *on a :*

$$\| \operatorname{Log} D f^{n q_s} \|_\gamma \leqq C q_s^{-1} (\Delta_s q_{s+1})^\rho.$$

Démonstration. — Soit $\gamma = r + \gamma'$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqq \gamma' < 1$; par le lemme 10, on a $\| \operatorname{Log} D f^{n q_s} \|_\gamma = \| D^r \operatorname{Log} D f^{n q_s} \|_{\gamma'}$.

On pose $g=f^{q_s}$; on démontre alors par récurrence sur r que :

$$(7)\qquad \| D^r \operatorname{Log} D g^n \|_{\gamma'} \leqq C\, q_s^{-1} (\Delta_s\, q_{s+1})^{\rho}, \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq n \leqq \frac{q_{s+1}}{q_s}.$$

Il résulte de la proposition 4 que (7) est vérifiée pour $\gamma \leqq \gamma_0-1$. Ceci résout le cas $r=0$ si $\gamma_0-1 \geqq 1$.

Si $\gamma_0-1<1$, $\gamma_0-1 \leqq \gamma < 1$, on a par la relation (3) :

$$\| \operatorname{Log} D g^n \|_{\gamma'} = \| \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{Log} D g \circ g^i \|_{\gamma} \leqq n \| \operatorname{Log} D g \|_{\gamma} \leqq \frac{q_{s+1}}{q_s} \| \operatorname{Log} D g \|_{\gamma},$$

et la relation (7) résulte du lemme 13.

Supposons maintenant que $r \geqq 1$ et que (7) est vérifiée pour $\gamma < r$. Pour estimer $\| D^r \operatorname{Log} D g^n \|_{\gamma'}$, on utilise la formule (H) du paragraphe 2 et la relation (2); cela donne :

$$(8)\qquad \| D^r \operatorname{Log} D g^n \|_{\gamma'} \leqq C \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{i=0}^{n-1} (A_{i,l}+B_{i,l}+C_{i,l}),$$

avec

$$A_{i,l} = \| D^{r-l} \operatorname{Log} D g \circ g^i \|_{\gamma'} \| (D g^i)^{r-l} \|_0 \| E_l^r \|_0,$$
$$B_{i,l} = \| D^{r-l} \operatorname{Log} D g \circ g^i \|_0 \,| (D g^i)^{r-l} |_{\gamma'} \| E_l^r \|_0,$$
$$C_{i,l} = \| D^{r-l} \operatorname{Log} D g \circ g^i \|_0 \| (D g^i)^{r-l} \|_0 \| E_l^r \|_{\gamma'},$$
$$E_l^r = E_l^r (D \operatorname{Log} D g^i, \ldots, D^l \operatorname{Log} D g^i).$$

On a $\| D g^i \|_0 \leqq C$, et on voit facilement que $|(D g^i)^{r-l}|_{\gamma'} \leqq C \| \operatorname{Log} D g^i \|_{\gamma'}$. En utilisant la relation (3), le lemme 12 (pour estimer E_l^r) et les inégalités de convexité, on obtient :

$$A_{i,l} \leqq C \| \operatorname{Log} D g \|_{r-l+\gamma'} \| \operatorname{Log} D g^i \|_l;$$

$$B_{i,l} \leqq C \| \operatorname{Log} D g \|_{r-l} \| \operatorname{Log} D g^i \|_{\gamma'} \| \operatorname{Log} D g^i \|_l \leqq C \| \operatorname{Log} D g \|_{r-l} \| \operatorname{Log} D g^i \|_{l+\gamma'};$$

$$C_{i,l} \leqq C \| \operatorname{Log} D g \|_{r-l} \| \operatorname{Log} D g^i \|_{l+\gamma'}.$$

En estimant ces produits par le lemme 13 et l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$A_{i,l} \leqq C\, q_s^{-1}\, q_{s+1}^{-1} (\Delta_s\, q_{s+1})^{\rho_1};$$
$$B_{i,l}+C_{i,l} \leqq C\, q_s^{-1}\, q_{s+1}^{-1} (\Delta_s\, q_{s+1})^{\rho_2},$$

ou on a posé :

$$\rho_1 = \operatorname{Max}\left(0, \frac{r-l+\gamma'+1-\gamma_0}{k-\gamma_0}\right) + \operatorname{Max}\left(0, \frac{l+1-\gamma_0}{k-\gamma_0}\right),$$

$$\rho_2 = \operatorname{Max}\left(0, \frac{r-l+1-\gamma_0}{k-\gamma_0}\right) + \operatorname{Max}\left(0, \frac{l+\gamma'+1-\gamma_0}{k-\gamma_0}\right).$$

