P. DELORME

Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 17, nº 1 (1984), p. 117-156

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1984_4_17_1_117_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 17, 1984, p. 117 à 156.

HOMOMORPHISMES DE HARISH-CHANDRA LIÉS AUX K-TYPES MINIMAUX DES SÉRIES PRINCIPALES GÉNÉRALISÉES DES GROUPES DE LIE RÉDUCTIFS CONNEXES

PAR P. DELORME

« *à mon père* »

0. Introduction

0.1. — Soient G un groupe de Lie réductif connexe, dont le sous-groupe dérivé est de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G, P=MAN une décomposition de Langlands d'un sous-groupe parabolique cuspidal P de G, $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie complexifiée de l'algèbre de Lie de A, W($\mathfrak{a}$) le groupe de Weyl correspondant. Soit σ une série discrète de M. Pour $\lambda\in\mathfrak{a}^*$ on note $I_P^\infty(\sigma, \lambda)$ la série principale généralisée de G de paramètres (P, σ, λ) (qui est l'induite au sens C^∞ de la représentation $\sigma\otimes e^\lambda\otimes 1_N$ de P=MAN).

Si γ est un K-type minimal de $I_P^\infty(\sigma, \lambda)$, γ est contenu avec multiplicité 1 dans $I_P^\infty(\sigma, \lambda)$ d'après D. Vogan [16].

On note U($\mathfrak{g}$) l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G, $U(\mathfrak{g})^K$ les invariants de U($\mathfrak{g}$) sous K et S($\mathfrak{a}$) l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}$ sur laquelle W($\mathfrak{a}$) opère. Cet article est essentiellement consacré à la démonstration du résultat suivant (*cf.* théorème 3).

THÉORÈME. — Soit γ un K-type minimal de la série principale généralisée $I_P^\infty(\sigma, \lambda)(\lambda\in\mathfrak{a}^*)$. Alors :

(i) Il existe un homomorphisme noté r_σ^γ de $U(\mathfrak{g})^K$ dans $S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{a})_\sigma}$ uniquement déterminé par la propriété suivante :

$U(\mathfrak{g})^K$ agit sur le K-type γ de $I_P^\infty(\sigma, \lambda)$ par composition de r_σ^γ avec l'évaluation en λ. Ici $W(\mathfrak{a})_\sigma$ est le stabilisateur de $\sigma\in\hat{M}$ dans W($\mathfrak{a}$).

(ii) L'image de r_σ^γ est égale à $S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{a})_\sigma}$.

Remarque 1. — Remarquons que dans le cas où P est minimal et σ triviale, γ est nécessairement la représentation triviale de K et r_σ^γ est l'homomorphisme de Harish-Chandra usuel de $U(\mathfrak{g})^K$ dans $S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{a})}$ dont la surjectivité est bien connue. Notre théorème est donc une généralisation de ce résultat. C'est aussi une généralisation des résultats annoncés dans [7], théorème 1.

Remarque 2. — Le théorème 3 de cet article est en fait plus précis et décrit (partiellement) les transformées de Fourier des sous-espaces de transitions entre K-types minimaux d'une même série principale généralisée. Notons que ce théorème a plusieurs applications. Mentionnons en particulier un théorème de type Paley-Wiener pour les groupes semi-simples avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan (*cf.* [8]) ainsi qu'un théorème de type Paley-Wiener scalaire pour les groupes de Lie réductifs réels (*cf.* [6]).

0.2. — Pour démontrer ce résultat, après avoir introduit les notations, nous rappelons au paragraphe 1 certains résultats de A. Knapp et E. Stein sur les intégrales d'entrelacement (*cf.* [14]) ainsi que certains résultats de Vogan sur les K-types minimaux des séries principales généralisées (*cf.* [16], [17], [18]).

Au paragraphe 2, nous introduisons les sous-espaces de transition entre K-types et établissons quelques propriétés de leurs transformées de Fourier.

Ceci nous permet de comparer, au paragraphe 3, le R-groupe de Knapp et celui de Vogan (théorème 1). Ce théorème admet un corollaire qui permet de montrer que certains modules de Harish-Chandra irréductibles ne sont pas unitarisables. Dans le cas particulier des groupes de rang un le théorème 1 et son corollaire sont dus à M. Duflo (non publié, *cf.* toutefois [1], théorème 6.1).

Au paragraphe 4 nous étudions la structure du module de Jacquet d'une série principale généralisée (théorème 2), en utilisant des résultats de Hecht et Schmid à propos de la conjecture d'Osborne (*cf.* [12]). Certains résultats de ce paragraphe (proposition 6 (i) et proposition 7) sont dus à D. Vogan (lettre à l'auteur).

Au paragraphe 5 nous établissons le théorème principal. L'idée est de comparer les modules de dimensions finies de $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}$ à ceux de sa sous-algèbre $r_\sigma^\gamma(U(\mathfrak{g})^K)$, de voir grâce au théorème 2 qu'ils coïncident et de conclure grâce au résultat d'algèbre commutative de J. L. Brylinski (*cf.* proposition 1, appendice B).

Nous avons renvoyé dans l'appendice A des résultats techniques sur des algèbres d'invariants sous un groupe fini.

Nous remercions le référée de nous avoir suggéré une autre démonstration du résultat principal de cet article. Bien que nous n'ayons finalement pas retenu cette solution, nous la présentons brièvement. Avec les notations définies ci-dessus, on fixe un sous-groupe de Cartan compact T de M, et $\bar{\gamma} \in \mathfrak{t}^*$ le paramètre d'Harish-Chandra d'une composante de $\sigma_{|M_0}$. On définit une sous-algèbre parabolique θ-stable $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} \supseteq \mathfrak{t} + \mathfrak{a}$ par

$$\Delta(\mathfrak{q}, \mathfrak{t} + \mathfrak{a}) = \{ \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t} + \mathfrak{a}) \mid < \alpha_{|\mathfrak{t}}, \bar{\gamma} > \geq 0 \}.$$

Pour chaque $\delta \in A(\sigma)$, soit δ^L la représentation de $L \cap K$ sur les invariants sous $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}$ de δ, tensorisée avec $\Lambda^d(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})^*$ où $d = \dim \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$. Posons $P^L = P \cap M$ et choisissons $\sigma^L \in \hat{M}^L$ tel que $A(\sigma^L) = \{ \delta^L \mid \delta \in A(\sigma) \}$.

Les groupes de cohomologie étudiés dans [16] et les foncteurs dérivés de Zuckerman [18] fournissent une équivalence de catégories entre les composantes isotypiques sous K de type $A(\sigma)$ dans les $(\mathfrak{g}, K)$-modules ne contenant pas de K-types plus petits et les composantes isotypiques sous $L \cap K$ de type $A(\sigma^L)$ dans les $(\mathfrak{l}, L \cap K)$-modules, regardées comme catégories de modules sous des algèbres de transition convenables.

De cette manière les résultats se réduisent au cas $G = L$. Donc on peut supposer G quasi déployé, P minimal et $\sigma \in \hat{M}$ fin. Nous avons déjà traité ce cas qui est plus simple (*cf.* [7], théorème 1 *b*)). En effet, il existe un produit semi-direct $\tilde{G} = G \times \hat{R}_\sigma$ tel que $\hat{R}_\sigma$ agisse trivialement sur M, $\hat{R}_\sigma$ normalise K et centralise A et l'action de $\hat{R}_\sigma$ sur $A(\sigma)$ provenant du produit semi-direct ci-dessus est juste l'action décrite dans [16].

Ceci est démontré dans [17], corollaire 10.6 (ou, pour les groupes linéaires dans [18]). Ceci permet de démontrer sans peine le théorème 1 dans ce cas et d'éviter une partie des artifices techniques du paragraphe 5. Néanmoins, comme nous tenions à faire figurer le théorème 1 ainsi que son corollaire, nous nous en sommes tenus à notre approche initiale.

Remerciements.

Je remercie J. L. Brylinski sans lequel cet article n'aurait sans doute pas vu le jour. Je tiens à remercier également M. Duflo pour l'attention qu'il a prêtée à ce travail et pour d'utiles conversations à propos du théorème 2 ; M. Demazure pour d'utiles conversations au sujet des appendices, D. Vogan pour m'avoir fourni une démonstration des propositions 7 (i) et (8).

1. Notations, définitions, rappels

1.1. — Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ on notera E^* son dual et $S(E)$ l'algèbre symétrique de E que l'on regardera comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur E^*. Si E' est un autre espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on notera $\mathrm{Hom}(E, E')$ l'espace des applications $\mathbb{K}$-linéaires de E dans E' et 1_E l'endomorphisme identité de E.

Si H est un groupe localement compact on notera $\hat{H}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de H et pour $\mu \in \hat{H}$ on désignera par (μ, E_μ) un représentant de μ. Si en outre H est compact, pour tout H-module I on désignera par I^μ la composante isotypique de type μ de I.

Si H est un groupe de Lie réel, on désignera par $\mathfrak{h}_0$ son algèbre de Lie réelle, par $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{h}_0$, par $U(\mathfrak{h})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{h}$ et par $Z(\mathfrak{h})$ le centre de $U(\mathfrak{h})$. On identifiera $U(\mathfrak{h})$ à l'algèbre de convolution des distributions sur H, de support l'origine.

Soit V un module (sur un groupe ou une algèbre) et L un module simple (sur ce groupe ou cette algèbre). On dira que V est primaire de type L si V est de longueur finie et si tous les sous-quotients simples de V sont isomorphes à L.

Soit A un groupe vectoriel d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_0$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ on notera $a \to a^\lambda$ le quasi-caractère de A dont la différentielle est λ et $\mathbb{C}_\lambda$ le A-module de dimension 1 correspondant. Si V est un $\mathfrak{a}$-module (ou ce qui revient au même, un $S(\mathfrak{a})$-module), on notera V_λ le sous $\mathfrak{a}$-module de V formé de ses vecteurs de $\mathfrak{a}$-poids généralisé λ. Si V est de dimension finie, V est la somme directe des V_λ $(\lambda \in \mathfrak{a}^*)$ et V_λ est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$.

1.2. — Dans toute la suite G désignera un groupe de Lie réductif dans la classe introduite par Harish-Chandra (*cf.* [10], section 3), c'est-à-dire :

(*a*) l'algèbre de Lie de G est réductive;
(*b*) G a un nombre fini de composantes connexes;
(*c*) le groupe dérivé de la composante connexe G^0 de G est de centre fini; (1)
(*d*) pour tout $g \in G$, $\mathrm{Ad}\, g$ est un automorphisme intérieur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Dans la suite on dira que G est dans la classe de Harish-Chandra. Alors, suivant [10], section 3, on fixe un sous-groupe compact K de G tel que :

(*a*) $K \cap G^0$ est un sous-groupe compact maximal de G^0;
(*b*) K rencontre toutes les composantes connexes de G. (2)

On notera $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{q}_0$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ correspondante, $\mathfrak{q}$ le complexifié de $\mathfrak{q}_0$. Soit θ l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ (resp. G) correspondant à cette décomposition.

On se fixe une forme bilinéaire symétrique réelle B, sur $\mathfrak{g}_0$ telle que :

(*a*) la forme B est G-invariante;
(*b*) la forme quadratique $\| X \|^2 = -B(X, \theta X)$ est définie positive sur $\mathfrak{g}_0$; (3)
(*c*) la forme B est θ-invariante.

On notera encore B le prolongement $\mathbb{C}$-bilinéaire de B à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Dans toute la suite K, θ, B sont fixés une fois pour toutes.

On notera parfois U, au lieu de $U(\mathfrak{g})$, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et l'on désignera par U^K la sous-algèbre des éléments de U invariants sous Ad K.

1.3. — Pour tout sous-groupe parabolique P de G on a $G = KP$. On appellera composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G, son plus grand sous-groupe θ-stable. On appellera sous-groupe de Levi de G toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique de G. Un sous-groupe de Levi de G admet une factorisation MA où A est son plus grand sous-groupe vectoriel central et M est l'intersection des noyaux de ses homomorphismes à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Alors on a $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{q}_0$ et B permet d'identifier $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}_0^*$. D'autre part M est θ-stable, réductif et dans la classe d'Harish-Chandra. En outre $K_M = K \cap M$ vérifie (2) relativement à M et B restreinte à $\mathfrak{m}_0$ vérifie (3) relativement au couple (M, θ).

Regardant $\mathfrak{a}_0^*$ comme un sous-espace réel de $\mathfrak{a}^*$, on désignera, pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, par $\mathrm{Re}\,\lambda$ et $\mathrm{Im}\,\lambda$ les éléments de $\mathfrak{a}_0^*$ tels que $\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda + \mathrm{Im}\,\lambda$. On notera $\Delta(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ (qui sont réelles) et pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{a})$ on notera $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel correspondant. On notera $\mathscr{P}(MA)$ l'ensemble (fini) des sous-groupes paraboliques de G ayant MA comme composante de Levi. On a une correspondance bijective entre $\mathscr{P}(MA)$ et l'ensemble des « chambres de Weyl » de $\Delta(\mathfrak{a})$ dans $\mathfrak{a}_0^*$. Plus précisément si $P \in \mathscr{P}(MA)$, P admet la décomposition de Langlands $P = MAN_P$ où N_P est le radical unipotent de P. On définit $\Delta_P^+ = \{ \alpha \in \Delta(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_P \}$. Alors la chambre de Weyl C_P correspondant à P est par définition $C_P = \{ \lambda \in \mathfrak{a}_0^* \mid B(\lambda, \alpha) > 0, \forall \alpha \in \Delta_P^+ \}$. On notera $\overline{C}_P$ la fermeture de C_P dans $\mathfrak{a}_0^*$. Le « groupe de Weyl » pour cette situation est le quotient $W(\mathfrak{a})$ du normalisateur dans K de $\mathfrak{a}$ par son centralisateur dans K. Comme groupe d'automorphismes de $\mathfrak{a}$, $W(\mathfrak{a})$ permute les chambres de Weyl et un élément non trivial de $W(\mathfrak{a})$ ne laisse fixe aucune chambre. Toutefois l'action de $W(\mathfrak{a})$ n'est pas nécessairement transitive sur l'ensemble des chambres.

On définit, pour $P \in \mathscr{P}(MA)$, une relation d'ordre $\underset{P}{\leq}$ sur $\mathfrak{a}^*$ par :

$\lambda \underset{P}{\leq} \nu$ si et seulement si $\nu - \lambda$ est combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de Δ_P^+.

Enfin on définit $\rho_P = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_P^+} (\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha$.

Deux sous-groupes paraboliques P_1, P_2 de G seront dits adjacents s'ils sont associés (c'est-à-dire s'ils ont la même composante de Levi MA) et si leurs décompositions de Langlands $P_1 = MAN_1$, $P_2 = MAN_2$ vérifient : $\theta(\mathfrak{n}_1) \cap \mathfrak{n}_2 = \bigoplus_{c>0} \mathfrak{g}_{c\alpha}$, où α est une racine de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$.

On appellera chaîne minimale de sous-groupes paraboliques reliant P_0 à P_r toute suite $P_0, \ldots, P_i, \ldots, P_r$ de sous-groupes paraboliques associés de G (i. e. ayant même composante de Levi MA) tels que leurs décompositions de Langlands $P_i = MAN_i$ vérifient :

$$\theta(\mathfrak{n}_{i-1}) \cap \mathfrak{n}_i = \bigoplus_{c>0} \mathfrak{g}_{c\alpha} \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in -\Delta_{P_0}^+(\mathfrak{a}), \quad 1 \leq i \leq r.$$

En particulier P_i et P_{i+1} sont adjacents (*cf.* [14], théorème 7.6 pour les propriétés des chaînes minimales).

1.4. — Soient MA, M'A' des sous-groupes de Levi de G. Soient $P \in \mathscr{P}(MA)$, $P' \in \mathscr{P}(M'A')$ avec $P \subset P'$. Alors on a $M \subset M'$, $A' \subset A$, $N_{P'} \subset N_P$. En outre $\Delta_{P'}^+ = \{ \alpha_{|\mathfrak{a}'} \mid \alpha \in \Delta_P^+ \}$ et $\rho_{P'} = \rho_{P|\mathfrak{a}'}$. Soit A'' le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_0''$ où $\mathfrak{a}_0''$ est l'orthogonal pour B de $\mathfrak{a}_0'$ dans $\mathfrak{a}_0$. Notant $P'' = P \cap M'$, P'' est un sous-groupe parabolique de M' de composante de Levi MA'', de radical unipotent $N_{P''} = N_P \cap M'$. Alors

$$\mathfrak{n}_P = \mathfrak{n}_{P'} \oplus \mathfrak{n}_{P''} \qquad \text{et} \qquad \Delta_{P''}^+ = \{ \alpha_{|\mathfrak{a}''} \mid \alpha \in \Delta_P^+, \alpha_{|\mathfrak{a}'} = 0 \}.$$

Grâce à la décomposition $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{a}''$ on peut identifier $(\mathfrak{a}')^*$ et $(\mathfrak{a}'')^*$ à des sous-espaces de $\mathfrak{a}^*$. Alors $\underset{P}{\leq}$ induit sur $(\mathfrak{a}')^*$ l'ordre $\underset{P'}{\leq}$ et sur $(\mathfrak{a}'')^*$ l'ordre $\underset{P''}{\leq}$ (une somme à coefficients strictement positifs d'éléments de Δ_P^+ non tous nuls sur $\mathfrak{a}'$ est non nulle sur $\mathfrak{a}'$). Enfin :

$$\rho_P = \rho_{P''} + \rho_{P'} \tag{4}$$

En effet cette égalité est démontrée dans [14], proposition 1.2, lorsque P est un sous-groupe parabolique minimal dans G. Alors on obtient (4) par combinaison des égalités obtenues en appliquant ce résultat aux couples (P_m, P), (P_m, P') et $(P_m \cap M', P'')$, où P_m est un sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P.

Plus particulièrement si P est un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi MA et P_m un sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P, on notera $P_m = M_m A_m N_m$ la décomposition de Langlands de P_m, $\mathfrak{a}_m^M$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}_m$ pour B, A_m^M le sous-groupe de A_m correspondant. Alors $P_m^M = P_m \cap M$ est un sous-groupe parabolique minimal de M avec décomposition de Langlands

$$P_m^M = M_m A_m^M N_m^M \qquad \text{où} \qquad N_m^M = N_m \cap M.$$

Pour le contenu des sections 1.3, 1.4, nous renvoyons à [10], sections 2 à 6 et [14].

1.5. — Nous adopterons la définition suivante d'un module de Harish-Chandra pour G (on devrait dire pour $(\mathfrak{g}, K)$) : c'est un $U(\mathfrak{g})$-module, V, muni d'une action de K tel que :

(a) V est de type fini sous $U(\mathfrak{g})$
(b) V est $U(\mathfrak{k})$-localement fini
(c) les actions de $\mathfrak{g}$ et K sont compatibles
(d) chaque K-type est de multiplicité finie
(5)

Si V, V′ sont deux modules de Harish-Chandra pour G, on notera $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ (au lieu de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g},K}(V, V')$) l'espace des applications linéaires de V dans V′ commutant aux actions de $\mathfrak{g}$ et K.

Si MA est un sous-groupe de Levi de G, comme MA et M sont dans la classe d'Harish-Chandra, nous avons des définitions et notations analogues pour ces groupes.

Suivant [10], section 4, nous allons définir l'analogue infinitésimal de l'induction des représentations. Soit alors MA un sous-groupe de Levi de G et $P \in \mathscr{P}(MA)$. Soit (σ, E_σ) un module de Harish-Chandra pour M et (π, V_π) un A-module de dimension finie. Plongeons E_σ comme espace des vecteurs K_M-finis d'une représentation de M, notée aussi σ, dans un espace de Hilbert H_σ. Ceci est possible d'après le théorème du sous-module de Casselman (*cf.* par exemple [5], proposition 8.23). On définit alors sur :

$$I_P^\infty(\sigma, \pi) = \{ \varphi : G \to H_\sigma \otimes V_\pi \mid \varphi \text{ est } C^\infty, \ \varphi(g\,man) = a^{-\rho_P}(\sigma(m^{-1}) \otimes \pi(a^{-1}))\varphi(g), \ \forall g \in G, \ \forall m \in M, \ \forall a \in A, \ \forall n \in N_P \}, \quad (6)$$

une représentation $r_{\sigma\pi}^P$ de G par :

$$\forall g, x \in G, \quad \forall \varphi \in I_P^\infty(\sigma, \pi), \quad (r_{\sigma\pi}^P(g)\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x) \quad (7)$$

Alors $r_{\sigma\pi}^P$ est l'induite C^∞ de P à G de $\sigma \otimes \pi \otimes 1_{N_P}$.

On notera $I_P(\sigma \otimes \pi)$ le sous-espace des vecteurs K-finis de $I_P^\infty(\sigma, \pi)$. Alors $I_P(\sigma, \pi)$ est stable sous l'action de $U(\mathfrak{g})$ qu'on notera encore $r_{\sigma\pi}^P$, et il est ainsi muni d'une structure de module de Harish-Chandra. Cette structure ne dépend pas du plongement de E_σ dans H_σ. Pour σ fixé, $V_\pi \to I_P(\sigma, \pi)$ est un foncteur exact.

