D. BARLET

Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 2 (1984), p. 293-315

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_2_293_0>

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 293 à 315.

CONTRIBUTION EFFECTIVE DE LA MONODROMIE AUX DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

PAR D. BARLET

Introduction

Soit X un polydisque de centre 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$, et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante sur X vérifiant $f(0)=0$. Pour $h \in C_c^\infty(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z)>0$ posons :

$$\langle T_z, h \rangle = \int_X |f(x)|^{2z} h(x)\, dm(x),$$

où dm désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^{n+1}$. Ceci définit une distribution T_z sur X qui dépend analytiquement de z (au sens que pour h fixée, $\langle T_z, h \rangle$ est une fonction holomorphe de z) et qui admet un prolongement méromorphe au plan complexe tout entier; ceci est une conséquence facile de l'existence du polynôme de Bernstein-Sato de f (voir [1]). Les pôles de ce prolongement méromorphe apparaissant en des translatés par des entiers négatifs des zéros de ce polynôme.

Nous nous proposons de montrer ici que si la monodromie de f en zéro admet un bloc de Jordan de taille (k, k) pour la valeur propre $e^{-i\pi r}$ (où $r \in \mathbb{C}$ vérifie $0 \leqq \mathrm{Re}(r) < 2$) alors T_z admet un pôle d'ordre au moins k en un point de la forme $-r/2-\nu$ où $\nu \in \mathbb{N}$.

Ceci permet de voir, grâce aux résultats de B. Malgrange sur le lien entre la monodromie de f et le polynôme de Bernstein-Sato de f, que toute racine de ce dernier produit effectivement une série de pôles dans le prolongement méromorphe de T_z. Ceci donne également une nouvelle démonstration du fait que les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité en utilisant le théorème d'existence des développements asymptotiques de [1] pour les intégrales du type :

$$\int_{f=s} \varphi,$$

où $\varphi \in C_c^\infty(X)$ est une forme de type (n, n) sur X, et une transformation de Mellin.

0. Soit $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe, non nul et notons par

$f: X \to D$ un représentant de Milnor de ce germe, c'est-à-dire que D est un disque de centre 0 assez petit et que X est la trace sur $f^{-1}(D)$ d'une boule de centre 0 assez petite dans $\mathbb{C}^{n+1}$, pour que f induise une fibration C^∞ localement triviale de $X - f^{-1}(0)$ sur $D^* = D - \{0\}$. Nous nous proposons dans cette situation de prouver le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit $r \in \mathbb{C}$ et supposons que $e^{-i\pi r}$ soit valeur propre pour la monodromie de $H^*(X(s)\mathbb{C})$* [1] *avec un bloc de Jordan de taille $k \geqq 1$. Alors pour tout voisinage Δ de 0 dans X, il existe une forme φ C^∞ de type (n, n) sur X et à support compact contenu dans Δ telle que la fonction $F_\varphi : D \to \mathbb{C}$ définie par*

$$F_\varphi(s) = \int_{f=s} \varphi,$$

ait un terme non nul de la forme $s^m \bar{s}^{m'} |s|^r (\mathrm{Log}|s|)^j$ dans son développement asymptotique en $s = 0$, avec m et m' entiers et $j \geqq k - 1$.

On remarquera qu'une formulation équivalente consiste à dire que le prolongement méromorphe au plan complexe de la fonction holomorphe définie pour $\mathrm{Re}(z) > 0$ par

$$G_\psi(z) = \int_X |f|^{2z} \psi,$$

a un pôle d'ordre $\geqq k$ en un point de la forme $-r/2 - \nu$ avec $\nu \in \mathbb{N}$, pour une forme ψ C^∞ de type $(n+1, n+1)$ sur X et à support compact dans Δ (prendre $\psi = f^{m'} \bar{f}^m \varphi \, df \wedge d\bar{f}$) [2].

La démonstration de ce théorème occupera tout le reste de cet article.

Elle sera organisée de la manière suivante :

Au paragraphe 1 nous fixerons les notations pour l'étude du prolongement méromorphe de $|f|^{2z}$ et de la connexion de Gauss-Manin. Nous terminerons par le lemme A qui permet de traduire en terme de p-formes holomorphes sur X l'hypothèse que la monodromie agissant sur $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ admet un bloc de Jordan de taille (k, k) pour la valeur propre $e^{-i\pi r}$.

Au paragraphe 2 nous donnerons les ingrédients essentiels de la preuve du théorème : les lemmes B_1, C_1 et C_2, ainsi que les lemmes D et E. Ceci nous permettra de donner la démonstration du théorème pour $k = 1$.

---

(1) Ici $X(s) = f^{-1}(s)$ et $s \in D - \{0\}$.

(2) Pour la réciproque, considérer $l \in \mathbb{N}$ tel que $f^l \Omega^{n+1} \subset \Omega_X^n \wedge df$ et si $\psi \in C_c^\infty(X)^{n+1, n+1}$ produit un pôle d'ordre $\geqq k$ en $-r/2 - \nu$, poser :

$$\psi = \varphi \frac{df \wedge d\bar{f}}{f^l \bar{f}^l} \qquad \text{avec} \quad \varphi \in C_c^\infty(X)^{n, n}.$$

Alors $\int_{f=s} \varphi$ admettra dans son développement asymptotique en $s = 0$ un terme non nul de la forme $s^{\nu+l-1} \bar{s}^{\nu+l-1} |s|^r (\mathrm{Log}|s|)^j$ pour un $j \geqq k - 1$.

Au paragraphe 3 nous prouverons le lemme B_2 qui, avec la variante vectorielle des lemmes C_1 et C_2 permettra de prouver le théorème dans le cas général avec une démarche analogue au cas $k=1$.

Nous terminerons par quelques remarques.

1. *a.* Commençons par rappeler que l'existence du polynôme de Bernstein-Sato de f permet de montrer (*voir* [1] § 2 prop. 5) que pour toute forme θ dans $C_c^\infty(X)$ de type $(n+1, n+1)$, la fonction holomorphe pour $\operatorname{Re}(z)>0$, définie par :

$$G_\theta(z)=\int_X |f|^{2z}\theta$$

admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, avec des pôles éventuels en les translatés par des entiers négatifs ou nuls des racines du polynôme de Bernstein-Sato de f et de leurs conjugués (si on ne sait pas que ces racines sont réelles [K]).

LEMME 1. — *Considérons une forme différentielle* ω C^∞ *de type* $(p, 0)$ *sur* X. *Soit* $a\in\mathbb{Z}$ *et* $u\in\mathbb{C}$; *pour* F *méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *notons par* $P_a(z=u, F(z))$ *le coefficient de* $(z-u)^{-a}$ *dans le développement de Laurent de* F *au point* $z=u$. *Alors la forme linéaire sur les formes* C^∞ *à support compact et de type* $(n-p+1, n+1)$ *sur* X *qui est définie par :*

$$\langle T, \psi\rangle = P_a\left(z=u, \int_X |f|^{2z}\omega\wedge\psi\right)$$

est un courant de type $(p, 0)$ *sur* X. *Pour* $a>0$ *on aura* $Supp(T)\subset\{f=0\}$, *et pour* $a=0$ *la restriction de* T *à* $X-f^{-1}(0)$ *coïncide avec la forme* $|f|^{2u}.\omega$ *qui est* C^∞ *sur cet ouvert.*

Démonstration. — Soit b le polynôme de Bernstein-Sato de f et posons $B(z)=b(z).\overline{b(\bar z)}$. En reprenant la démonstration du prolongement méromorphe de G_θ donnée dans [1] § 2 prop. 5, on obtient pour chaque entier $M\in\mathbb{N}$ un opérateur différentiel Q_M, dépendant polynomialement de z tel que l'on ait, pour $\operatorname{Re}(z)>0$:

$$\int_X |f|^{2z}.\theta=\frac{1}{B(z)B(z+1)\dots B(z+M-1)}\int_X |f|^{2(z+M)}.Q_M(\theta)(z).$$

Soit K un compact de l'ouvert $\operatorname{Re}(z+M)>0$ sur lequel le polynôme $B_M(z)=B(z)B(z+1)\dots B(z+M-1)$ ne s'annule pas. On aura alors, si $\|\ \|_K$ désigne la norme « sup » sur K :

$$\|G_\theta\|_K\leqq C.[\operatorname*{Inf}_K|B_M|]^{-1}.\|\operatorname*{Sup}_{z\in K}|Q_M(\theta)(z)|\|_{L^1(K)}$$

où la constante C ne dépend que de K.

Ceci montre que dans ces conditions, l'application linéaire qui à θ dans $C_c^\infty(X)^{(n+1, n+1)}$ associe $G_\theta|K$ est continue de l'espace $C_c^\infty(X)^{(n+1, n+1)}$ muni de sa topologie standard à valeurs dans l'espace de Banach $C^0(K, \mathbb{C})$. Si $u\in\mathbb{C}$ on peut choisir $M\in\mathbb{N}$

assez grand pour avoir $\operatorname{Re}(u+M)>0$. Prenons alors pour K un cercle de centre u et de rayon $\varepsilon>0$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $K \subset \{\operatorname{Re}(z+M)>0\}$;

(ii) le polynôme $B_M(z)$ ne s'annule pas dans $\overline{D(u, \varepsilon)}-\{u\}$ où $D(u, \varepsilon)$ désigne le disque de centre u et de rayon ε. Alors on a pour chaque $a \in \mathbb{Z}$:

$$P_a(z=u, G_\theta(z)) = \frac{1}{2i\pi}\int_K G_\theta(t).(t-u)^{a-1}\,dt$$

d'après la formule de Cauchy, ce qui prouve que T est bien un courant de type $(p, 0)$ sur X, puisque $h \to \int_K h(t).(t-u)^{a-1}\,dt$ est une forme linéaire continue sur $C^0(K, \mathbb{C})$, et que $\psi \to \omega \wedge \psi$ est linéaire continue de $C_c^\infty(X)^{(n-p+1,\, n+1)}$ dans $C_c^\infty(X)^{(n+1,\, n+1)}$ pour leurs topologies standards.