Comme $0 \leqq l \leqq r-1$, et $\gamma_0 \geqq 0$, on a :

$$\rho_1 \leqq \operatorname{Max}\left(0, \frac{r+\gamma'+1-\gamma_0}{k-\gamma_0}, \frac{r-\gamma_0}{k-\gamma_0}, \frac{r+\gamma'+2-2\gamma_0}{k-\gamma_0}\right);$$

$$\rho_2 \leqq \operatorname{Max}\left(0, \frac{r+1-\gamma_0}{k-\gamma_0}, \frac{r+\gamma'-\gamma_0}{k-\gamma_0}, \frac{r+\gamma'+2-2\gamma_0}{k-\gamma_0}\right);$$

$$\operatorname{Max}(\rho_1, \rho_2) \leqq \rho+1/(k-\gamma_0).$$

Par définition de Δ_s, on a $\Delta_s \geqq \alpha_s$, $(\Delta_s q_{s+1}) \geqq C^{-1}$; la relation (6) et les estimations précédentes donnent alors :

$$A_{i,l}+B_{i,l}+C_{i,l} < C\, q_{s+1}^{-1}\, q_s^{-1}\,(\Delta_s q_{s+1})^{\rho+1/(k-\gamma_0)} \leqq C\, q_{s+1}^{-1}\,(\Delta_s q_{s+1})^{\rho}.$$

Comme la somme (8) contient $rn \leqq C q_{s+1}/q_s$ termes, ceci termine la démonstration du lemme.

8.9. On sait que l'hypothèse (6) faite en 8.6 est valable pour $\gamma_0=0$ si f vérifie les hypothèses indiquées en 8.1. On va en déduire l'estimation $\Delta_s \leqq C q_s$.

PROPOSITION 5. — *La suite* (Δ_s/q_s), $s \geqq 0$, *est bornée.*

Démonstration. — Introduisons la quantité :

$$\Delta'_s = \operatorname{Sup}\{\,|\,D^{k-1}\operatorname{Log} D f^{q_t}\circ f^m\,(D f^m)^{k-1}|_0,\ 0 \leqq t \leqq s,\ m \geqq 0\}.$$

Si f est une rotation, la proposition est évidente. Autrement, on a :

$$\Delta'_s \geqq \Delta'_{s-1} \geqq \Delta'_1 > 0,\ \Delta_s \leqq \Delta'_s+\alpha_s,$$

donc $\Delta_s \leqq C\Delta'_s$. Il suffit de prouver que $(\Delta'_s/q_s)_{s \geqq 0}$ est une suite bornée.

On fixe $s \geqq 1$. On note pour simplifier :

$$\tilde{q}=q_{s-1},\quad \tilde{\delta}=\Delta_{s-1},\quad \tilde{\delta}'=\Delta'_{s-1},\quad q=q_s,\quad \delta=\Delta_s,\quad \delta'=\Delta'_s,$$

$$Q=q_{s+1},\quad \Delta=\Delta_{s+1},\quad \Delta'=\Delta'_{s+1}.$$

Comme $\tilde{q}$, q, Q sont issus du développement en fraction continue de α, on a une relation du type :

$$Q=aq+\tilde{q},\qquad a \geqq 1.$$

Considérons les expressions :

$$X=(D^{k-1}\operatorname{Log} D f^{\tilde{q}}\circ f^{aq})\,(D f^{aq})^{k-1},$$

$$Y=D^{k-1}\operatorname{Log} D f^{aq},$$

$$Z=\sum_{l=1}^{k-2}(D^{k-1-l}\operatorname{Log} D f^{\tilde{q}}\circ f^{aq})\,(D f^{aq})^{k-1-l}\,G_l^{k-1}(D\operatorname{Log} D f^{aq},\ \ldots,\ D^l\operatorname{Log} D f^{aq});$$

et pour $m \geqq 0$:

$$X' = X \circ f^m (D f^m)^{k-1},$$
$$Y' = Y \circ f^m (D f^m)^{k-1},$$
$$Z' = Z \circ f^m (D f^m)^{k-1}.$$