D'autre part, soit :

$$I^\infty(\sigma) = \{ \varphi : K \to H_\sigma \mid \varphi \text{ est } C^\infty, \ \varphi(km) = \sigma(m^{-1})\varphi(k), \ \forall k \in K, \ \forall m \in K_M \} \quad (8)$$

et

$$I(\sigma) = \{ \varphi : K \to E_\sigma \mid \varphi \text{ est K-finie}, \ \varphi(km) = \sigma(m^{-1})\varphi(k), \ \forall k \in K, \ \forall m \in K_M \} \quad (9)$$

L'espace $I(\sigma)$ est l'espace des vecteurs K-finis de $I^\infty(\sigma)$ pour l'action naturelle de K sur $I^\infty(\sigma)$. Comme $G = KP$, l'opération de restriction de G à K des éléments de $I_P^\infty(\sigma, \pi)$ (resp. $I_P(\sigma, \pi)$) est un isomorphisme de K-modules sur $I^\infty(\sigma) \otimes V_\pi$ (resp. $I(\sigma) \otimes V_\pi$) où K agit trivialement sur V_π. Alors par transport de structure on obtient une représentation de G (resp. $U(\mathfrak{g})$) encore notée $r_{\sigma\pi}^P$ sur $I^\infty(\sigma) \otimes V_\pi$ (resp. $I(\sigma) \otimes V_\pi$) ainsi qu'une structure de module de Harish-Chandra sur $I(\sigma) \otimes V_\pi$.

Dans le cas où π est un quasi-caractère de A de différentielle $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $r_{\sigma\pi}^P$ est notée $r_{\sigma\lambda}^P$, $I_P(\sigma, \pi)$ est noté $I_P(\sigma, \lambda)$.

On munit $I_P^\infty(\sigma)$ d'un produit scalaire défini par :

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in I_P^\infty(\sigma), \qquad (\varphi_1, \varphi_2) = \int_K (\varphi_1(k), \varphi_2(k))dk \tag{10}$$

où sous le signe d'intégration apparaît le produit scalaire de H_σ. On notera $I^2(\sigma)$ le complété de $I^\infty(\sigma)$ pour ce produit scalaire. On sait que si σ est unitaire et $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$, la représentation $r_{\sigma\lambda}^P$ s'étend en une représentation unitaire de G dans $I^2(\sigma)$. Pour ce qui précède nous renvoyons à [12], section 4.

1.6. — Dans ce numéro on se fixe MA un sous-groupe de Levi de G et l'on notera W au lieu de $W(\mathfrak{a})$ le groupe de Weyl correspondant. On suppose que M admet des séries discrètes. Alors W qui agit sur $\hat{M}$ laisse stable l'ensemble $\hat{M}_d$ des (classes de) séries discrètes de M. Si $\sigma \in \hat{M}_d$ (resp. $\lambda \in \mathfrak{a}^*$) on notera W_σ (resp. W_λ) le stabilisateur dans W de σ (resp. λ). Enfin on pose $W_{\sigma,\lambda} = W_\sigma \cap W_\lambda$.

Dans la suite de ce paragraphe on se fixe $\sigma \in \hat{M}_d$.

THÉORÈME (Knapp-Stein) :

(i) Soient $\sigma \in \hat{M}_d$, $P_1, P_2 \in \mathscr{P}(MA)$, dn une mesure de Haar sur $\theta(N_1) \cap N_2$. Alors il existe une unique fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*, \lambda \to A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$, à valeurs dans les endomorphismes de $I(\sigma)$ vérifiant la propriété suivante :

Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ vérifiant $B(\mathrm{Re}\,\lambda, \alpha) > C$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_1}^+ \cap -\Delta_{P_2}^+$ on ait :

$$\forall \varphi \in I(\sigma),\ (A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\varphi)(k) = \int_{\theta(N_1) \cap N_2} \tilde{\varphi}_{P_1}(kn)dn \tag{11}$$

Ici $\tilde{\varphi}_{P_1}$ désigne l'unique élément de $I_{P_1}(\sigma, \lambda)$ dont la restriction à K est égale à φ.

Lorsque $A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est défini il entrelace $r_{\sigma\lambda}^{P_1}$ et $r_{\sigma\lambda}^{P_2}$.

(ii) Pour tout couple $P_1, P_2 \in \mathscr{P}(MA)$ il existe une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*$ à valeurs scalaires, $\gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$, non identiquement nulle telles que les fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*$ à valeurs dans les endomorphismes de $I(\sigma)$ définies par :

$$\mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = \gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda)^{-1} A(P_2, P_1, \sigma, \lambda) \tag{12}$$

vérifient :

lorsqu'il est défini $\mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ entrelace $r_{\sigma\lambda}^{P_1}$ et $r_{\sigma\lambda}^{P_2}$,

$$\forall P_1, P_2 \in \mathscr{P}(MA), \qquad \mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\mathscr{A}(P_1, P_2, \sigma, \lambda) = 1_{I(\sigma)} \tag{13}$$

$$\forall P_1, P_2, P_3 \in \mathscr{P}(MA),\ \mathscr{A}(P_3, P_2, \sigma, \lambda)\mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = \mathscr{A}(P_3, P_1, \sigma, \lambda) \tag{14}$$

$\forall P_1, P_2 \in \mathscr{P}(MA)$, $\forall \lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$, $\mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est défini et unitaire (pour la structure préhilbertienne sur $I(\sigma)$ définie par (10)). (15)

(iii) Soit $w \in W$ et m_w un représentant de w dans $N_K(\mathfrak{a})$ (normalisateur dans K de $\mathfrak{a}$). On note $R(m_w)$ l'isomorphisme de $I(\sigma)$ sur $I(m_w\sigma)$ défini par :

$$\forall \varphi \in I(\sigma),\ (R(m_w\sigma)\varphi)(k) = \varphi(km_w) \tag{16}$$

Si en outre $w \in W_\sigma$ on notera, par abus de notation, $\sigma(m_w)$ un entrelacement unitaire entre σ et $m_w\sigma$ (*cf.* [14], lemme 7.9 pour une justification de cet abus).

Alors si $P \in \mathscr{P}(MA)$ la fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*$ à valeurs dans $\operatorname{End}(I(\sigma))$ définie par $\lambda \to \sigma(m_w)^{-1} R(m_w) \mathscr{A}(w^{-1}Pw, P, \sigma, \lambda)$ ne dépend du choix de m_w qu'à une constante multiplicative de module un près. Par abus de notation on notera $\lambda \to \mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ cette fonction. Alors on a :

Lorsque $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ est défini il entrelace $r^P_{\sigma\lambda}$ et $r^P_{\sigma, w\lambda}$ (17)

Si $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$, $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ est défini et unitaire (i. e. se prolonge unitairement à $I^2(\sigma)$) (18)

En outre, dans ce cas l'ensemble des opérateurs $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$, où w décrit $W_{\sigma,\lambda}$, engendre le commutant de $r^P_{\sigma\lambda}$ (représentation unitaire de G dans $I^2(\sigma)$). (19)

Références. — Pour (i) *cf.* [14], théorème 6.6, pour (ii) *cf.* [14], lemme 8.3, théorème 8.4 et proposition 8.5, pour (iii) *cf.* [14], proposition 8.6 et corollaire 9.8. Noter que le corollaire 9.8 de [14] repose de manière cruciale sur [11], théorème 38.1. Remarquez aussi que les opérateurs notés ici $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ sont notés $\sigma(w)\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ dans [14].

Nous avons également besoin du fait suivant :

Soient $P_1, P_2 \in \mathscr{P}(MA)$ des sous-groupes paraboliques adjacents tels que

$$\Delta^+_{P_1} \cap -\Delta^+_{P_2} = \{ c\alpha \mid c > 0 \} \qquad \text{avec} \qquad \alpha \in \Delta^+_{P_1}. \tag{20}$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que $B(\operatorname{Re}\lambda, \alpha) > 0$, il existe un opérateur d'entrelacement non nul entre $I_{P_1}(\sigma, \lambda)$ et $I_{P_2}(\sigma, \lambda)$.

En utilisant l'induction par étage on se ramène pour vérifier cette assertion au cas où $\dim A = 1$. On a alors $\theta(P_1) = P_2$ et $\operatorname{Re}\lambda \in C_{P_1}$ et (20) est alors bien connu (*cf.* [2], IV.4.3, 4.4).

1.7. — *Hypothèse.* — Dans toute la suite de cet article nous supposerons en outre G connexe. (21)

Avec cette restriction nous allons introduire le R-groupe selon Vogan. Soit MA un sous-groupe de Levi de G tel que $\hat{M}_d \neq \emptyset$. On notera encore W au lieu de $W(\mathfrak{a})$. Si $\sigma \in \hat{M}_d$, on désignera par $A(\sigma)$ l'ensemble des K-types minimaux de $I(\sigma)$ (*cf.* [16], définition 5.1 ou [18], définition 5.4.18). Comme pour tout $w \in W$, $I(\sigma)$ et $I(w\sigma)$ sont des K-modules isomorphes, on a $A(\sigma) = A(w\sigma)$.

THÉORÈME (Vogan) :

(i) Soit $\sigma \in \hat{M}_d$ et $\mu \in A(\sigma)$. Alors μ est contenu avec multiplicité un dans $I(\sigma)$.

(ii) Pour $\mu \in A(\sigma)$ et $P \in \mathscr{P}(MA)$ on notera $J_P(\sigma, \lambda)(\mu)$ l'unique sous-quotient simple de $I_P(\sigma, \lambda)$ contenant le K-type μ. Alors, à isomorphisme près, $J_P(\sigma, \lambda)(\mu)$ ne dépend pas de P et sera noté $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ dans la suite. D'autre part si $\operatorname{Re}\lambda \in \overline{C}_P$ (resp. $-\overline{C}_P$), $I_P(\sigma, \lambda)$ se décompose de manière unique (à l'ordre près) en :

$$I_P(\sigma, \lambda) = I^1_P(\sigma, \lambda) \oplus \ldots \oplus I^{r(\sigma,\lambda)}_P(\sigma, \lambda) \tag{22}$$

de telle sorte que pour tout $i = 1, \ldots, r(\sigma, \lambda)$, $I^i_P(\sigma, \lambda)$ a un unique quotient (resp. sous-module) simple $J^i_P(\sigma, \lambda)$. De plus :

$$\{ J^i_P(\sigma, \lambda) \mid i = 1, \ldots, r(\sigma, \lambda) \} = \{ J(\sigma, \lambda)(\mu) \mid \mu \in A(\sigma) \} \tag{23}$$

En particulier pour tout $\mu \in A(\sigma)$, $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ est un quotient (resp. un sous-module) de $I_P(\sigma, \lambda)$ et $\{ J(\sigma, \lambda)(\mu) \mid \mu \in A(\sigma) \}$ est l'ensemble des quotients (resp. sous-modules) simples de $I_P(\sigma, \lambda)$.

(iii) Il existe un sous-groupe distingué W_σ^0 de W_σ et un sous-groupe R_σ^c de W_σ tels que :

le groupe W_σ est le produit semi-direct de R_σ^c et W_σ^0 (24)

comme groupe d'automorphismes de $\mathfrak{a}$, W_σ^0 est engendré par des réflexions (25)

R_σ^c est un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (26)

(iv) Notons R_σ le quotient W_σ/W_σ^0 (qui est isomorphe à R_σ^c), $w \to \overline{w}$ la projection canonique et $\hat{R}_\sigma$ le dual de R_σ.

Alors il existe une action simplement transitive de $\hat{R}_\sigma$ sur $A(\sigma)$ telle que :

$$\forall \sigma, \sigma' \in \hat{M}_d, \ \forall \lambda, \lambda' \in \mathfrak{a}^*, \ \forall \mu \in A(\sigma), \ \forall \mu' \in A(\sigma'),$$

$J(\sigma, \lambda)(\mu)$ est isomorphe à $J(\sigma', \lambda')(\mu')$ si et seulement si (σ, λ) est conjugué de (σ', λ') (27) par un élément de W et si $\mu' \in \hat{R}_\sigma(\lambda) \cdot \mu$, où $\hat{R}_\sigma(\lambda)$ est l'orthogonal dans $\hat{R}_\sigma$ de

$$R_\sigma(\lambda) = \{ \overline{w} \in R_\sigma \mid w \in W_\sigma, \ w\lambda \in W_\sigma^0 \lambda \}.$$

Donnons les références pour les différents points de ce théorème. Pour (i), *cf.* [16], théorème 1.1. Pour (ii), *cf.* [17], théorème 12.14, 12.15. Pour (iii). *cf.* [17], théorème 12.1.

Remarque 1. — Le lecteur insatisfait de la référence [17] non publiée pourra supposer G en outre linéaire et extraire ces résultats de [18], chapitres 4, 5, 6 et plus particulièrement des théorèmes 6.6.15, 6.6.14, 6.5.10, 4.4.8 et 4.4.10.

Remarque 2. — L'unicité de W_σ^0 et de l'action de $\hat{R}_\sigma$ vérifiant (24) à (27) (qui n'est pas affirmée par le théorème) sera démontrée ultérieurement (théorème 1, section 3).

2. Sous-espaces de transitions et séries principales généralisées

2.1. — Dans tout ce numéro on se fixe un sous-groupe de Levi de G, MA, tel que $\hat{M}_d$ soit non vide et l'on se fixe $\sigma \in \hat{M}_d$. Soit $P \in \mathscr{P}(MA)$.

PROPOSITION 1. — (i) Soit $u \in U(\mathfrak{g})$. L'application $\lambda \to r_{\sigma\lambda}^P(u)$ de $\mathfrak{a}^*$ dans $\mathrm{End}(I(\sigma))$ est polynomiale en λ. Elle définit donc un élément de $S(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma))$ noté $r_\sigma^P(u)$.

(ii) En outre le degré de $r_\sigma^P(u)$ est inférieur ou égal au degré de u dans $U(\mathfrak{g})$.

(iii) L'application $u \to r_\sigma^P(u)$ définit un homomorphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{g})$ dans $S(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma))$.

(iv) Soit (π, V_π) un $\mathfrak{a}$-module de dimension finie. Notant $\tilde{\pi}$ l'application

$$\pi \otimes 1_{I(\sigma)} : S(\mathfrak{a}) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma)) \to \mathrm{End}(V_\pi) \otimes \mathrm{End}\, I(\sigma)$$

on a :

$$r_{\sigma\pi}^P(u) = \tilde{\pi}(r_\sigma^P(u)) \tag{28}$$

où l'on a identifié $\mathrm{End}(I(\sigma) \otimes V_\pi)$ à $\mathrm{End}(V_\pi) \otimes \mathrm{End}(I(\sigma))$.

Démonstration.— Soit P_m un sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P. On utilise alors les notations de la fin de 1.4.

D'après le théorème du sous-module de Casselman (*cf.* par exemple [5], théorème 8.21), il existe $\sigma_0 \in \hat{M}_m$, $\lambda_0 \in (\mathfrak{a}_m^M)^*$ tels que le module de Harish-Chandra pour M des vecteurs K_M-finis de E_σ soit un sous-module de $I_{P_m^M}(\sigma_0, \lambda_0)$.

En utilisant l'induction par étage on en déduit qu'il existe une injection $i : I(\sigma) \to I(\sigma_0)$ telle que pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, i entrelace $r_{\sigma\lambda}^P$ et $r_{(\sigma_0)(\lambda_0+\lambda)}^{P_m}$.

En outre, si (π, V_π) est une représentation de dimension finie de $\mathfrak{a}$, notant $\pi \otimes \lambda_0$ la représentation dans V_π de $\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_m^M \oplus \mathfrak{a}$ définie par :

$$\forall X \in \mathfrak{a}, \quad (\pi \otimes \lambda_0)(X) = \pi(X) \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathfrak{a}_m^M, \quad (\pi \otimes \lambda_0)(X) = \lambda_0(X) 1_{V_\pi},$$

l'injection $i \otimes 1_{V_\pi} : I(\sigma) \otimes V_\pi \hookrightarrow I(\sigma_0) \otimes V_\pi$ entrelace $r_{\sigma\pi}^P$ et $r_{(\sigma_0)(\pi\otimes\lambda_0)}^{P_m}$.

De ceci il résulte qu'il suffit de démontrer la proposition dans le cas où P est minimal.

Dans la suite nous supposerons donc que P est minimal. On a alors une décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ (on a posé $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_P$). On se fixe $(X_1, \ldots, X_l)$ une base de $\mathfrak{k}$, $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une base de $\mathfrak{a}$, $(Z_1, \ldots, Z_q)$ une base de $\mathfrak{n}_P$.

Montrons (i). Il est clair qu'il suffit de vérifier (i) pour des générateurs de $U(\mathfrak{g})$. Pour $X \in \mathfrak{k}$ l'assertion est triviale puisque $r_{\sigma\lambda}(X)$ ne dépend pas de λ. Soit maintenant $X \in \mathfrak{a}$. On définit des fonctions sur K (dépendant de X) $x_r (r=1, \ldots, l)$, $y_s (s=1, \ldots, p)$ et $z_t (t=1, \ldots, q)$ par :

$$\forall k \in K, \quad \operatorname{Ad} k \cdot X = \sum_{r=1}^{l} x_r(k^{-1}) X_r + \sum_{s=1}^{p} y_s(k^{-1}) Y_s + \sum_{t=1}^{q} z_t(k^{-1}) Z_t \tag{29}$$

Ces fonctions sont clairement K-finies et C^∞. D'autre part, comme $\operatorname{Ad} m \cdot Y_s = Y_s$, pour tout $m \in M$ et $s=1, \ldots, p$, et que M laisse stable la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ on voit que

$$\forall m \in M, \quad \forall k \in K, \qquad y_s(mk) = y_s(k) = y_s(km), \qquad s=1, \ldots, p \tag{30}$$

Alors on a :

$$\forall \varphi \in I(\sigma), \quad \forall k \in K, \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \quad (r_{\sigma\lambda}^P(X)\varphi)(k) = \sum_{r=1}^{l} x_r(k)(\varphi * X_r)(k) + \sum_{s=1}^{p} y_s(k) \lambda(Y_s) \varphi(k) \tag{31}$$

On voit facilement que les applications $k \to y_s(k)\varphi(k)$ $(s=1, \ldots, p)$ sont dans $I(\sigma)$, grâce à (30). Alors à l'aide de (31), on voit que, si l'on définit T_0 par :

$$\forall \varphi \in I(\sigma), \qquad (T_0 \varphi)(k) = \sum_{r=1}^{l} x_r(k)(\varphi * X_r)(k),$$

T_0 est un endomorphisme de $I(\sigma)$, qui ne dépend pas de λ. De même on définit des endomorphismes T_s de $I(\sigma)$ par :

$$\forall \varphi \in I(\sigma), \qquad (T_s \varphi)(k) = y_s(k) \varphi(k) \tag{33}$$

On vient donc de voir que :

$$r_{\sigma\lambda}^{\mathrm{P}}(\mathrm{X})=\mathrm{T}_0+\sum_{s=1}^{p}\lambda(\mathrm{Y}_s)\mathrm{T}_s \tag{34}$$

avec $\mathrm{T}_i (i=0,\ldots,s)$ endomorphisme de $\mathrm{I}(\sigma)$ indépendant de λ. Alors (i) est vérifié pour tout $\mathrm{X}\in\mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{k}+\mathfrak{a}$ engendre $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, ceci achève de prouver (i).

Montrons (ii). D'après ce qui précède, pour $\mathrm{X}\in\mathfrak{k}$, $r_\sigma^{\mathrm{P}}(\mathrm{X})$ est de degré zéro et pour $\mathrm{X}\in\mathfrak{a}$, $r_\sigma^{\mathrm{P}}(\mathrm{X})$ est de degré inférieur ou égal à un d'après (34). D'autre part $\mathfrak{a}$ est cyclique pour la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{q}$ (où $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{q}$ est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ fixée en 1.2). D'où il suit que tout élément de $\mathfrak{q}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ du type $\mathrm{V}_1\times\ldots\times\mathrm{V}_j$ où V_i est élément de $\mathfrak{k}$ ou $\mathfrak{a}$ et un seul V_i au plus est élément de $\mathfrak{a}$. Il en résulte que pour tout $\mathrm{X}\in\mathfrak{q}$, $r_\sigma^{\mathrm{P}}(\mathrm{X})$ est de degré inférieur ou égal à 1. Alors (ii) est démontré pour tout $\mathrm{X}\in\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{q}$, puis pour tout élément de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ grâce au théorème de Poincaré-Birkhof-Witt.

Le point (iii) résulte de (i) et du fait que pour tout $\lambda\in\mathfrak{a}^*$, $r_{\sigma\lambda}^{\mathrm{P}}$ est une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{I}(\sigma)$.

Prouvons maintenant (iv). Comme pour (i), il suffit de le vérifier pour les éléments de $\mathfrak{k}$ et de $\mathfrak{a}$. Si $u\in\mathfrak{k}$, c'est clair car alors $r_{\sigma\pi}^{\mathrm{P}}(u)=r_\sigma^{\mathrm{P}}(u)\otimes 1_{\mathrm{V}_\pi}$. Soit maintenant $\mathrm{X}\in\mathfrak{a}$. Alors, avec les notations ci-dessus, un simple calcul montre que :

$$r_{\sigma\pi}^{\mathrm{P}}(\mathrm{X})=\mathrm{T}_0\otimes 1_{\mathrm{V}_\pi}+\sum_{s=1}^{p}\mathrm{T}_s\otimes\pi(\mathrm{Y}_s) \tag{35}$$

La comparaison de (34) et (35) prouve alors (iv) pour $\mathrm{X}\in\mathfrak{a}$. Ceci achève la démonstration de (iv) puisque $\mathfrak{k}+\mathfrak{a}$ engendre $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

2.2. — On conserve les notations de 2.1. Il résulte des définitions que :

$$\mathrm{I}(\sigma)=\bigoplus_{\mu\in\hat{\mathrm{K}}}\mathrm{I}^\mu(\sigma), \tag{36}$$

où $\mathrm{I}^\mu(\sigma)$ est la composante isotypique de type μ du K-module $\mathrm{I}(\sigma)$. Pour $\mu\in\hat{\mathrm{K}}$, on notera P_σ^μ la projection de $\mathrm{I}(\sigma)$ sur $\mathrm{I}^\mu(\sigma)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{\mu'\in\hat{\mathrm{K}}\\ \mu'\neq\mu}}\mathrm{I}^{\mu'}(\sigma)$. On définit alors, pour tout $\delta,\gamma\in\hat{\mathrm{K}}$:

$$\forall u\in\mathrm{U}(\mathfrak{g}),\quad {}^{\mathrm{P}}r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u)=\mathrm{P}_\sigma^\delta r_{\sigma\lambda}^{\mathrm{P}}(u)_{|\mathrm{I}(\sigma)^\gamma}\in\mathrm{Hom}\,(\mathrm{I}^\gamma(\sigma),\mathrm{I}^\delta(\sigma)) \tag{37}$$

et

$$\forall u\in\mathrm{U}(\mathfrak{g}),\quad {}^{\mathrm{P}}r_{\sigma\pi}^{\delta\gamma}(u)=(\mathrm{P}_\sigma^\delta\otimes 1_{\mathrm{V}_\pi})(r_{\sigma\pi}^{\mathrm{P}}(u))_{|\mathrm{I}(\sigma)^\gamma\otimes\mathrm{V}_\pi}\in\mathrm{Hom}\,(\mathrm{I}^\gamma(\sigma),\mathrm{I}^\delta(\sigma))\otimes\mathrm{End}\,\mathrm{V}_\pi \tag{38}$$

Alors la proposition suivante est un corollaire de la proposition 1 :

PROPOSITION 2. — Soit $u\in\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Alors :

(i) l'application $\lambda\to{}^{\mathrm{P}}r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}$ de $\mathfrak{a}^*$ dans $\mathrm{Hom}\,(\mathrm{I}^\gamma(\sigma),\mathrm{I}^\delta(\sigma))$ est polynomiale en λ et définit un élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})\otimes\mathrm{Hom}\,(\mathrm{I}^\gamma(\sigma),\mathrm{I}^\delta(\sigma))$ noté ${}^{\mathrm{P}}r_\sigma^{\delta\gamma}(u)$.

(ii) Notant $\tilde{\pi}=\pi\otimes 1$: $\mathrm{S}(\mathfrak{a})\otimes\mathrm{Hom}(\mathrm{I}^\gamma(\sigma),\mathrm{I}^\delta(\sigma))\to\mathrm{End}\,(\mathrm{V}_\pi)\otimes\mathrm{Hom}\,(\mathrm{I}^\gamma(\sigma),\mathrm{I}^\delta(\sigma))$, on a : ${}^{\mathrm{P}}r_{\sigma\pi}^{\delta\gamma}(u)=\tilde{\pi}({}^{\mathrm{P}}r_\sigma^{\delta\gamma}(u))$.

2.3. — Dans la suite nous noterons souvent U au lieu de $U(\mathfrak{g})$.

Introduisons maintenant les sous-espaces de transition. Pour $\mu\in\hat{K}$, on notera J_μ l'annulateur dans $U(\mathfrak{k})$ de μ. Comme K est connexe, la donnée de J_μ détermine entièrement μ.

Si δ, $\gamma\in\hat{K}$, on note :

$$U^{\delta\gamma}=\{u\in U \mid J_\delta u \subset UJ_\gamma\} \tag{39}$$

Il résulte des définitions que :

$$\forall\beta,\ \gamma,\ \delta\in\hat{K},\ U^{\delta\gamma}\cdot U^{\gamma\beta}\subset U^{\gamma\beta} \tag{40}$$

D'autre part, si L est un module de Harish-Chandra :

$$\forall u\in U^{\delta\gamma},\quad uL^\gamma\subset L^\delta \tag{41}$$

et en outre :

$$\forall x\in L^\gamma,\quad \forall y\in L^\delta,\quad \forall u\in U,\quad ux=y\Rightarrow \exists u'\in U^{\delta\gamma},\quad u'x=y \tag{42}$$

Nous renvoyons à [9] 9.1 pour les propriétés élémentaires des sous-espaces de transition $U^{\delta\gamma}$.

2.4. — Les notations sont encore celles de 2.1.

D'après la réciprocité de Fröbenius, pour $\mu\in\hat{K}$, $\mathrm{Hom}_K(E_\mu, I(\sigma)\otimes V_\pi)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{K_M}(E_\mu, E_\sigma)\otimes V_\pi$. On notera :

$$\mathscr{E}_\sigma^\mu=\mathrm{Hom}_{K_M}(E_\mu, E_\sigma) \tag{43}$$

et

$$\sim\ :\mathscr{E}_\sigma^\mu\otimes V_\pi\to \mathrm{Hom}_K(E_\mu, I(\sigma)\otimes V_\pi),\quad e\to\tilde{e} \tag{44}$$

l'isomorphisme canonique provenant de la réciprocité de Fröbenius. Soient alors γ, $\delta\in\hat{K}$. Fixons $a\in E_\gamma$ et $b\in E_\delta$ de normes 1. On définit alors, pour $u\in U^{\delta\gamma}$, ${}^P u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma,\lambda)\in\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma,\mathscr{E}_\sigma^\delta)$ (resp. ${}^P u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma,\pi)\in\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma,\mathscr{E}_\sigma^\delta)\otimes\mathrm{End}\,V_\pi$) de la façon suivante :

Si $e\in\mathscr{E}_\sigma^\gamma$ (resp. $e\in\mathscr{E}_\sigma^\gamma\otimes V_\pi$), $f={}^P u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma,\lambda)e$ (resp. $f={}^P u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma,\pi)e$) est l'élément de $\mathscr{E}_\sigma^\delta$ (resp. $\mathscr{E}_\sigma^\delta\otimes V_\pi$) tel que :

$$({}^P r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u))(\tilde{e}(a))=\tilde{f}(b)+\sum_{b'}\tilde{f}'(b')\quad (\text{resp. } {}^P r_{\sigma\pi}^{\delta\gamma}(\tilde{e}(a))=\tilde{f}(b)+\sum_{b'}\tilde{f}'(b')), \tag{45}$$

où b' décrit une base de l'orthogonal de b dans E_δ.

Nous noterons ${}^P F_\sigma^{\delta\gamma}$ (resp. ${}^P\mathscr{F}_\sigma^{\delta\gamma}$) l'espace des fonctions $\lambda\to{}^P u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma,\lambda)$ (resp. $\lambda\to{}^P r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u)$) u décrivant U. Remarquons que d'après [9] 9.1.5 (ii) et 9.1.2 (ii) on obtient ${}^P F_\sigma^{\delta\gamma}$ (resp. ${}^P\mathscr{F}_\sigma^{\delta\gamma}$) lorsque u décrit $U^{\delta\gamma}$. De plus on a :

Proposition 3. — Avec les notations définies ci-dessus :

(i) L'espace ${}^P F_\sigma^{\delta\gamma}$ ne dépend pas du choix de a et b

(ii) On a les inclusions suivantes :

$${}^P F_\sigma^{\delta\gamma}\subset S(\mathfrak{a})\otimes\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_\sigma^\gamma,\mathscr{E}_\sigma^\delta),\quad {}^P\mathscr{F}_\sigma^{\delta\gamma}\subset S(\mathfrak{a})\otimes\mathrm{Hom}(I^\gamma(\sigma), I^\delta(\sigma)) \tag{46}$$

(iii) Identifiant $\mathrm{Hom}(\mathrm{I}^{\gamma}(\sigma), \mathrm{I}^{\delta}(\sigma))$ à $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}_{\sigma}^{\gamma}, \mathscr{E}_{\sigma}^{\delta}) \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\delta})$ on a :

$$^{\mathrm{P}}\mathscr{F}_{\sigma}^{\delta\gamma} = {}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\delta\gamma} \otimes \mathrm{Hom}(\mathrm{E}_{\gamma}, \mathrm{E}_{\delta}) \tag{47}$$

(iv) Pour $\beta, \gamma, \delta \in \hat{\mathrm{K}}$, ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\delta\gamma} \cdot {}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\gamma\beta} \subset {}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\delta\gamma}$

(v) On a ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\delta\delta} = \{ \lambda \to u_{ab}^{\delta\delta}(\sigma, \lambda) \mid u \in \mathrm{U}^{\mathrm{K}} \}$.

En outre, si δ est contenu avec multiplicité 1 dans $\mathrm{I}(\sigma)$ (i. e. $\mathscr{E}_{\sigma}^{\delta} \simeq \mathbb{C}$) on a ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\delta\delta} \subset \mathrm{S}(\mathfrak{a})$ et l'on a :

$$\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^{\mathrm{K}}}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}_{\delta}, \mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma, \lambda)), \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E}_{\delta}, \mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma \otimes \pi))) \simeq \mathrm{Hom}_{{}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}}(\mathbb{C}_{\lambda}, \mathrm{V}_{\pi}) \tag{48}$$

Démonstration :

(i) Soient $a' \in \mathrm{E}_{\gamma}$ et $b' \in \mathrm{E}_{\delta}$ de normes 1. Le théorème de Burnside montre qu'il existe k, $k' \in \mathrm{U}(\mathfrak{k})$ tels que $\gamma(k)$ et $\delta(k')$ soient proportionnels à des isométries et vérifient $\gamma(k)a' = a$, $\delta(k')b = b'$. Alors $(k'uk)_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) = u_{a'b'}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)$ et (i) en résulte.

(ii) est une conséquence immédiate de la proposition 2.

Montrons (iii). Notons $a^* \otimes b$ l'opérateur de rang 1 de E_{γ} dans E_{δ} défini par

$$(a^* \otimes b)(x) = (a, x)b \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathrm{E}_{\gamma}.$$

Soit k (resp. k') un élément de $\mathrm{U}(\mathfrak{k})$ tel que $\gamma(k)$ (resp. $\delta(k')$) soit le projecteur orthogonal de E_{γ} sur $\mathbb{C}a$ (resp. de E_{δ} sur $\mathbb{C}b$). Alors :

$$\forall u \in \mathrm{U}, \quad {}^{\mathrm{P}}r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(k'uk) = ({}^{\mathrm{P}}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)) \otimes (a^* \otimes b),$$

et (iii) en résulte.

Le point (iv) est une conséquence immédiate de (i) et de (40).

Le point (v) résulte de (iii) et de la proposition 2 (ii).

2.5. **Proposition** 4. — Avec les notations précédentes et celles de 1.7 soient $\gamma, \delta \in \mathrm{A}(\sigma)$ et $r \in \hat{\mathrm{R}}_{\sigma}$ l'unique élément de $\hat{\mathrm{R}}_{\sigma}$ tel que $r \cdot \gamma = \delta$. Alors pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $r \notin \hat{\mathrm{R}}_{\sigma}(\lambda)$

(ii) $\exists w \in \mathrm{W}_{\sigma}, \quad r(\overline{w}) \neq 1$ et $w\lambda \in \mathrm{W}_{\sigma}^{0}\lambda$

(iii) Pour tout $\mathrm{P} \in \mathscr{P}(\mathrm{MA})$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda \in \pm(\overline{\mathrm{C}}_{\mathrm{P}})$ et tout $f \in {}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\delta\gamma}, f(\lambda) = 0$.

Démonstration. — L'équivalence de (i) et (ii) résulte des définitions.

Montrons que (i) implique (iii). Si $r \notin \hat{\mathrm{R}}_{\sigma}(\lambda)$ on a $\mathrm{J}(\sigma, \lambda)(\gamma) \neq \mathrm{J}(\sigma, \lambda)(\delta)$. Alors, d'après (22) et (23), δ et γ apparaissent dans des facteurs directs $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}^{i}(\sigma, \lambda)$ et $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}^{j}(\sigma, \lambda)$ de $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma, \lambda)$ qui sont distincts. D'où (iii), ce qui achève de montrer (i) $\Rightarrow$ (iii).

Montrons la réciproque, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que non (i) est vérifié. On aurait alors $\mathrm{J}(\sigma, \lambda)(\gamma) = \mathrm{J}(\sigma, \lambda)(\delta)$ et un élément au moins de ${}^{\mathrm{P}}\mathrm{F}_{\sigma}^{\delta\gamma}$ serait non nul en λ d'après (42) et (47). Une contradiction qui achève la démonstration de la proposition.

3. R-Groupe et intégrales d'entrelacement

3.1. — Soit MA un sous-groupe de Levi de G tel que $\hat{M}_d$ soit non vide. Soit $\sigma \in \hat{M}_d$. Si $\mu \in A(\sigma)$, pour toute paire (P_1, P_2) d'éléments de $\mathscr{P}(MA)$ (resp. pour tout $P \in \mathscr{P}(MA)$ et tout $w \in W_\sigma$) les opérateurs $A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ et $\mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ (resp. $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$) sont scalaires sur $I^\mu(\sigma)$ (pour les valeurs de λ où ils sont définis). Dans la suite ces scalaires seront notés $A^\mu(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ et $\mathscr{A}^\mu(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ (resp. $\mathscr{A}_P^\mu(w, \sigma, \lambda)$). Comme pour $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$, $\mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ et $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ sont unitaires d'après (15) et (18), les fonctions méromorphes $\lambda \to \mathscr{A}^\mu(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ et $\lambda \to \mathscr{A}_P^\mu(w, \sigma, \lambda)$ sont non identiquement nulles sur $\mathfrak{a}^*$. D'autre part de (12) on déduit que :

$$A^\mu(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = \gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\mathscr{A}^\mu(P_2, P_1, \sigma, \lambda) \tag{49}$$

Comme $\lambda \to \gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est non identiquement nulle (*cf.* 1.6, théorème (ii)), $A^\mu(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*$ non identiquement nulle. On définit alors :

$$\forall \gamma,\ \delta \in A(\sigma), \quad c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = \mathscr{A}^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda)(\mathscr{A}^\gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda))^{-1} \tag{50}$$

et

$$\forall \gamma,\ \delta \in A(\sigma), \quad c_P^{\delta\gamma}(w, \sigma, \lambda) = \mathscr{A}_P^\delta(w, \sigma, \lambda) \quad (\mathscr{A}_P^\gamma(w, \sigma, \lambda))^{-1} \tag{51}$$

Il résulte de (49) que l'on a :

$$\forall \gamma,\ \delta \in A(\sigma), \quad c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = A^\delta(P_2, P_1, \sigma, \lambda)(A^\gamma(P_2, P_1, \sigma, \lambda))^{-1} \tag{52}$$

D'autre part, avec les notations de 1.6, théorème (ii), $\sigma(m_w)^{-1}R(m_w)$ induit un automorphisme unitaire du K-module $I(\sigma)$. Il est donc scalaire sur $I^\gamma(\sigma)$ et $I^\delta(\sigma)$. Alors, la définition de $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ implique :

$$\forall \gamma,\ \delta \in A(\sigma), \quad \forall w \in W_\sigma, \quad c_P^{\delta\gamma}(w, \sigma, \lambda) = e^{it}c^{\delta\gamma}(wPw^{-1}, P, \sigma, \lambda), \tag{53}$$

où t est un nombre réel (indépendant de λ).

D'autre part, il résulte des définitions que :

$$\forall \delta,\ \gamma \in A(\sigma), \quad \forall u \in U, \quad {}^{P_2}r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u) = c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\,{}^{P_1}r_{\sigma\lambda}^{\delta\gamma}(u)$$

et

$$\begin{aligned} & {}^{P_2}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) = c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)\,{}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) \end{aligned} \tag{54}$$

ainsi que :

$$\forall \delta,\ \gamma \in A(\sigma), \quad \forall w \in W_\sigma, \quad \forall f \in {}^P F_\sigma^{\delta\gamma} \text{ (resp. } {}^P\mathscr{F}_\sigma^{\delta\gamma}), \quad f(w\lambda) = c_P^{\delta\gamma}(w, \sigma, \lambda) f(\lambda) \tag{55}$$

Remarque 3. — Les égalités (49) à (55) sont des égalités de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*$.

3.2. — Lemme 1. — Soient $P_1, P_2 \in \mathscr{P}(MA)$ des sous-groupes paraboliques adjacents. Alors, avec les notations de 3.1 :

$$\forall \gamma,\ \delta \in A(\sigma), \qquad \lambda \to c^{\delta\gamma}(P_1, P_2, \sigma, \lambda) \text{ est constante.}$$

Démonstration. — En utilisant l'induction par étage, avec comme sous-groupe intermédiaire le sous-groupe parabolique de G engendré par P_1 et P_2, on voit, à l'aide de [10], proposition 7.5, que $A(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est une fonction dépendant seulement de $\lambda_\alpha = 2\dfrac{B(\lambda, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}$, où $\theta(\mathfrak{n}_{P_1}) \cap \mathfrak{n}_{P_2} = \bigoplus_{c>0} \mathfrak{g}_{c\alpha}$.

De (50) on déduit qu'il en est de même de $c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$. On définit alors une fonction méromorphe, c, sur $\mathbb{C}$ par :

Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\lambda_\alpha = z$ et tel que $c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ soit défini on pose

$$c(z) = c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) \tag{56}$$

On se propose de montrer que c est constante.

Comme $\mathscr{A}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est défini et unitaire pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$, on déduit de (50) et (56) :

c est définie et de module un sur $i\mathbb{R}$ (57)

D'autre part, soit $\lambda_0 \in i\mathfrak{a}_0^*$, W-régulier. Alors d'après 1.6, $I_{P_1}(\sigma, \lambda_0)$ est irréductible. Donc, d'après (42) et (47), il existe $u \in U$ tel que ${}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda_0) \neq 0$ (le K-type γ est cyclique dans $I_{P_1}(\sigma, \lambda_0)$). Alors il résulte de (54) qu'on a l'égalité de fonctions méromorphes :

$$c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) = {}^{P_2}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)\left({}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)\right)^{-1}, \tag{58}$$

(la division par ${}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)$ a un sens car cette fonction est non identiquement nulle d'après ce qui précède).

Alors il résulte de (46) que le second membre de (58) est rationnel en λ. Finalement nous avons démontré :

$c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est rationnelle en λ, et $c(z)$ est une fraction rationnelle en z. (59)

Onva voir maintenant que c est définie et non nulle sur $\{ z \mid \operatorname{Re} z > 0 \}$. Soit donc $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$. Il est clair que l'on peut choisir $\lambda_0 \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\operatorname{Re} \lambda_0 \in C_{P_1}$ et $(\lambda_0)_\alpha = z$.

Alors, d'après 1.7, $J(\sigma, \lambda_0)(\gamma) = J(\sigma, \lambda_0)(\delta)$. Il existe donc $u \in U$ tel que ${}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda_0)$ soit non nul (*cf.* (42), (47)). Ceci joint à (54) implique que $c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ est bornée au voisinage de λ_0. Donc c est bornée au voisinage de z. Par conséquent :

Si $\operatorname{Re} z > 0$, $c(z)$ est défini et vérifie $c(z) = {}^{P_2}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda_0)\left({}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda_0)\right)^{-1}$ (60)

D'autre part, d'après (20), il existe un opérateur d'entrelacement non nul, qu'on note T, entre $I_{P_1}(\sigma, \lambda_0)$ et $I_{P_2}(\sigma, \lambda_0)$. Or, d'après 1.7, $I_{P_1}(\sigma, \lambda_0)$ a un unique quotient simple $J(\sigma, \lambda_0)(\gamma) = J(\sigma, \lambda_0)(\delta)$ et chacune des composantes isotypiques $I_{P_1}^{\gamma}(\sigma, \lambda_0)$ et $I_{P_1}^{\delta}(\sigma, \lambda_0)$ est cyclique pour $r_{\sigma\lambda_0}^{P_1}$. Donc T est non nul (et scalaire) sur $I_{P_1}^{\gamma}(\sigma, \lambda_0)$ et $I_{P_1}^{\delta}(\sigma, \lambda_0)$. Notons t^γ et t^δ ces scalaires. Alors on a :

$$t^\delta\left({}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda_0)\right) = t^\gamma\left({}^{P_2}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda_0)\right) \tag{61}$$

Alors le rapprochement de (60) et (61) montre que $c(z) = (t^\delta)(t^\gamma)^{-1}$ et $c(z)$ est non nul.

Finalement en tenant compte de (57) et (59) on vient de voir que :

La fonction c est une fraction rationnelle, définie pour $\operatorname{Re} z \geq 0$, et de module 1 pour $z \in i\mathbb{R}$. (62)

Montrons qu'une telle fonction est nécessairement constante. On écrit $c=p/q$ avec p, q polynômes sur $\mathbb{C}$ premiers entre eux. Alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad p(ix)/q(ix)=\overline{q(ix)}/\overline{p(ix)} \tag{63}$$

Désignons par $\overline{p}$ (resp. $\overline{q}$) le polynôme $z\to\overline{p(\overline{z})}$ (resp. $z\to\overline{q(\overline{z})}$. Alors (63) se réécrit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad p(ix)/q(ix)=\overline{q}(-ix)/\overline{p}(-ix)$$

et par prolongement algébrique des identités on en déduit l'égalité de fractions rationnelles

$$p(z)/q(z)=\overline{q}(-z)/\overline{p}(-z) \tag{64}$$

Comme p et q sont premiers entre eux il en est de même de $z\to\overline{p}(-z)$ et $z\to\overline{q}(-z)$. Alors (64) implique :

$$\exists\tau\in\mathbb{C}^*,\quad \forall z\in\mathbb{C},\quad q(z)=\tau\overline{p}(-z),\quad p(z)=\tau\overline{q}(-z).$$

D'où $c(z)=\tau^{-1}(p(z)/\overline{p}(-z))$ avec $z\to p(z)$ et $z\to\overline{p}(-z)$ premiers entre eux. Comme $c(z)$ est définie et ne s'annule pas sur $\operatorname{Re} z\geq 0$, on en déduit que $p(z)$ et $\overline{p}(-z)$ ne s'annulent pas pour $\operatorname{Re} z\geq 0$. Donc p ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Donc p est constant d'après le théorème de d'Alembert et c aussi, ce qui achève la démonstration du lemme.

PROPOSITION 5. — (i) Pour toute paire (P_1, P_2) d'éléments de $\mathscr{P}(MA)$ (resp. pour tout $P\in\mathscr{P}(MA)$ et $w\in W_\sigma$) les fonctions $c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda)$ (resp. $c_P^{\delta\gamma}(w, \sigma, \lambda)$) sont constantes, de module 1. En outre $c_P^{\delta\gamma}(w, \sigma, \lambda)$ ne dépend pas de P. Ces constantes seront notées $c_\sigma^{\delta\gamma}(P_2, P_1)$ (resp. $c_\sigma^{\delta\gamma}(w)$) dans la suite.

(ii) $$\forall P_1, P_2\in\mathscr{P}(MA),\quad \forall\gamma,\quad \delta\in A(\sigma),\quad {}^{P_1}F_\sigma^{\delta\gamma}={}^{P_2}F_\sigma^{\delta\gamma} \tag{65}$$

On notera $F_\sigma^{\delta\gamma}$ (et parfois $F^{\delta\gamma}$) au lieu de ${}^{P}F_\sigma^{\delta\gamma}$.

(iii) $$\forall w\in W_\sigma,\quad \forall f\in F_\sigma^{\delta\gamma},\quad \forall\lambda\in\mathfrak{a}^*,\quad f(w\lambda)=c_\sigma^{\delta\gamma}(w)f(\lambda) \tag{66}$$

(iv) Pour tout γ, $\delta\in A(\sigma)$, $w\to c_\sigma^{\delta\gamma}(w)$ est un caractère de W_σ.

Démonstration. — De (50) et de la formule de produit pour les intégrales d'entrelacement normalisées (*cf.* [14], théorème 8.4), il résulte l'égalité de fonctions méromorphes :

$$\forall P_1, P_2, P_3\in\mathscr{P}(MA),\quad c^{\delta\gamma}(P_3, P_1, \sigma, \lambda)=c^{\delta\gamma}(P_3, P_2, \sigma, \lambda)\cdot c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda).$$

En utilisant le lemme 1, et une chaîne de sous-groupes paraboliques adjacents reliant P_1, P_2, ceci implique que :

$$\forall P_1, P_2\in\mathscr{P}(MA),\quad \lambda\to c^{\delta\gamma}(P_2, P_1, \sigma, \lambda) \text{ est constante}.$$

Ceci joint à (53) implique que $\lambda\to c_P^{\delta\gamma}(w, \sigma, \lambda)$ est constante (pour tout $P\in\mathscr{P}(MA)$). Notons ces constantes $c_\sigma^{\delta\gamma}(P_2, P_1)$ et $c_P^{\delta\gamma}(\sigma, w)$. Alors on peut réécrire (54) et (55) :

$$\forall u\in U,\quad {}^{P_2}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda)=c_\sigma^{\delta\gamma}(P_2, P_1){}^{P_1}u_{ab}^{\delta\gamma}(\sigma, \lambda) \tag{67}$$
$$\forall w\in W_\sigma,\quad \forall f\in {}^{P}F_\sigma^{\delta\gamma},\quad f(w\lambda)=c_P^{\delta\gamma}(\sigma, w)f(\lambda) \tag{68}$$

Clairement (67) implique (ii). D'autre part, comme on l'a vu au cours de la démonstration du lemme 1, pour tout $P \in \mathscr{P}(MA)$, ${}^{P}F_{\sigma}^{\delta\gamma}$ n'est pas réduit à zéro. Alors (68) détermine entièrement $c_{P}^{\delta\gamma}(\sigma, w)$. Comme l'on vient de voir que ${}^{P}F_{\sigma}^{\delta\gamma}$ ne dépend pas de $P \in \mathscr{P}(MA)$ on en déduit que $c_{P}^{\delta\gamma}(\sigma, w)$ ne dépend pas de $P \in \mathscr{P}(MA)$. Ceci achève de prouver (i) et (iii) résulte alors de (68).

Pour démontrer (iv), il suffit de choisir $f \in F_{\sigma}^{\delta\gamma}$ non nul et de remarquer que (66) caractérise alors $c_{\sigma}^{\delta\gamma}(w)$ pour tout $w \in W_{\sigma}$. Alors l'égalité $c_{\sigma}^{\delta\gamma}(ww') = c_{\sigma}^{\delta\gamma}(w) c_{\sigma}^{\delta\gamma}(w')$ résulte immédiatement de la comparaison de (66) écrite pour w, w' et ww'. Ceci achève la démonstration de la proposition.

3.3. — Le théorème suivant est dû à M. Duflo dans le cas des groupes de rang 1 et a été utilisé dans ce cas par W. Baldoni Silva pour des questions d'unitarisabilité (*cf.* [1], théorème 6.1). Ce théorème établit, entre autres, un lien naturel entre le R-groupe de Vogan et celui de Knapp (*cf.* [14], sections 12, 13).

THÉORÈME 1. — Avec les notations de 3.2.

(i) Pour tout $\gamma, \delta \in A(\sigma)$, $c_{\sigma}^{\delta\gamma}$ est un caractère unitaire de W_{σ}, trivial sur W_{σ}^{0}.

En d'autres termes, $c_{\sigma}^{\delta\gamma}$ est un caractère de R_{σ}.

(ii) Pour tout $\gamma, \delta \in A(\sigma)$, $F_{\sigma}^{\delta\gamma} \subset S(\mathfrak{a})^{W_{\sigma}^{0}}$.

(iii) $\forall \beta, \gamma, \delta \in A(\sigma)$, $\quad c_{\sigma}^{\delta\gamma} \cdot c_{\sigma}^{\gamma\beta} = c_{\sigma}^{\delta\gamma}$.

(iv) $\forall \gamma, \delta \in A(\sigma)$, $c_{\sigma}^{\delta\gamma} = r(\delta, \gamma)$ où $r(\delta, \gamma)$ est l'unique élément de $\hat{R}_{\sigma}$ tel que $r(\delta, \gamma) \cdot \gamma = \delta$ (pour l'action canonique de $\hat{R}_{\sigma}$ sur $A(\sigma)$).

(v) Pour $\lambda \in i\mathfrak{a}_{0}^{*}$, $W_{\sigma}^{0} \cap W_{\lambda}$ est l'ensemble des $w \in W_{\sigma,\lambda}$ tels que $\mathscr{A}_{P}(w, \sigma, \lambda)$ est scalaire.

Démonstration. — Montrons (i) en raisonnant par l'absurde. Si (i) n'était pas vrai, le groupe W_{σ}^{0} étant engendré par des réflexions (*cf.* 1.7), il existerait une pseudoréflexion $s \in W_{\sigma}^{0}$ telle que $c_{\sigma}^{\delta\gamma}(s) \neq 1$. Soit alors $\lambda \in i\mathfrak{a}_{0}^{*}$ tel que $W_{\lambda} = \{e, s\}$. Un tel λ existe. En effet W est un groupe fini engendré par des réflexions (*cf.* [13]). Alors, d'après un théorème de Chevalley, le stabilisateur de $\lambda (\in i\mathfrak{a}_{0}^{*})$ est engendré par des réflexions. Il suffit alors de choisir un point fixe de s qui ne soit laissé fixé par aucune autre réflexion de W. Alors $R_{\sigma}(\lambda)$ est trivial. Donc $\hat{R}_{\sigma}(\lambda) = \hat{R}_{\sigma}$ et, d'après 1.7, $I_{P}(\sigma, \lambda)$ est irréductible pour tout $P \in \mathscr{P}(MA)$. Alors $A_{P}(s, \sigma, \lambda)$ doit être scalaire et (51) montre que l'on a :

$$c_{P}^{\delta\gamma}(s, \sigma, \lambda) = 1 .$$

Comme $c_{P}^{\delta\gamma}(s, \sigma, .)$ est constante d'après la proposition 5 (i) on vient de montrer que $c_{\sigma}^{\delta\gamma}(s) = 1$. Une contradiction qui achève de prouver (i).

Montrons (ii). D'après (66), on a en particulier :

$$\forall f \in F_{\sigma}^{\delta\gamma}, \qquad \forall w \in W_{\sigma}^{0}, \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^{*}, \qquad f(\lambda) = c_{\sigma}^{\delta\gamma}(w) f(w\lambda) .$$

Comme $c_{\sigma}^{\delta\gamma}(w) = 1$ pour $w \in W_{\sigma}^{0}$, ceci prouve (ii).

Pour prouver (iii), rappelons que, d'après la proposition 3 (iv), pour tout $\beta, \gamma, \delta \in A(\sigma)$,

$F_\sigma^{\delta\gamma} \cdot F_\sigma^{\gamma\beta} \subset F_\sigma^{\delta\beta}$. D'autre part, comme on l'a remarqué plus haut, il existe $f \in F_\sigma^{\delta\gamma}$ et $f' \in F_\sigma^{\gamma\beta}$ non nuls. Utilisant (66) pour (β, γ), (γ, δ) et (β, δ) on trouve alors :

$$\forall w \in W_\sigma, \quad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \qquad f(w\lambda) f'(w\lambda) = c_\sigma^{\delta\gamma}(w) c_\sigma^{\gamma\beta}(w) f(\lambda) f'(\lambda)$$

et :

$$\forall w \in W_\sigma, \qquad \forall \lambda \in \mathfrak{a}^*, \qquad f(w\lambda) f'(w\lambda) = c_\sigma^{\delta\beta}(w) f(\lambda) f'(\lambda).$$

Ces deux équations et la non-nullité de f et f' impliquent alors (iii).

Montrons maintenant (iv). D'après 1.7, on peut appliquer la proposition A.4 à W_σ et son sous-groupe W_σ^0. Il en résulte qu'il existe une représentation de R_σ dans un espace vectoriel $\mathfrak{b}$ et un isomorphisme d'algèbres, i, entre $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0}$ et $S(\mathfrak{b})$ qui est en outre un isomorphisme de R_σ-modules. En outre, l'ensemble Ω des caractères de R_σ intervenant dans la décomposition de $\mathfrak{b}$ engendre $\hat{R}_\sigma$. Soient alors $r \in \Omega$ et $\gamma, \delta \in A(\sigma)$ tels que $r \cdot \gamma = \delta$. Comme R_σ est un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, r est à valeurs dans $\{1, -1\}$. Alors r, qui apparaît dans la décomposition de $\mathfrak{b}$ sous R_σ, apparaît également dans la décomposition de $\mathfrak{b}^*$ sous R_σ. Soit alors ν un élément non nul de la composante isotypique de type r du R_σ-module $\mathfrak{b}^*$. Le stabilisateur de ν dans R_σ est alors égal à $\operatorname{Ker} r$. D'autre part ν définit un caractère de $S(\mathfrak{b})$ et donc de $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0}$ en composant avec i. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que le caractère de $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma^0}$ correspondant coïncide avec celui défini par ν. On voit facilement que

$$R_\sigma(\lambda) = \operatorname{Ker} r \qquad \text{et} \qquad \hat{R}_\sigma(\lambda) = \{e, r\}.$$

Soit alors $w \in W_\sigma$, avec $\bar{w} \in \operatorname{Ker} r$. Alors il résulte de (66) que :

$$\forall f \in F_\sigma^{\delta\gamma}, \qquad f(w\lambda) = c_\sigma^{\delta\gamma}(w) f(\lambda) \tag{69}$$

D'autre part on a $\bar{w} \in R_\sigma(\lambda)$, soit encore $w\lambda \in W_\sigma^0 \lambda$.

D'après (ii) on a donc aussi :

$$\forall f \in F_\sigma^{\delta\gamma}, \qquad f(\lambda) = f(w\lambda) \tag{70}$$

Or, d'après la proposition 4, il existe $f \in F_\sigma^{\delta\gamma}$ tel que $f(\lambda) \neq 0$ (car $r \in \hat{R}_\sigma(\lambda)$). Le rapprochement de (69) et (70) montre donc que $c_\sigma^{\delta\gamma}(w) = 1$. On vient donc de montrer que :

$$\forall r \in \Omega, \quad \forall \gamma, \delta \in A(\sigma), \quad r \cdot \gamma = \delta \Rightarrow \operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} c_\sigma^{\delta\gamma} \tag{71}$$

Supposons que $r \neq c_\sigma^{\delta\gamma}$. Il résulte alors de (71) que $c_\sigma^{\delta\gamma}$ est trivial. Ceci implique, d'après (51), que pour tout $w \in W_\sigma$, $\mathscr{A}_P(w, \sigma, 0)$ prend la même valeur sur les K-types δ et γ. Mais ces opérateurs engendrent le commutant de $r_{\sigma 0}^P$ (*cf.* (19)). Donc $I^\gamma(\sigma)$ et $I^\delta(\sigma)$ sont contenus dans un même sous-module simple de $r_{\sigma 0}^P$. Soit encore :

$$J(\sigma, 0)(\gamma) = J(\sigma, 0)(\delta).$$

Mais $R_\sigma(0) = R_\sigma$ et $\hat{R}_\sigma(0) = \{e\}$. Donc, sauf si $\gamma = \delta$, $J(\sigma, 0)(\gamma)$ et $J(\sigma, 0)(\delta)$ sont distincts.

Finalement, si $\gamma \neq \delta$, on vient de montrer que $c_\sigma^{\delta\gamma} = r$. D'autre part, lorsque $\gamma = \delta$, l'égalité $c_\sigma^{\delta\gamma} = r$ est triviale. Finalement

$$\forall r \in \Omega, \quad \forall \gamma, \delta \in A(\sigma), \quad r \cdot \gamma = \delta \Rightarrow c_\sigma^{\delta\gamma} = r \tag{72}$$

Alors (iv) résulte de (72), de (iii) et du fait que Ω engendre $\hat{R}_\sigma$.

Montrons maintenant (v). Soit d'abord $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$ et $w \in W_{\sigma,\lambda}$ tels que $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ soit scalaire. D'après (51) ceci implique que pour tout $\delta, \gamma \in A(\sigma)$, $c_\sigma^{\delta\gamma}(w)=1$. D'après (iv) ceci implique $w \in W_\sigma^0$. Réciproquement, montrons que, si $\lambda \in i\mathfrak{a}_0^*$ et $w \in W_\sigma^0 \cap W_\lambda$, $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ est scalaire.

En effet $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ prend alors la même valeur scalaire sur les composantes isotypiques $I^\gamma(\sigma)$, $\gamma \in A(\sigma)$. Or, d'après 1.7, la somme de ces composantes isotypiques est cyclique pour $r_{\sigma\lambda}^P$ et ceci suffit à assurer que $\mathscr{A}_P(w, \sigma, \lambda)$ est scalaire, ce qui achève la démonstration du théorème.

3.4. — Nous allons maintenant établir, comme corollaire du théorème 1, une condition nécessaire pour qu'un module $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ soit unitarisable (*cf.* [1], théorème 6.1 pour un cas particulier de ce résultat).

Corollaire du théorème 1. — Soit $\sigma \in \widehat{M}_d$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\mu \in A(\sigma)$. Une condition nécessaire pour que $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ soit unitarisable est que $-\bar{\lambda} \in W_\sigma^0 \lambda$.

Démonstration. — Soit $P \in \mathscr{P}(MA)$ avec $\operatorname{Re}\lambda \in \overline{C}_P$. Grâce au crochet de dualité antilinéaire $\langle , \rangle$ défini par :

$$\forall \varphi \in I_P(\sigma, \lambda), \quad \forall \psi \in I_P(\sigma, -\bar{\lambda}), \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{G/MAN} (\varphi(\dot{g}) \mid \psi(\dot{g})) d\dot{g},$$

$I_P(\sigma, -\bar{\lambda})$ est isomorphe à la transconjuguée de $I_P(\sigma, \lambda)$. Noter que si $(,)$ est le produit scalaire naturel sur $I(\sigma)$ (*cf.* (10)), on a $\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi_{|K}, \psi_{|K})$.

Soit $\bar{I}$ l'orthogonal de $J(\sigma, -\bar{\lambda})(\mu)$ (qui est un sous-module de $I_P(\sigma, -\bar{\lambda})$ puisque $\operatorname{Re}(-\bar{\lambda}) \in -\overline{C}_P$, *cf.* (23)) pour $\langle , \rangle$. Alors $I_P(\sigma, \lambda)/\bar{I}$ est isomorphe à la transconjuguée de $J(\sigma, -\bar{\lambda})(\mu)$ donc irréductible et contient μ. D'où $I(\sigma, \lambda)/\bar{I} = J(\sigma, \lambda)(\mu)$ et la transconjuguée de $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ est isomorphe à $J(\sigma, -\bar{\lambda})(\mu)$. Si $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ est unitarisable il faut donc $J(\sigma, \lambda)(\mu) \simeq J(\sigma, -\bar{\lambda})(\mu)$, ce qui, d'après (27), implique qu'il existe $w \in W_\sigma$ tel que $w\lambda = -\bar{\lambda}$. Supposons cette condition vérifiée et soit A un isomorphisme entre $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ et $J(\sigma, -\bar{\lambda})(\mu)$. On définit un produit hermitien invariant sur $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ par :

$$\forall \varphi, \psi \in J(\sigma, \lambda)(\mu), \qquad (\varphi, \psi)_A = \langle \varphi, A\psi \rangle.$$

Si $\delta \in A(\sigma)$ est contenu dans $J(\sigma, \lambda)(\mu)$, on peut identifier $J(\sigma, \lambda)^\delta(\mu)$ à $I(\sigma)^\delta$ et de même pour $J(\sigma, -\bar{\lambda})^\delta(\mu)$. Avec ces identifications :

$$\forall \varphi \in J(\sigma, \lambda)^\delta(\mu), \quad \forall \psi \in J(\sigma, -\bar{\lambda})^\delta(\mu), \quad \langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi).$$

De même, avec ces identifications, A définit un opérateur scalaire sur $I(\sigma)^\delta$. Soit a^δ le scalaire correspondant. Regardant A comme un opérateur d'entrelacement entre $I_P(\sigma, \lambda)$ et $I_P(\sigma, -\bar{\lambda})$ on voit que, si $\delta, \gamma \in A(\sigma)$ sont contenus dans $J(\sigma, \lambda)(\mu)$:

$$\forall f \in F_\sigma^{\delta\gamma}, \qquad f(-\bar{\lambda}) = (a^\delta / a^\gamma) f(\lambda).$$

Mais, comme $w\lambda = -\bar{\lambda}$, on a aussi d'après (55) :

$$\forall f \in F_\sigma^{\delta\gamma}, \qquad f(-\bar{\lambda}) = c^{\delta\gamma}(w) f(\lambda).$$

Comme $\delta, \gamma \in \hat{R}_\sigma(\lambda)\cdot\mu$ on voit, d'après la proposition 2.4, qu'il existe $f \in F_\sigma^{\delta\gamma}$ tel que $f(\lambda) \neq 0$. D'où l'on déduit :

$$c^{\delta\gamma}(w) = a^\delta / a^\gamma .$$

Or le produit scalaire $(,)_A$ est égal à $a^\delta(,)$ sur $J(\sigma, \lambda)^\delta(\mu)$ ($\simeq I(\sigma)^\delta$) et à $a^\gamma(,)$ sur

$$J(\sigma, \lambda)^\gamma(\mu)(\simeq I(\sigma)^\gamma) .$$

Pour que $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ soit unitaire, il faut (et il suffit) que $(,)_A$ soit défini négatif ou positif. Ce qui implique, en particulier, que a^δ et a^γ soient de même signe. Or, d'après le théorème 1, $c^{\delta\gamma}(w) = \pm 1$. Donc, si $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ est unitaire, on a :

$$\forall \delta, \gamma \in A(\sigma), \quad \delta, \gamma \text{ contenus dans } J(\sigma, \lambda)(\mu), \ c^{\delta\gamma}(w) = 1 .$$

Or, d'après (27), $\delta, \gamma \in A(\sigma)$ sont contenus dans $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ si et seulement si $\delta, \gamma \in \hat{R}_\sigma(\lambda)\cdot\mu$. De plus, d'après le théorème 1, $\forall \delta, \gamma \in A(\sigma)$, $c^{\delta\gamma} = r(\delta, \gamma)$.

Alors, si $J(\sigma, \lambda)(\mu)$ est unitarisable, on a :

$$\forall r \in \hat{R}_\sigma(\lambda), \qquad r(\overline{w}) = 1$$

ce qui est équivalent à :

$$\overline{w} \in R_\sigma(\lambda) .$$

D'où $-\overline{\lambda} \in W_\sigma^0 \cdot \lambda$ d'après la définition de $R_\sigma(\lambda)$. C.Q.F.D.

4. Sur le module de Jacquet des séries principales généralisées

4.1. — Nous allons établir des propriétés du module de Jacquet des séries principales généralisées.

Je tiens à remercier D. Vogan pour m'avoir fourni une démonstration de la proposition 6 (i) et de la proposition 7 avant que [12] ne soit publié. Les démonstrations que nous donnons ici de ces résultats sont toutefois légèrement différentes de celles de D. Vogan.

Nous renvoyons à [12], section 8, pour la définition des notions d'exposant et d'exposant directeur (en anglais « exponent » et « leading exponent ») le long d'un sous-groupe parabolique de G, pour un module de Harish-Chandra pour G.

PROPOSITION 6. — Soient MA un sous-groupe de Levi de G tel que $\hat{M}_d \neq \emptyset$, $\sigma \in \hat{M}_d$, $P \in \mathscr{P}(MA)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\operatorname{Re} \lambda \in -\overline{C}_P$. Alors :

(i) (Vogan) $H_0(\mathfrak{n}, I_P(\sigma, \lambda))_{\lambda+\rho_P} = \bigoplus_{w \in W_\lambda} E_{w\sigma}$, comme module de Harish-Chandra pour M, (73)

et en particulier,

$$\dim \operatorname{Hom}_M (H_0(\mathfrak{n}, I_P(\sigma, \lambda))_{\lambda+\rho_P}, E_\sigma) = \operatorname{Card} W_{\sigma,\lambda} \tag{74}$$

(ii) La forme λ est un exposant directeur le long de P de $I_P(\sigma, \lambda)$. (75)

Démonstration. — Soit $P' = M'A'N'$ le sous-groupe parabolique de G tel que $P \subset P'$

et $\Delta_{P'}^{+}=\{\alpha_{|\mathfrak{a}'} \mid \alpha\in\Delta^{+}(\mathfrak{g},\mathfrak{a}),\ B(\operatorname{Re}\lambda,\alpha)<0\}$. On prend alors les notations de 1.4 et l'on a :

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'\oplus\mathfrak{a}'',\qquad \mathfrak{a}^{*}=(\mathfrak{a}')^{*}+(\mathfrak{a}'')^{*}. \tag{76}$$

Alors :

$\lambda=\lambda'+\lambda''$ avec $\lambda'\in(\mathfrak{a}')^{*}$, $\lambda''\in(\mathfrak{a}'')^{*}$, λ'' est imaginaire pur, $\operatorname{Re}\lambda'\in -C_{P'}$ et donc λ' est $W(\mathfrak{a}')$-régulier.

Alors en induisant par étages on a :

$I_P(\sigma,\lambda)=I_{P'}(I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda''),\lambda')$ où $I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda'')$ est unitaire, semi-simple et tempérée (car λ'' est imaginaire pur) (78)

Désignant par $H_1,\ldots,H_n$ les sous-modules simples de $I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda'')$ on a donc un isomorphisme de modules de Harish-Chandra pour G

$$I_P(\sigma,\lambda)=\bigoplus_{i=1}^{n} I_{P'}(H_i,\lambda')\quad\text{avec}\quad H_i \text{ irréductible et tempéré} \tag{79}$$

Alors, utilisant [12], 8.38.*a*, 8.24.*b*, on voit que (77), (78) et (79) impliquent :

La forme λ' est un exposant directeur le long de P' de $I_{P'}(H_i,\lambda')(i=1,\ldots,n)$ et de $I_P(\sigma,\lambda)$, (80)

et :

$$H_0(\mathfrak{n}',I_{P'}(H_i,\lambda'))_{\lambda'+\rho_{P'}}\simeq H_i,\quad H_0(\mathfrak{n}',I_P(\sigma,\lambda))_{\lambda'+\rho_{P'}}\simeq I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda'') \tag{81}$$

où les isomorphismes sont des isomorphismes de modules de Harish-Chandra pour M'.

Maintenant, d'après [12], 8.38.*b*, 8.24.*b*, on a :

La forme λ'' est un exposant directeur le long de P'' de $I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda'')$ (82)

et (en désignant par ch_M l'application naturelle de la catégorie des modules de Harish-Chandra pour M dans son groupe de Grothendieck) :

$$ch_M(H_0(\mathfrak{n}'',I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda''))_{\lambda''+\rho_{P''}}=\bigoplus_{\substack{w\in W(\mathfrak{a}'')\\ w\lambda''=\lambda''}} ch_M(E_{w\sigma}) \tag{83}$$

Ici $W(\mathfrak{a}'')$ est le groupe de Weyl relatif au sous-groupe de Levi MA'' de M.'. Comme pour tout $w\in W(\mathfrak{a}'')$, $w\sigma\in\hat{M}_d$, il résulte du théorème de Schmid sur les extensions entre séries discrètes (*cf.* [15], théorème 1.6) que $H_0(\mathfrak{n}'',I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda'')_{\lambda''+\rho_{P''}}$ est semi-simple et on a finalement :

$$H_0(\mathfrak{n}'',I_{P''}^{M'}(\sigma,\lambda''))_{\lambda''+\rho_{P''}}\simeq\bigoplus_{\substack{w\in W(\mathfrak{a}'')\\ w\lambda''=\lambda''}} E_{w\sigma} \tag{84}$$

comme modules de Harish-Chandra pour M. Mais :

$$W(\mathfrak{a}'')=W(\mathfrak{a})_{\operatorname{Re}\lambda} \tag{85}$$

L'inclusion $W(\mathfrak{a}'')\subset W(\mathfrak{a})_{\operatorname{Re}\lambda}$ résulte de la définition de $\mathfrak{a}''$. Réciproquement, soit $w\in W(\mathfrak{a})_{\operatorname{Re}\lambda}$. Alors :

$$\forall\alpha\in\Delta_P^{+},\qquad B(\operatorname{Re}\lambda,\alpha)=B(\operatorname{Re}\lambda,w^{-1}\alpha) \tag{86}$$

D'autre part, comme $\operatorname{Re}\lambda\in(\mathfrak{a}')^*$, on a :

$$\forall\alpha\in\Delta_{\mathrm{P}}^{+}(\mathfrak{a}),\qquad \alpha_{|\mathfrak{a}'}=0 \Rightarrow \mathrm{B}(\operatorname{Re}\lambda,\alpha_{|\mathfrak{a}'})=\mathrm{B}(\operatorname{Re}\lambda,\alpha)=0 \tag{87}$$

Le rapprochement de (86) et (87) fournit :

$$\forall\alpha\in\Delta_{\mathrm{P}}^{+}(\mathfrak{a}),\qquad \alpha_{|\mathfrak{a}'}=0 \Rightarrow (w\alpha)_{|\mathfrak{a}'}=0$$

Il en résulte que w laisse stable $\mathfrak{a}'$. Donc w agit sur $\mathfrak{a}'$ comme un élément de $\mathrm{W}(\mathfrak{a}')$. Mais (86) implique que cet élément laisse stable $\mathrm{C}_{\mathrm{P}'}$. Donc w agit trivialement sur $\mathfrak{a}'$ et laisse stable $\mathfrak{a}''$ $(=(\mathfrak{a}')^{\perp})$.

Tout représentant de w est donc dans $\mathrm{M}'\cap\mathrm{K}$ et normalise $\mathfrak{a}''$, ce qui montre que $w\in\mathrm{W}(\mathfrak{a}'')$ et (85) est démontré. Mais alors il résulte de la décomposition $\lambda=\lambda'+\lambda''$, $\lambda'\in(\mathfrak{a}')^*$, $\lambda''\in(\mathfrak{a}'')^*$ que :

$$\{\, w\in\mathrm{W}(\mathfrak{a}'') \mid w\lambda''=\lambda''\,\}=\mathrm{W}(\mathfrak{a})_{\lambda} \tag{88}$$

Ceci joint à (84) montre que

$$\mathrm{H}_0(\mathfrak{n}'',\mathrm{I}_{\mathrm{P}''}^{\mathrm{M}'}(\sigma,\lambda''))_{\lambda''+\rho_{\mathrm{P}''}} \simeq \bigoplus_{w\in\mathrm{W}(\mathfrak{a})_{\lambda}} \mathrm{E}_{w\sigma} \tag{89}$$

Utilisant l'identité :

$$\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{V})=\mathrm{H}_0(\mathfrak{n}'',\mathrm{H}_0(\mathfrak{n}',\mathrm{V})) \tag{90}$$

pour tout $\mathfrak{n}$-module V, on déduit (73) et (74) de (81) et (89), ce qui achève de prouver (i).

Montrons (ii). Soit $\nu\in\mathfrak{a}^*$ tel que $\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda))_{\nu+\rho_{\mathrm{P}}}\neq 0$ et $\nu\underset{\mathrm{P}}{\leq}\lambda$. On va montrer que $\nu=\lambda$. Soit $\nu=\nu'+\nu''$ avec $\nu'\in(\mathfrak{a}')^*$, $\nu''\in(\mathfrak{a}'')^*$. Alors (*cf.* 1.3) on a : $\nu'\underset{\mathrm{P}'}{\leq}\lambda'$.

D'autre part il résulte de (90) que $\mathrm{H}_0(\mathfrak{n}',\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda))_{\nu'+\rho_{\mathrm{P}'}}\neq 0$.

Comme λ' est un exposant directeur le long de P′ de $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda)$ d'après (80), on obtient finalement $\nu'=\lambda'$. Donc $\nu''\underset{\mathrm{P}}{\leq}\lambda''$ et d'après 1.4 ceci implique $\nu''\underset{\mathrm{P}''}{\leq}\lambda''$.

D'autre part, comme $\nu'=\lambda'$, on a $\mathrm{H}_0(\mathfrak{n}',\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda))_{\nu'+\rho_{\mathrm{P}'}}=\mathrm{I}_{\mathrm{P}''}^{\mathrm{M}'}(\sigma,\lambda'')$. En tenant compte de (90), l'hypothèse sur ν implique alors $\mathrm{H}_0(\mathfrak{n}'',\mathrm{I}_{\mathrm{P}''}^{\mathrm{M}'}(\sigma,\lambda''))_{\nu''+\rho_{\mathrm{P}''}}\neq 0$. Mais λ'' est un exposant directeur de $\mathrm{I}_{\mathrm{P}''}^{\mathrm{M}'}(\sigma,\lambda'')$ le long de P″. D'où $\nu''=\lambda''$ et finalement $\nu=\lambda$, ce qui achève de prouver (ii).

PROPOSITION 7 (D. Vogan). — Avec les notations de la proposition 6 :

(i)
$$ch_{\mathrm{M}}(\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda))_{\lambda+\rho_{\mathrm{P}}})=\sum_{i=1}^{r(\sigma,\lambda)} ch_{\mathrm{M}}(\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{J}_i(\sigma,\lambda))_{\lambda+\rho_{\mathrm{P}}}) \tag{91}$$

où $\mathrm{J}_i(\sigma,\lambda)$, $i=1,\ldots,r(\sigma,\lambda)$ est l'ensemble des sous-modules simples de $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda)$ (*cf.* 1.7) et $\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{V})_{\lambda+\rho_{\mathrm{P}}}=0$ si V est un sous-quotient simple de $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda)$ distinct des J_i.

(ii) L'application naturelle $\bigoplus_{i=1}^{r(\sigma,\lambda)}\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{J}_i)_{\lambda+\rho_{\mathrm{P}}}\to\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda))_{\lambda+\rho_{\mathrm{P}}}$ est un isomorphisme de modules de Harish-Chandra pour M ainsi que de $\mathfrak{a}$-modules.

Démonstration. — Soient $\mathrm{V}_1,\ldots,\mathrm{V}_m$ les sous-quotients simples de $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma,\lambda)$ comptés avec leurs multiplicités. Il résulte du fait que λ est un exposant directeur le long de P de $I_P(\sigma, \lambda)$ (*cf.* proposition 6) et de [12], lemme 8.46, que :

$$ch_M(H_0(\mathfrak{n}, I_P(\sigma, \lambda)_{\lambda+\rho_P}) = \sum_{i=1}^{m} ch_M(H_0(\mathfrak{n}, V_i)_{\lambda+\rho_P}) \tag{92}$$

Ceci joint à (73) implique que $H_0(\mathfrak{n}, V_i)_{\lambda+\rho_P}$ est, pour tout $i=1, \ldots, m$, une somme éventuellement vide de $w\sigma$, $w \in W(\mathfrak{a})_\lambda$ (comme module de Harish-Chandra pour M). Si $H_0(\mathfrak{n}, V_i)_{\lambda+\rho_P}$ est non nul, il en résulte, grâce à la réciprocité de Frobenius (*cf.* par exemple [12], théorème 4.9), que V_i est un sous-module de $I_P(w\sigma, \lambda)$, $w \in W(\mathfrak{a})_\lambda$. Or $I_P(w\sigma, \lambda)$ a les mêmes sous-modules simples que $I_P(\sigma, \lambda)$ (*cf.* 1.7).

Finalement :

$$H_0(\mathfrak{n}, V_i)_{\lambda+\rho_P} = 0 \quad \text{si} \quad V_i \text{ n'est pas un sous-module simple de } I_P(\sigma, \lambda) \tag{93}$$

Alors (91) résulte du rapprochement de (92) et (93) et (i) est démontré.

D'autre part, comme λ est exposant directeur le long de P de $I_P(\sigma, \lambda)$, il résulte de [12] 8.46 que $H_j(\mathfrak{n}, V_i)_{\lambda+\rho_P}$ est nul pour $i=1, \ldots, m$ et $j>0$. Alors la longue suite exacte d'homologie, jointe à (93) permet de conclure que la flèche naturelle

$$\bigoplus_{i=1}^{r(\sigma,\lambda)} H_0(\mathfrak{n}, J_i(\sigma, \lambda))_{\lambda+\rho_P} \to H_0(\mathfrak{n}, I_P(\sigma, \lambda))_{\lambda+\rho_P}$$

est un isomorphisme. La naturalité de cette flèche implique qu'elle commute aux actions de K_M, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$ et la proposition est démontrée.

4.2. THÉORÈME 2. — Soient MA un sous-groupe de Levi de G, tel que $\hat{M}_d \neq \emptyset$, $\sigma \in \hat{M}_d$, $P \in \mathscr{P}(MA)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que $\operatorname{Re} \lambda \in -\overline{C}_P$. Soient $J_1, \ldots, J_{r(\sigma,\lambda)}$ les sous-modules simples de $I_P(\sigma, \lambda)$.

(i) Pour $i=1, \ldots, r(\sigma, \lambda)$, le $S(\mathfrak{a})$-module $\operatorname{Hom}_M(E_\sigma, H_0(\mathfrak{n}, J_i)_{\lambda+\rho_P})$ est isomorphe à $(S(\mathfrak{a}) \underset{S(\mathfrak{a})^{W^0_{\sigma,\lambda}}}{\otimes} \mathbb{C}_\lambda) \otimes \mathbb{C}_{\rho_P}$, où $W^0_{\sigma,\lambda} = W_\lambda \cap W^0_\sigma$. (94)

(ii) Le $S(\mathfrak{a})$-module $\operatorname{Hom}_M(E_\sigma, H_0(\mathfrak{n}, I_P(\sigma, \lambda))_{\lambda+\rho_P})$ est isomorphe à une somme de Card $R_\sigma(\lambda)$ copies de $(S(\mathfrak{a}) \underset{S(\mathfrak{a})^{W^0_{\sigma,\lambda}}}{\otimes} \mathbb{C}_\lambda) \otimes \mathbb{C}_{\rho_P}$. (95)

Démonstration. — Notons d'abord que d'après 1.7, Card $R_\sigma(\lambda) = r(\sigma, \lambda)$. Alors on voit, grâce à la proposition 7 (ii) que (ii) est une conséquence de (i).

Démontrons (i). Notons (ξ, Z_ξ) le $S(\mathfrak{a})$-module $S(\mathfrak{a}) \underset{S(\mathfrak{a})^{W^0_{\sigma,\lambda}}}{\otimes} \mathbb{C}_\lambda$.

a) Notons que $W^0_{\sigma,\lambda}$ est le stabilisateur dans W^0_σ de λ. Comme W^0_σ est engendré par des réflexions, il en est de même de $W^0_{\sigma,\lambda}$ d'après un théorème de Chevalley. Alors il résulte de [19] 2.1.3.5 que :

dim Z_ξ = Card $W^0_{\sigma,\lambda}$ et le $S(\mathfrak{a})^{W^0_{\sigma,\lambda}}$-module Z_ξ est la somme de Card $W^0_{\sigma,\lambda}$ copies de $\mathbb{C}_\lambda$. (96)

b) D'autre part $H_0(\mathfrak{n}, J_i)_{\lambda+\rho_P}$ est, d'après la proposition 7 (i) et la proposition 8 (ii), une somme de $E_{w\sigma}(w \in W(\mathfrak{a})_\lambda)$ comme module de Harish-Chandra pour M. Alors, notant

$\tilde{J}_i = \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, H_0(\mathfrak{n}, J_i)_{\lambda+\rho_P})$, il résulte de la réciprocité de Frobenius (*cf.* [12], théorème 4.9) :

$$\mathrm{Hom}_G(J_i, I_P(\sigma, Z_\xi)) \simeq \mathrm{Hom}_{S(\mathfrak{a})}(\tilde{J}_i, Z_\xi \otimes \mathbb{C}_{\rho_P}) \tag{97}$$

c) On va démontrer maintenant :

$$\dim \mathrm{Hom}_G(J_i, I_P(\sigma, Z_\xi)) = \mathrm{Card}\, W^0_{\sigma,\lambda} = \dim Z_\xi \tag{98}$$

D'abord $I_P(\sigma, Z_\xi)$ contient J_i dans sa suite de Jordan Hölder avec multiplicité

$$\dim Z_\xi = \mathrm{Card}\, W^0_{\sigma,\lambda},$$

ceci d'après (96) et le fait que J_i est contenu avec multiplicité 1 dans $I_P(\sigma, \lambda)$ (*cf.* 1.7). Donc :

$$\dim \mathrm{Hom}_G(J_i, I_P(\sigma, Z_\xi)) \leq \mathrm{Card}\, W^0_{\sigma,\lambda} = \dim Z_\xi \tag{99}$$

Soit maintenant $\gamma \in A(\sigma)$ tel que $J_i = J(\sigma, \lambda)(\gamma)$. Alors :

l'algèbre U^K agit scalairement sur $I_P(\sigma, Z_\xi)^\gamma$ (100)

En effet, d'après (48) (*cf.* proposition 3 (v)), il suffit pour le voir de vérifier que $F^{\gamma\gamma}_\sigma (\subset S(\mathfrak{a}))$ agit scalairement sur Z_ξ. Mais d'après le théorème 1 (ii), $F^{\gamma\gamma}_\sigma$ est contenu dans $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$ et (100) résulte alors de (96). De la même manière on voit, en utilisant la proposition 3 et le théorème 1 (ii) que :

$$\forall \gamma, \delta \in A(\sigma), \quad \forall f \in F^{\delta\gamma}_\sigma, \quad f(\lambda) = 0 \Rightarrow (r^P_{\sigma\lambda}(U^{\delta\gamma}))(I_P(\sigma, Z_\xi))^\gamma = 0 \tag{101}$$

Alors il résulte des propriétés des sous-espaces de transition (*cf.* (42)) que, pour tout K-sous-module V de $I_P(\sigma, Z_\xi)^\gamma$, le U-sous-module X engendré par V contient le K-type $\delta \in A(\sigma)$ si et seulement si il existe $f \in F^{\delta\gamma}_\sigma$ tel que $f(\lambda) \neq 0$, soit encore (d'après la proposition 4) si et seulement si $\delta \in \hat{R}_\sigma(\lambda) \cdot \gamma$. Si, en outre, V est irréductible, X contient γ avec multiplicité 1. Soit alors Y un sous-module simple de X. C'est, *a fortiori*, un sous-module simple de $I_P(\sigma, Z_\xi)$. La réciprocité de Frobenius impose alors que $H_0(\mathfrak{n}, Y)_{\lambda+\rho_P} \neq 0$ (puisque Z_ξ est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$). Alors la proposition 7 (i) implique que Y est l'un des sous-modules simples de $I_P(\sigma, \lambda)$ i. e. $Y = J_i$ pour un i élément de $\{1, \ldots, r(\sigma, \lambda)\}$. Mais on a vu $X^\delta = 0$ si $\delta \in A(\sigma)$ et $\delta \notin \hat{R}_\sigma(\lambda) \cdot \gamma$. Alors il résulte de 1.7 que $Y = J(\sigma, \lambda)(\gamma)$. D'autre part X admet clairement $J(\sigma, \lambda)(\gamma)$ comme quotient. Finalement X admet $J_i = J(\sigma, \lambda)(\gamma)$ comme quotient et comme sous-module. Comme X contient γ avec multiplicité 1 et que X^γ est cyclique dans X on en déduit $X \simeq J(\sigma, \lambda)(\gamma)$ et l'on vient de voir que $\mathrm{Hom}_K(E_\gamma, I_P(\sigma, Z_\xi))$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_G(J(\sigma, \lambda)(\gamma), I_P(\sigma, Z_\xi))$. Comme $\dim \mathrm{Hom}_K(E_\gamma, I_P(\sigma, Z_\xi)) = \dim Z_\xi$, (98) résulte alors de (99).

d) De la réciprocité de Frobenius (*cf.* [12], théorème 4.9) et de 1.7, on déduit que $\mathrm{Hom}_{S(\mathfrak{a})}(\tilde{J}_i, \mathbb{C}_{\lambda+\rho_P}) \simeq \mathbb{C}$. Comme $\tilde{J}_i$ est primaire de type $\mathbb{C}_{\lambda+\rho_P}$ ceci exprime que $\tilde{J}_i$ a un unique quotient simple. En particulier $\tilde{J}_i$ admet un vecteur cyclique. Comme d'après (97) et (98) :

$$\forall i = 1, \ldots, r(\sigma, \lambda), \qquad \dim \mathrm{Hom}_{S(\mathfrak{a})}(\tilde{J}_i, Z_\xi \otimes \mathbb{C}_{\rho_P}) = \dim Z_\xi,$$

on voit qu'il existe pour tout $i=1,\ldots,r(\sigma,\lambda)$ un homomorphisme surjectif de $S(\mathfrak{a})$-modules $\varphi_i : \tilde{J}_i \to Z_\xi \otimes \mathbb{C}_{\rho_P}$.

En particulier : $\dim \tilde{J}_i \geq \dim Z_\xi = \operatorname{Card} W^0_{\sigma,\lambda}$. Alors de la proposition 7 (ii) il résulte que :

$$\dim (I_P(\sigma,\lambda))^\sim \geq r(\sigma,\lambda) \times \operatorname{Card} W^0_{\sigma,\lambda}, \tag{102}$$

où l'on a posé $I_P(\sigma,\lambda)^\sim = \operatorname{Hom}_M(H_0(\mathfrak{n}, I_P(\sigma,\lambda))_{\lambda+\rho_P}, E_\sigma)$ et cette inégalité est stricte si et seulement si l'un des J_i vérifie $\dim \tilde{J}_i > \dim Z_\xi$. Mais d'après la proposition 6 (i), $\dim I_P(\sigma,\lambda)^\sim = \operatorname{Card} W_{\sigma,\lambda}$. D'autre part $\operatorname{Card} R_\sigma(\lambda) = r(\sigma,\lambda)$ et évidemment

$$\operatorname{Card} W_{\sigma,\lambda} = (\operatorname{Card} R_\sigma(\lambda))(\operatorname{Card} W^0_{\sigma,\lambda}).$$

Alors l'inégalité (102) est une égalité et pour tout $i=1,\ldots,r(\sigma,\lambda)$ on a $\dim \tilde{J}_i = \dim Z_\xi$. Alors les homomorphismes φ_i, qui sont surjectifs, sont bijectifs pour des raisons de dimension. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

5. Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux d'une série principale généralisée et transformée de Fourier des sous-espaces de transitions entre ces K-types

5.1. — Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME 3. — Soient MA un sous-groupe de Levi de G tel que $\hat{M}_d$ soit non vide, $\sigma \in \hat{M}_d$, $\gamma, \delta \in A(\sigma)$ des K-types minimaux de $I(\sigma)$, $r(\delta,\gamma)$ l'unique élément de $\hat{R}_\sigma$ tel que $r(\delta,\gamma)\cdot\gamma = \delta$. Alors :

(i) pour tout $u \in U^K$, u agit par un scalaire sur $I_P(\sigma,\lambda)^\gamma$ (où $P \in \mathscr{P}(MA)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$) qui ne dépend pas de P. Ce scalaire étant noté $r^\gamma_\sigma(u)(\lambda)$, l'application $\lambda \to r^\gamma_\sigma(u)(\lambda)$ est polynomiale en $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et définit un élément $r^\gamma_\sigma(u)$ de $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}$. L'application r^γ_σ de U^K dans $S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}$ ainsi définie est appelée homomorphisme de Harish-Chandra lié au K-type minimal γ de la série principale généralisée $I_P(\sigma,.)$. En outre on a :

$$\text{l'homomorphisme } r^\gamma_\sigma : U^K \to S(\mathfrak{a})^{W_\sigma} \text{ est surjectif} \tag{103}$$

(ii) L'espace $F^{\delta\gamma}_\sigma$ est égal à $(S(\mathfrak{a})^{W_\sigma})^{r(\delta,\gamma)}$ qui est la composante isotypique de type $r(\delta,\gamma) \in \hat{R}_\sigma$ de $S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma}$ sous l'action de R_σ.

Remarque. — Dans le cas de la série principale sphérique (i. e. γ est le K-type trivial), l'homomorphisme $r^\gamma_\sigma : U^K \to S(\mathfrak{a})^W$ est l'homomorphisme de Harish-Chandra usuel dont la surjectivité est bien connue.

5.2. — Nous allons démontrer le théorème en établissant plusieurs lemmes préliminaires. Ayant fixé $\sigma \in \hat{M}_d$ une fois pour toutes, nous allons alléger les notations en notant pour $\gamma, \delta \in A(\sigma)$ et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, $F^{\delta\gamma}$, R, $\hat{R}$, $R(\lambda)$, $\hat{R}(\lambda)$ au lieu de $F^{\delta\gamma}_\sigma$, R_σ, $\hat{R}_\sigma$, $R_\sigma(\lambda)$, $\hat{R}_\sigma(\lambda)$. Nous noterons également :

$$S = S(\mathfrak{a})^{W^0_\sigma} \tag{104}$$

sur lequel R opère.

D'autre part, pour tout sous-groupe H de $\hat{R}$ on note :

F^{γ}_{H} la sous-algèbre de $S(\mathfrak{a})$ engendrée par $\sum_{r\in H} F^{r\gamma,\gamma}$. Notez que si H est trivial, $F^{\gamma}_{H}=F^{\gamma\gamma}$. (105)

Lemme 2. — Avec les notations ci-dessus :

(i) $F^{\gamma}_{H}\subset S^{H^{\perp}}$

(ii) l'algèbre $S^{H^{\perp}}$ est entière sur F^{γ}_{H}

(iii) Soient λ, $\lambda'\in\mathfrak{a}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) $\forall f\in F^{\gamma}_{H},\quad f(\lambda)=f(\lambda')$

(*b*) $\forall f\in S^{H^{\perp}},\quad f(\lambda)=f(\lambda')$

(iv) l'application $I\to I\cap F^{\gamma}_{H}$ est une correspondance bijective entre les idéaux maximaux de $S^{H^{\perp}}$ et ceux de F^{γ}_{H}.

Démonstration :

(i) D'après le théorème 1 et la proposition 5 (iii) (*cf.* (66)), pour tout γ, $\delta\in A(\sigma)$ on a $F^{\delta\gamma}\subset S^{r(\delta,\gamma)}$. Alors (i) résulte des définitions.

(ii) D'après les définitions F^{γ}_{H} contient $r^{\gamma}_{\sigma}(U^{K})=F^{\gamma\gamma}$. Or d'après [16], corollaire 8.6, $S(\mathfrak{a})$ est entière sur $r^{\gamma}_{\sigma}(U^{K})$. *A fortiori* $S^{H^{\perp}}$ est entière sur F^{γ}_{H} et (ii) est prouvé.

(iii) De l'inclusion $F^{\gamma}_{H}\subset S^{H^{\perp}}$ résulte l'implication (*b*) $\Rightarrow$ (*a*). Montrons (*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Supposons (*a*) vérifié. D'après Harish-Chandra (*cf.* par exemple [16], théorème 2.10) l'action de U^{K} sur une composante isotypique sous K d'un module de Harish-Chandra simple pour G (connexe) le détermine (à équivalence près). Comme $r^{\gamma}_{\sigma}(U^{K})\subset F^{\gamma}_{H}$, on voit que (*a*) implique en particulier :

$$J(\sigma,\lambda)(\gamma)=J(\sigma,\lambda')(\gamma) \tag{106}$$

Alors, d'après (27) (*cf.* 1.7), ceci implique :

$$\lambda'\in W_{\sigma}\lambda \tag{107}$$

Ce qui démontre l'implication (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) dans le cas particulier où $H=\{e\}$, car alors $S^{H^{\perp}}=S(\mathfrak{a})^{W_{\sigma}}$ et (107) est alors équivalent à (*b*). On va alors démontrer (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) par récurrence sur Card H. Plus précisément l'implication (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) résultera en général de la démonstration de l'assertion suivante : si (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) est vraie pour un sous-groupe H de $\hat{R}$, elle est vraie pour tout sous-groupe H′ de $\hat{R}$ contenant H et tel que Card (H′/H)=2.

Soient donc H et H′ comme ci-dessus et supposons (*a*) vérifié pour H′. Alors (*a*) est vérifié pour H, donc (*b*) aussi et il en résulte :

$$\exists w\in W_{\sigma},\qquad \overline{w}\in H^{\perp},\qquad \lambda'=w\lambda \tag{108}$$

(où $^{-}$ désigne la projection canonique $W_{\sigma}\to$

D'autre part, d'après le théorème 1 et la proposition 5 (iii) (*cf.* (66)) on a :

$$\forall r\in\hat{R},\qquad \forall f\in F^{r\gamma,\gamma},\qquad r(\overline{w})f(\lambda)=f(w\lambda),$$

soit, en tenant compte de (108) :

$$\forall r \in \hat{\mathrm{R}}, \qquad \forall f \in \mathrm{F}^{r\gamma,\gamma}, \qquad r(\overline{w})f(\lambda) = f(\lambda') \tag{109}$$

Or, par hypothèse :

$$\forall r \in \mathrm{H}', \qquad \forall f \in \mathrm{F}^{r\gamma,\gamma}, \qquad f(\lambda) = f(\lambda') \tag{110}$$

Alors on voit, grâce à la proposition 4, que (109) et (110) impliquent :

$$\forall r \in \mathrm{H}', \qquad r(\overline{w}) \neq 1 \Rightarrow r \notin \hat{\mathrm{R}}(\lambda),$$

soit encore :

$$\forall r \in \hat{\mathrm{R}}(\lambda) \cap \mathrm{H}', \qquad r(\overline{w}) = 1 \tag{111}$$

Or $\hat{\mathrm{R}}(\lambda) \cap \mathrm{H}'$ est l'orthogonal du sous-groupe de R engendré par $\mathrm{R}(\lambda)$ et $(\mathrm{H}')^{\perp}$. Comme R est commutatif, le sous-groupe engendré par $\mathrm{R}(\lambda)$ et $(\mathrm{H}')^{\perp}$ est égal à $(\mathrm{H}')^{\perp}.(\mathrm{R}(\lambda))$ et (111) se réécrit $\overline{w} \in (\mathrm{H}')^{\perp}.(\mathrm{R}(\lambda))$ ou encore $w = w_1 w_2$ avec $w_1, w_2 \in \mathrm{W}_\sigma$, $\overline{w}_1 \in (\mathrm{H}')^{\perp}$, $\overline{w}_2 \in \mathrm{R}(\lambda)$. Alors, d'après la définition de $\mathrm{R}(\lambda)$, on en déduit :

$$\lambda' = w\lambda \in w_1(\mathrm{W}_\sigma^0 \lambda) \qquad \text{avec} \qquad \overline{w}_1 \in (\mathrm{H}')^{\perp},$$

et ceci montre que (*b*) est vérifié pour H'. Ceci achève de prouver (iii). Montrons (iv) D'après (ii) l'application $\mathrm{I} \to \mathrm{I} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{H}}^{\gamma}$ est une correspondance surjective entre les idéaux maximaux de $\mathrm{S}^{\mathrm{H}^{\perp}}$ et ceux de $\mathrm{F}_{\mathrm{H}}^{\gamma}$. Mais (iii) implique que cette correspondance est injective et le lemme est démontré.

Lemme 3. — Soient $\gamma \in \mathrm{A}(\sigma)$ et (π, V) un $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$ $(\lambda \in \mathfrak{a}^*)$. Notons par un point l'action des éléments de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ sur les éléments de V. Soit $v \in \mathrm{V}$. Alors :

(i) $\forall r \in \hat{\mathrm{R}}$, $r \notin \hat{\mathrm{R}}(\lambda) \Rightarrow \mathrm{F}^{r\gamma,\gamma} \cdot v \subset \mathrm{I}_\lambda \cdot v$ où I_λ est l'idéal maximal de $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$ correspondant à λ.

(ii) L'égalité $\mathrm{F}^{\gamma\gamma} \cdot v = \mathbb{C}v$ implique :

pour tout $r \in \hat{\mathrm{R}}(\lambda)$, $\dim \mathrm{F}^{r\gamma,\gamma} \cdot v \cap \mathrm{I}_\lambda \cdot v = \{0\}$.

Démonstration. — Il résulte de la proposition 4 que, pour tout $r \in \hat{\mathrm{R}}$, $r \notin \hat{\mathrm{R}}(\lambda)$ implique $\mathrm{F}^{r\gamma,\gamma} \subset \mathrm{I}_\lambda$ et (i) en découle.

Montrons (ii) et pour cela supposons $\mathrm{F}^{\gamma\gamma} \cdot v = \mathbb{C}v$. Soit $\mathrm{P} \in \mathscr{P}(\mathrm{MA})$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda \in \overline{\mathrm{C}}_{\mathrm{P}}$. Alors le sous-module de $\mathrm{I}_{\mathrm{P}}(\sigma, \mathrm{V})$ engendré par $\mathrm{I}^{\gamma}(\sigma) \otimes \mathbb{C}v$ contient le K-type γ avec multiplicité 1. En effet, d'après (42), $(r_{\sigma\pi}^{\mathrm{P}}(\mathrm{U})(\mathrm{I}^{\gamma}(\sigma) \otimes \mathbb{C}v))^{\gamma}$ est égal à $r_{\sigma\pi}^{\mathrm{P}}(\mathrm{U}^{\gamma\gamma})(\mathrm{I}^{\gamma}(\sigma) \otimes \mathbb{C}v)$.

Or $r_{\sigma\pi}^{\mathrm{P}}(\mathrm{U}^{\gamma\gamma})_{|\mathrm{I}^{\gamma}(\sigma)\otimes\mathrm{V}} = \tilde{\pi}({}^{\mathrm{P}}\mathscr{F}_{\sigma}^{\gamma\gamma})$, d'après la proposition 2 (ii).

Comme, d'après la proposition 3 (iii), ${}^{\mathrm{P}}\mathscr{F}_{\sigma}^{\gamma\gamma}$ est égal à $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}_\gamma, \mathrm{E}_\gamma) \otimes \mathrm{F}_{\sigma}^{\gamma\gamma}$, cela implique bien que $\mathrm{X} = r_{\sigma\pi}^{\mathrm{P}}(\mathrm{U})(\mathrm{I}(\sigma)^{\gamma} \otimes \mathbb{C}v)$ contient γ avec multiplicité 1 dans sa suite de Jordan-Hölder. Alors, grâce à 1.7, on voit que pour tout $r \in \hat{\mathrm{R}}(\lambda)$, $r\gamma$ est contenu avec multiplicité 1 dans X.

Tenant compte de la proposition 2 (ii), de la proposition 3 et de (42), il en résulte :

$$\forall r \in \hat{\mathrm{R}}(\lambda), \qquad \dim \mathrm{F}^{r\gamma,\gamma} \cdot v = 1 \tag{112}$$

Par ailleurs, pour $r \in \hat{\mathrm{R}}(\lambda)$, $\mathrm{F}^{r\gamma,\gamma}$ n'est pas inclus dans I_λ d'après la proposition 4. Soit alors $f \in \mathrm{F}^{r\gamma,\gamma}$ avec $f \notin \mathrm{I}_\lambda$. Comme V est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, toutes les valeurs propres de $\pi(f)$ sont égales à $f(\lambda)$. Donc $f \cdot v \neq 0$. Si on avait $f \cdot v \in \mathrm{I}_\lambda \cdot v$, il existerait $f' \in \mathrm{I}_\lambda$ tel que $(f - f') \cdot v = 0$.

Or les valeurs propres de $\pi(f-f')$ sont égales à $f(\lambda)-f'(\lambda)=f(\lambda)\neq 0$; une contradiction qui montre que $\mathbb{C}(f\cdot v)\cap \mathrm{I}_\lambda\cdot v=\{0\}$. Comme $f\cdot v\neq 0$, il résulte de (112) que l'on a $\mathrm{F}^{r\gamma,\gamma}\cdot v=\mathbb{C}(f\cdot v)$. Donc :

$$\forall r\in\hat{\mathrm{R}}(\lambda),\qquad \mathrm{F}^{r\gamma,\gamma}\cdot v\cap \mathrm{I}_\lambda\cdot v=\{0\},$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 4. — On utilise les notations définies ci-dessus (*cf.* (104), (105)). Soit $\lambda\in\mathfrak{a}^*$. Soit H un sous-groupe de $\hat{\mathrm{R}}$ supplémentaire de $\hat{\mathrm{R}}(\lambda)$ i. e. $\hat{\mathrm{R}}(\lambda)\cap\mathrm{H}=\{e\}$ et $\hat{\mathrm{R}}$ est engendré par $\hat{\mathrm{R}}(\lambda)$ et H. Alors pour tout $\mathrm{S}(\mathfrak{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, (π, V), l'injection canonique : $0\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathbb{C}_\lambda, \mathrm{V})\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}^\gamma_\mathrm{H}}(\mathbb{C}_\lambda, \mathrm{V})$ est un isomorphisme.

Démonstration. — On se fixe $\mathrm{P}\in\mathscr{P}(\mathrm{MA})$ tel que $\mathrm{Re}\,\lambda\in-\overline{\mathrm{C}}_\mathrm{P}$.

Alors, d'après le théorème 2 et la réciprocité de Frobenius on a :

$$\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma),\quad \mathrm{I}_\mathrm{P}(\sigma,\mathrm{V}))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}(\mathfrak{a})}(\mathrm{S}(\mathfrak{a})\underset{\mathrm{S}(\mathfrak{a})^{\mathrm{W}^0_{\sigma,\lambda}}}{\otimes}\mathbb{C}_\lambda,\mathrm{V})\tag{113}$$

D'autre part, soit Y un K-sous-module de $\mathrm{I}_\mathrm{P}(\sigma,\mathrm{V})^\gamma$ et soit $\mathrm{X}=r^\mathrm{P}_{\sigma\pi}(\mathrm{U})\cdot\mathrm{Y}$ le sous U-module engendré par Y. D'après la proposition 7 (i), les seuls sous-modules simples de $\mathrm{I}_\mathrm{P}(\sigma,\mathrm{V})$ sont de la forme $\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\delta)$, $\delta\in\mathrm{A}(\sigma)$. *A fortiori*, il en est de même pour X. Par conséquent, pour que X admette $\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma)$ comme seul sous-module simple, il suffit que $\mathrm{X}^\delta=\{0\}$ pour tout $\delta\in\mathrm{H}\cdot\gamma$, $\delta\neq\gamma$. Prenons alors $v\in\mathrm{V}$ tel que $\mathrm{F}^\gamma_\mathrm{H}\cdot v=\mathbb{C}v$ et posons $\mathrm{Y}=\mathrm{I}^\gamma(\sigma)\otimes\mathbb{C}v$. Comme $\hat{\mathrm{R}}(\lambda)\cap\mathrm{H}=\{e\}$, il résulte de la proposition 4 que :

$$\forall\delta\in\mathrm{H}\cdot\gamma,\qquad \delta\neq\gamma\Rightarrow\forall f\in\mathrm{F}^{\delta\gamma},\qquad f(\lambda)=0.$$

Il en résulte que $\mathrm{F}^{\delta\gamma}\cdot v=0$ pour tout $\delta\in\mathrm{H}\cdot\gamma$, $\delta\neq\gamma$. Alors, grâce aux propositions 2 et 3 et à (42), on voit que :

$$\forall\delta\in\mathrm{H}\cdot\gamma,\qquad \delta\neq\gamma\Rightarrow\mathrm{X}^\delta=\{0\}.$$

D'après ce qui précède cela implique que les seuls sous-modules simples de X sont isomorphes à $\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma)$. Mais $\mathrm{F}^{\gamma\gamma}\cdot v=\mathbb{C}v$ implique que γ est contenu avec multiplicité 1 dans K. Alors X admet $\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma)$ comme sous-module et comme quotient et en outre $\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma)$ apparaît une seule fois dans la suite de Jordan-Hölder de X. Donc $\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma)$ est facteur direct de X. Comme X^γ est cyclique dans X on en déduit que $\mathrm{X}\simeq\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma)$. Il en résulte :

$$\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{J}(\sigma,\lambda)(\gamma)),\mathrm{I}_\mathrm{P}(\sigma,\mathrm{V}))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}^\gamma_\mathrm{H}}(\mathbb{C}_\lambda,\mathrm{V})\tag{114}$$

La comparaison de (113) et (114) fournit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}(\mathfrak{a})}(\mathrm{S}(\mathfrak{a})\underset{\mathrm{S}(\mathfrak{a})^{\mathrm{W}^0_{\sigma,\lambda}}}{\otimes}\mathbb{C}_\lambda,\mathrm{V})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}^\gamma_\mathrm{H}}(\mathbb{C}_\lambda,\mathrm{V})\tag{115}$$

Mais le premier membre de (115) est isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}(\mathfrak{a})^{\mathrm{W}^0_{\sigma,\lambda}}}(\mathbb{C}_\lambda,\mathrm{V})$.

Comme W^0_σ est engendré par des réflexions, on déduit de la proposition A.1 et de la proposition A.2 (ii) que :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{F}^\gamma_\mathrm{H}}(\mathbb{C}_\lambda,\mathrm{V})\simeq\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}(\mathfrak{a})^{\mathrm{W}^0_\sigma}}(\mathbb{C}_\lambda,\mathrm{V}).$$

Alors l'injection canonique du lemme est une bijection pour des raisons de dimensions et le lemme est démontré.

LEMME 5. — Soient $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et H un sous-groupe de $\hat{R}$ tel que $\hat{R}(\lambda) \cap H = \{ e \}$. Alors : pour tout $\gamma \in A(\sigma)$ et tout $S(\mathfrak{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, (π, V), l'injection canonique $0 \to \mathrm{Hom}_{S^{H^\perp}}(\mathbb{C}_\lambda, V) \to \mathrm{Hom}_{F^\gamma_H}(\mathbb{C}_\lambda, V)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Le lemme 4 assure que le lemme 5 est vrai pour tout sous-groupe de $\hat{R}$ supplémentaire de $\hat{R}(\lambda)$. Alors il suffit de voir que :

Si le lemme est vrai pour un sous-groupe H de $\hat{R}$ tel que $H \cap \hat{R}(\lambda) = \{ e \}$, il est vrai pour tout sous-groupe H' de H tel que $\mathrm{Card}(H/H') = 2$.

Soient donc H' et H vérifiant ces hypothèses. On va démontrer que l'assertion du lemme est vraie pour H' en procédant par récurrence sur dim V. L'assertion est claire si $\dim V = 1$. Supposons l'assertion démontrée pour $\dim V < n$. Soit alors V' un $S(\mathfrak{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$ de dimension n. Soit $v \in V'$ tel que $\mathbb{C}v$ soit stable sous l'action de $F^\gamma_{H'}$. Il faut montrer que $\mathbb{C}v$ est stable sous $S^{(H')^\perp}$. Notons :

$$X = \sum_{r \in H, r \notin H'} F^{r\gamma, \gamma} \cdot v$$

Comme $H \cap \hat{R}(\lambda) = \{ e \}$, il résulte du lemme 3 que :

$$X \subset I_\lambda \cdot v (\subsetneq V')$$

L'action de $F^\gamma_{H'}$ étant scalaire sur $\mathbb{C}v$, il en va de même sur $I_\lambda \cdot v$. L'hypothèse de récurrence montre donc que :

$S^{(H')^\perp}$ agit scalairement sur $I_\lambda \cdot v$ et *a fortiori sur X* (116)

On va montrer que $S^{H^\perp}$ agit scalairement sur X, en utilisant l'hypothèse que le lemme est vrai pour H. Soient alors $r, r_0 \in H$, avec $r_0 \notin H'$ et étudions l'action de $F^{rr_0\gamma, r_0\gamma}$ sur $F^{r_0\gamma, \gamma} \cdot v$. Distinguons plusieurs cas :

α) si $r \in H'$, d'après (116), $F^{rr_0\gamma, r_0\gamma}$ agit scalairement sur $F^{r_0\gamma, \gamma} \cdot v \subset X$;

β) si $r \notin H'$, comme $H/H' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $r_0 \notin H'$ on a $r_0 r \in H'$.

Alors, grâce à l'hypothèse faite sur v, on voit que :

$$F^{rr_0\gamma, \gamma} \cdot v \subset \mathbb{C}v, \qquad \text{puisque} \quad F^{rr_0\gamma, \gamma} \subset F^\gamma_{H'}.$$

Comme on a $F^{rr_0\gamma, r_0\gamma} F^{r_0\gamma, \gamma} \subset F^{rr_0\gamma, \gamma}$, on en déduit :

$$(F^{rr_0\gamma, r_0\gamma} F^{r_0\gamma, \gamma}) \cdot v \subset \mathbb{C}v \tag{117}$$

D'autre part, d'après (116) on a :

$$F^{rr_0\gamma, r_0\gamma} \cdot (F^{r_0\gamma, \gamma} \cdot v) \subset I_\lambda \cdot v \tag{118}$$

La comparaison de (117) et (118) montre que $F^{rr_0\gamma, r_0\gamma}$ agit par zéro sur $F^{r_0\gamma, \gamma} \cdot v$.

Finalement, on vient de voir que pour tout $r_0 \in H - H'$, $F^{r_0\gamma}_H$ agit scalairement sur $F^{r_0\gamma, \gamma} \cdot v$.

Appliquant l'hypothèse faite sur H, on en déduit que $S^{H^\perp}$ agit scalairement sur $F^{r\circ\gamma,\gamma}\cdot v$. Comme $X = \sum_{r \in H-H'} F^{r\gamma,\gamma}\cdot v$, cela implique :

$$S^{H^\perp} \text{ agit scalairement sur } X \tag{119}$$

Considérons maintenant $Y = \mathbb{C}v \oplus X$. A l'aide de (119) il est facile de voir que Y est stable sous F_H^γ. La validité du lemme pour H et la proposition A.1 montrent alors que Y est un sous $S^{H^\perp}$-module de V'. Écrivons alors $S^{H^\perp} = S^{(H')^\perp} \oplus S^-_{H,H'}$ où $S^-_{H,H'} = \bigoplus_{r \in H-H'} S^r$. Définissons une nouvelle représentation π_1 de $S^{H^\perp}$ sur Y de la façon suivante :

$$\pi_1(f+f') = \pi(f), \qquad \forall f \in S^{(H')^\perp}, \qquad \forall f' \in S^-_{H,H'} \tag{120}$$

Pour voir que (120) définit une représentation de $S^{H^\perp}$ sur Y, comme $S^{(H')^\perp}\cdot S^-_{H,H'} \subset S^-_{H,H'}$ et $S^-_{H,H'}\cdot S^-_{H,H'} \subset S^{(H')^\perp}$, il suffit de vérifier que :

$$\forall f, f' \in S^-_{H,H'}, \qquad \pi(ff') \text{ est nul sur } Y \tag{121}$$

Comme $H \cap \hat{R}(\lambda) = \{e\}$ il résulte de la proposition 4 que $S^-_{H,H'} \subset I_\lambda$. Alors :

$$\forall f \in S^-_{H,H'}, \qquad \pi(f)Y \subset I_\lambda \cdot Y \cap Y = X \tag{122}$$

Mais d'après (119), $S^-_{H,H'} (\subset S^{H^\perp})$ agit scalairement sur X, donc par zéro puisque $S^-_{H,H'} \subset I_\lambda$. Ceci joint à (122) montre que (121) est vérifié et que (120) définit bien une nouvelle action de $S^{H^\perp}$ sur Y. Il est facile de voir que si $f \in S^{(H')^\perp}$ (resp. $S^-_{H,H'}$) les valeurs propres de $\pi_1(f)$ sont égales à $f(\lambda)$. Il en résulte que (π_1, Y) est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$. D'après l'hypothèse faite sur H et la proposition A.1, on a :

$\mathrm{Hom}_{F_H^\gamma}(\mathbb{C}_\lambda, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{H^\perp}}(\mathbb{C}_\lambda, Y)$ pour cette nouvelle action π_1 de $S^{H^\perp}$.

Mais, comme $\pi_1(S^-_{H,H'}) = 0$, ceci se réécrit $\mathrm{Hom}_{F_{H'}^\gamma}(\mathbb{C}_\lambda, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{(H')^\perp}}(\mathbb{C}_\lambda, Y)$ pour l'action π_1 sur Y.

Comme π_1 est identique à π sur $S^{(H')^\perp}$ cela montre que $\mathbb{C}\cdot v$ est stable sous $\pi(S^{(H')^\perp})$, ce qui achève la démonstration du lemme.

5.3 Démonstration de la partie (i) du théorème 3. — Du lemme 5 appliqué à $H = \{e\}$ il résulte :

Pour tout $\gamma \in A(\sigma)$, tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et tout $S(\mathfrak{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, V, l'injection canonique $0 \to \mathrm{Hom}_{S^R}(\mathbb{C}_\lambda, V) \to \mathrm{Hom}_{F^{\gamma\gamma}}(\mathbb{C}_\lambda, V)$ est un isomorphisme.

Comme en outre, d'après le lemme 2, S^R est entière sur $F^{\gamma\gamma}$ et que $I \to I \cap F^{\gamma\gamma}$ est une correspondance bijective entre les idéaux maximaux de S^R et ceux de $F^{\gamma\gamma}$, il résulte de la proposition B.1 de l'appendice de Brylinski et de la proposition A.1 que :

$$F^{\gamma\gamma} = S^R,$$

soit encore :

$$F^{\gamma\gamma} = S(\mathfrak{a})^{W_\sigma}.$$

Or, d'après la proposition 3 (v), $r_\sigma^\gamma(U^K) = F^{\gamma\gamma}$, et la partie (i) du théorème 3 est donc démontrée.

5.4 LEMME 6. — Soit $\gamma \in A(\sigma)$. Soient $r \in \hat{R}$ et H le sous-groupe de $\hat{R}$ engendré par r, i. e. $H = \{ e, r \}$. Alors :

(i) $F_H^\gamma = F^{\gamma\gamma} \oplus F^{r\gamma, \gamma} = S^R \oplus F^{r\gamma, \gamma}$,

(ii) pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ et tout $S(\mathfrak{a})$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, (π, V), l'injection canonique $0 \to \mathrm{Hom}_{S^{H^\perp}}(\mathbb{C}_\lambda, V) \to \mathrm{Hom}_{F_H^\gamma}(\mathbb{C}_\lambda, V)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Comme $F^{\gamma\gamma} = S^R$ d'après la partie (i) du théorème 3 que nous venons de démontrer, on a $F^{r\gamma, \gamma} \cdot F^{r\gamma, \gamma} \subset F^{\gamma\gamma}$ et (i) en résulte. Montrons (ii). Pour cela distinguons deux cas :

α) si $r \notin \hat{R}(\lambda)$, (ii) résulte du lemme 5 appliqué au sous-groupe $H = \{ e, r \}$ de $\hat{R}$

β) si $r \in \hat{R}(\lambda)$, $H^\perp$ contient $R(\lambda)$ et l'on a :

$$S^R \subset S^{H^\perp} \subset S^{R(\lambda)}.$$

De plus, d'après la proposition A.3, on a :

$$\mathrm{Hom}_{S^R}(\mathbb{C}_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{H^\perp}}(\mathbb{C}_\lambda, V) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{R(\lambda)}}(\mathbb{C}_\lambda, V) \tag{123}$$

D'autre part, comme F_H^γ contient S^R d'après (i), on a une injection :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{F_H^\gamma}(\mathbb{C}_\lambda, V) \to \mathrm{Hom}_{S^R}(\mathbb{C}_\lambda, V).$$

Ceci joint à (123) implique :

$$\dim \mathrm{Hom}_{F_H^\gamma}(\mathbb{C}_\lambda, V) \leq \dim \mathrm{Hom}_{S^{H^\perp}}(\mathbb{C}_\lambda, V)$$

et l'injection $0 \to \mathrm{Hom}_{S^{H^\perp}}(\mathbb{C}_\lambda, V) \to \mathrm{Hom}_{F_H^\gamma}(\mathbb{C}_\lambda, V)$ est bijective pour des raisons de dimensions, ce qui achève de prouver le lemme.

5.5 DÉMONSTRATION DE LA PARTIE (ii) DU THÉORÈME 3. — D'après le lemme 2, si H est un sous-groupe de $\hat{R}$, $S^{H^\perp}$ est entière sur F_H^γ et $I \to I \cap F_H^\gamma$ est une correspondance bijective entre les idéaux maximaux de $S^{H^\perp}$ et ceux de F_H^γ. Si $H = \{ e, r \}$, il résulte du lemme 6 (ii) et de la proposition A.1 que pour tout idéal maximal I de S et tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'injection canonique $F_H^\gamma / I^n \cap F_H^\gamma \to S^{H^\perp}/I^n$ est un isomorphisme. Alors la proposition de l'appendice de Brylinski montre que $F_H^\gamma = S^{H^\perp}$. Comme, d'après le lemme 6 (i), $F_H^\gamma = F^{\gamma\gamma} \oplus F^{r\gamma, \gamma}$ on en déduit que $F^{r\gamma, \gamma} = S^r$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

APPENDICE A

A.1. — Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, H un groupe fini d'automorphismes de E, H′ un sous-groupe de H, S l'algèbre symétrique de E, S^H (resp. $S^{H'}$) les invariants de S sous l'action de H (resp. H′). Pour $\lambda \in E^*$, on note I_λ (resp. I_λ^H, resp. $I_\lambda^{H'}$) l'idéal maximal de S (resp. S^H, resp. $S^{H'}$) correspondant et $\mathbb{C}_\lambda$ le S-module de dimension 1, S/I_λ, ainsi que ses restrictions à S^H et $S^{H'}$.

LEMME A.1. — Tout S^H-module cyclique, primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$ est isomorphe à un S^H-sous-module d'un S-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$.

Démonstration. — D'après [3], chapitre 5, paragraphe 1, n° 9, théorème 2, S est un S^H-module de type fini. On notera $(v_1, \ldots, v_n)$ un système de générateurs de S sous l'action de S^H.

Alors soit Y un S^H-module cyclique primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$. En particulier $Y \simeq S^H/I \cdot$ avec I idéal de codimension finie de S^H. Soit $J = S \cdot I$. Clairement J est un idéal de S tel que $J \cap S^H = I$. Alors Y s'injecte dans le S-module $X = S/J$. Montrons que J est de codimension finie dans S. Pour cela, soient V le sous-espace de S engendré par le système de générateurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de S sous S^H et Y′ un supplémentaire de I dans S^H contenant 1.

Notons $Z = J + Y' \cdot V$ et montrons que $Z = S$. D'abord Z contient V (puisque Y′ contient l'identité). Il suffit donc de montrer que Z est stable sous S^H. Pour ce faire soit $p \in S^H$. On a $p \cdot J \subset J$ puisque J est un idéal de S. D'autre part, si $y \in Y'$ et $v \in V$, il existe $p_1 \in I$ et $y' \in Y$ tel que $p \cdot y = p_1 + y'$ et donc :

$$(p \cdot y) \cdot v = p_1 \cdot v + y' \cdot v \in Z.$$

On a donc montré que Z est stable sous S^H. Alors $S = Z$ et J est de codimension finie dans S. D'autre part, comme $Y = S^H/I$ est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, on voit que $X = S/S \cdot I$ vérifie :

$$X = \bigoplus_{h \in H/H^\lambda} X_{h\lambda}$$

où H_λ est le stabilisateur de λ dans H. Notant π l'action de S sur X on définit une nouvelle action π' de S sur X par : $\forall h \in F$, $\forall p \in S$, $\forall x \in X_{h\lambda}$, $\pi'(p)x = \pi(h.p)x$, où F est un système de représentants de H/H_λ dans H. Clairement (π', X) est primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$. D'autre part, π et π' restreintes à S^H coïncident. Alors Y s'injecte, comme S^H-module dans (π', X) et ceci achève de prouver (iii).

PROPOSITION A.1. — Soit A une sous-algèbre de S^H et $\lambda \in E^*$. Les conditions (*a*), (*b*), (*c*) sont équivalentes :

(*a*) pour tout S-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, X, l'injection canonique

$$0 \to \operatorname{Hom}_{S^H}(\mathbb{C}_\lambda, X) \to \operatorname{Hom}_A(\mathbb{C}_\lambda, X)$$

est un isomorphisme;

(*b*) pour tout S^H-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, Y, l'injection canonique

$$0 \to \operatorname{Hom}_{S^H}(\mathbb{C}_\lambda, Y) \to \operatorname{Hom}_A(\mathbb{C}_\lambda, Y)$$

est un isomorphisme;

c) pour tout S^H-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, Y, tout A-sous-module de Y est un S^H-module.

Si l'une des conditions (*a*), (*b*) ou (*c*) est vérifiée, on a :

d) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'injection canonique $0 \to A/I^n \cap A \to S^H/I^n$ est une bijection, où I est l'idéal maximal de S^H correspondant à λ.

Démonstration. — Clairement $(c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$. En raisonnant par récurrence sur dim Y on voit facilement que $(b) \Rightarrow (c)$. Il reste donc à montrer que $(a) \Rightarrow (b)$. Soit donc Y un S^H-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$ et soit $v \in Y$ tel que $\mathbb{C} \cdot v$ soit stable sous A. Notons Y' le S^H-sous-module de Y engendré par v. D'après le lemme A.1, on peut regarder Y' comme un S^H-sous-module d'un S-module X primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$. Si l'on suppose (a) vérifié il en résulte que $\mathbb{C} \cdot v$ est un S^H-sous-module de X et donc de Y' et (b) est vérifié. L'équivalence entre (a), (b), (c) est donc démontrée. Supposons l'une de ces conditions vérifiées et montrons que (d) en résulte. En effet, $A/I^n \cap A$, regardé comme sous-espace de S^H/I^n est un A-sous-module du S^H-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, S^H/I^n. Puisque (a), (b) et (c) sont équivalents, l'hypothèse implique que (c) est vérifié. Donc $A/I^n \cap A$ est stable sous S^H. Comme A contient l'identité on en déduit (d).

A.2. Proposition A.2. — Les notations sont celles de A.1 et l'on suppose en outre que H (resp. H′) est engendré par des pseudoréflexions. On note T (resp. T′) l'ensemble des pseudoréflexions de H (resp. H′). Soit $\lambda \in E^*$ tel que H′ contienne le stabilisateur H_λ de λ. On note I (resp. I′) l'idéal maximal de S^H (resp. $S^{H'}$) correspondant à λ. Alors :

(i) Pour tout entier $n \geq 1$, l'application naturelle $\psi_n : S^H/I^n \to S^{H'}/(I')^n$ est un isomorphisme de S^H-modules.

(ii) Pour tout $S^{H'}$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, X, l'injection canonique

$$0 \to \mathrm{Hom}_{S^{H'}}(\mathbb{C}_\lambda, X) \to \mathrm{Hom}_{S^H}(\mathbb{C}_\lambda, X) \quad \text{est un isomorphisme}.$$

Démonstration.— Démontrons d'abord (i).

a) H et H′ étant engendrés par des pseudo-réflexions, S^H et $S^{H'}$ sont des algèbres de polynômes.

Supposons S identifié à $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_l]$ par le choix d'une base de E, $(x_1, \ldots, x_l)$, et soient $p_1, \ldots, p_l$ (resp. $p'_1, \ldots, p'_l$) des éléments homogènes algébriquement indépendants engendrant S^H (resp. $S^{H'}$). Posons, pour $t \in T$, $v \in E$, $t \cdot v = v + \varphi_t(v) e_t$, avec $e_t \in E$ et $\varphi_t \in E^*$. Alors on sait que :

$$J_H = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right) = c\left(\prod_{t \in T} e_t\right) \qquad \text{avec} \qquad c \in \mathbb{C}^*,$$

$$J_{H'} = \det\left(\frac{\partial p'_i}{\partial x_j}\right) = c'\left(\prod_{t \in T'} e_t\right) \qquad \text{avec} \qquad c' \in \mathbb{C}^*$$

(*cf.* [2], chapitre V, 5.4, proposition 6). Comme $S^H \subset S^{H'}$ on peut définir

$$J_{H,H'} = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial p'_j}\right) \in S^{H'}.$$

On a évidemment $J_H = J_{H,H'} \cdot J_{H'}$. Comme $J_{H,H'}$ est dans S, on en déduit immédiatement

$$J_{H,H'} = c'' \prod_{t \in T - T'} e_t \qquad \text{avec} \qquad c'' \in \mathbb{C}^*.$$

Comme H′ contient H_λ, pour tout $t \in T - T'$ on a $e_t(\lambda) \neq 0$. D'où $J_{H,H'}(\lambda) \neq 0$.

b) Comme $I = I' \cap S^H$, il est clair que pour tout $n \geq 1$, $I^n \subset (I'^n) \cap S^H$. Pour tout $n \geq 1$, on a donc un morphisme de S^H-modules : $j_n : I^n/I^{n+1} \to (I')^n/(I')^{n+1}$.

Étudions j_1. Prenons comme base de I/I^2 (resp. $I'/(I')^2$) les images des

$$q_i = p_i - p_i(\lambda) \in I \text{ (resp. } q'_i = p'_i - p'_i(\lambda) \in I').$$

Il est aisé de voir, en utilisant la formule de Taylor, que, rapportée à ces bases, la matrice de j_1 a pour déterminant :

$$J_{H,H'}(\lambda) = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial p'_j}\right)(\lambda).$$

Donc d'après le point *a*), j_1 est bijective.

c) Étudions j_n. Soit $q' \in I'^n$. Alors :

$$q' = \sum_{\substack{i=(i_1,\ldots,i_l)\in\mathbb{N}^l \\ i_1+\ldots+i_l \geq n}} a_i (q'_1)^{i_1} \times \ldots \times (q'_l)^{i_l},$$

où la somme est en fait finie.

D'après la surjectivité de j_1, pour tout indice $1 \leq j \leq l$ il existe $r_j \in I$ tel que $q'_j \in r_j + (I')^2$. Posons :

$$r = \sum_{\substack{i=(i_1,\ldots,i_l)\in\mathbb{N}^l \\ (i_1+\ldots+i_l) \geq n}} a_i (r_1)^{i_1} \times \ldots \times (r_l)^{i_l}.$$

Clairement, $r \in I^n$ et $q' \in r + (I')^{n+1}$. Ce qui démontre que j_n est surjective. Mais I^n/I^{n+1} et $(I')^n/(I')^{n+1}$ ont même dimension puisque S^H et $S^{H'}$ sont des algèbres de polynômes à l variables. Donc j_n est bijective.

d) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
0 & \to & I^n/I^{n+1} & \longrightarrow & S^H/I^{n+1} & \longrightarrow & S^H/I^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle j_n} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_n} & & \\
0 & \to & (I')^n/(I')^{n+1} & \to & S^{H'}/(I')^{n+1} & \to & S^{H'}/(I')^n & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Alors une simple récurrence permet d'achever la démonstration de (i).

Montrons maintenant (ii).

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{S^H}(\mathbb{C}_\lambda, X)$. On veut démontrer que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{S^{H'}}(\mathbb{C}_\lambda, X)$. Comme X est un $S^{H'}$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, il suffit de démontrer que $\varphi(\mathbb{C}_\lambda)$ est stable sous $S^{H'}$. Soit $v \in \varphi(\mathbb{C}_\lambda)$. Pour n assez grand, il existe un homomorphisme de $S^{H'}$-modules:

$$\psi : S^{H'}/(I')^n \to S^{H'} \cdot v, \qquad \text{avec} \qquad \psi(1 + (I')^n) = v.$$

Alors, soit $q \in S^{H'}$. D'après (i), il existe $p \in S^H$ avec :

$$q + (I')^n = p + (I')^n.$$

Alors :

$$q \cdot v = \psi(q + (I')^n) = \psi(p + (I')^n) = p \cdot \psi(1 + (I')^n).$$

Soit encore $q \cdot v = p \cdot v$. Comme $v \in \varphi(\mathbb{C}_\lambda)$ et $p \in S^H$, on a $q \cdot v \in \varphi(\mathbb{C}_\lambda) \cdot$ q.e.d.

PROPOSITION A.3. — Les notations sont celles de A.1. On suppose en outre que H est isomorphe à un produit de copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit $\lambda \in E^*$. On suppose que H' contient le stabilisateur H_λ de λ dans H. Alors pour tout $S^{H'}$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$, (π, X), l'injection canonique

$$\mathrm{Hom}_{S^{H'}}(\mathbb{C}_\lambda, X) \to \mathrm{Hom}_{S^H}(\mathbb{C}_\lambda, X)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Il résulte de la proposition A.1 qu'il suffit de démontrer l'assertion du lemme pour tout S-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$. Il en résulte qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $H/H' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce que nous ferons dans la suite. On procède alors par récurrence sur la dimension de X.

Supposons le lemme démontré pour tout $S^{H'}$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$ de dimension strictement inférieure à n. Soit (π, X) un $S^{H'}$-module primaire de type $\mathbb{C}_\lambda$ de dimension n et soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{S^H}(\mathbb{C}_\lambda, X)$, $\varphi \neq 0$. Soit $v \in \varphi(\mathbb{C}_\lambda)$, $v \neq 0$. Si $S^{H'}.v \neq X$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{S^{H'}}(\mathbb{C}_\lambda, X)$ grâce à l'hypothèse de récurrence appliquée à $S^{H'} \cdot v$. On suppose maintenant que $S^{H'} \cdot v = X$. Notons I (resp. I') l'idéal maximal de S^H (resp. $S^{H'}$) correspondant à λ. Alors $X = \mathbb{C}v \oplus I' \cdot v$. D'autre part S^H agit scalairement sur $\mathbb{C} \cdot v$, donc aussi sur $I' \cdot v$ et par l'hypothèse de récurrence on en déduit que $S^{H'}$ agit scalairement sur $I' \cdot v$.

Définissons une application linéaire ρ de $S^{H'}$ vers $I' \cdot v$ par :

$$\forall p \in S^{H'}, \qquad p \cdot v = p(\lambda) v + \rho(p).$$

De la définition de ρ et du fait que $S^{H'}$ agit scalairement sur $I' \cdot v$, il résulte :

$$\forall p, p' \in S^{H'}, \quad \rho(pp') = p(\lambda)\rho(p') + p'(\lambda)\rho(p).$$

D'autre part, S^H agissant scalairement sur v, ρ est nulle sur S^H. Décomposons maintenant $S^{H'}$ sous l'action de H et écrivons :

$$S^{H'} = S^H \oplus S^-_{H,H'} \qquad \text{avec} \qquad S^-_{H,H'} = S^r,$$

où r est l'élément non trivial de $\widehat{H/H'}$.

Comme $H/H' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $S^-_{H,H'} \cdot S^-_{H,H'} \subset S^H$. Donc :

$$\forall p, p' \in S^-_{H,H'}, \quad 0 = p(\lambda)\rho(p') + p'(\lambda)\rho(p).$$

D'autre part, comme H' contient H_λ, pour tout $h \in H$ tel que $r(h) \neq 1$ on a $h \notin H_\lambda$. Par conséquent il existe $p_0 \in S^-_{H,H'}$ tel que $p_0(\lambda) \neq 0$. Il en résulte que :

$$\forall p \in S^-_{H,H'}, \quad \rho(p) = -\frac{p(\lambda)}{p_0(\lambda)} \rho(p_0).$$

Ceci appliqué à p_0 montre que $\rho(p_0) = 0$ et donc ρ est nulle sur $S^-_{H,H'}$. Finalement ρ est nulle sur $S^{H'}$ et $\mathbb{C}v$ est bien stable sous $S^{H'}$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

A.3. PROPOSITION A.4. — Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, H un groupe fini d'automorphismes de E, H^0 un sous-groupe distingué de H engendré par des pseudoréflexions, $R = H/H^0$. Soient S l'algèbre symétrique de E, S^{H^0} les invariants de S sous l'action de H^0. C'est un R-module. On suppose R commutatif. Alors :

(i) Il existe une représentation de R dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{C}$ et un isomorphisme d'algèbres $S^{H^0} \to S(F)$ qui est en outre un isomorphisme de R-modules.

(ii) La représentation de R dans F est fidèle.

(iii) Si Ω est l'ensemble des représentations irréductibles de R intervenant dans la décomposition en composantes isotypiques du R-module F, Ω engendre $\hat{R}$, dual de R.

Démonstration. — (i) Il est clair qu'il suffit d'exhiber des générateurs homogènes algébriquement indépendants de S^{H^0} (qui est une algèbre de polynômes puisque H^0 est engendré par des pseudoréflexions), $p_1, \ldots, p_l$ tels que $R \cdot p_i \subset \mathbb{C} p_l$ $i=1, \ldots, l$ (notons que $l = \dim E$).

Ceci résultera de la démonstration par récurrence sur $n (n=1, \ldots, l)$ de la propriété :

$(\mathscr{P}_n)$ Il existe $q_1, \ldots, q_l$ générateurs homogènes algébriquement indépendants de S^{H^0} tels que $d^0 q_i > d^0 q_j$ implique $i > j$ et pour $i = 1, \ldots, n$, $R . q_i$ est inclus dans $\mathbb{C} q_i$.

Dans la suite on fixe sur $S(E)^{H^0}$ un produit scalaire invariant par R, provenant d'un produit scalaire sur E invariant par H.

On notera S^p la puissance symétrique $p^{\text{ième}}$ de E.

Étudions $(\mathscr{P}_1)$. Soient $q_1, \ldots, q_l$ des générateurs homogènes algébriquement indépendants de S^{H^0} vérifiant : $d^0 q_i > d^0 q_j \Rightarrow i > j$. Alors q_1 est constant et $q_1, \ldots, q_l$ vérifient $(\mathscr{P}_1)$.

Supposons maintenant $(\mathscr{P}_n)$ vraie avec $n < l$ et montrons que $(\mathscr{P}_{n+1})$ est vraie. Soit alors $q_1, \ldots, q_l$ vérifiant $(\mathscr{P}_n)$. Soit S_1 la sous-algèbre de S^{H^0} engendrée par $q_1, \ldots, q_n$ et $S_1^\perp$ l'orthogonal de S_1 dans S^{H^0}. On a :

$$S^{H^0} = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} (S^p)^{H^0}, \qquad S_1 = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} (S_1 \cap S^p), \qquad S_1^\perp = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} (S_1^\perp \cap S^p)$$

Notons $S_1^p = S_1 \cap S^p$ et $(S_1^\perp)^p = S_1^\perp \cap S^p$.

Alors $(S^p)^{H^0} = S_1^p \oplus (S_1^\perp)^p$ et cette décomposition est stable sous R.

Soit $p_0 = \inf \{ p \mid p \in \mathbb{N}, (S^p)^{H^0} \neq S_1^p \}$.

On a évidemment $p_0 = d^0 q_{n+1}$. D'autre part, comme $(S_1^\perp)^{p_0}$ est stable par R, on peut choisir une base $(y_1, \ldots, y_k)$ de $(S_1^\perp)^{p_0}$ telle que $R \cdot y_i \subset \mathbb{C} y_i$.

Il est facile de voir que $(S^{p_0})^{H^0} = S_1^{p_0} \oplus \sum_{i=1}^{k} \mathbb{C} q_{n+i}$, où k est le plus grand entier tel que $d^0 q_{n+k} = d^0 q_{n+1}$.

Notons que cette décomposition n'a pas de raison d'être stable sous R. On définit alors $q'_1, \ldots, q'_l \in S^{H^0}$ par :

$$\begin{aligned} q'_i &= q_i, & i &= 1, \ldots, n \\ q'_{n+i} &= y_i, & i &= 1, \ldots, k \\ q'_i &= q_i, & i &= n+k+1, \ldots, l \end{aligned}$$

La sous-algèbre de S^{H^0} engendrée par $q'_1, \ldots, q'_l$ contient $q_1, \ldots, q_l$. Donc $q'_1, \ldots, q'_l$

engendrent S^{H^0}. Pour des raisons de degré de transcendance $q'_1, \ldots, q'_l$ sont algébriquement indépendants (*cf.* [2], V. 5.3, théorème 1). Alors $(q'_1, \ldots, q'_l)$ vérifie $(\mathscr{P}_{n+1})$. La démonstration de $(\mathscr{P}_n)$ $n=1, \ldots, l$ est achevée et (i) en résulte.

(ii) Faisons agir H sur E*, dual complexe de E, par représentation contragrédiente. H étant un groupe *fini* d'automorphismes de E, il existe $\lambda \in E^*$ qui n'est fixé par aucun élément de H autre que l'élément neutre. Le caractère χ_λ de S^{H^0}, correspondant à λ, s'identifie alors à un point de F* qui n'est fixé par aucun élément de R autre que l'élément neutre. (ii) en résulte.

(iii) est une conséquence immédiate de (ii).

APPENDICE B

PAR JEAN-LUC BRYLINSKI

On établit ici un résultat d'algèbre commutative, dont P. Delorme a besoin pour la démonstration du théorème 3.

PROPOSITION B.1. — Soit B une algèbre intègre, intégralement close, de type fini sur un corps k algébriquement clos. Soit A une sous-algèbre de B telle que

(i) B est entière sur A;

(ii) l'application $\mathscr{M} \to \mathscr{M} \cap A$ est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de B sur l'ensemble des idéaux maximaux de A;

(iii) pour tout idéal maximal $\mathscr{M}$ de B, l'injection canonique $A/\mathscr{M}^n \cap A \hookrightarrow B/\mathscr{M}^n$ est une bijection, pour tout entier $n \geq 1$.

Alors $A = B$.

LEMME B.1. — A est une algèbre de type fini sur k.

Démonstration. — Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq N}$ une famille finie de générateurs de la k-algèbre B. Comme chaque x_i est entier sur A, on a une équation :

$$x_i^{p_i} + a_{i,1} \cdot x_i^{p_i - 1} + \ldots + a_{i,p_i} = 0, \qquad \text{avec} \qquad a_{i,j} \in A .$$

Soit C la sous-k-algèbre de A engendrée par les $a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq p_i)$. Elle est de type fini. Chaque x_i est entier sur C, donc B est entière sur C. Donc B est de type fini comme C-module (les x_i^j avec $1 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq p_i - 1$ forment un système de générateurs). A est un sous C-module de B, donc est aussi de type fini puisque C est noethérien. En particulier A est de type fini comme C-algèbre, donc comme k-algèbre puisque C est de type fini sur k.

LEMME B.2. — A et B ont même corps de fractions.

Démonstration. — On raisonnera par l'absurde. Soit K le corps des fractions de A, et x un élément de B qui n'est pas dans K. Comme B est entière sur A, x satisfait une équation algébrique à coefficients dans K. Soit $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ une telle équation, de degré minimal. Par hypothèse $n \geq 2$. Soit Δ le discriminant de ce polynôme, soit A′ la k-algèbre de K engendrée par A, $a_1, \ldots, a_n, \Delta^{-1}$.

D'après le Nullstellensatz, A′ a un idéal maximal $\mathscr{M}'$. L'algèbre

$$(A'/\mathscr{M}')[x] = (A'/\mathscr{M}') \otimes_{A'} A'[x]$$

est un produit de n corps, d'après la construction de A′ (car si $\bar{a}_i$ est la classe de a_i dans $A'/\mathscr{M}'$, les n racines du polynôme $X^n + \bar{a}_i X^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n$ sont distinctes).

Soit $\mathscr{M} = A \cap \mathscr{M}'$; c'est un idéal maximal de A, et on a : $A/\mathscr{M} \cong A'/\mathscr{M}'$. On a

$$(A/\mathscr{M}) \otimes_A A[x] \cong (A'/\mathscr{M}') \otimes_{A'} A'[x].$$

Il existe donc n idéaux maximaux $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_n$ de $A[x]$ tels que $\mathscr{M}_i \cap A = \mathscr{M}$.

D'après le premier théorème de Cohen-Seidenberg [S, chapitre III, Proposition 2, p. 40] vu que B est entière sur A, il existe des idéaux maximaux $\mathscr{P}_i$ de B tels que

$$\mathscr{P}_i \cap A[x] = \mathscr{M}_i.$$

On a donc $\mathscr{P}_1 \neq \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_1 \cap A = \mathscr{M} = \mathscr{P}_2 \cap A$. Ceci contredit l'hypothèse (ii). Cette démonstration suppose implicitement k de caractéristique 0. Pour se débarrasser en toute caractéristique des phénomènes d'inséparabilité, il faut utiliser l'hypothèse (iii).

Le lemme 2 implique que B est la clôture intégrale de A (dans son corps de fractions). Si $\mathscr{M}$ est un idéal maximal de A, on note $A_{\mathscr{M}}$ l'anneau local de A en $\mathscr{M}$ (c'est le localisé de A par rapport à $A - \mathscr{M}$), et $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ le complété de $A_{\mathscr{M}}$ pour la topologie $\mathscr{M}$-adique. Notations semblables $B_{\mathscr{P}}$, $\hat{B}_{\mathscr{P}}$ pour $\mathscr{P}$ un idéal maximal de B.

LEMME B.3. — Soit $\mathscr{P}$ un idéal maximal de B, soit $\mathscr{M} = \mathscr{P} \cap A$. L'anneau $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ est intègre. L'application canonique $\hat{A}_{\mathscr{M}} \to \hat{B}_{\mathscr{P}}$ fait de $\hat{B}_{\mathscr{P}}$ la clôture intégrale de $\hat{A}_{\mathscr{M}}$.

Démonstration. — Tout d'abord, il résulte de [Z-S, Chapitre VI, § 14, théorème 13, p. 95] que $B_{\mathscr{P}}$ est la clôture intégrale de $A_{\mathscr{M}}$. D'après un théorème de Zariski [Z-S, Chapitre VIII, § 13, théorème 33, p. 320], $\hat{A}_{\mathscr{M}} \to \hat{B}_{\mathscr{P}}$ est l'homomorphisme de $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ vers la clôture intégrale de $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ dans son anneau total des fractions (on utilise ici l'hypothèse (ii) ; en général, la clôture intégrale en question serait un anneau semi-local). D'après [Z-S, Chapitre VIII, § 13, théorème 32, p. 320], $\hat{B}_{\mathscr{P}}$ est intègre. Il en résulte que $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ est intègre et que $\hat{A}_{\mathscr{M}} \to \hat{B}_{\mathscr{P}}$ est injectif.

LEMME B.4. — Sous les hypothèses du lemme 3, $\hat{A}_{\mathscr{M}} \to \hat{B}_{\mathscr{P}}$ est une bijection.

Démonstration. — Il reste à montrer que $\varphi : \hat{A}_{\mathscr{M}} \to \hat{B}_{\mathscr{P}}$ est surjectif.

On a $\hat{B}_{\mathscr{P}} = \varprojlim_n (B/\mathscr{P}^n) \cong \varprojlim_n (A/\mathscr{P}^n \cap A)$ d'après l'hypothèse (iii). Ainsi on doit montrer que l'application canonique $\varphi : \varprojlim_n (A/\mathscr{M}^n) \to \varprojlim_n (A/\mathscr{P}^n \cap A)$ est surjective. Il suffit pour cela de prouver que pour tout entier p, il existe un entier q tel que $\mathscr{P}^q \cap A \subset \mathscr{M}^p$. C'est ce qu'assure un théorème de Chevalley [Z-S, Chapitre VIII, § 5, théorème 13, p. 270], vu que $\bigcap_q (\mathscr{P}^q \cap A) = 0$.

Il est maintenant facile de conclure que $B=A$. Il suffit de montrer que l'homomorphisme $A_{\mathscr{M}} \to B \otimes_A A_{\mathscr{M}}$ est bijectif pour tout idéal maximal $\mathscr{M}$ de A. Si $\mathscr{P}$ est l'unique idéal maximal de B tel que $\mathscr{P} \cap B = \mathscr{M}$, l'idéal $\mathscr{M} \cdot B$ est $\mathscr{P}$-primaire, de sorte que $B \otimes_A A_{\mathscr{M}} = B_{\mathscr{P}}$ et que sur $B_{\mathscr{P}}$, la topologie $\mathscr{P}$-adique et la topologie $\mathscr{M}$-adique (de $A_{\mathscr{M}}$-module) coïncident. Or $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ est un $A_{\mathscr{M}}$-module fidèlement plat. Pour le voir, il faut vérifier que $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ est plat et que $M \otimes_{A_{\mathscr{M}}} \hat{A}_{\mathscr{M}} \neq 0$ pour tout $A_{\mathscr{M}}$-module $\neq 0$.

Or $A_{\mathscr{M}}$ est un anneau de Zariski [Z-S, Chapitre VIII, § 4, Exemple 1, p. 264] donc $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ est plat sur $A_{\mathscr{M}}$ [loc. cit., théorème 11]. Soit M un module non nul. On peut trouver un idéal I de $A_{\mathscr{M}}$, $I \neq A_{\mathscr{M}}$ et une injection $A_{\mathscr{M}}/I \to M$. Comme $(A_{\mathscr{M}}/I) \otimes_{A_{\mathscr{M}}} \hat{A}_{\mathscr{M}} \to M \otimes_{A_{\mathscr{M}}} \hat{A}_{\mathscr{M}}$ est injectif (grâce à la platitude de $\hat{A}_{\mathscr{M}}$), il suffit de montrer que $(A_{\mathscr{M}}/I) \otimes_{A_{\mathscr{M}}} \hat{A}_{\mathscr{M}}$ est non nul.

Or $(A_{\mathscr{M}}/I) \otimes_{A_{\mathscr{M}}} \hat{A}_{\mathscr{M}} = \hat{A}_{\mathscr{M}}/I \cdot \hat{A}_{\mathscr{M}}$. Comme $I \neq A_{\mathscr{M}}$, on a $I \subset \mathscr{M}$, et $I \cdot \hat{A}_{\mathscr{M}} \subset \mathscr{M} \cdot \hat{A}_{\mathscr{M}} \subsetneq \hat{A}_{\mathscr{M}}$.

Puisque $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ est fidèlement plat sur $A_{\mathscr{M}}$, il suffira de montrer que $\hat{A}_{\mathscr{M}} \to B_{\mathscr{P}} \otimes_{A_{\mathscr{M}}} \hat{A}_{\mathscr{M}}$ est une bijection. Comme sur $B_{\mathscr{P}}$, les topologies $\mathscr{P}$-adiques et $\mathscr{M}$-adiques coïncident, on a $B_{\mathscr{P}} \otimes_{A_{\mathscr{M}}} \hat{A}_{\mathscr{M}} = \hat{B}_{\mathscr{P}}$ et $\hat{A}_{\mathscr{M}} \to \hat{B}_{\mathscr{P}}$ est bijectif par le lemme 4 (c. q. f. d.).

Remarque. — La fin de la démonstration se simplifie si on suppose que B est régulier. En effet, pour tout $\mathscr{M}$, $\hat{A}_{\mathscr{M}}$ est régulier, donc aussi $A_{\mathscr{M}}$ est régulier. A étant régulier, il coïncide avec son normalisé B.

Je remercie M. Demazure pour d'utiles discussions.

REFERENCES

[1] W. BALDONI SILVA, *The unitary dual of* Sp $(n, 1)$, $n \geq 2$ (*Duke Math. J.*, vol. 48, 1981, p. 549-583).

[2] A. BOREL et N. WALLACH, *Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.

[3] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chapitres 5, 6, Éléments de Mathématiques, XXX Hermann, Paris, 1964.

[4] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5, 6, Éléments de Mathématiques, XXXIV Hermann, Paris, 1968.

[5] W. CASSELMAN et D. MILIČIĆ, *Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations* (*Duke Math. J.*, Vol. 49, 1982, pp. 869-930).

[6] L. CLOZEL et P. DELORME, *Théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs* (preprint).

[7] P. DELORME, *Harish-Chandra homomorphisms and minimal* K-*types of real semi-simple Lie groups*, dans *Lecture Notes in Mathematics*, n° 880 Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981, p. 69-73.

[8] P. DELORME, *Théorème de type Paley-Wiener pour les groupes de Lie semi-simples réels avec une seule classe de conjugaison de sous-groupes de Cartan* (*J. Functional Analysis*, vol. 47, 1982, p. 26-63).

[9] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Cahiers scientifiques XXXVII, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[10] HARISH-CHANDRA, *Harmonic analysis on real reductive groups I* (*J. Functional Analysis*, vol. 19, 1975, p. 104-204).

[11] HARISH-CHANDRA, *Harmonic analysis on real reductive groups III* (*Ann. of Math.*, vol. 104, 1976, p. 117-201).

[12] H. HECHT et W. SCHMID, *Characters, asymptotics and* $\mathfrak{n}$*-homology of Harish-Chandra modules* (preprint).

[13] A. W. KNAPP, *Weyl group of a cuspidal parabolic* (*Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. 8, 1975, p. 275-294).

[14] A. W. KNAPP et E. M. STEIN, *Intertwining operators for semi-simple Lie groups II* (*Inventiones math.*, vol. 60, 1980, p. 9-84).

[15] W. SCHMID, *Some properties of square integrable representations of semi-simple Lie groups* (*Annals of Math.*, vol. 102, 1975, p. 535-564).
[16] D. A. VOGAN, *The algebraic structure of the representations of semi-simple Lie groups I* (*Ann. of Math.*, vol. 109, 1979, p. 1-60).
[17] D. A. VOGAN, *The algebraic structure of the representations of semi-simple Lie groups II*, (preprint).
[18] D. A. VOGAN, *Representations of real reductive groups*, *Progress in Math.* 15, Birkhäuser, Boston, Bäsel, Stüttgart, 1981.
[19] G. WARNER, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

REFERENCES

[S] SERRE, *Algèbre locale et Multiplicités*, *Lecture Notes in Math.*, n° 11 (3e édition, 1975).
[Z-S] ZARISKI and SAMUEL, *Commutative Algebra*, Van Nostrand, 1962 (volume II).

(Manuscrit reçu le 3 février 1983,
révisé le 25 mai 1983).

P. DELORME
Faculté des Sciences de Luminy,
Département de Mathématique et Informatique,
70, route Léon Lachamp,
13288 Marseille Cedex 09.