Les assertions $\operatorname{Supp}(T) \subset \{f=0\}$ pour $a>0$ et $T/X-f^{-1}(0)=|f|^{2u}.\omega$ découlent immédiatement du fait que pour θ dans $C_c^\infty(X)$ de type $(n+1, n+1)$ et vérifiant $\operatorname{Supp}(\theta) \cap \{f=0\} = \varnothing$ la fonction G_θ est entière. Ceci achève la démonstration du lemme 1.

Remarque. — Pour $j \in \mathbb{N}$ donné, le lemme 1 montre aussi que les formules :

$$\langle T_j, \psi\rangle = P_a\left(z=u, \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\omega \wedge \psi\right)$$

définissent également des courants de type $(p, 0)$ sur X. En effet, on a :

$$\langle T_j, \psi\rangle = P_a\left(z=u, \int_X |f|^{2z-2j} f^j \omega \wedge \psi\right) = P_a\left(z=u-j, \int_X |f|^{2z}(f^j\omega) \wedge \psi\right)$$

qui relève du cas traité dans le lemme 1.

b. Dans la situation de Milnor $f: X \to D$, pour $p \in [0, n]$ nous noterons par $\mathbf{GM}^p$ le faisceau :

$$\mathbf{H}^p(f_*(\Omega^\bullet_{X/f}, d_{/f}))$$

où $(\Omega^\bullet_{X/f}, d_{/f})$ désigne le complexe de De Rham relatif de f; rappelons que par définition on a :

$$\Omega^i_{X/f} = \Omega^i_X / \Omega^{i-1}_X \wedge df$$

et que la différentielle relative $d_{/f}$ est induite par la différentielle ordinaire. Les faisceaux $\mathbf{GM}^p$ sont cohérents sur D et munis d'une connexion méromorphe en 0, appelée connexion de Gauss-Manin, qui est à singularité régulière (*voir* par exemple [D] ou [M. 1]), et que l'on peut décrire de la manière suivante : si $w \in f_*\Omega^p_{X/f}$ vérifie $d_{/f}w=0$, alors on a $dw = v \wedge df$ où $v \in f_*\Omega^{p-1}_X$. En général on n'a pas $d_{/f}v=0$, mais la relation $dv \wedge df=0$ implique l'existence de $l \in \mathbb{N}$ avec $d_{/f}(f^l v)=0$. La connexion (méromorphe) de Gauss-Manin est alors définie par :

$$\nabla(w) = (f^l v) \otimes \frac{1}{s^l} \in \mathbf{GM}^p \underset{\mathcal{O}_D}{\otimes} \mathcal{O}_d\left[\frac{1}{s}\right].$$

Sur $D-\{0\}$ le faisceau cohérent $\mathbf{GM}^p$ est associé au fibré vectoriel $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ où $X(s)=f^{-1}(s)$: en effet le complexe de De Rham holomorphe est une résolution acyclique du faisceau $\underline{\mathbb{C}}$ sur une variété de Stein, et permet donc de calculer la cohomologie à coefficients complexes. Or la fibre en s du complexe de De Rham relatif de f est précisément le complexe de De Rham holomorphe sur $X(s)$ qui est une variété de Stein pour $s \neq 0$.

Comme $f: X-f^{-1}(0) \to D-\{0\}$ est une fibration C^∞ localement triviale (*voir* [$\mathscr{M}$]) $s \to H_p(X(s), \mathbb{Z})$ est un système local sur D^*. Si $\tilde{H}_p(X(s), \mathbb{Z})$ désigne l'image de $H_p(X(s), \mathbb{Z})$ dans $H_p(X(s), \mathbb{C})$, la collection des $\tilde{H}_p(X(s), \mathbb{Z})$ définit une connexion holomorphe sur le fibré $s \to H_p(X(s), \mathbb{C})$, d'où une connexion duale sur la restriction de $\mathbf{GM}^p$ à $D-\{0\}$ (3). Cette connexion coïncide avec la connexion de Gauss-Manin définie plus haut. La régularité de ∇ sur $\mathbf{GM}^p$ nous permettra de passer du point de vue « topologique » au point de vue « holomorphe » en utilisant l'unicité méromorphe des extensions cohérentes d'un fibré muni d'une connexion ∇ pour lesquelles ∇ est à point singulier régulier [*voir* par exemple (D)]. De manière précise elle nous donnera que toute section holomorphe de $\mathbf{GM}^p$ uniforme sur D^* qui admet des composantes à croissance modérée en 0 dans la base horizontale multiforme, est la restriction à D^* d'une section méromorphe de $\mathbf{GM}^p$.

Fixons $s_0 \in D^*$, et soit $p \in [0, n]$ tel que la monodromie :

$$T: H^p(X(s_0), \mathbb{C}) \to H^p(X(s_0), \mathbb{C})$$

admette un bloc de Jordan (k, k) pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ où $u \in \mathbb{C}$ vérifie $0 \leqq \operatorname{Re}(u) < 1$. Notons par $e(s_0)$ un élément de $H^p(X(s_0), \mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}^k$ vérifiant

$$(T \otimes 1) . e(s_0) = e^{-2i\pi u} . e(s_0) + (1 \otimes N_0) . e(s_0)$$

où N_0 est un endomorphisme nilpotent principal (c'est-à-dire de polynôme minimal égal à x^k) de $\mathbb{C}^k$. On supposera de plus que le sous-espace vectoriel de $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ qui est engendré par les composantes de $e(s_0)$ est de dimension égale à k. Notons par e la section horizontale multiforme du fibré $s \to H^p(X(s), \mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}^k$ qui prend la valeur $e(s_0)$ en s_0 (pour donner un sens précis à cette assertion on doit se placer sur le revêtement universel de D^*). On aura alors pour tout $s \in D^*$ la relation :

$$(T \otimes 1) . e(s) = e^{-2i\pi u} . e(s) + (1 \otimes N_0) . e(s).$$

Considérons alors l'endormorphisme nilpotent N de $\mathbb{C}^k$ qui vérifie

$$e^{-2i\pi u} \operatorname{Id} + N_0 = \exp[-2i\pi(u . \operatorname{Id} + N)].$$

Alors N est également un nilpotent principal dans $\operatorname{End}(\mathbb{C}^k)$. Considérons alors la section

(3) Pour le « dictionnaire » entre systèmes locaux et connexion, *voir* (D).

multiforme sur D* suivante de $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$:

$$\varepsilon(s) = \exp[(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\mathrm{Log}\, s].e(s) \quad (^4)$$

elle est uniforme sur D* puisque la monodromie agissant sur $e(s)$ par $\exp[-2i\pi(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N})]$ on aura :

$$\mathrm{T}.\varepsilon(s) = \exp[(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).(\mathrm{Log}\, s+2i\pi)].\exp[-2i\pi(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N})].e(s) = \varepsilon(s).$$

Comme ε est à croissance modérée dans la base horizontale multiforme (ε_j est définie comme combinaison linéaire des e_i avec des coefficients du type $s^u.\mathrm{P}(\mathrm{Log}\, s)$ où P est un polynôme) il existe un entier $\tilde{m}$ tel que $s^{\tilde{m}}.\varepsilon(s)$ soit la restriction à D* d'une section holomorphe globale du faisceau $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$.

Il existe donc $w \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{\mathrm{X}}^p) \otimes \mathbb{C}^k$, vérifiant $d_{/f}w=0$, et dont la classe dans $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$ coïncide sur D* avec $s \to s^{\tilde{m}}.\varepsilon(s)$. Comme on a, par horizontalité de e

$$s.(\nabla\varepsilon)(s) = s.\frac{d}{ds}(\exp[(u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\mathrm{Log}\, s]).e(s) = (u.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\varepsilon(s)$$

si $l \in \mathbb{N}^*$ est tel que $s^l.\nabla$ envoie $\mathbf{GM}^p$ dans $\mathbf{GM}^p$, alors la section $s^l.(\nabla w)(s)-(\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).s^{l-1}w(s)$ sera de torsion dans $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$, où l'on a posé $\hat{u}=u+\tilde{m}$; et si s^q annule cet élément de torsion de $\mathbf{GM}^p$ on aura :

$$s^{l+q}.(\nabla w)(s)-(\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).s^{l+q-1}w(s)=0$$

dans $\mathbf{GM}^p \otimes \mathbb{C}^k$.