La formule (G), avec $g = f^{\tilde{q}}$, $h = f^{aq}$, montre qu'on a :

$$D^{k-1} \operatorname{Log} D f^Q = X + Y + Z,$$
$$(D^{k-1} \operatorname{Log} D f^Q \circ f^m)(D f^m)^{k-1} = X' + Y' + Z'.$$

On va estimer $|X'|_0$, $|Y'|_0$, $|Z'|_0$. Tout d'abord :

$$|X'|_0 = |(D^{k-1} \operatorname{Log} D f^{\tilde{q}} \circ f^{aq+m})(D f^{aq+m})^{k-1}|_0 \leqq \tilde{\delta}'.$$

Pour estimer $|Y'|_0$, on déduit de la formule (H) que :

$$Y' = \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{n=0}^{a-1} (D^{k-1-l} \operatorname{Log} D f^q \circ f^{nq+m})(D f^{nq+m})^{k-1-l}\, \tilde{E}_l^{k-1} = \sum_{l=0}^{k-2} Y'_l$$

avec $\tilde{E}_0^{k-1} = 1$, $E_l^{k-1}(D \operatorname{Log} D f^{nq}, \ldots, D^l \operatorname{Log} D f^{nq}) \circ f^m (D f^m)^l = \tilde{E}_l^{k-1}$ pour $l > 0$.
On a alors : $|Y'_0|_0 \leqq a\,\delta'$.

Par les lemmes 10 et 12 et l'inégalité (3), pour $l > 0$, on a :

$$|\tilde{E}_l^{k-1}|_0 \leqq C\,|D^l \operatorname{Log} D f^{nq}|_0 \leqq C \frac{(\delta Q)^{(l+1)/k}}{q} \leqq C(\delta Q)^{l/k} q^{-\varepsilon},$$

par la relation (6); ceci donne, pour $1 \leqq l \leqq k-2$:

$$|Y'_l|_0 \leqq C\,a\,.\,\frac{(\delta Q)^{(k-l)/k}}{Q}(\delta Q)^{l/k} q^{-\varepsilon} \leqq C\,a\,\delta q^{-\varepsilon}.$$

On a donc obtenu l'estimation :

$$|Y'|_0 \leqq a\,\delta'(1 + C q^{-\varepsilon}).$$

Pour l'estimation de $|Z'|_0$, on a, pour $1 \leqq l \leqq k-2$:

$$|[G_l^{k-1}(D \operatorname{Log} D f^{aq}, \ldots, D^l \operatorname{Log} D f^{aq}) \circ f^m](D f^m)^l|_0 \leqq C\,|D^l \operatorname{Log} D f^{aq}|_0$$
$$\leqq \frac{C}{q}(\delta Q)^{(l+1)/k} \leqq C(\delta Q)^{l/k} q^{-\varepsilon},$$

par le lemme 12 et les inégalités (3) et (6);

$$|(D^{k-1-l} \operatorname{Log} D f^{\tilde{q}} \circ f^{aq+m})(D f^{aq+m})^{k-1-l}|_0 \leqq \frac{C}{q}(\tilde{\delta} q)^{(k-l)/k} \leqq \frac{C}{q}(\delta' Q)^{(k-l)/k}.$$

On obtient donc :

$$|Z'|_0 \leqq C\frac{Q}{q}\delta' q^{-\varepsilon} \leqq C a \delta' q^{-\varepsilon}.$$

En rassemblant les estimations de X′, Y′, Z′ on obtient :

$$|(D^{k-1}\operatorname{Log} D f^Q \circ f^m)(D f^m)^{k-1}|_0 \leqq \tilde{\delta}' + a\,\delta'(1+C q^{-\varepsilon})$$

$$\leqq \operatorname{Max}\left(\frac{\tilde{\delta}'}{\tilde{q}'}, \frac{\delta'}{q}\right)[(\tilde{q}+aq)+aq\,C\,q^{-\varepsilon}] \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{\tilde{\delta}'}{\tilde{q}'}, \frac{\delta'}{q}\right)Q(1+C q^{-\varepsilon}).$$

Notons $\theta_s = \operatorname{Max}\{\Delta_t'/q_t,\ 0 \leqq t \leqq s\}$. On vient de prouver que :

$$\theta_{s+1} \leqq \theta_s(1+C q_s^{-\varepsilon}) \qquad \text{pour} \quad s \geqq 1.$$

Ceci implique que la suite θ_s est bornée et achève la démonstration de la proposition. □

8.10. Comme on l'a vu au paragraphe 8.8, il résulte de la proposition 5 que la relation (6) est conséquence de l'hypothèse que h est de classe $C^{1+\gamma_0}$.

Soit $0 \leqq \gamma \leqq k-1$, $\gamma \geqq \gamma_0 - 1$, $0 \leqq n \leqq (q_{s+1})/q_s$. En introduisant l'estimation $\Delta_s \leqq C q_s$ dans le lemme 14, et en utilisant la condition diophantienne $q_{s+1} \leqq C q_s^{1+\beta}$ sur α, on obtient :

$$\|\operatorname{Log} D f^{nq_s}\|_\gamma \leqq C q_s^{-1}(q_s^{2+\beta})^{(\gamma+1-\gamma_0)/(k-\gamma_0)} = C q_s^{\rho(\gamma,\gamma_0)}, \tag{9}$$

avec

$$\rho(\gamma, \gamma_0) = \frac{(2+\beta)(\gamma+1-\gamma_0)}{k-\gamma_0} - 1$$

Pour γ_0 fixé, ρ est une fonction croissante de γ qui s'annule pour $\gamma = g(\gamma_0) = ((1+\beta)\gamma_0 + k - (2+\beta))/(2+\beta)$.

La fonction g possède les propriétés signalées dans l'introduction du paragraphe 8 : $g(k-2-\beta) = k-2-\beta$, et $g(x) > x$ pour $0 \leqq x < k-2-\beta$. Soit γ_1 un réel tel que $\gamma_0 < \gamma_1 < g(\gamma_0)$. On va monter que h est de classe $C^{1+\gamma_1}$, et pour prouver ceci, que la suite $\|\operatorname{Log} D f^n\|_{\gamma_1}$ est bornée pour $n \geqq 0$. La relation (9) et le choix de γ_1 donnent, pour $s \geqq 0$, $0 \leqq n \leqq (q_{s+1})/q_s$, et un certain $\varepsilon > 0$:

$$\|\operatorname{Log} D f^{nq_s}\|_{\gamma_1} \leqq C q_s^{-\varepsilon}. \tag{10}$$

Soit N un entier naturel. Suivant une technique déjà employée par Denjoy et Herman, on écrit N sous la forme :

$$N = \sum_{s=0}^{s} b_s q_s, \qquad 0 \leqq b_s \leqq \frac{q_{s+1}}{q_s}, \qquad b_s \in \mathbb{N},$$

et on pose :

$$\mathrm{N}_s = \sum_{t=0}^{s} b_t\, q_t \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq s \leqq \mathrm{S}.$$

Écrivons $\gamma_1 = r + \gamma_1'$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leqq \gamma_1' < 1$. La formule (G), pour $g = f^{b_s q_s}$ et $h = f^{\mathrm{N}_{s-1}}$, s'écrit $\mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_s} = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$, avec :

$$\mathrm{X} = (\mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{b_s q_s} \circ f^{\mathrm{N}_{s-1}})\,(\mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}})^r,$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}},$$

$$\mathrm{Z} = \sum_{l=1}^{r-1} (\mathrm{D}^{r-l} \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{b_s q_s} \circ f^{\mathrm{N}_{s-1}})\,(\mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}})^{r-l}\, \mathrm{G}_l^r,$$

$$\mathrm{G}_l^r = \mathrm{G}_l^r(\mathrm{D} \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}}, \ldots, \mathrm{D}^l \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}}).$$

On estime $\| \mathrm{X} \|_{\gamma_1'}$ grâce aux relations (2), (3) et (10) :

$$\begin{aligned} \| \mathrm{X} \|_{\gamma_1'} &\leqq \mathrm{C}\,(\| \mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{b_s q_s} \|_{\gamma_1'}\, \| (\mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}})^r \|_0 + | (\mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}})^r |_{\gamma_1'}\, \| \mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{b_s q_s} \|_0) \\ &\leqq \mathrm{C}\, q_s^{-\varepsilon}\,(1 + \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{\gamma_1'}). \end{aligned}$$

Le même calcul donne aussi, pour $1 \leqq l \leqq r-1$:

$$\| \mathrm{D}^{r-l} \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{b_s q_s} \circ f^{\mathrm{N}_{s-1}} (\mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}})^{r-l} \|_{\gamma_1'} \leqq \mathrm{C}\, q_s^{-\varepsilon}\,(1 + \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{\gamma_1'});$$

$$\| \mathrm{D}^{r-l} \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{b_s q_s} \circ f^{\mathrm{N}_{s-1}} (\mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}})^{r-l} \|_0 \leqq \mathrm{C}\, q_s^{-\varepsilon}.$$

Pour estimer G_l^r, on utilise le lemme 12 :

$$\| \mathrm{G}_l^r \|_0 \leqq \mathrm{C}\, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_l \leqq \mathrm{C}\, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_r;$$

$$\| \mathrm{G}_l^r \|_{\gamma_1'} \leqq \mathrm{C}\, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{l+\gamma_1'} \leqq \mathrm{C}\, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{\gamma_1}.$$

Donc on obtient, en utilisant les inégalités de convexité et la relation (2) :

$$\begin{aligned} \| \mathrm{Z} \|_{\gamma_1'} &\leqq \mathrm{C}\, q_s^{-\varepsilon}\,(\| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{\gamma_1} + \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{\gamma_1'}\, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_r) \\ &\leqq \mathrm{C}\, q_s^{-\varepsilon}\, \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{\gamma_1}. \end{aligned}$$

Ceci donne donc :

$$\| \mathrm{D}^r \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_s} \|_{\gamma_1'} = \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_s} \|_{\gamma_1} \leqq \| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}_{s-1}} \|_{\gamma_1}\,(1 + \mathrm{C}\, q_s^{-\varepsilon}).$$

Comme le produit $\prod_{n=n_0}^{+\infty} (1 + \mathrm{C}\, q_s^{-\varepsilon})$ est convergent pour n_0 assez grand, cette dernière inégalité implique :

$$\| \operatorname{Log} \mathrm{D} f^{\mathrm{N}} \|_{\gamma_1} \leqq \mathrm{C}.$$

Ceci implique que h est de classe $C^{1+\gamma_1}$; comme on l'a expliqué dans l'introduction du paragraphe 8, en itérant le raisonnement qui nous a permis de passer de γ_0 à γ_1, on peut obtenir $\gamma=k-2-\beta-\varepsilon$, pour tout $\varepsilon>0$. Cela signifie que le difféomorphisme h qui conjugue f à la rotation R_α est de classe $C^{k-1-\beta-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon>0$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] V. I. Arnold, *Small Denominators I; on the Mapping of a Circle into itself* (*Investijia Akad. Nauk, série Math*, 25, 1, 1961, *p.* 21-96. *Transl. A.M.S.*, *2nd series*, 46, p. 213-284).

[D] A. Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore* (*J. de Math. Pures et Appl.*, (9), 11, 1932, p. 333-375).

[H_1] M. R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations* (*Publ. I.H.E.S.*, n° 49, 1979, p. 5-233).

[H_2] M. R. Herman, *Résultats récents sur la conjugaison différentiable* (*Proc. of the Int. Cong. of Math.*, Helsinki 1978, vol. 2, p. 811-820).

[Ho] L. Hormander, *The Boundary Problems of Physical Geodesy* (*Arch. for rat. mec. and an.*, vol. 62, 1976, p. 1-52).

[H-S] J. Hawkins et K. Schmidt, *On C^2-diffeomorphisms of the Circle which are of Type III_1* (*Invent. Math.*, (3), 66, 1982, p. 511-518).

[L] S. Lang, *Introduction to Diophantine Approximation*, New York, Addison-Wesley, 1966.

[M] J. K. Moser, *A rapidly Convergent Iteration Method*, part II (*Ann. scient. Norm. Sup. di Pisa*, série III, 20, 1966, p. 499-535).

[S] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Springer L. N., n° 785, 1980.

[Y] J. C. Yoccoz, *C^1-conjugaison des difféomorphismes du cercle* (à paraître dans les *Actes du symposium de systèmes dynamiques*, Rio de Janeiro, 1981).

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1983).

J. C. Yoccoz
École Polytechnique,
Centre de Mathématique,
Plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex.