Annales scientifiques de l'É.N.S.

Christiane Rondeaux

Classes de Schatten d'opérateurs pseudo-différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 1 (1984), p. 67-81

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_1_67_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 67 à 81.

CLASSES DE SCHATTEN D'OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

PAR CHRISTIANE RONDEAUX

Introduction

Dans cet article, nous étudions les opérateurs pseudo-différentiels de la classe de Schatten $\mathscr{I}_P$ ($A \in \mathscr{I}_P$ si et seulement si $|A|^P$ est à trace) : le théorème principal donne des conditions suffisantes sur le symbole a de A (dans la correspondance de H. Weyl entre symboles et opérateurs) pour que A appartienne à $\mathscr{I}_P$.

Les versions les plus modernes d'opérateurs pseudo-différentiels introduisent, comme on sait, des structures riemanniennes sur l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$: moyennant certaines hypothèses géométriques sur cette structure, on sait que l'opérateur de symbole a est borné dès qu'un nombre suffisant de ses dérivées (prises selon des vecteurs « normalisés » au point considéré pour la norme euclidienne attachée à la structure riemannienne) sont bornées. C'est une description tout à fait analogue que nous donnons ici pour les opérateurs de la classe $\mathscr{I}_P$.

Les hypothèses faites sur a porteront sur l'appartenance à L^P des dérivées normalisées de a. Quant aux hypothèses sur la géométrie riemannienne, nous nous limiterons au cas où celle-ci est symplectique (i. e. la norme en tout point est symplectique); alors, pour $2 < p \leqslant \infty$, l'hypothèse faite sur la géométrie sera essentiellement celle proposée par A. Unterberger [8] pour la continuité des opérateurs pseudo-différentiels; pour $1 \leqslant p < 2$, l'hypothèse sera beaucoup plus faible; dans tous les cas, cette hypothèse est, pour un champ de normes symplectiques, plus faible que l'hypothèse de « métrique tempérée » de L. Hörmander.

Signalons que dans le cas particulier où la structure riemannienne est celle attachée aux classes $S_{\delta,\delta}$ de L. Hörmander, avec une notation traditionnelle, une étude analogue a été faite par S. Aoki [1]. Mais, même dans ce cas particulier, les résultats ne sont pas comparables, puisque S. Aoki n'utilise pas la correspondance de Weyl entre symboles et opérateurs, et que d'autre part sa méthode conduit à l'exigence d'une classe de différentiabilité du symbole indépendante de p : or il serait naturellement agréable que le nombre de dérivées demandé soit voisin de O pour p voisin de 2, exigence qui est presque remplie dans ce travail, à ceci près que l'on exige un nombre de dérivées entier et pair.

Les méthodes enfin sont totalement différentes : nous proposons d'employer la méthode de décomposition d'un opérateur pseudo-différentiel en somme d'opérateurs de rang 1 qui a déjà rendu des services dans l'examen de la continuité des opérateurs.

A la fin de cet article, nous donnons dans le cas où le champ de normes est constant, une caractérisation des opérateurs dont les symboles ont des dérivées de tous ordres dans L^p, généralisant un résultat que R. Beals [2] a démontré dans le cas $p=\infty$.

Les résultats de cet article ont été exposés aux Journées d'Équations aux Dérivées Partielles de Saint-Jean-de-Monts en 1980, annoncés dans une Note aux *Comptes Rendus* en avril 1980 et démontrés dans une thèse de 3^e cycle soutenue à Reims en 1980.

§ 1. Notations et rappels

FORMALISME DE WEYL. — L'espace de phase est $\mathbb{R}^{2n}$, muni de la forme symplectique définie par la formule $[(x, \xi), (y, \eta)] = -\langle x, \eta \rangle + \langle y, \xi \rangle$.

On dit qu'une norme euclidienne est symplectique si elle admet une base orthonormale dont la matrice de passage relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ est symplectique.

Pour tout $Z=(z, \zeta) \in \mathbb{R}^{2n}$, soit τ_Z la translation de phase opérant sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ de la façon suivante :

$$\tau_Z u(x) = u(x-z) e^{2i\pi \langle x-(z/2), \zeta \rangle}$$

La quantification, c'est-à-dire la correspondance entre symbole et opérateur, que l'on utilisera est celle de Weyl : à tout symbole $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, elle associe l'opérateur $\mathrm{Op}_{1/2}(a)$ définie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\mathrm{Op}_{1/2}(a)u(x) = \iint a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{2i\pi \langle x-y, \xi \rangle} u(y)\, dy\, d\xi .$$

On a aussi

$$(\mathrm{Op}_{1/2}(a)u, v) = \int a(\mathrm{X}) \mathrm{H}(u, v, \mathrm{X})\, d\mathrm{X}$$

où $\mathrm{H}(u, v)$ est la fonction de Wigner définie pour u et v dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\mathrm{H}(u.\ v, x, \xi) = 2^n \int u(x+z) \overline{v}(x-z) e^{-4i\pi \langle z, \xi \rangle}\, dz .$$

Par ailleurs, cette fonction de Wigner $\mathrm{H}(u, v)$ est le symbole de l'opérateur $\mathscr{H}(u, v)$ de rang 1, défini pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathscr{H}(u, v)\varphi = (\varphi, v)u .$$

On trouvera d'autres précisions sur le calcul de Weyl dans ([8], § 1).

RAPPELS SUR LES CLASSES DE SCHATTEN. — Soit A un opérateur compact sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et soit, $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres non nulles de $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on dit que A appartient à la classe de Schatten $\mathscr{I}_p$ si la suite (λ_k) appartient à l'espace l^p des suites de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable; l'espace des opérateurs à trace est $\mathscr{I}_1$, l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt est $\mathscr{I}_2$ et l'espace des opérateurs compacts sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est $\mathscr{I}_\infty$.

Les propriétés de ces classes d'opérateurs que nous utiliserons se trouvent dans [5]. Rappelons ainsi que pour tout $p \in [1, \infty]$, $\mathscr{I}_p$ est un espace de Banach : pour $p < \infty$, il est muni de la norme définie par :

$$\| A \|_{\mathscr{I}_p} = (\sum_k \lambda_k^p)^{1/p} = (\operatorname{Trace} | A |^p)^{1/p} ;$$

pour $p = \infty$, $\mathscr{I}_\infty$ est muni de la norme de l'espace $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ des opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Rappelons aussi, que l'espace $[\mathscr{I}_{p_1}, \mathscr{I}_{p_2}]_t$ obtenu par interpolation holomorphe entre les classes $\mathscr{I}_{p_1}$ et $\mathscr{I}_{p_2}$, $p_1 \leqslant p_2$, est la classe $\mathscr{I}_{p_t}$ où $p_t^{-1} = t p_2^{-1} + (1-t) p_1^{-1}$.

§ 2. Conditions suffisantes sur un symbole pour que l'opérateur attaché soit dans une classe de Schatten

On suppose dans tout ce qui suit que l'espace de phase est muni d'un champ de normes symplectiques $Y \mapsto \| \cdot \|_Y$, vérifiant la condition :

(A) : Il existe $C > 0$ telle que, pour tous X, Y, Z dans $\mathbb{R}^{2n}$, l'inégalité

$$\| X - Y \|_Y \leqslant C^{-1} \qquad \text{implique} \quad \| Z \|_X \leqslant C \| Z \|_Y .$$

Ce champ de normes n'est autre que la structure riemanienne dont nous avons parlé dans l'introduction, à ceci près qu'on ne suppose aucune régularité sur ce champ. Pour démontrer le résultat essentiel de ce paragraphe, il faudra faire d'autres hypothèses. La première est une condition très faible sans doute liée à la méthode :

(B) $$\sup_X \int e^{-4\pi \| X - Y \|_Y^2} dY < \infty .$$

Ensuite, soit $\| \quad \|_{Y,Y'}$ la norme euclidienne, mais en général non symplectique définie par

$$\| X \|_{Y,Y'}^2 = 2 \inf_{X_1 + X_2 = X} (\| X_1 \|_Y^2 + \| X_2 \|_{Y'}^2),$$

et soit $\det_{Y,Y'}$ le déterminant de la forme quadratique $\| \quad \|_{Y,Y'}^2$, la condition (C) qui suit suffit (*cf.* [8]) pour assurer la continuité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ des opérateurs dont les symboles ont des dérivées « normalisées » bornées en un nombre suffisant.

(C) : il existe $m_0 > 0$ tel que $\det_{Y,Y'}^{1/4} (1 + \| Y - Y' \|_{Y,Y'}^2)^{-m_0}$ soit le noyau d'un opérateur borné sur L^2 $(\mathbb{R}^n)$.

Les conditions (B) et (C) sont vérifiées s'il existe $c > 0$ et $M > 0$ tels que l'on ait, quels que soient X et $Y \in \mathbb{R}^{2n}$ l'inégalité :

$$1 + \| Y - X \|_X \leqslant c (1 + \| Y - X \|_{X,Y})^M .$$

Il en est ainsi en particulier si le champ de normes définit une métrique « tempérée » au sens de L. Hörmander [3]; quant à la condition (A), elle est supposée par tous les auteurs qui ont traité de ces questions, et appelée par L. Hörmander « condition de variation lente ».

On introduit maintenant les conditions sur les symboles qui permettront aux opérateurs attachés d'être dans une classe $\mathscr{I}_{\mathrm{P}}$.

Si $V=(V_1, \ldots, V_{2n})$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$, la notation $V(D)$ désigne l'opérateur différentiel de premier ordre

$$V(D)=\sum_1^n \left(V_j \frac{\partial}{\partial x_j} + V_{j+n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

Soit $L_k^p(\mathbb{R}^{2n})$, $(1 \leq p < \infty)$ le complété de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ pour la norme $\| \quad \|_{L_k^p}$ avec

$$\| a \|_{L_k^p} = \sum_{q \leq k} \left(\int \left(\sup_{\|V^r\|_X \leq 1} | V^1(D) \ldots V^q(D) a(X) | \right)^p dX \right)^{1/p},$$

et soit $C_0^k(\mathbb{R}^{2n})$ le complété de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ pour la norme $\| \quad \|_{L_k^\infty}$ avec :

$$\| a \|_{L_k^\infty} = \sum_{q \leq k} \sup_X \left(\sup_{\|V^r\|_X \leq 1} | V^1(D) \ldots V^q(D) a(X) | \right).$$

La borne supérieure est prise sur l'ensemble des q-uples $(V^1, \ldots, V^q)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^{2n}$, vérifiant chacun $\| V^r \|_X \leqslant 1$. Pour $p=\infty$, ce sont les normes qui interviennent pour démontrer la continuité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ des opérateurs [8]. Bien entendu, l'espace L_k^p dépend essentiellement du champ de normes considéré.

THÉORÈME 1. — *On suppose que le champ de normes symplectiques vérifie la condition* (A). *On suppose en outre que si* $p \in [1, 2]$, *la condition* (B) *est vérifiée, et si* $p \in [2, \infty]$, *les conditions* (B) *et* (C) *sont vérifiées.*

Soit k le plus petit entier pair tel que $k > 2n((2/p)-1)$ *pour* $p \in [1, 2]$ *et* $k > (2m_0+n)(1-(2/p))$ *pour* $p \in [2, \infty]$.

L'application $a \mapsto \mathrm{Op}_{1/2}(a)$ *peut-être étendue en une application continue de* L_k^p, $1 \leq p < \infty$ (resp. C_0^k) *dans* $\mathscr{I}_p$, $1 \leq p < \infty$ (resp. $\mathscr{I}_\infty$).

Il est classique que $\mathrm{Op}_{1/2}(a)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si et seulement si $a \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$. D'autre part, on montrera facilement (lemmes 1 et 4) que $\mathrm{Op}_{1/2}(a) \in \mathscr{I}_1$ (resp. $\mathscr{I}_\infty$) dès que $a \in L_k^1$ (resp. $a \in C_0^k$). Il paraît alors naturel d'essayer de démontrer le théorème 1 en utilisant une méthode d'interpolation. Cependant, l'interpolation directe sur les symboles est rendue malaisée par la nécessité d'étudier les puissances complexes de l'opérateur de Laplace-Beltrami attaché à la structure riemannienne sur l'espace de phase définie par le champ de normes symplectiques. Il sera plus commode d'utiliser une méthode qui s'est révélée efficace pour l'étude de la continuité sur L^2 des opérateurs (*cf.* [8]) et qui consiste à exprimer les opérateurs pseudo-différentiels comme somme d'opérateurs de rang 1.

DÉCOMPOSITION DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS COMME SOMME D'OPÉRATEURS DE RANG 1. — Soit g une fonction de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ réelle, positive, à support dans $]-\infty, C^{-2}]$ [la constante C est celle qui intervient dans la condition (A)], et telle que $g(0) \neq 0$.

Soit

$$f_Y(X)=\left(\int g(\|X-T\|_T^2)e^{-2\pi\|X-T\|_T^2}dT\right)^{-1} g(\|X-Y\|_Y^2)\,;$$

La famille $(f_Y)_{Y\in\mathbb{R}^{2n}}$ vérifie les conditions suivantes :

$$\text{support}\, f_Y \subset \{X\,;\, \|X-Y\|_Y \leqslant C^{-1}\} \tag{2.1}$$

et

$$\int f_Y(X)e^{-2\pi\|X-Y\|_Y^2}dY=1. \tag{2.2}$$

On pose, pour $a\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n})$,

$$K(Y,Z)=2^n\int a(X)f_Y(X)e^{-4i\pi[X,Z]}dX. \tag{2.3}$$

Soit φ_Y un état fondamental de l'oscillateur harmonique $\mathrm{Op}_{1/2}(X\mapsto\pi\|X-Y\|_Y^2)$ c'est-à-dire une fonction propre normalisée correspondant à la valeur propre $n/2$ de ce même opérateur. (On trouvera une forme explicite de φ_Y dans [8] : contentons-nous de rappeler ici que $\varphi_Y(x)$ s'écrit $Ce^{-q(x)}$ où $C\in\mathbb{C}$ et q est une forme quadratique complexe convenable). A l'aide de (2.2) et de la formule

$$H(\varphi_Y,\varphi_Y,X)=2^n e^{-2\pi\|X-Y\|_Y^2},$$

que l'on peut déduire des formules du paragraphe 1 de [9], on montre que :

$$\mathrm{Op}_{1/2}(a)=\iint K(Y,Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y,\tau_Z\varphi_Y)dY\,dZ. \tag{2.4}$$

L'intérêt de cette expression est que le comportement en Z de la fonction K(Y, Z) traduit à lui seul la classe de différentiabilité de a, la variable Y sert seulement à rappeler que les champs de dérivation à considérer sont normalisés relativement à $\|\ \|_Y$.

Démonstration du théorème 1 lorsque $p\in[1,2]$. — On commence par chercher des conditions sur K, faisant intervenir des hypothèses de différentiabilité en la deuxième variable, qui permettront à l'opérateur $\iint K(Y,Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y,\tau_Z\varphi_Y)dY\,dZ$ d'être dans $\mathscr{I}_1$ ou $\mathscr{I}_2$. Pour exprimer ces conditions sous une forme qui facilite ensuite l'interpolation, on introduit ici des opérateurs de régularisation liés au champ de normes.

Considérons les noyaux de Bessel G_α définis sur $\mathbb{R}^{2n}$ pour $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ par la formule (*cf.* [7], V, 3),

$$G_\alpha(X)=(4\pi)^{-\alpha/2}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{-1}\int_0^\infty e^{-\pi|X|^2/t}e^{-t/4\pi}t^{(-n+\alpha/2)-1}dt,$$

et définissons la transformation $\mathscr{G}$ agissant sur les fonctions de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ par

$$\mathscr{G}u(Y)=2^n\int u(X)e^{4i\pi[Y,X]}dX.$$

La transformation $\mathscr{G}$ est la composition d'une transformation linéaire et de la transformation de Fourier; on obtient ainsi

$$\mathscr{G}(G_\alpha)(X)=(1+16\pi^2\,|\,X\,|^2)^{-\alpha/2}. \tag{2.5}$$

Soit alors J_α l'opérateur défini pour $\operatorname{Re}\alpha>0$ par

$$J_\alpha f=G_\alpha * f.$$

Grâce à (2.5), on voit que sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$, $J_\alpha(1-\Delta)^{\alpha/2}=Id$.

Soit Y fixé dans $\mathbb{R}^{2n}$ et soit (V_j), $1\leqslant j\leqslant 2n$, une base symplectique orthonormée pour $\|\cdot\|_Y$. On pose $\Delta_Y=\sum_{j=1}^{2n}V_j^2(D)$. Soit V_Y la matrice symplectique dont les vecteurs colonnes sont les V_j, $1\leqslant j\leqslant 2n$; grâce à la condition (A), ce n'est pas une restriction de supposer que V_Y dépend mesurablement de Y. Soit γ_Y la transformation opérant sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{2n}$ de la manière suivante :

$$\gamma_Y f=f\circ V_Y.$$

On a alors pour tout entier k :

$$(1-\Delta_Y)^k=\gamma_Y^{-1}(1-\Delta)^k\gamma_Y.$$

Pour tout $Y\in\mathbb{R}^{2n}$, γ_Y opère de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. De plus, comme la matrice V_Y est symplectique,

$$\mathscr{G}(\gamma_Y f)=\gamma_Y(\mathscr{G}(f)), \tag{2.6}$$

en outre, puisque le déterminant de V_Y vaut 1, on peut en déduire que γ_Y est une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^{2n})$ pour tout $p\in[1,\infty]$.

Enfin, pour tout $Y\in\mathbb{R}^{2n}$ et tout α tel que $\operatorname{Re}\alpha>0$, soit $J_{Y,\alpha}$ l'opérateur $\gamma_Y^{-1}J_\alpha\gamma_Y$. On a alors, toujours parce que V_Y a un déterminant égal à 1 :

$$J_{Y,\alpha}f=(\gamma_Y^{-1}G_\alpha)*f. \tag{2.7}$$

Pour toute fonction K définie sur $\mathbb{R}^{4n}$ et tout $Y\in\mathbb{R}^{2n}$, on notera K_Y la fonction $Z\mapsto K(Y,Z)$.

LEMME 1. — *On suppose que le champ de normes symplectiques vérifie la condition* (A). *Pour tout α complexe tel que* $\operatorname{Re}\alpha>2n$, *il existe une constante* C *telle que pour tout* $K\in L^1(\mathbb{R}^{4n})$ *on ait* :

$$\left\|\iint\mathscr{G}(J_{Y,\alpha}K_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y,\tau_Z\varphi_Y)dY\,dZ\right\|_{\mathscr{S}_1}\leqslant C\,\|K\|_{L^1(\mathbb{R}^{4n})}. \tag{2.8}$$

Preuve. — Il suffit de vérifier (2.8) pour K dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{4n})$. On a :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(J_{Y,\alpha}K_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ \right\|_{\mathscr{I}_1}$$
$$\leqslant \iint |\mathscr{G}(J_{Y,\alpha}K_Y)(Z)| \; \| \mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y) \|_{\mathscr{I}_1} dYdZ.$$

Or $\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)$ est un opérateur de rang 1, donc :

$$\| \mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y) \|_{\mathscr{I}_1} = \mathrm{Trace}\,(\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)) = 1.$$

De plus, utilisant (2.7), (2.6) puis (2.5), on montre que

$$\iint |\mathscr{G}(J_{Y,\alpha}K_Y)(Z)|\, dYdZ = 2^n \iint (1+16\pi^2 \| Z \|_Y^2)^{-\mathrm{Re}\,\alpha/2} \left| \int K(Y,X)e^{-4i\pi[X,Z]}dX \right| dZdY$$

et on en déduit (2.8) pour $\mathrm{Re}\,\alpha > 2n$.

LEMME 2. — *On suppose que le champ de normes* $Y \mapsto \| \cdot \|_Y$ *vérifie les conditions* (A) *et* (B).

Alors il existe une constante C *telle que, pour tout* $K \in L^2(\mathbb{R}^{4n})$ *on ait* :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(K_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ \right\|_{\mathscr{I}_2} \leqslant C \| K \|_{L^2(\mathbb{R}^{4n})}.$$

Preuve. — L'opérateur $\iint \mathscr{G}(K_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ$ a pour symbole

$$X \mapsto \iint \mathscr{G}(K_Y)(Z)H(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y, X)\, dYdZ.$$

Or, on a (*cf.* [8]) :

$$H(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y, X) = e^{4i\pi[X,Z]}H(\varphi_Y, \varphi_Y, X) = 2^n e^{4i\pi[X,Z]}e^{-2\pi\|X-Y\|_Y^2}$$

d'où l'on déduit que :

$$\iint \mathscr{G}(K_Y)(Z)H(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ = \int K(Y,Z)e^{-2\pi\|X-Y\|_Y^2}dY.$$

De plus, comme $\| \mathrm{Op}_{1/2}(a) \|_{\mathscr{I}_2} = \| a \|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$ pour tout symbole a, on a :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(K_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ \right\|_{\mathscr{I}_2} = \left(\int \left| \int K(Y,Z)e^{-2\pi\|X-Y\|_Y^2}dY \right|^2 dX \right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\int \left(\int |K(Y,Z)|^2 dY \right) \left(\int e^{-4\pi\|X-Y\|_Y^2}dY \right) dX \right)^{1/2}$$
$$\leqslant \left(\sup_X \int e^{-4\pi\|X-Y\|_Y^2}dY \right)^{1/2} \| K \|_{L^2(\mathbb{R}^{4n})}.$$

La condition (B) permet alors de conclure.

LEMME 3. — *On suppose que le champ de normes symplectiques vérifie les conditions* (A) *et* (B).

Soit $p\in[1,2]$; *pour tout* α *complexe tel que* $\operatorname{Re}\alpha>2n((2/p)-1)$, *il existe une constante* C *telle que pour tout* $K\in L^p(\mathbb{R}^{4n})$ *on ait* :

$$\left\|\iint \mathscr{G}(J_{Y,\alpha}K_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y,\tau_Z\varphi_Y)\,dY\,dZ\right\|_{\mathscr{I}_p}\leqslant C\,\|K\|_{L^p(\mathbb{R}^{4n})}.$$

Preuve. — On procède par interpolation holomorphe.

Soit (ρ_δ) une famille de fonctions de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ telle que pour toute $g\in L^p(\mathbb{R}^{2n})$, $\rho_\delta * g$ converge dans $L^p(\mathbb{R}^{2n})$ vers g quand δ tend vers zéro, et telle que pour tout δ, $\|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}=1$. On notera g_δ la fonction $\rho_\delta * g$.

Pour tout α complexe, on notera $J'_{Y,\alpha}$ l'opérateur $e^{\alpha^2}J_{Y,\alpha}$.

L'introduction du facteur e^{α^2} permet à la famille $(e^{\alpha^2}G_\alpha)$ d'être bornée dans L^1 indépendemment de $\operatorname{Im}\alpha$ lorsque α reste dans une bande $\{0<\alpha_1\leqslant\operatorname{Re}\alpha\leqslant\alpha_2\}$.

Soient $\alpha_1>2n$ et $\alpha_0>0$. Soit S la bande du plan complexe définie par

$$S=\{z\in\mathbb{C};\quad 0\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant 1\}.$$

Compte tenu des résultats démontrés dans les lemmes 1 et 2, le lemme 3 est une conséquence du théorème d'interpolation holomorphe de Calderon-Lions [5], appliqué à l'opérateur $T_\delta(z)$ défini pour $z\in S$ par

$$T_\delta(z)(K)=\iint \mathscr{G}(J'_{Y,z\alpha_1+(1-z)\alpha_0}(K_Y)_\delta)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y,\tau_Z\varphi_Y)\,dY\,dZ.$$

Pour terminer la démonstration du théorème 1 dans le cas $p\in[1,2]$, il reste maintenant à traduire le lemme 3 en des conditions sur un symbole pour que l'opérateur attaché soit dans $\mathscr{I}_p$.

Soit $a\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Nous avons vu que

$$\operatorname{Op}_{1/2}(a)=\iint K(Y,Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y,\tau_Z\varphi_Y)\,dY\,dZ$$

avec

$$K(Y,Z)=2^n\int a(X)f_Y(X)e^{-4i\pi[X,Z]}\,dX.$$

Donc

$$\operatorname{Op}_{1/2}(a)=\iint \mathscr{G}(af_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y,\tau_Z\varphi_Y)\,dY\,dZ.$$

Pour tout $Y\in\mathbb{R}^{2n}$, et pour k entier pair tel que $k>2n((2/p)-1)$, on a $J_{Y,k}(1-\Delta_Y)^{k/2}=Id$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On peut donc écrire, d'après le lemme 3 :

$$\|\operatorname{Op}_{1/2}(a)\|_{\mathscr{I}_p}\leqslant M\left(\iint\left(\int|(1-\Delta_Y)^{k/2}[a(X)f_Y(X)]|^p\,dY\right)dX\right)^{1/p}.$$

Or, $\Delta_Y = \sum_{j=1}^{2n} V_j^2(D)$ où (V_j), $1 \leqslant j \leqslant 2n$, forme une base symplectique orthonormée pour $\| \cdot \|_Y$. Sur le support de f_Y, on a d'après (2.1) $\| X-Y \|_Y \leqslant C^{-1}$ donc $\| V_j \|_X \leqslant C \| V_j \|_Y = C$. D'où

$$\| \mathrm{Op}_{1/2}(a) \|_{\mathscr{I}_p} \leqslant M' \sum_{0 \leqslant q \leqslant k} \left(\iint \left(\sup_{\|V^j\|_X \leqslant 1} \left| \left(\prod_{j=1}^{q} V^j(D) \right) a(X) \right| \right)^p \right.$$
$$\left. \left(\sup_{\|V^j\|_X \leqslant 1} \left| \left(\prod_{j=1}^{k-q} V^j(D) \right) f_Y(X) \right| \right)^p dY dX \right)^{1/p}.$$

La famille f_Y forme un ensemble borné de symboles d'ordre 0 (*cf.* [8]) par suite, pour tout q, on a avec une constante K indépendante de Y,

$$\sup_X \left(\sup_{\|V^j\|_X \leqslant 1} \left| \left(\prod_{j=1}^{k-q} V^j(D) \right) f_Y(X) \right| \right) \leq K.$$

De plus, l'ensemble $\{ Y ; \| X-Y \|_Y \leqslant C^{-1} \}$ est de mesure bornée uniformément en X. On a donc :

$$\sup_X \left(\int \sup_{\|V^j\|_X \leqslant 1} \left| \left(\sum_{j=1}^{k-q} V^j(D) \right) f_Y(X) \right|^p dY \right) < \infty.$$

On en déduit que $\| \mathrm{Op}_{1/2}(a) \|_{\mathscr{I}_p} \leqslant K' \| a \|_{L_k^p}$, ce qui démontre le théorème 1 pour $p \in [1, 2]$.

Remarque. — Cette dernière démonstration, avec le lemme 1 permet de montrer, sans autre condition sur la géométrie que la condition (A), que $\mathrm{Op}_{1/2}(a) \in \mathscr{I}_1$ si $a \in L_k^1$ avec $k > 2n$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 LORSQUE $p \in [2, \infty]$.

LEMME 4. — *Supposons que le champ de normes symplectiques vérifie les conditions* (A) *et* (C).

Pour $\varepsilon > 0$ *fixé, soit* $\tilde{K}(Y, X) = e^{-\pi\varepsilon|Y|^2} e^{-\pi\|X-Y\|_Y^2} K(Y, X)$.

Alors, pour tout α *complexe tel que* $\mathrm{Re}\,\alpha > 2m_0 + n$, *il existe une constante* C, *indépendante de* ε, *telle que pour tout* $K \in L^\infty(\mathbb{R}^{4n})$ *on ait* :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(J_{Y,\alpha} \tilde{K}_Y)(Z) \mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z \varphi_Y) dY dZ \right\|_{\mathscr{I}_\infty} \leqslant C \| K \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{4n})}.$$

Preuve. — Puisque la condition (C) est vérifiée, on peut utiliser la proposition 8.1 de [8], d'où l'on déduit que pour tout $m > m_0 + (n/2)$, on a :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(J_{Y,\alpha} \tilde{K}_Y)(Z) \mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z \varphi_Y) dY dZ \right\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq C \sup_{Y,Z} | (1 + \| Z \|_Y^2)^m \mathscr{G}(J_{Y,\alpha} \tilde{K}_Y)(Z) |.$$

Or, d'après (2.7) et (2.5), on a :

$$\mathscr{G}(J_{Y,\alpha} \tilde{K}_Y)(Z) = 2^n (1 + 16\pi^2 \| Z \|_Y^2)^{-\alpha/2} \mathscr{G}(\tilde{K}_Y)(Z).$$

Donc, si $\mathrm{Re}\,\alpha > 2m > 2m_0 + n$, on a :

$$\sup_{Y,Z} | (1 + \| Z \|_Y^2)^m \mathscr{G}(J_{Y,\alpha} \tilde{K}_Y)(Z) | \leq 2^n \sup_{Y,Z} | \mathscr{G}(\tilde{K}_Y)(Z) |.$$

De plus,

$$\sup_{Y,Z} |\mathscr{G}(\tilde{K}_Y)(Z)| = \sup_{Y,Z} \left| \int K(Y, X) e^{-\pi\varepsilon|Y|^2} e^{-\|X-Y\|_Y^2} e^{4i\pi[Z,X]} dX \right| \leq C \| K \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{4n})}.$$

On en conclut que :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(J_{Y,\alpha}\tilde{K}_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ \right\|_{\mathscr{L}(L^2)} \leq C \| K \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{4n})}.$$

En outre, le facteur $e^{-\pi\varepsilon|Y|^2}e^{-\pi\|X-Y\|_Y^2}$ dans $\tilde{K}$ assure que $\mathscr{G}(J_{Y,\alpha}\tilde{K}_Y)(Z)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^{4n})$, donc que l'opérateur $\iint \mathscr{G}(J_{Y,\alpha}\tilde{K}_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ$ est dans $\mathscr{I}_1$, donc est compact.

On a ensuite, comme conséquence du lemme 2, le :

LEMME 5. — *Supposons que le champ de normes symplectiques vérifie les conditions* (A) *et* (B).

Alors il existe une constante C, *indépendante de* ε, *telle que pour tout* $K \in L^2(\mathbb{R}^{4n})$ *on ait* :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(\tilde{K}_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ \right\|_{\mathscr{I}_2} \leq C \| K \|_{L^2(\mathbb{R}^{4n})}.$$

Ces deux derniers lemmes permettent d'utiliser le théorème d'interpolation holomorphe comme dans le lemme 3 pour démontrer le résultat suivant :

LEMME 6. — *Supposons que le champ de normes vérifie les conditions* (A), (B) *et* (C). *Soit p réel tel que* $p \in [2, \infty]$, *et soit* α *réel tel que* $\alpha > (2m_0+n)(1-(2/p))$. *Il existe une constante* C, *indépendante de* ε, *telle que pour tout* $K \in L^p(\mathbb{R}^{4n})$ *on ait* :

$$\left\| \iint \mathscr{G}(J_{Y,\alpha}\tilde{K}_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ \right\|_{\mathscr{I}_p} \leq C \| K \|_{L^p(\mathbb{R}^{4n})}.$$

Remarque. — La constante C dans l'inégalité ci-dessus étant indépendante de ε, on peut, pour $p \in [2, \infty[$, supprimer le facteur $e^{-\varepsilon|Y|^2}$ dans $\tilde{K}$ pour obtenir la même inégalité avec, à la place de $\tilde{K}$, la fonction $e^{-\pi\|X-Y\|_Y^2}K(Y, X)$.

On peut maintenant démontrer le théorème 1 quand $p \in [2, \infty[$. Soit $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$. On a pour k entier pair tel que $k > (2m_0+n)(1-(2/p))$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Op}_{1/2}(a) = & \iint \mathscr{G}(af_Y)(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ \\ & = \iint \mathscr{G}(J_{Y,k}\cdot(1-\Delta_Y)^{k/2}(af_Y))(Z)\mathscr{H}(\tau_{-Z}\varphi_Y, \tau_Z\varphi_Y)dYdZ. \end{aligned}$$

On applique le lemme 6, où, compte tenu de la remarque qui le suit, on remplace $\tilde{K}(Y, X)$ par $e^{-\pi\|X-Y\|_Y^2}K(Y, X)$, et l'on obtient :

$$\| \mathrm{Op}_{1/2}(a) \|_{\mathscr{I}_p} \leq M\left(\iint \left(e^{\pi\|X-Y\|_Y^2} |(1-\Delta_Y)^{k/2}(a(X)f_Y(X))| \right)^p dXdY \right)^{1/p}.$$

Sachant d'autre part, que sur le support de f_Y on a $\| X-Y \|_Y \leq C^{-1}$, il ne reste qu'à terminer la démonstration comme dans le cas $p \in [1, 2]$.

Exemple 1. — Supposons que l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$ soit muni du champ de normes constant canonique. Alors le théorème 1 permet d'affirmer que $\mathrm{Op}_{1/2}(a) \in \mathscr{I}_p$ si

$$\sum_{0 \leq |\alpha| + |\beta| \leq k(p)} \left(\iint | D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi) |^p dx d\xi \right)^{1/p} < \infty , \tag{2.9}$$

avec $k(p)$ entier pair $> 2n((2/p)-1)$ si $p \in [1, 2]$, $k(p)=0$ si $p=2$, $k(p)$ entier pair $> 3n(1-(2/p))$ si $p \in]2, \infty[$.

Lorsque $p \in]2, \infty[$, on peut montrer que $\mathrm{Op}_{1/2}(a) \in \mathscr{I}_p$ dès que (2.9) est satisfaite avec $k(p)$ entier pair $> 2n(1-(2/p))$. Il suffit pour cela d'introduire à la place de la condition (C) une condition un peu plus fine mais un peu plus technique ([8], proposition 8.1), ce que nous n'avons pas fait par souci de simplicité.

Lorsque $p \in [1, 2]$, le résultat obtenu est optimal à deux unités prés au plus, dans le sens où le nombre de dérivées introduites est l'entier pair minimal possible. En effet, si l'on considère la famille d'opérateurs $A_\lambda = \mathrm{Op}_{1/2}(a_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ avec

$$a_\lambda(x, \xi) = e^{-2\pi\lambda(|x|^2 + |\xi|^2)} e^{4i\pi\langle x, \xi \rangle},$$

on peut montrer que lorsque λ tend vers l'infini

$$\| A_\lambda \|_{\mathscr{I}_p} \sim C\lambda^{-n+(n/p)}$$

où C ne dépend que de n et p, et, pour tout multi indice α,

$$\| D^\alpha a_\lambda \|_{L^p} = 0(\lambda^{-(n/p)+(|\alpha|/2)}).$$

Exemple 2. — Considérons maintenant la métrique sur l'espace de phase associée aux classes $S_{\delta,\delta}$, $0 \leq \delta < 1$, de L. Hörmander. Cette métrique est définie par le champ de normes

$$\| (x, \xi) \|_{(y,\eta)}^2 = (1 + | \eta |^2)^\delta | x |^2 + (1 + | \eta |^2)^{-\delta} | \xi |^2 .$$

Les conditions (A) et (B) sont satisfaites, ainsi que la condition (C) pour $m_0 > 2n$.

On peut alors affirmer que $\mathrm{Op}_{1/2}(a) \in \mathscr{I}_p$ si les conditions suivantes sur le symbole sont vérifiées :

$$\sum_{0 \leq |\alpha| + |\beta| \leq k(p)} \left(\iint | D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi) |^p (1 + | \xi |^2)^{p(\delta/2)(|\beta| - |\alpha|)} dx d\xi \right)^{1/p} < \infty$$

avec $k(p)$ entier pair $> 2n((2/p)-1)$ si $p \in [1, 2]$, $k(p)=0$ si $p=2$, $k(p)$ entier pair $> 3n(1-(2/p))$ si $p \in]2, \infty[$.

§ 3. Une caractérisation, dans le cas du champ de normes constant, des opérateurs dont les symboles ont des dérivées de tous ordres dans L^p.

Dans le chapitre précédent, nous avons donné des conditions suffisantes sur un symbole pour que l'opérateur attaché soit dans $\mathscr{I}_p$. Ici, nous procédons dans la direction opposée, nous contentant des deux résultats suivants, tous deux énoncés et démontrés dans le seul cas du champ de normes constant canonique.

Le premier résultat établit que le symbole « normal » d'un opérateur A dans la terminologie des physiciens (c'est en fait un régularisé gaussien convenable du symbole de A) est dans L^p si A appartient à $\mathcal{I}_p$; le deuxième est une généralisation d'une caractérisation par R. Beals des opérateurs pseudo-différentiels.

Commençons par une remarque : comme on peut le voir en étudiant la famille d'opérateurs $\mathrm{Op}_{1/2}(e^{-2\pi\lambda(|x|^2+|\xi|^2)}e^{4i\pi\langle x,\xi\rangle})$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, le symbole d'un opérateur de $\mathcal{I}_p$ n'est pas toujours dans L^p. Cependant, on peut prouver, avec la seule hypothèse $\mathrm{Op}_{1/2}(a)\in\mathcal{I}^p$ que certains régularisés de a sont dans L^p :

THÉORÈME 2. — *On suppose que le champ de normes symplectiques est constant. Pour tout opérateur* A *borné sur* $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, *on note* W(A) *le symbole normal de* A *défini sur* $\mathbb{R}^{2n}$ *par* $W(A)(Y)=(A\varphi_Y,\varphi_Y)$.

Soit $p\in[1,\infty]$; *si* A *est dans* $\mathcal{I}_p$, *alors* W(A) *appartient à* $L^p(\mathbb{R}^{2n})$.

Preuve. — Si $A\in\mathcal{I}_\infty$, on a, puisque $\|\varphi_Y\|_{L^2}=1$ pour tout Y,

$$|(A\varphi_Y,\varphi_Y)|\le\|A\|_{\mathcal{I}_\infty}.$$

D'autre part, si $A\in\mathcal{I}_1$, la décomposition polaire de A permet de trouver deux opérateurs de Hilbert-Schmidt A_1 et A_2 tels que :

$$A=A_1A_2 \tag{2.10}$$

et

$$\|A\|_{\mathcal{I}_1}=\|A_1\|_{\mathcal{I}_2}\cdot\|A_2\|_{\mathcal{I}_2} \tag{2.11}$$

On a donc :

$$\|W(A)\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n})}=\int|(A_2\varphi_Y,A_1^*\varphi_Y)|\,dY\le\left(\int\|A_2\varphi_Y\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dY\right)^{1/2}\left(\int\|A_1^*\varphi_Y\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dY\right)^{1/2}.$$

Pour montrer que $\|W(A)\|_{L^1}\le C\|A\|_{\mathcal{I}_1}$, il suffit maintenant de prouver, compte tenu de (2.10) et (2.11), que pour tout opérateur de Hilbert-Schmidt B, on a :

$$\left(\int\|B\varphi_Y\|^2_{L^2}dY\right)^{1/2}\le C\|B\|_{\mathcal{I}_2}.$$

Or, le champ de normes étant constant, on a pour toute $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$ (*cf.* [8]) :

$$\|u\|^2_{L^2}=\int|(u,\varphi_Z)|^2dZ.$$

Alors, si $B=\mathrm{Op}_{1/2}(b)\in\mathcal{I}_2$,

$$\int\|B\varphi_Y\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}dY=\iint|(B\varphi_Y,\varphi_Z)|^2dZdY=\iint|(b,H(\varphi_Z,\varphi_Y))|^2dZdY\le C\|b\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})},$$

où (*cf.* [8] lemme 2.2) C est la norme dans $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^{4n}))$ de l'opérateur de noyau K, avec

$$K(Y, Z, Y', Z') = (H(\varphi_Z, \varphi_Y), \quad H(\varphi_{Z'}, \varphi_{Y'})).$$

Par ailleurs, sachant que $H(u, v)$ est le symbole de $\mathscr{H}(u, v)$, on montre facilement que

$$(H(\varphi_Z, \varphi_Y), \quad H(\varphi_{Z'}, \varphi_{Y'})) = (\varphi_Y, \varphi_{Y'})(\varphi_Z, \varphi_{Z'}).$$

Comme d'autre part, $|(\varphi_Y, \varphi_{Y'})| = e^{-(\pi/2)\|Y-Y'\|^2}$, on en déduit que l'opérateur de noyau K est borné, et que $\| W(A) \|_{L^1} \leq C \| A \|_{\mathscr{I}_1}$.

Par interpolation holomorphe, on obtient enfin le résultat annoncé dans le théorème 2.

Ce résultat est encore valable quand le champ de normes symplectiques n'est pas constant. Il faut toutefois introduire une hypothèse sur la géométrie de l'espace de phase permettant d'utiliser les décompositions de l'identité de A. Unterberger [8].

Les détails et démonstrations se trouvent dans [6], ainsi que des applications aux espaces de Sobolev généraux de N. Lerner [4].

Nous allons maintenant montrer que les régularisés de Bessel d'ordre suffisamment grand du symbole d'un opérateur de $\mathscr{I}_p$ est dans L^p :

PROPOSITION 3.1. — *Soit* μ *la fonction définie sur* $[1, \infty]$ *par* :

$$\mu(p) = 2n\left(\frac{2}{p} - 1\right) \qquad \text{si} \quad p \in [1, 2]$$

et

$$\mu(p) = 2n\left(1 - \frac{2}{p}\right) \qquad \text{si} \quad p \in [2, +\infty].$$

Soit $p \in [1, +\infty]$ *et soit* $\alpha > \mu(p)$.

Si $A = Op_{1/2}(a)$ *est dans* $\mathscr{I}_p$, *alors* $a * G_\alpha$ *appartient à* $L^p(\mathbb{R}^{2n})$.

Preuve. — Rappelons que G_α est défini pour $\alpha > 0$ par :

$$G_\alpha(X) = (4\pi)^{-\alpha/2}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{-1} \int_0^\infty e^{-\pi|X|^2/t} e^{-t/4\pi} t^{(-n+(\alpha/2)-1)} dt.$$

Pour faire apparaître des régularisés gaussiens de a dans l'expression de $a * G_\alpha$, on va utiliser la formule suivante, valable pour $t > 1/2$:

$$e^{-(\pi/t)|X|^2} = 2^n \left(\frac{2t}{2t-1}\right)^n \int e^{-(2\pi/t-1)|Z|^2} e^{-2\pi|X-Z|^2} dZ, \tag{3.1}$$

on écrira alors :

$$a * G_\alpha = (4\pi)^{-\alpha/2}\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{-1} [a * f + a * g] \tag{3.2}$$

où

$$f(X) = \int_0^{1/2} e^{-\pi|X|^2/t} e^{-t/4\pi} t^{(-n+(\alpha/2)-1)} dt$$

et

$$g(X)=\int_{1/2}^{\infty} e^{-\pi|X|^2/t}e^{-t/4\pi}t^{(-n+(\alpha/2)-1)}dt,$$

et l'on traitera séparément les deux termes du second membre de (3.2).

En appliquant directement (3.1) à $a*g$, puis en utilisant le théorème 2, on montrera que, pour $\alpha>0$ et $p\in[1,\infty]$, si $A=\mathrm{Op}_{1/2}(a)\in\mathscr{I}_p$,

$$\|a*g\|_{L^p}\leq C\|A\|_{\mathscr{I}_p}.$$

Pour pouvoir appliquer (3.1) à $a*f$, on transforme $e^{-\pi|X|^2/t}$ par $\mathscr{G}$. On obtient :

$$\mathscr{G}(e^{-\pi|\cdot|^2/t})(X)=2^n t^n e^{-4\pi t|X|^2}.$$

Alors, d'après (3.1),

$$a*f=a*\left(X\mapsto\int_0^{1/2} e^{-t/4\pi}t^{((\alpha/2)-1)}2^{2n}\left(\frac{1}{1-2t}\right)^n\left(\int e^{-4\pi t|Z|^2/(1-2t)}e^{4i\pi[X,Z]}e^{-2\pi|X|^2}dZ\right)dt\right).$$

D'autre part,

$$a*(X\to e^{4i\pi[X,Z]}e^{-2\pi|X|^2})=2^{-n}(X\mapsto e^{4i\pi[X,Z]}(A\tau_Z\varphi_X,\tau_{-Z}\varphi_X)),$$

donc, d'après le théorème 2, on a, si $A=\mathrm{Op}_{1/2}(a)\in\mathscr{I}_1$,

$$\|a*f\|_{L^1}\leq C\|A\|_{\mathscr{I}_1}\left(\int_0^{1/2} e^{-t/4\pi}t^{(-n+(\alpha/2)-1)}dt\right).$$

D'où, si $\alpha>2n$,

$$\|a*f\|_{L^1}\leq C'\|A\|_{\mathscr{I}_1}.$$

De même, on montre que si $\alpha>2n$ et $A\in\mathscr{I}_\infty$,

$$\|a*f\|_{L^\infty}\leq C'\|A\|_{\mathscr{I}_\infty}.$$

Regroupant les deux termes de (3.2), on obtient donc, pour $\alpha>2n$,

$$\|G_\alpha*a\|_{L^1}\leq C\|A\|_{\mathscr{I}_1}\qquad\text{et}\qquad\|G_\alpha*a\|_{L^\infty}\leq C\|A\|_{\mathscr{I}_\infty}.$$

D'autre part, l'inégalité

$$\|G_\alpha*a\|_{L^2}\leq C\|A\|_{\mathscr{I}^2}$$

est triviale pour tout $\alpha>0$ et $A\in\mathscr{I}_2$; le théorème d'interpolation holomorphe de Calderon-Lions permet encore d'achever la démonstration.

THÉORÈME 3. — *Soit* F_j, $j=1,\ldots,2n$ *la famille d'opérateurs définie par* $F_j=\mathrm{Op}_{1/2}(x_j)$ *si* $j=1,\ldots,n$ *et* $F_j=\mathrm{Op}_{1/2}(\xi_{j-n})$ *si* $j=n+1,\ldots,2n$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *Pour tout* $\alpha\in\mathbb{N}^{2n}$, $\int|D^\alpha a(X)|^p dX<\infty$.

(2) *Pour tout entier k et tout k-uple $(j_1, \ldots, j_k)$, $[F_{j_1}, \ldots, [F_{j_k}, Op_{1/2}(a)] \ldots]$ appartient à $\mathcal{I}_p$.*

Preuve. — Le fait que (1) entraîne (2) est une conséquence du théorème 1 puisque les symboles des opérateurs $[F_{j_1}, \ldots, [F_{j_k}, \mathrm{Op}_{1/2}(a)] \ldots]$ sont des dérivées de a. On montre plus précisément que si k est fixé, pour avoir $[F_{j_1}, \ldots, [F_{j_k}, \mathrm{Op}_{1/2}(a)] \ldots]$ dans $\mathcal{I}_p$ pour tout k-uple $(j_1, \ldots, j_k)$, il suffit que $D^\alpha a$ soit dans L^p pour tout α tel que $|\alpha| \leq k+\mu(p)$ où $\mu(p)$ est le plus petit entier pair strictement supérieur à $2n\,|(2/p)-1|$.

Montrons maintenant que (2) entraîne (1). Soient k un entier et k' un entier pair tels que $k>k'>\mu(p)$. Si pour tout k-uple $(j_1, \ldots, j_k)$ l'opérateur $[F_{j_1}, \ldots, [F_{j_k}, \mathrm{Op}_{1/2}(a)] \ldots]$ appartient à $\mathcal{I}_p$, alors $D^\alpha a$ appartient à L^p pour tout α tel que $|\alpha| < k-k'$; en effet, si $[F_{j_1}, \ldots, [F_{j_k}, \mathrm{Op}_{1/2}(a)] \ldots] \in \mathcal{I}_p$ pour tout k-uple $(j_1, \ldots, j_k)$, $\mathrm{Op}_{1/2}(D^\beta a) \in \mathcal{I}_p$ pour tout β tel que $|\beta| \leq k$. Donc, d'après la proposition (3.1), $D^\beta a * G_\mu \in L^p$ pour tout β tel que $|\beta| \leq k$ et tout μ tel que $\mu > \mu(p)$. Soit maintenant α tel que $|\alpha| < k-k'$.

Alors, $G_{k'} * ((1-\Delta)^{k'/2} \cdot D^\alpha a) \in L^p$. On en déduit que $D^\alpha a$ appartient à L^p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Aoki, *On the Boundedness and the Nuclearity of Pseudo-Differential Operators* (*Comm. in Partial Differential Equations*, vol. 6, n° 8, 1981, p. 849-881).

[2] R. Beals *Characterization of Pseudo-Differential Operators and Applications* (*Duke Math. J.*, vol. 44, n° 1, 1977, p. 45-77).

[3] L. Hörmander, *The Weyl Calculus of Pseudo-Differential Operators* (*Comm. on Pure and Appl. Math.*, vol. 23, n° 3, 1979, p. 359-443).

[4] N. Lerner, *C. R. Acad. Sc.*, vol. 289, 1979, p. 663-666.

[5] M. Reed et B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. II Fourier Analysis Self-Adjointness*, Acad. Press, New York, 1975.

[6] C. Rondeaux, *Thèse 3e cycle*, Reims.

[7] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.

[8] A. Unterberger, *Les opérateurs métadifférentiels* (*Lecture Notes in Physics*, n° 126, 1980, p. 205-241).

[9] A. Unterberger, *Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 29, n° 3, 1979, p. 201-221).

(Manuscrit reçu le 28 juillet 1982,
révisé le 27 juin 1983).

C. Rondeaux
Département de Mathématiques,
Université de Reims,
Moulin de la Housse,
BP n° 347.
51062 Reims Cedex.