On peut alors trouver a et b dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{\mathrm{X}}^{p-1}) \otimes \mathbb{C}^k$ vérifiant

$$f^{l+q}.(\nabla w)-f^{l+q-1}.(\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).w = da+df \wedge b \quad \text{sur X,}$$

grâce à l'annulation des $\mathrm{R}^i f_* \Omega^{\bullet}_{\mathrm{X}/f}$ pour $i \geqq 1$ qui assure que les sections globales de $\mathbf{GM}^p$ sur D sont données par le quotient de

$$\{ w \in \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{\mathrm{X}/f}^p)/d_{/f}w=0 \} \quad \text{par} \quad d_{/f}[\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{\mathrm{X}/f}^{p-1})].$$

Par définition de ∇ sur $\mathbf{GM}^p$, on obtient alors :

$$f^{l+q}.dw = \frac{df}{f}(\hat{u}.\mathrm{Id}+\mathrm{N}).f^{l+q}w+df \wedge da \quad \text{sur X.}$$

En posant $\omega = f^{l+q}.w+df \wedge a$, $m=\tilde{m}+l+q$, on obtient :

$$d\omega = \frac{df}{f} \wedge ((m+u).\mathrm{Id}+\mathrm{N}).\omega \quad \text{sur X.}$$

Dans $\mathbb{C}^k$ effectuons un changement de base mettant N sous forme canonique (des 1

(4) Avec la convention qu'un endomorphisme M de $\mathbb{C}^k$ agit sur $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}(s), \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^k$ par $1 \otimes \mathrm{M}$.

au-dessus de la diagonale et des zéros ailleurs). Alors les composantes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ de ω dans cette nouvelle base vérifient

$$d\omega_j = (m+u)\frac{df}{f} \wedge \omega_j + \frac{df}{f} \wedge \omega_{j-1} \quad \text{sur X} \qquad \forall j \in [1, k]$$

avec la convention $\omega_0 = 0$; de plus on a $d_{/f}\,\omega_j = 0$ pour chaque $j \in [1, k]$ et ω_1 ne définit pas un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(\mathrm{D})$, puisque les $\omega_j(s_0)$ engendrent un sous espace de dimension k dans $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{C})$.

Rassemblons ce qui vient d'être obtenu :

LEMME A. — *Dans la situation de Milnor $f : \mathrm{X} \to \mathrm{D}$, si la monodromie* T *agissant sur* $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{C})$ *pour* $s_0 \in \mathrm{D}^*$ *et* $p \in [0, n]$, *admet un bloc de Jordan de taille* (k, k) *relatif à la valeur propre* $e^{-2i\pi u}$ (*où* $0 \leqq \mathrm{Re}(u) < 1$), *il existe des p-formes holomorphes* $\omega_1, \ldots, \omega_k$ *sur* X *et un entier m, tels que l'on ait :*

$$\text{(i)} \qquad d\omega_j = (m+u)\frac{df}{f} \wedge \omega_j + \frac{df}{f} \wedge \omega_{j-1} \quad \text{sur X} \qquad \textit{pour} \quad j \in [1, k]$$

avec la convention $\omega_0 = 0$;

(ii) $d_{/f}\,\omega_1 = 0$ *et l'image de* ω_1 *dans* $\mathbf{GM}^p(\mathrm{D})$ *n'est pas de torsion.*

2. Soit u un nombre complexe fixé vérifiant $0 \leqq \mathrm{Re}(u) < 1$. Toujours dans la situation de Milnor, supposons qu'il existe une p-forme holomorphe w sur X (avec $p \in [0, n]$) et un entier m tels que l'on ait :

$$\text{(i)} \qquad dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \quad \text{sur} \quad \mathrm{X}$$

(ii) $d_{/f}\,w = 0$ et w n'induit pas un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(\mathrm{D})$.

Supposons alors que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et toute forme différentielle $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ de type $(n-p+1, n+1)$ le prolongement méromorphe de la fonction (holomorphe pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$) :

$$z \to \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w \wedge \psi$$

n'a pas de pôle en $z = -m-u$ et $z = -m-u-1$.

LEMME B_1. — *Sous ces hypothèses, pour* $j \in \mathbb{Z}$ *et* $\psi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ *de type* $(n-p+1, n+1)$ *posons :*

$$\langle \mathrm{T}_j, \psi \rangle = \mathrm{P}f\left(z = -m-u, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w \wedge \psi\right)$$

où on a préféré la notation P f *à* P_0 *pour désigner le terme constant dans le développement* *de Laurent. Alors les courants sur* X *ainsi définis* (*voir le lemme* 1 *et la remarque qui le suit*) *vérifient :*

$$dT_j = -(j+m+u).\,d\bar{f} \wedge T_{j+1} \quad \textit{sur X} \quad \textit{pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

Preuve du lemme B_1. — Soit φ une forme $C_c^\infty(X)$ de degré total $2n+1-p$; par définition de la différentielle extérieure d'un courant on aura :

$$\langle dT_j, \varphi \rangle = (-1)^{p-1} \langle T_j, d\varphi \rangle = (-1)^{p-1}\, \mathrm{P}f\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi\right)$$

Pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ la forme différentielle $|f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge \varphi$ de classe C^1 à support compact dans X et sa différentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} d[|f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge \varphi] &= d[|f|^{2z}\bar{f}^{-j} w] \wedge \varphi + (-1)^p |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi \\ &= (z+m+u)|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge w \wedge \varphi + (z-j)|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \varphi \\ &\qquad + (-1)^p |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stokes, on obtient pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$:

$$\begin{aligned} (-1)^{p-1}\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge d\varphi &= (z+m+u)\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge w \wedge \varphi \\ &\quad + (z+m+u)\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \varphi - (j+m+u)\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \wedge w \wedge \varphi. \end{aligned}$$

Par prolongement analytique cette identité sera vraie pour les prolongements méromorphes à $\mathbb{C}$ des fonctions considérées. De plus l'absence (supposée) de pôle en $z=-m-u$ et $z=-m-u-1$ pour les prolongements méromorphes des intégrales de la forme

$$\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j} w \wedge \psi \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z} \quad \text{et tout } \psi \in C_c^\infty(X)$$

montrent que les parties finies en $z=-m-u$ des deux premiers termes du second membre de l'égalité ci-dessus sont nulles. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}f&\left(z=-m-u, (z+m+u)\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{df}{f} \wedge w \wedge \varphi\right) \\ &\qquad = \mathrm{Res}\left(z=-m-u, \int_X |f|^{2(z-1)}\bar{f}^{-j+1}\, df \wedge w \wedge \varphi\right) \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{P}f\left(z=-m-u,\ (z+m+u)\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\wedge w\wedge\varphi\right)$$
$$=\mathrm{Res}\left(z=-m-u,\ \int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-(j+1)}\,d\bar{f}\wedge w\wedge\varphi\right).\quad (*)$$

On obtient donc :

$$\langle d\mathrm{T}_j,\ \varphi\rangle=-\ (j+m+u)\,\mathrm{P}f\left(z=-m-u,\ \int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\wedge w\wedge\varphi\right)$$

ce qui donne la relation

$$d\mathrm{T}_j=-\ (j+m+u)\,d\bar{f}\wedge\mathrm{T}_{j+1}.$$

Ceci achève la démonstration du lemme B_1.

Remarque. — Il apparaît clairement dans la démonstration du lemme B_1 que pour prouver l'identité $d\mathrm{T}_j=-(j+m+u)\,d\bar{f}\wedge\mathrm{T}_{j+1}$ pour un j donné, il suffit de savoir que pour tout $\psi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ le prolongement méromorphe de

$$\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-(j+1)}\,w\wedge\psi$$

n'a pas de pôle en $z=-m-u$ et que le prolongement méromorphe de

$$\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j+1}\,w\wedge\psi$$

n'a pas de pôle en $z=-m-u-1$.

Le lemme suivant va nous permettre d'utiliser les courants T_j considérés ci-dessus :

LEMME C_1. — *Soit* $(\mathrm{T}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *des courants de type* $(p,\ 0)$ *sur* X, *et supposons qu'il existe des nombres complexes* $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *vérifiant :*

$$d\mathrm{T}_j=u_j\,d\bar{f}\wedge\mathrm{T}_{j+1}\quad \textit{pour tout } j\in\mathbb{Z}.$$

Alors il existe des p-formes holomorphes $(\mathrm{S}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *sur* X *et des courants* $(\mathrm{U}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *de degré* $p-1$ *sur* X *vérifiant :*

$$\mathrm{T}_j=(-1)^p\,\bar{\mathrm{S}}_j+d\mathrm{U}_j-u_j\,d\bar{f}\wedge\mathrm{U}_{j+1}\quad \textit{pour tout } j\in\mathbb{Z}.$$

les formes S_j *vérifiant de plus*

$$d\mathrm{S}_j=\bar{u}_j\,df\wedge\mathrm{S}_{j+1}\quad \textit{pour tout } j\in\mathbb{Z}.$$

(*) Ici on a préféré la notation Res à P_1 pour désigner le résidu !

Preuve du lemme C_1. -- Commençons par remarquer que le résultat est trival pour $p=0$ ([5]).

Soit $p \geqq 1$; supposons construits des courants $U_j^{p-k,k-1}$ sur X de type $(p-k, k-1)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, pour tout $k=1, 2, \ldots, l$ avec $l \leqq p$ et vérifiant :

$$(*) \qquad d' U_j^{p-k,k-1} = d'' U_j^{p-k+1,k-2} - u_j \, d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-k+1,k-2} \quad \text{pour } k \geqq 2$$

et $d' U_j^{p-1,0} = T_j$ pour $k=1$. On remarquera que la relation imposée aux T_j combinée avec le fait qu'ils soient de type $(p, 0)$ montre que l'on a $d' T_j = 0$ pour chaque j; en appliquant le théorème B de H. Cartan combiné avec le lemme de Dolbeault-Grothendieck, on en déduit que l'on peut trouver des courants $U_j^{p-1,0}$ sur X qui permettent d'amorcer notre récurrence.

Calculons

$$d' [d'' U_j^{p-l,l-1} - u_j \, d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-l,l-1}]$$

d'abord pour $l=1$; on obtient :

$$-d'' T_j + u_j \, d\bar{f} \wedge T_{j+1} = 0$$

puisque, pour des raisons de type,

$$d'' T_j = dT_j = u_j \, d\bar{f} \wedge T_{j+1}.$$

Pour $l \geqq 2$ on obtient :

$$\begin{aligned} -d'' [d'' U_j^{p-l+1,l-2} - u_j \, d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-l+1,l-2}] + u_j \, d\bar{f} \wedge d' U_{j+1}^{p-l,l-1} \\ = -u_j \, d\bar{f} \wedge d'' U_{j+1}^{p-l+1,l-2} + u_j \, d\bar{f} \wedge d'' U_{j+1}^{p-l+1,l-2} = 0 \end{aligned}$$

en utilisant la relation $(*)$ pour $k=l$.

Si on a $p-l \geqq 1$ alors on peut trouver (toujours grâce au théorème B de H. Cartan et au lemme de Dolbeault-Grothendieck) des courants $U^{p-l-1,l}$ pour $j \in \mathbb{Z}$, de type $(p-l-1, l)$ sur X et vérifiant :

$$d' U_j^{p-l-1,l} = d'' U_j^{p-l,l-1} - u_j \, d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{p-l,l-1} \quad \text{sur X.}$$

Pour $l=p$ on aura :

$$d' [d'' U_j^{0,p-1} - u_j \, d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{0,p-1}] = 0 \quad \text{sur X.}$$

Posons alors $\bar{S}_j = d'' U_j^{0,p-1} - u_j \, d\bar{f} \wedge U_{j+1}^{0,p-1}$; c'est un courant de type $(0, p)$ sur X d'-fermé. D'après le lemme de Dolbeault-Grothendieck (conjugué) c'est le conjugué d'une p-forme holomorphe S_j sur X. De plus on a :

$$d'' \bar{S}_j = u_j \, d\bar{f} \wedge d'' U_{j+1}^{0,p-1} = u_j \, d\bar{f} \wedge S_{j+1}$$

ce qui prouve la relation

$$dS_j = \bar{u}_j \, df \wedge S_{j+1}.$$

([5]) D'après Dolbeault-Grothendieck les T_j sont des fonctions antiholomorphes!

Posons maintenant :

$$\mathrm{U}_j = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}\, \mathrm{U}_j^{p-i,\, i-1}$$

pour chaque j ; alors U_j est un courant de degré $p-1$ sur X et on a :

$$d\mathrm{U}_j = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}\, d\mathrm{U}_j^{p-i,\, i-1}$$

ce qui donne en regroupant par types :

$$d\mathrm{U}_j = d'\mathrm{U}_j^{p-1,\, 0} + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \,[d'\mathrm{U}_j^{p-i-1,\, i} - d''\mathrm{U}_j^{p-i,\, i-1}] + (-1)^{p-1}\, d''\mathrm{U}_j^{0,\, p-1}$$

ce qui donne, en utilisant la relation $(*)$:

$$d\mathrm{U}_j = \mathrm{T}_j + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1}\, u_j\, d\bar{f} \wedge \mathrm{U}_{j+1}^{p-i,\, i-1} + (-1)^{p-1}\, (\bar{\mathrm{S}}_j + u_j\, d\bar{f} \wedge \mathrm{U}_{j+1}^{0,\, p-1})$$

et donc

$$d\mathrm{U}_j = \mathrm{T}_j + u_j\, d\bar{f} \wedge \mathrm{U}_{j+1} + (-1)^{p-1}\, \bar{\mathrm{S}}_j$$

ce qui achève la preuve du lemme C_1.

LEMME C_2. — *Dans la situation du lemme* C_1, *supposons que l'on ait de plus les relations*

$$\bar{f}\,.\,\mathrm{T}_{j+1} = \mathrm{T}_j \quad \textit{pour tout } j \leqq j_0 + p - 1$$

et

$$u_{j+1} = u_j - 1 \quad \textit{pour tout } j \leqq j_0 + p - 1.$$

Alors dans la conclusion du lemme C_1 *on peut choisir les p-formes holomorphes* S_j *de manière à satisfaire la relation :*

$$f\,.\,\mathrm{S}_{j+1} = \mathrm{S}_j \quad \textit{pour tout } j \leqq j_0.$$

Démonstration. — Pour tout $a \geqq 0$ on a donc l'égalité

$$\mathrm{T}_{j_0+p-a} = \bar{f}^a\,.\,\mathrm{T}_{j_0+p}.$$

Si on a choisi les courants $\mathrm{U}_j^{p-1,\, 0}$ arbitrairement pour $j \geqq j_0 + p$ vérifiant $d'\,\mathrm{U}_j^{p-1,\, 0} = \mathrm{T}_j$, on peut poser $\mathrm{U}_{j_0+p-a}^{p-1,\, 0} = \bar{f}^a\,.\,\mathrm{U}_{j_0+p}^{p-1,\, 0}$ pour $a \geqq 0$, puisque l'on a :

$$d'(\bar{f}^a\,.\,\mathrm{U}_{j_0+p}^{p-1,\, 0}) = \bar{f}^a\,.\,d'\mathrm{U}_{j_0+p}^{p-1,\, 0} = \bar{f}^a\,.\,\mathrm{T}_{j_0+p} = \mathrm{T}_{j_0+p-a}.$$

Supposons construits les courants $\mathrm{U}_j^{p-k,\, k-1}$ pour $k = 1, 2, \ldots, l < p$ et $j \in \mathbb{Z}$ vérifiant la condition supplémentaire suivante :

$$\mathrm{U}_{j_0+p-a}^{p-k,\, k-1} = \bar{f}^{a-k+1}\,.\,\mathrm{U}_{j_0+p-k+1}^{p-k,\, k-1} \quad \text{pour tout } a \geqq k-1$$

nous voulons montrer que l'on peut choisir le courant $U^{p-l-1,\,l}_{j_0+p-a}$ pour $a \geqq l$ comme étant égal à $\bar{f}^{a-l}.\, U^{p-l-1,\,l}_{j_0+p-l}$.

Ceci étant une tautologie pour $a=l$, il suffit de considérer le cas où $a \geqq l+1$. Comme la seule condition qui a présidé au choix de $U^{p-l-1,\,l}_j$ est la relation :

$$d'U^{p-l-1,\,l}_j = d''U^{p-l,\,l-1}_j - u_j\, d\bar{f} \wedge U^{p-l,\,l-1}_{j+1}$$

il nous suffit de vérifier que $d'[\bar{f}^{a-l}.\, U^{p-l-1,\,l}_{j_0+p-l}]$ prend la bonne valeur. On a :

$$\begin{aligned} d'[\bar{f}^{a-l}.\, U^{p-l-1,\,l}_{j_0+p-l}] &= \bar{f}^{a-l}.\,[d''\, U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-l} - u_{j_0+p-l}\, d\bar{f} \wedge U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-l+1}] \\ &- d''[\bar{f}^{a-l}\, U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-l}] - (a-l).\,\bar{f}^{a-l-1}\, d\bar{f} \wedge U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-l} - u_{j_0+p-l}\, d\bar{f} \wedge \bar{f}^{a-l}\, U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-l+1} \end{aligned}$$

et comme on a, pour $a \geqq l+1$, grâce à notre hypothèse de récurrence les relations

$$\bar{f}^{a-l-1}\, U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-l} = \bar{f}^{a-l}\, U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-l+1} = U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-a+1}$$

et de plus $u_{j_0+p-l} = u_{j_0+p} + l$, on trouve :

$$d'[\bar{f}^{a-l}\, U^{p-l-1,\,l}_{j_0+p-l}] = d''\, U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-a} - (u_{j_0+p} + a)\, d\bar{f} \wedge U^{p-l,\,l-1}_{j_0+p-a+1}$$

ce qui est la relation désirée puisque $u_{j_0+p-a} = u_{j_0+p} + a$.

Pour $l=p$ on aura donc $\bar{f}^{a-p+1}\, U^{0,\,p-1}_{j_0+1} = U^{0,\,p-1}_{j_0+p-a}$ pour $a \geqq p-1$. Comme S_j est définie par la relation :

$$\bar{S}_j = d''\, U^{0,\,p-1}_j - u_j\, d\bar{f} \wedge U^{0,\,p-1}_{j+1}$$

donc pour $j = j_0 + p - a$ avec $a \geqq p$ on aura simultanément :

$$\bar{f}^{a-p}\, U^{0,\,p-1}_{j_0} = U^{0,\,p-1}_{j_0+p-a} \qquad \text{et} \qquad \bar{f}^{a-p}\, U^{0,\,p-1}_{j_0+1} = U^{0,\,p-1}_{j_0+p-a+1}$$

ce qui donnera, toujours pour $a \geqq p$:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{j_0+p-a} &= d''[\bar{f}^{a-p}\, U^{0,\,p-1}_{j_0}] - u_{j_0+p-a}\, d\bar{f} \wedge \bar{f}^{a-p}\, U^{0,\,p-1}_{j_0+1} \\ &= (a-p).\,\bar{f}^{a-p-1}\, d\bar{f} \wedge U^{0,\,p-1}_{j_0} + \bar{f}^{a-p}\, d''\, U^{0,\,p-1}_{j_0} - U_{j_0+p-a}\, d\bar{f} \wedge \bar{f}^{a-p}\, U^{0,\,p-1}_{j_0+1}. \end{aligned}$$

Si maintenant on suppose $a \geqq p+1$, on aura

$$\bar{f}^{a-p-1}\, U^{0,\,p-1}_{j_0} = \bar{f}^{a-p}\, U^{0,\,p-1}_{j_0+1}$$

ce qui, compte tenu de la relation $u_{j_0+p-a} = u_{j_0} + a - p$ donne $\bar{S}_{j_0+p-a} = \bar{f}^{a-p}\, \bar{S}_{j_0}$ pour $a \geqq p+1$; mais comme cette égalité est évidente pour $a=p$, on en déduit que pour tout $j < j_0$ on a $S_j = f.\, S_{j+1}$.

Ceci prouve que sous les hypothèses ci-dessus, on aura pour tout $j < j_0$ $dS_j = \bar{u}_j\, df/f \wedge S_j$.

Il est évident que les S_j construites au lemme C_2 définissent des sections globales sur D de $\mathbf{GM}^p$. Le lemme suivant permet (entre autres choses) de montrer que ces sections ne dépendent pas, modulo la torsion de $\mathbf{GM}^p$, des choix effectués dans la construction.

LEMME D. — *Soit w une p-forme holomorphe sur* X, *soit u un nombre complexe, et soit* $m \in \mathbb{N}$. *On suppose que l'on ait :*

$$dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \quad sur \ \mathrm{X} - f^{-1}(0).$$

S'il existe des courants U *et* V *sur* X *vérifiant* $f^{-m} | f |^{-2u} w = d\mathrm{U} + \overline{df} \wedge \mathrm{V}$ *comme courants sur* $\mathrm{X} - f^{-1}(0)$ *alors* fw *définit un élément de torsion dans* $\mathbf{GM}^p$.

Preuve du lemme. — Commençons par remarquer que, en vertu des assertions ci-dessus (*) sur $\mathbf{GM}^p$, pour qu'une section globale de $\mathbf{GM}^p$ soit de torsion il faut et il suffit que pour chaque $s \in \mathrm{D}^*$ elle induise 0 dans $\mathrm{H}^p(\mathrm{X}(s), \mathbb{C})$. Fixons $s_0 \in \mathrm{D}^*$ arbitraire, et soit D_0 un disque de centre s_0 contenu dans D^* assez petit pour l'application

$$f/f^{-1}(\mathrm{D}_0) \to \mathrm{D}_0$$

admette une trivialisation C^∞. Fixons alors un C^∞-isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(\mathrm{D}_0) \arrow[rr, "\mathrm{F}", "\sim"'] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{X}(s_0) \times \mathrm{D}_0 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"] \\ & \mathrm{D}_0 & \end{tikzcd}$$

Considérons une forme C^∞ φ à support compact et de degré $2n-p$ sur $\mathrm{X}(s_0)$, vérifiant $d\varphi = 0$, représentant dans $\mathrm{H}_c^{2n-p}(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{C})$ l'image d'un p-cycle $c(s_0) \in \tilde{\mathrm{H}}_p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{Z})$ [6] via la dualité de Poincaré $\mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_c^{2n-p}(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{C})$. Alors pratiquement par définition de la connexion de Gauss-Manin (au sens de l'horizontalité dans le fibré $s \to \mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s), \mathbb{C})$) la restriction de $\mathrm{F}^*(\mathrm{pr}_1^*(\varphi))$ à $\mathrm{X}(s)$ pour $s \in \mathrm{D}_0$ (qui est une forme C^∞ à support compact dans $\mathrm{X}(s)$ et qui est d-fermée) induit dans $\mathrm{H}_c^{2n-p}(\mathrm{X}(s), \mathbb{C})$ l'image (*via* la dualité de Poincaré) de $c(s) \in \tilde{\mathrm{H}}_p(\mathrm{X}(s), \mathbb{Z})$, où c désigne l'unique section horizontale du fibré $s \to \mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s), \mathbb{C})$ sur D_0 qui vaut $c(s_0)$ en s_0.

Considérons maintenant une fonction $g \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{D}_0)$ vérifiant :

$$\int_{\mathrm{D}_0} g(s)\, ds \wedge d\bar{s} = 1,$$

et posons $\psi = f^*(g(s)\, ds \wedge d\bar{s}) \wedge \mathrm{F}^*(pr_1^*(\varphi))$. Alors ψ est une forme C^∞ à support compact dans $f^{-1}(\mathrm{D}_0)$ qui est d-fermée. De plus on a $\psi \wedge df = 0$ et $\psi \wedge \overline{df} = 0$ sur $f^{-1}(\mathrm{D}_0)$, et ψ est de degré $2n+2-p$. Montrons que ψ représente dans $\mathrm{H}_c^{2n+2-p}(f^{-1}(\mathrm{D}_0), \mathbb{C})$ l'image

(*) *Voir* **1** b.

[6] $\tilde{\mathrm{H}}_p(\mathrm{X}(s), \mathbb{Z})$ désigne ici l'image de $\mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s), \mathbb{Z})$ dans $\mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s), \mathbb{C})$.

(*via* la dualité de Poincaré) de $c(s_0)$. En effet si θ est une p-forme C^∞ d-fermée sur $f^{-1}(D_0)$ on aura :

$$\int_{f^{-1}(D_0)} \psi \wedge \theta = \int_{D_0} g(s)\, ds \wedge d\bar{s} \int_{X(s)} F^*(\mathrm{pr}_1^*(\varphi)) \wedge \theta$$

d'après le théorème de Fubini (pour un produit !). Comme $c(s)$ est homologue à $c(s_0)$ dans $f^{-1}(D_0)$ pour $s \in D_0$, on aura

$$\int_{c(s)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta$$

pour tout $s \in D_0$ (puisque $d\theta = 0$) et comme $F^*(\mathrm{pr}_1^*(\varphi))$ représente l'image de $c(s)$ dans $H_c^{2n-p}(X(s), \mathbb{C})$ on aura :

$$\int_{X(s)} F^*(\mathrm{pr}_1^*(\varphi)) \wedge \theta = \int_{c(s)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta$$

pour tout $s \in D_0$. On obtient donc finalement :

$$\int_{f^{-1}(D_0)} \psi \wedge \theta = \int_{D_0} g(s)\, ds \wedge d\bar{s} \int_{c(s_0)} \theta = \int_{c(s_0)} \theta$$

ce qui prouve notre assertion.

Calculons maintenant $\int_{c(s_0)} f^{-m-u}.\, w$ où l'on suppose que l'on a fixé une détermination de $\mathrm{Log}\, s$ sur D_0 (ce qui permet de définir f^{-u} sur $f^{-1}(D_0)$). Comme l'hypothèse faite sur w implique que la p-forme $f^{-m-u}.\, w$ est d-fermée sur $f^{-1}(D_0)$, on aura, d'après ce qui précède :

$$\int_{c(s_0)} f^{-m-u}.\, w = \int_{f^{-1}(D_0)} f^{-m} |f|^{-2u} w(\bar{f}^u \psi) = \langle dU + d\bar{f} \wedge V,\ \bar{f}^u \psi \rangle.$$

et comme on a $d\psi = 0$, $\psi \wedge df = 0$ et $\psi \wedge d\bar{f} = 0$ sur $f^{-1}(D_0)$ on en déduit que w induit 0 dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$. Ceci achève la preuve du lemme D.

Lemme E. — *Soit u un nombre complexe donné vérifiant* $0 \leq \mathrm{Re}(u) < 1$. *Alors il existe un entier $\tilde{M}(u) \in \mathbb{Z}$ tel que pour toute p-forme holomorphe w sur X qui vérifie :*

$$dw = (m+u) \frac{df}{f} \wedge w \qquad où \quad m \in \mathbb{Z}$$

avec $m < \tilde{M}(u)$, la section (globale) du faisceau $\mathbf{GM}^p$ *définie par $f.\, w$ soit de torsion.*

Démonstration. — Soit $s_0 \in D^*$ fixé, et soit $e_1(s_0), \ldots, e_\varkappa(s_0)$ une base du sous-espace propre de la monodromie $T^p : H^p(X(s_0), \mathbb{C}) \to H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ pour la valeur propre $\exp(-2i\pi u)$. Notons par $e_1, \ldots, e_\varkappa$ les sections horizontales multiformes de $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ qui prennent les valeurs $e_1(s_0), \ldots, e_\varkappa(s_0)$ respectivement en s_0 (cette assertion ne prend un sens précis qu'en considérant le revêtement universel de D*). Notons par $c_1(s_0), \ldots, c_h(s_0)$ une $\mathbb{Z}$-base de $\tilde{\mathrm{H}}_p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{Z})$ (rappelons que cette notation désigne l'image de $\mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{Z})$ dans $\mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{C})$), et notons par $c_1, \ldots, c_h$ les sections horizontales multiformes de $s \to \mathrm{H}_p(\mathrm{X}(s), \mathbb{C})$ qui prennent les valeurs $c_1(s_0), \ldots, c_h(s_0)$ respectivement en s_0. Notons aussi par $w_1, \ldots, w_l$ un système générateur du sous-faisceau de $\mathbf{GM}^p$/torsion dont la restriction à D* est engendrée (fibre par fibre) par les $e_j(s)$. En fait, on pourrait facilement montrer que ce sous-faisceau est libre de rang κ sous les hypothèses considérées, mais nous n'utiliserons pas ce point.

Pour tout $i \in [1, \kappa]$ et tout $j \in [1, h]$ les fonctions sur D* :

$$s \to \int_{c_j(s)} e_i(s)$$

sont constantes (par horizontalité), et nous noterons par $\mathrm{I}_{i,j}$ leurs valeurs. Si $w_a(s) = \sum_{b=1}^{\kappa} w_{a,b}(s) \cdot e_b(s)$ est l'écriture des w_a dans la base horizontale multiforme $e_1, \ldots, e_\kappa$, alors les $w_{a,b}$ sont des fonctions holomorphes multiformes à croissance modérée quand $s \to 0$; et le fait que pour chaque $i \in [1, \kappa]$ on ait

$$e_i(s \cdot e^{2i\pi}) = s^{-u} \cdot e_i(s) \quad (*)$$

ainsi que l'uniformité des w_a, montre que les fonctions holomorphes $s^{-u} \cdot w_{a,b}(s) = \tilde{w}_{a,b}(s)$ sont uniformes sur D* et également à croissance modérée à l'origine. Il existe donc un entier relatif $\mathrm{M}(u) \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $a \in [1, l]$ et tout $b \in [1, \kappa]$ la fonction $s^{\mathrm{M}(u)} \cdot w_{a,b}(s)$ soit holomorphe sur D. On a alors pour $a \in [1, l]$ et $j \in [1, h]$:

$$\int_{c_j(s)} w_a(s) = \sum_{b=1}^{\kappa} w_{a,b}(s) \int_{c_j(s)} e_b(s) = \sum_{b=1}^{\kappa} \mathrm{I}_{b,j} \cdot s^{u-\mathrm{M}(u)} (s^{\mathrm{M}(u)} \cdot \tilde{w}_{a,b}(s)),$$

ce qui prouve que pour tout $a \in [1, l]$ et tout $j \in [1, h]$, on a

$$\int_{c_j(s)} w_a(s) = s^{u-\mathrm{M}(u)} \cdot g_{j,a}(s)$$

où $g_{j,a}$ est une fonction holomorphe sur D tout entier. Considérons maintenant une p-forme holomorphe w sur X qui vérifie $dw = (m+u)\, df/f \wedge w$ sur X ; on aura $d(f \cdot w) = (m+u+1)\, df \wedge w$ et donc $d_{/f}(f \cdot w) = 0$ et $f \cdot w$ définit donc une section globale du faisceau $\mathbf{GM}^p$ sur D. De plus, la section multiforme $f^{-m-u} \cdot w$ est horizontale sur D*. On a donc, pour tout $j \in [1, h]$:

$$\int_{c_j(s)} f \cdot w = s^{m+u+1} \int_{c_j(s)} f^{-m-u} \cdot w = \mathrm{A}_j \cdot s^{m+u+1}$$

(*) Ceci signifie que comme section sur le revêtement universel de D* défini par $t = \mathrm{Log}\, s$, on a

$$e_i(t + 2i\pi) = e^{-ut} \cdot e_i(t).$$

où $A_j \in \mathbb{C}$, puisque la fonction $s \to \int_{c_j(s)} f^{-m-u}.w$ est constante par horizontalité. Comme $f^{-m-u}.w$ induit dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ soit zéro, soit un vecteur propre de la monodromie T^p pour la valeur propre $\exp(-2i\pi u)$, il existe des nombres complexes $z_1, \ldots, z_\varkappa$ tels que la classe induite par $f^{-m-u}.w$ dans $H^p(X(s_0), \mathbb{C})$ soit $z_1 e_1(s_0) + \ldots + z_\varkappa e_\varkappa(s_0)$. Alors la section horizontale multiforme du fibré $s \to H^p(X(s), \mathbb{C})$ donnée par $f^{-m-u}.w - \sum_{i=1}^{\varkappa} z_i . e_i$ s'annule en s_0 ; elle est donc identiquement nulle sur le disque pointé D^*. Ceci montre que la section de $\mathbf{GM}^p$/torsion induite par $f.w$ est dans le sous-faisceau engendré par $w_1, \ldots, w_h$. D'après ce qui précède, on aura donc pour chaque $j \in [1, h]$:

$$\int_{c_j(s)} f.w = s^{u-M(u)}.h_j(s)$$

où h_j est une fonction holomorphe sur le disque D tout entier. On en déduit alors l'égalité :

$$A_j . s^{m+u+1} = s^{u-M(u)}.h_j(s)$$

ce qui donne

$$h_j(s) = A_j . s^{1+M(u)+m} \qquad \text{(rappelons que } A_j \in \mathbb{C}).$$

Pour $m < -(1+M(u))$ on aura donc (puisque h_j est holomorphe en $s=0$) $A_j = 0$ pour tout $j \in [1, h]$, ce qui signifie que pour tout $s \in D^*$ la classe induite par $f.w$ dans $H^p(X(s), \mathbb{C})$ est nulle. Donc $f.w$ est de torsion dans $\mathbf{GM}^p$, ce qui achève la démonstration du lemme E, avec $\tilde{M}(u) = -(1+M(u))$.

Corollaire. — *Pour $u \in \mathbb{C}$ donné vérifiant $0 \leq \mathrm{Re}(u) < 1$, il existe $\tilde{M}(u) \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $w \in H^0(X, \Omega_X^p)$ vérifiant :*

$$dw = (m+u)\frac{df}{f} \wedge w \quad \textit{sur } X \textit{ avec } m < \tilde{M}(u) \quad \textit{et} \quad m \in \mathbb{Z}$$

il existe a et b dans $H^0(X^*, \Omega_X^{p-1})$ vérifiant :

$$w = a \wedge df + db \quad \textit{sur } X^* = X - f^{-1}(0).$$

Démonstration. — Ceci résulte immédiatement du fait que le sous-faisceau de torsion de $\mathbf{GM}^p$ est de support l'origine sous nos hypothèses, pour chacune de ses sections il existe donc une puissance de f qui l'annule, ce qui donne le corollaire.

Démonstration du théorème si $k=1$. — D'après le lemme A il existe $\omega_1 \in H^0(X, \Omega_X^p)$ vérifiant $d_{/f}\omega_1 = 0$ $d\omega_1 = (m+u)\,df/f \wedge \omega_1$ et qui n'induit pas un élément de torsion dans $\mathbf{GM}^p(D)$. Si pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $\psi \in C_c^\infty(X)$ forme différentielle de type $(n-p+1, n+1)$, le prolongement méromorphe de la fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ donnée par

$$z \to \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_1 \wedge \psi$$

n'admet jamais de pôle en $z=-m-u$ et $z=-m-u-1$, alors le lemme B 1 nous montre que les courants sur X définis par :

$$\langle \mathrm{T}_j, \psi \rangle = \mathrm{P}f\left(z=-m-u, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_1 \wedge \psi \right)$$

vérifient les relations

$$d\mathrm{T}_j = -(j+m+u) \,.\, d\bar{f} \wedge \mathrm{T}_{j+1}$$

et

$$\bar{f} \,.\, \mathrm{T}_{j+1} = \mathrm{T}_j \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}.$$

Les lemmes C_1 et C_2 associent aux courants T_j des formes holomorphes S_j de degré p sur X qui satisferont aux relations

$$d\mathrm{S}_j = -(j+m+\bar{u}) \,.\, \frac{df}{f} \wedge \mathrm{S}_j \quad \text{pour tout } j \leqq j_0. \quad (^7)$$

Le corollaire du lemme E donne alors que pour j_0 assez grand (en fait $j_0 > -m-\tilde{\mathrm{M}}(-\bar{u})$ avec les notations de ce corollaire) il existe a et b dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^*, \Omega_{\mathrm{X}}^{p-1})$ vérifiant :

$$\mathrm{S}_{j_0} = a \wedge df + db \quad \text{sur } \mathrm{X}^*.$$

On en déduit que

$$\mathrm{T}_{j_0} = (-1)_p [\bar{a} \wedge d\bar{f} + d\bar{b}] + d\mathrm{U}_{j_0} - (j_0+m+u) \,.\, d\bar{f} \wedge \mathrm{U}_{j_0+1}$$

Comme le courant T_{j_0} coïncide sur $\mathrm{X}-f^{-1}(0)$ avec la forme différentielle $|f|^{-2m-2u} \bar{f}^{-j_0} \omega_1$, le lemme D donne que ω_1 induit un élément de torsion dans $\mathbf{GM}^p(\mathrm{D})$ ce qui contredit notre hypothèse. Il est donc impossible que pour chaque $j \in \mathbb{Z}$ et pour chaque ψ forme différentielle de type $(n-p+1, n+1)$ dans $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{X})$ le prolongement méromorphe de $z \to \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_1 \wedge \psi$ n'ait jamais de pôle en $z=-m-u$ et $z=-m-u-1$, ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas $k=1$.

Remarque importante. — Supposons que l'on n'ait pas de pôle pour le prolongement analytique de

$$\int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega \wedge \psi$$

pour $j < j_0 + p$ en $z=-m-u-1$ où ω satisfait

$$d\omega = (m+u) \frac{df}{f} \wedge \omega \qquad \text{et} \qquad \omega/\mathrm{H}^p(\mathrm{X}(s_0), \mathbb{C}) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad s_0 \in \mathrm{D}^*.$$

(7) De manière précise ceci signifie que pour chaque $j_0 \in \mathbb{Z}$, on peut choisir les S_j vérifiant ces relations pour $j \leqq j_0$.

Alors on peut construire les T_j pour $j<j_0+p$ et les S_j pour $j<j_0$ avec les mêmes relations que plus haut. La preuve ci-dessus donnera alors une contradiction dès que l'on aura $j_0>-\tilde{M}(-\bar{u})-m$. On peut donc affirmer que pour une telle ω on aura nécessairement un pôle pour le prolongement de

$$\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j_1}\,\omega\wedge\psi$$

pour un $\psi\in C_c^\infty(X)^{n-p+1,n+1}$ bien choisi en $z=-m-u-1$ avec

$$j_1=-\tilde{M}(-\bar{u})-m+p+1.$$

3. La difficulté principale pour étendre la démonstration du cas $k=1$ au cas général est résolue dans le lemme B_2 ci-dessous qui sera un bon substitut pour le lemme B_1 qui est manifestement insuffisant pour $k\geqq 2$.

LEMME B_2. — *Soit $\hat{u}\in\mathbb{C}$ et $k\in\mathbb{N}$; soient $w_1,\ldots,w_k$ des p-formes holomorphes sur* X *vérifiant*

$$dw_j=\hat{u}\,\frac{df}{f}\wedge w_j+\frac{df}{f}\wedge w_{j-1}$$

pour $j\in[1,k]$ (avec la convention $w_0=0$). On suppose que pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et toute forme différentielle $\psi\in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1,\ n+1)$ et tout $l\in[1,k]$ le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ de la fonction holomorphe définie pour $\operatorname{Re}(z)\gg 0$ par

$$z\to\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\,w_l\wedge\psi$$

n'admet pas, pour $z=-\hat{u}$ et $z=-\hat{u}-1$ de pôle d'ordre $\geqq k$. Alors les courants T_j^i sur X *de type $(p,\ 0)$ définis par :*

$$\langle T_j^i,\psi\rangle=\sum_{a=0}^{k-1}(-1)^a P_{a+i}\left(z=-\hat{u},\ \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\,w_{a+1}\wedge\psi\right)$$

où $P_a(z=-\hat{u},\ F(z))$ pour F *méromorphe sur $\mathbb{C}$ désigne le coefficient de $(z+\hat{u})^{-a}$ dans le développement de Laurent de* F *en $z=-\hat{u}$, vérifient*

$$dT_j^i=T_{j+1}^{i+1}-(\hat{u}+j)\,.\,d\bar{f}\wedge T_{j+1}^i$$

pour tout $j\in\mathbb{Z}$ et tout $i\in\mathbb{N}$ (on remarquera que notre hypothèse implique la nullité de T_j^i pour $i\geqq k$).

Démonstration. — Commençons déjà par montrer que l'on a $d'T_j^i=0$ pour tout i et j. Soit φ une forme différentielle de type $(n-p,\ n+1)$ dans $C_c^\infty(X)$; par définition du d' d'un courant on a :

$$\langle d'T_j^i,\varphi\rangle=(-1)^{p-1}\langle T_j^i,d'\varphi\rangle.$$

Or pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ on a, d'après la formule de Stokes pour $a \in [0, k-1]$ (toujours avec la convention $w_0 = 0$) :

$$\int_X d[|f|^{2z} \bar{f}^{-j} w_{a+1} \wedge \varphi] = 0$$

$$= (z+\hat{u}) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_{a+1} \wedge \varphi + \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_a \wedge \varphi + (-1)^p \int_X |f|^{2z} w_{a+1} \wedge d' \varphi$$

ce qui donne :

$$\mathrm{P}_{a+i}\left(z = -\hat{u}, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w_{a+1} \wedge d' \varphi \right)$$

$$= (-1)^{p-1} \mathrm{P}_{a+i+1}\left(z = -\hat{u}, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_{a+1} \wedge \varphi \right) + (-1)^{p-1} \mathrm{P}_{a+i}\left(z = -\hat{u}. \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_a \wedge \varphi \right)$$

et donc

$$\langle d' \mathrm{T}^i_j, \varphi \rangle = (-1)^{p-1} \langle \mathrm{T}^i_j, d' \varphi \rangle$$

$$= \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+p-1} \mathrm{P}_{a+i}\left(z = -\hat{u}, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w_{a+1} \wedge d' \varphi \right)$$

$$= \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a \mathrm{P}_{a+i+1}\left(z = -\hat{u}, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_{a+1} \wedge \varphi \right) + \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a \mathrm{P}_{a+i}\left(z = -\hat{u}, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \frac{df}{f} \wedge w_a \wedge \varphi \right) = 0$$

puisque $w_0 = 0$ et que $\mathrm{P}_b(z = -\hat{u}, \ldots) = 0$ pour $b \geqq k$.

Calculons maintenant $d'' \mathrm{T}^i_j$; soit $\chi \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathrm{X})$ une forme différentielle de type $(n-p+1, n)$. On a, par définition du d'' d'un courant

$$\langle d'' \mathrm{T}^i_j, \chi \rangle = (-1)^{p-1} \langle \mathrm{T}^i_j, d'' \chi \rangle.$$

Comme plus haut, pour $\mathrm{Re}(z) \gg 0$ on a, d'après la formule de Stokes :

$$\int_X d[|f|^{2z} \bar{f}^{-j} w_{a+1} \wedge \chi] = 0$$

$$= (z-j) \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} d\bar{f} \wedge w_{a+1} \wedge \chi + (-1)^p \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w_{a+1} \wedge d'' \chi$$

ce qui donne, en écrivant $z-j=(z+\hat{u})-(\hat{u}+j)$:

$$\mathrm{P}_{a+i}\left(z=-\hat{u}, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w_{a+1} \wedge d'' \chi\right) =$$

$$(-1)^{p-1} \mathrm{P}_{a+i+1}\left(z=-\hat{u}, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} d\bar{f} \wedge w_{a+1} \wedge \chi\right)$$

$$+(-1)^{p} (\hat{u}+j) . \mathrm{P}_{a+i}\left(z=-\hat{u}, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} d\bar{f} \wedge w_{a+1} \wedge \chi\right).$$

et donc

$$\langle d'' \mathrm{T}_j^i, \chi \rangle = (-1)^{p-1} \langle \mathrm{T}_j^i, d'' \chi \rangle$$

$$= \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+p-1} \mathrm{P}_{a+i}\left(z=-\hat{u}, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j} w_{a+1} \wedge d'' \chi\right)$$

$$= \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a} \mathrm{P}_{a+i+1}\left(z=-\hat{u}, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} d\bar{f} \wedge w_{a+1} \wedge \chi\right)$$

$$+ \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^{a+1} (\hat{u}+j) . \mathrm{P}_{a+i}\left(z=-\hat{u}, \int_{\mathrm{X}} |f|^{2z} \bar{f}^{-j-1} d\bar{f} \wedge w_{a+1} \wedge \chi\right).$$

On en déduit l'égalité suivante entre courants sur X :

$$d\mathrm{T}_j^i = d\bar{f} \wedge \mathrm{T}_{j+1}^{i+1} - (\hat{u}+j) . d\bar{f} \wedge \mathrm{T}_{j+1}^i.$$

Remarque. — En notant par $\tilde{\mathrm{T}}_j$ le courant à valeurs vectorielles dans $\mathbb{C}^k$ dont les composantes sont $\mathrm{T}_j^{k-1}, \ldots, \mathrm{T}_j^0$, et en définissant l'endomorphisme $\tilde{u}_j$ (*) de $\mathbb{C}^k$ par $\tilde{u}_j(e_l) = -(\hat{u}+j) . e_l + e_{l-1}$ où $e_1, \ldots, e_k$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^k$ avec la convention $e_0=0$, le résultat du lemme précédent se formule de la manière suivante :

$$d\tilde{\mathrm{T}}_j = \tilde{u}_j . d\bar{f} \wedge \tilde{\mathrm{T}}_{j+1}.$$

On constate alors en relisant les démonstrations des lemmes C_1 et C_2, qu'elles s'appliquent également pour une suite de courants vectoriels.

On remarquera également que les courants vectoriels $\tilde{\mathrm{T}}_j$ que l'on vient de définir satisfont à la relation $\bar{f} . \tilde{\mathrm{T}}_{j+1} = \tilde{\mathrm{T}}_j$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, ce qui permettra effectivement d'appliquer le lemme C_2 à la suite des courants vectoriels déduite du lemme B_2 (grâce à la remarque plus haut).

Démonstration du théorème pour k quelconque. — D'après le lemme A il existe des

(*) Remarquez que l'on a $\tilde{u}_{j+1} = \tilde{u}_j - \mathrm{Id}$ pour $j \in \mathbb{Z}$.

p-formes holomorphes $\omega_1, \ldots, \omega_k$ sur X, $d_{/f}$-fermées et vérifiant :

$$d\omega_j = (m+u) \cdot \frac{df}{f} \wedge \omega_j + \frac{df}{f} \wedge \omega_{j-1} \qquad \text{pour} \quad j \in [1, k]$$

avec la convention $\omega_0 = 0$; on a de plus que ω_1 n'induit pas un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(D)$. Posons $\hat{u} = m + u$.

Si l'on suppose que pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et toute forme différentielle $\psi \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1, n+1)$ le prolongement méromorphe de $z \to \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_h \wedge \psi$ n'admette pas de pôle d'ordre $\geqq k$ pour $z = -\hat{u}$ et $z = -\hat{u} - 1$ $\forall h \in [1, k]$, il existe des courants vectoriels $\tilde{T}_j$ dont les composantes $T_j^{k-1}, \ldots, T_j^0$ sont données par :

$$\langle T_j^i, \psi \rangle = \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a P_{a+i}\left(z = -\hat{u}, \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \omega_{a+1} \wedge \psi \right)$$

et qui vérifient, d'après le lemme B_2 et la remarque qui le suit :

$$d\tilde{T}_j = \tilde{u}_j \, . \, d\bar{f} \wedge \tilde{T}_{j+1} \qquad \text{et} \qquad \bar{f} \, . \, \tilde{T}_{j+1} = \tilde{T}_j \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}$$

où $\tilde{u}_j$ est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ donné par :

$$\tilde{u}_j(e_a) = -(j + \hat{u}) \, . \, e_a + e_{a+1}$$

où $e_1, \ldots, e_k$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^k$ (avec la convention $e_0 = 0$). Comme de plus pour $i > 0$ la restriction de T_j^i à $X - f^{-1}(0)$ est nulle (car si $\operatorname{supp}(\theta) \cap \{f = 0\} = \varnothing$ la fonction $z \to \int_X |f|^{2z} \bar{f}^{-j} \theta$ est entière), la restriction de T_j^0 à $X - f^{-1}(0)$ coïncide avec la forme différentielle $|f|^{-2u} \bar{f}^{-j} \omega_1$. En appliquant la variante vectorielle des lemmes C_1 et C_2 (*voir* la remarque qui suit le lemme B_3) aux $\tilde{T}_j$, on obtient des p-formes holomorphes vectorielles $\tilde{S}_j$ vérifiant :

$$d\tilde{S}_j = \bar{\tilde{u}}_j \, . \, \frac{df}{f} \wedge \tilde{S}_j \quad \text{pour tout } j \leqq j_0,$$

où $\bar{\tilde{u}}$ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{C}^k$ conjugué de $\tilde{u}_j$. On aura en particulier :

$$dS_j^0 = -(j + \bar{\hat{u}}) \, . \, \frac{df}{f} \wedge S_j^0 \quad \text{pour tout } j \leqq j_0.$$

Pour j_0 assez grand le corollaire du lemme E permet de trouver des $(p-1)$-formes holomorphes a et b sur X^* vérifiant $S_{j_0}^0 = a \wedge df + db$.

On aura alors, en utilisant les courants (vectoriels) $\tilde{U}_j$ qui relient les $\tilde{T}_j$ au $\tilde{S}_j$ (*voir* le lemme C_1) :

$$T_{j_0}^0 = (-1)^p [\bar{a} \wedge d\bar{f} + d\bar{b}] + dU_{j_0}^0 - (j_0 + \hat{u}) \, . \, d\bar{f} \wedge U_{j_0+1}^0.$$

Ceci montre que sur $X-f^{-1}(0)$ il existe deux courants U et V vérifiant :

$$|f|^{-2u}\bar{f}^{-j_0}\,\omega_1 = dU + d\bar{f}\wedge V \quad \text{sur } X-f^{-1}(0).$$

Le lemme D nous montre alors que ω_1 induit un élément de torsion de $\mathbf{GM}^p(D)$, ce qui contredit notre hypothèse. Il existe donc $j_1 \in \mathbb{Z}$ $\psi \in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1,\, n+1)$ et $h\in[1,\, k]$ tels que le prolongement méromorphe de $z \to \int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j_1}\,\omega_h\wedge\psi$ admette un pôle d'ordre au moins égal à k en $z=-\hat{u}$ ou $z=-\hat{u}-1$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. — Comme dans le cas $k=1$ on peut dire plus précisément qu'il existe $h\in[1,\, k]$ et $\psi\in C_c^\infty(X)$ de type $(n-p+1,\, n+1)$ tels que le prolongement analytique de $\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j_1}\,\omega_h\wedge\psi$ ait un pôle d'ordre $\geqq k$ en $z=-m-u-1$ pour $j_1=-\tilde{M}(-\bar{u})-m+p+1$.

Remarque 1. — En utilisant le théorème 1 de [1] et un argument classique de transformation de Mellin (*voir* [1] prop. 5), on obtient une nouvelle démonstration du fait que, sous les hypothèses du théorème ci-dessus, on a $r\in\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que toute valeur propre de la monodromie est racine de l'unité dans le cas analytique local.

Remarque 2. — En utilisant les résultats récents de B. Malgrange sur le lien entre polynôme de Bernstein-Sato et monodromie (*voir* [M. 2]) on obtient, comme corollaire du théorème démontré plus haut, que toute racine du polynôme de Bernstein-Sato de f produit effectivement une série de pôles dans le prolongement analytique de $|f|^{2z}$.

Pour terminer, nous allons montrer comment le théorème prouvé ici permet de montrer le résultat suivant, dû à B. Malgrange (*voir* [M 1]) :

Dans la situation du théorème, si $b\in\mathbb{C}[z]$ désigne le polynôme de Bernstein-Sato de f, et si l'on pose :

$$b^{\exp}(z)=\underset{j}{\pi}\,(z-\exp 2\,i\,\pi\,a_j)$$

où $b(z)=\underset{j}{\pi}(z-a_j)$, alors $(z-\exp(-i\pi r))^k$ divise $b^{\exp}$.

Démonstration. — Le prolongement analytique de $|f|^{2z}$ fait apparaître des facteurs du type $b(z)\,b(z+1)\ldots b(z+q)\,\bar{b}(z)\,\bar{b}(z+1)\ldots\bar{b}(z+q)$ pour $\mathrm{Re}(z+q)>0$, où l'on a posé $\bar{b}(z)=\overline{b(\bar{z})}$ (*voir* [1] prop. 5). Il s'agit de se débarrasser des facteurs $\bar{b}(z+j)$! En fait ceci repose sur la remarque suivante : pour faire le prolongement méromorphe pour $\mathrm{Re}(z+m+2)>0$ de

$$\int_X |f|^{2z}\bar{f}^{-j}\theta \qquad \text{où} \quad \theta\in C_c^\infty(X)^{n+1,\,n+1}$$

il suffit d'introduire un facteur $b(z)b(z+1)\ldots b(z+\mathrm{M})$; en effet, en utilisant $(\mathrm{M}+1)$-fois l'identité de Bernstein pour f on obtiendra :

$$b(z)b(z+1)\ldots b(z+\mathrm{M})\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\theta=\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}f^{\mathrm{M}+1}\bar{f}^{-j}\mathrm{Q}_z^{\mathrm{M}+1}(\theta)$$

où $\mathrm{Q}_z^{\mathrm{M}+1}$ désigne l'adjoint de l'opérateur $\mathrm{P}_z^{\mathrm{M}+1}$ qui vérifie

$$\mathrm{P}_z^{\mathrm{M}+1}f^{z+\mathrm{M}+1}=b(z)\,b(z+1)\;\ldots\;b(z+\mathrm{M})\,f^z$$

($\mathrm{P}_z^{\mathrm{M}+1}$ est un opérateur différentiel holomorphe sur X qui dépend polynomialement de z, et il en est de même pour $\mathrm{Q}_z^{\mathrm{M}+1}$).

Si on prend $\mathrm{M}>j+2m+3$ le membre droite sera holomorphe sur l'ouvert $\mathrm{Re}(z+m+2)>0$ et donc l'existence d'un pôle d'ordre $\geqq k$ en $z=-r/2-m-1$ pour $\int_{\mathrm{X}}|f|^{2z}\bar{f}^{-j}\theta$ qui est prouvée (pour θ bien choisie) montre que $b^{\exp}$ est divisible par $(z-\exp(-i\pi r))^k$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Barlet, *Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration sur les fibres* (*Inv. Math.*, vol. 68, 1982).

[D] P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers* (*Lecture Notes* n° 163, Springer-Verlag, 1970).

[K] M. Kashiwara, B-*functions and Holonomic Systems* (*Inv. Math.*, vol. 38-1, 1976).

[M 1] B. Malgrange, *Polynôme de Bernstein-Sato*, (Publication de l'IRMA de Strasbourg, vol. 28, RCP 25, 1980).

[M 2] B. Malgrange, *Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente* [*Colloque d'Analyse et Topologie sur les espaces singuliers*, Luminy, 1981 (à paraître)].

[$\mathcal{M}$] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces* (*Ann. of Math. Studies* 61, Princeton, 1968).

(Manuscrit reçu le 14 février 1983, révisé le 28 avril 1983)

D. Barlet
Université Nancy-I,
U.E.R. Sciences Mathématiques,
E.R.A., n° 839, B.P. n° 239,
54506 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex.