

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FRANCIS BONAHO

JEAN-PIERRE OTAL

## **Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 16, n° 3 (1983), p. 451-466

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1983\\_4\\_16\\_3\\_451\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_3_451_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SCINDEMENTS DE HEEGAARD DES ESPACES LENTICULAIRES

PAR FRANCIS BONAHOON et JEAN-PIERRE OTAL

---

Un *scindement de Heegaard* d'une variété fermée orientable  $M$  de dimension 3 est une surface (orientable)  $F$  séparant  $M$  en deux *bretzels*, c'est-à-dire en deux variétés obtenues chacune par recollement d'anses d'indice 1 sur le bord d'une boule. Les scindements de Heegaard ont été l'un des tous premiers outils utilisés aux débuts de la topologie géométrique pour l'étude des variétés de dimension 3. Ils ont toutefois donné lieu jusqu'ici à assez peu de résultats positifs (citons cependant [Re<sub>1</sub>], [Si], [Wa<sub>1</sub>]). Nous nous proposons de démontrer ici le résultat suivant annoncé dans [BO].

**THÉORÈME 1.** — *A isotopie près, l'espace lenticulaire  $L(p, q)$  admet pour tout  $g \geq 1$  un unique scindement de Heegaard de genre  $g$ .*

Rappelons que l'espace lenticulaire  $L(p, q)$ , avec  $p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{Z}$  premiers entre eux, est obtenu en recollant deux copies  $V_1$  et  $V_2$  de  $S^1 \times D^2$  par le difféomorphisme  $\theta : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$  de degré  $-1$  défini par  $\theta(u, v) = (u^r v^p, u^s v^q)$ , où  $qr - ps = -1$  et où  $S^1$  (resp.  $D^2$ ) est considéré comme l'ensemble des nombres complexes de module égal (resp. inférieur ou égal) à 1; à difféomorphisme orienté près,  $L(p, q)$  ne dépend que de  $p$  et de la classe de  $q$  modulo  $p$ . En particulier, les espaces lenticulaires sont les seules variétés admettant un scindement de Heegaard de genre 1.

Le théorème 1 répond à une question de J. Birman et J.-M. Montesinos ([Ki], Problem 3.22), et est à comparer avec [En] et [BGM], où sont exhibées des variétés admettant plusieurs scindements de Heegaard de genre 2 distincts. Il a déjà été démontré pour  $L(0, 1) = S^3$  et  $L(1, 0) = S^1 \times S^2$  par F. Waldhausen [Wa<sub>1</sub>], et pour le genre  $g = 1$  dans [Bo] et [Ho]; en fait, notre preuve utilise ces deux cas particuliers. Il a également été obtenu par H. Rubinstein (non publié) pour quelques autres exemples.

Si le scindement de Heegaard  $F$  est en outre muni d'une orientation normale, on dit qu'on a un *scindement de Heegaard orienté*; ceci revient à spécifier quel est le « premier » des deux bretzels découpés par  $F$ . Dans ce cadre, on obtient le corollaire suivant du théorème 1 (voir § 6).

**THÉOREME 2.** — Si  $g \geq 2$ , ou si  $g = 1$  et  $q$  est congru à  $\pm 1$  modulo  $p$ , l'espace lenticulaire  $L(p, q)$  admet un unique scindement de Heegaard orienté de genre  $g$  (à isotopie près). Si  $q$  n'est pas congru à  $\pm 1$  modulo  $p$ ,  $L(p, q)$  admet exactement deux scindements de Heegaard orientés de genre 1.

D'autre part, au cours de la preuve du théorème 1, on est amené à montrer un certain nombre de résultats sur les scindements de Heegaard des variétés à bord (définis au paragraphe 2) qui peuvent être intéressants par eux-mêmes. En particulier, on obtient que le bretzel de genre  $g$  admet, pour tout  $g' \geq g$ , un unique scindement de Heegaard de genre  $g'$  (proposition 7 et remarque immédiatement après).

Signalons enfin qu'il existe en théorie des nœuds une notion de *présentation en ponts d'un enlacement dans  $S^3$*  qui est reliée à celles de scindement de Heegaard par passage au revêtement double ramifié. Des résultats analogues aux théorèmes 1 et 2 ont été obtenus par le second auteur ([ $O_1$ ], [ $O_2$ ]) pour les présentations en ponts des enlacements rationnels, qui sont exactement les enlacements dont le revêtement double ramifié est un espace lenticulaire ([Sc], [Ho]).

L'existence d'un scindement de Heegaard de genre  $g \geq 1$  de  $L(p, q)$  est assez facile à voir. Pour  $g = 1$ , ceci découle de la définition de  $L(p, q)$  que nous avons donnée. Les scindements de genres supérieurs sont obtenus par stabilisations du scindement de genre 1. Ceci nécessite quelques explications.

Étant donné un scindement de Heegaard  $F$  de genre  $g$  d'une variété  $M$ , il existe un moyen simple d'en déduire un scindement de genre  $g + 1$ . Pour cela, on prend une « petite » boule  $B$  dans  $M$  telle que  $B \cap F$  soit un disque. Puis, on choisit dans  $B$  un tore percé  $T$  qui coïncide avec  $B \cap F$  près du bord  $\partial B$  et qui sépare  $B$  en deux tores solides (voir fig. 1). Alors,  $F' = (F - B) \cup T$  est un scindement de Heegaard de genre  $g + 1$  de  $M$  et on vérifie sans peine que  $F'$  ne dépend que de  $F$  à isotopie près. On dit que  $F'$  est la *stabilisation d'ordre 1* de  $F$ . En itérant le procédé, on définit plus généralement la *stabilisation d'ordre  $n$*  de  $F$ , qui est un scindement de Heegaard de genre  $g + n$  de  $M$ , bien défini à isotopie près (voir [Re<sub>1</sub>], [Si]).

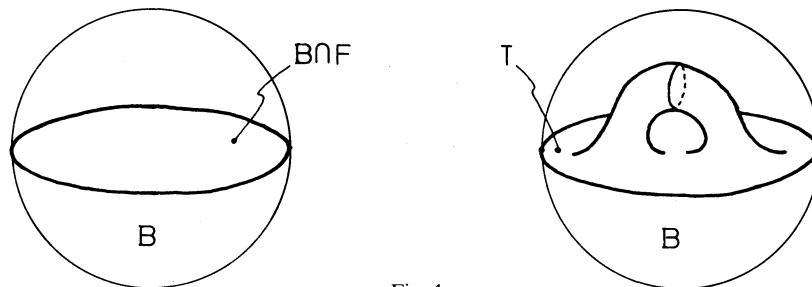


Fig. 1

Le théorème 1 équivaut ainsi à dire que la stabilisation d'ordre  $g - 1$  du scindement de genre 1 défini dans la construction de  $L(p, q)$  est l'unique scindement de Heegaard de genre  $g$  de  $L(p, q)$ .

Les méthodes que nous allons utiliser ne s'appliquent pas au cas de  $L(0, 1) \cong S^1 \times S^2$  et  $L(1, 0) \cong S^3$ . Puisque les théorèmes 1 et 2 sont déjà démontrés pour ces cas-là dans [Wa<sub>1</sub>], nous supposons donc désormais que  $p \geq 2$ .

### 1. Mise en place

Soit  $F$  un scindement de Heegaard de genre  $g$  de  $L(p, q)$ , séparant  $L(p, q)$  en deux bretzels  $W_1$  et  $W_2$ . On veut montrer que  $F$  est obtenu par stabilisations du scindement de genre 1 (à isotopie près). Pour cela, on utilise un outil qui a déjà fait ses preuves dans [Bo], à savoir le *plan projectif généralisé* que nous définissons maintenant.

Choisissons une présentation de  $L(p, q)$  comme recollement de deux copies  $V_1$  et  $V_2$  de  $S^1 \times D^2$  par l'application  $\theta : \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$  définie par  $\theta(u, v) = (u^r v^p, u^s v^q)$ . Le bord du disque méridien  $D_1 = 1 \times D^2$  de  $V_1 \cong S^1 \times D^2$  est aussi la courbe de  $V_2 \cong S^1 \times D^2$  paramétrée par  $z \in S^1 \mapsto (z^p, z^q)$ . Considérons alors le complexe  $\Delta$  formé de l'union de  $D_1$  et de la partie de  $V_2 \cong S^1 \times D^2$  paramétrée par  $(z, \rho) \in S^1 \times [0, 1] \mapsto (z^p, \rho z^q)$ .

Le complexe  $\Delta$  est une variété hors de l'âme  $\Sigma = S^1 \times 0$  de  $V_2$ ; en un point de  $\Sigma$ , il est localement isomorphe au produit d'une étoile à  $p$  branches par  $\mathbb{R}$ . Abstraitement,  $\Delta$  est isomorphe au quotient du disque  $D^2$  par la relation d'équivalence qui, sur le bord, identifie  $z_1$  et  $z_2 \in S^1$  quand  $z_1^p = z_2^p$ . Un tel complexe sera appelé un *plan projectif généralisé* (quand  $p \geq 2$ ). Cette terminologie est justifiée par le cas  $p = 2$ , où  $\Delta$  est isomorphe au plan projectif  $\mathbb{RP}^2$ .

On peut facilement montrer que toute variété de dimension 3 qui contient un tel plan projectif généralisé se décompose en somme connexe d'un espace lenticulaire et d'une autre variété. D'autre part,  $L(p, q)$  contient à isotopie près autant de plans projectifs généralisés que de scindements de Heegaard orientés de genre 1, c'est-à-dire 1 ou 2 (voir le théorème 2). Ces remarques sont toutefois sans incidence sur notre preuve.

La première étape de la démonstration du théorème 1 est constituée par le résultat suivant.

LEMME 3. — *On peut isotoper  $\Delta$  de sorte que sa courbe singulière  $\Sigma$  soit contenue dans  $F$ .*

*Démonstration.* — Nous nous appuyons ici fortement sur [Bo]. On commence par munir  $L(p, q)$  d'une fonction de Morse ordonnée  $f$  possédant exactement :

- 1 point critique d'indice 3,
- $g$  points critiques d'indice 2,
- $g$  points critiques d'indice 1,
- et 1 point critique d'indice 0,

et telle que  $F$  soit une surface de niveau située entre les points critiques d'indice 1 et ceux d'indice 2. La construction de  $f$  s'effectue aisément à partir d'une fonction de Morse convenable sur le bretzel de genre  $g$  standard.

Il est alors démontré dans les paragraphes 4 et 5 de [Bo] que l'on peut amener par une isotopie  $\Sigma$  dans une surface de niveau de  $f$ . Le fait que [Bo] se déroule uniquement dans le cadre  $g = 1$  ne change rien à la preuve de ce résultat. La démonstration utilise des techniques essentiellement dues à H. Schubert [Sc], et consiste à examiner le feuilletage singulier induit par  $f$  sur  $\Delta - \Sigma$  pour mettre en évidence des isotopies élémentaires simplifiant  $\Sigma$  par rapport à  $f$ .

Maintenant que  $\Sigma$  est contenue dans une surface de niveau  $F'$ , on conclut aisément. En effet, supposons par exemple le niveau  $f(F')$  plus grand que  $f(F)$ . Après une petite isotopie de  $\Sigma$  si nécessaire, les trajectoires de gradient descendantes issues de  $\Sigma$  ne rencontrent pas les points critiques d'indice 2 et fournissent par conséquent une isotopie amenant  $\Sigma$  sur  $F$ .

Ceci termine notre discussion du lemme 3.  $\square$

En gardant  $\Sigma$  contenue dans  $F$ , on peut isotoper encore  $\Delta$  de sorte que l'intersection de  $\Delta - \Sigma$  avec  $F$  soit transverse, et que  $\Delta$  soit « *monotone* » par rapport à  $F$  au voisinage de  $\Sigma$ , en ce sens qu'un voisinage tubulaire  $U$  de  $\Sigma$  admet un paramétrage par  $S^1 \times D^2$  pour lequel  $F \cap U$  correspond à  $S^1 \times [-1, +1]$  et  $\Delta \cap U$  est l'image de  $(z, \rho) \in S^1 \times [0, 1] \mapsto (z^\alpha, \rho z^\beta)$ , pour des entiers  $\alpha, \beta$  convenables. On remarquera que, pour des raisons homologiques dans le tore solide  $U$ ,  $\alpha = \pm p$  et  $\beta/\alpha$  est congru à  $q/p$  modulo  $\mathbb{Z}$ .

L'intersection du disque ouvert  $\Delta - \Sigma$  avec  $F$  est formée de courbes fermées et d'arcs ouverts proprement plongés dans  $\Delta - \Sigma$ . Le nombre de ces arcs est égal à la moitié du nombre de points d'intersection de  $F \cap \partial U$  avec  $\Delta \cap \partial U$ , et est ainsi égal à  $|\beta|$ . En particulier, il est congru à  $\pm q$  modulo  $p$ .

Nous verrons au paragraphe 3 comment l'on peut conclure la preuve du théorème 1 si aucune composante de  $F \cap (\Delta - \Sigma)$  n'est une courbe fermée. Dans le paragraphe 2, nous allons ainsi nous ramener à ce cas.

## 2. Élimination des courbes fermées

Comme annoncé, le but de cette section est de fournir une isotopie de  $F$  après laquelle  $\Sigma$  est encore contenue dans  $F$  et  $F \cap (\Delta - \Sigma)$  est uniquement formé d'arcs. En général, il ne sera pas possible de garder  $\Sigma$  dans  $F$  tout au long de l'isotopie.

Soit  $D_1$  l'union de toutes les composantes de  $W_1 \cap \Delta$  qui sont des disques fermés ne rencontrant pas  $\Sigma$ , et soit  $U$  un « petit » voisinage tubulaire de  $D_1$  dans  $W_1$ . Modulo arrondissement des coins, chaque composante de  $W_1 - \text{int}(U)$  est un bretzel (voir par exemple [Z]), éventuellement une simple boule. Soit alors  $M$  l'adhérence du complémentaire dans  $L(p, q)$  de la composante de  $W_1 - \text{int}(U)$  contenant  $\Sigma$  (voir fig. 2 et 3).

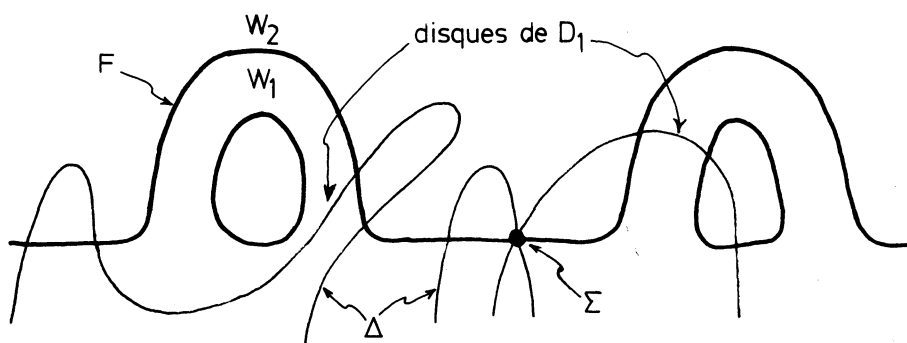


Fig. 2

Dans la variété  $M$ , on considère la surface  $F'$  obtenue en poussant  $F$  dans l'intérieur de  $W_2$ . Celle-ci est un scindement de Heegaard de la variété à bord  $M$ , dans le sens (introduit, semble-t-il, par F. Waldhausen) que nous définissons maintenant.

Par définition, un *scindement de Heegaard* d'une variété orientable  $M$  de dimension 3, éventuellement à bord, est une surface fermée (orientable)  $G$  séparant  $M$  en deux *bretzels*

creux, c'est-à-dire en deux sous-variétés  $W'_1$  et  $W'_2$  telles que chaque triade  $(W'_i; W'_i \cap \partial M, G)$ , pour  $i = 1, 2$ , admette une décomposition en anses avec uniquement des anses d'indice 0 et 1. Rappelons que cette dernière propriété signifie que  $W'_i$  se décompose en une union de sous-variétés

$$N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_k = W'_i,$$

où  $N_0$  est un voisinage collier de  $W'_i \cap \partial M$  et où chaque  $A_j = N_{j+1} - \text{int}(N_j)$  est une anse d'indice  $\alpha = 0, 1$ , c'est-à-dire admet un homéomorphisme avec  $D^\alpha \times D^{3-\alpha}$  envoyant  $A_j \cap N_j$  sur  $(\partial D^\alpha) \times D^{3-\alpha}$ ; par théorie de Smale élémentaire, on peut par ailleurs faire en sorte qu'il y ait exactement 1 ou 0 anse d'indice 0, selon que  $W'_i \cap \partial M$  est vide ou non. On remarquera que, pour une variété sans bord, cette définition des scindements de Heegaard coïncide avec celle que nous avons donnée au début de cet article.

Dans la situation qui nous intéresse, la surface  $F'$  sépare  $M$  en deux parties. L'une,  $W'_2$ , est le complément dans  $W_2$  d'un voisinage collier du bord et est donc bien un bretzel. L'autre,  $W'_1$ , est l'union du collier  $W_2 - \text{int}(W'_2)$ , du voisinage tubulaire  $U$  de  $D_1$  et de la collection de bretzels  $M \cap (W_1 - \text{int}(U))$ ; ceci fournit une décomposition de la triade  $(W'_1; F', \partial M)$  en anses d'indice 2 et 3, et il suffit de considérer la décomposition de  $(W'_1; \partial M, F')$  duale, qui n'a que des anses d'indice 0 et 1, pour vérifier que  $W'_1$  est un bretzel creux. Ainsi,  $F'$  est bien un scindement de Heegaard de  $M$ .

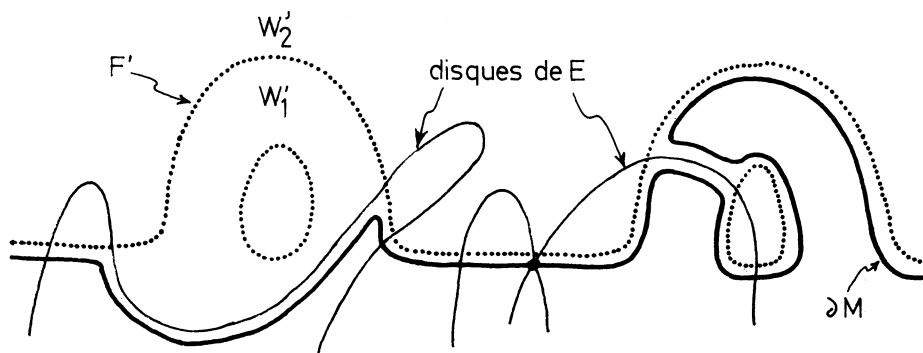


Fig. 3

Soit  $E$  l'union de toutes les composantes de  $\Delta \cap \text{int}(M)$  qui sont des disques ouverts. Nous allons simplifier l'intersection de  $E$  avec  $F'$  grâce au lemme suivant, qui est essentiellement dû à W. Haken [Ha] et qui sera démontré au paragraphe 4.

LEMME 4. — *Il existe dans  $M$  un scindement de Heegaard  $F''$  isotope à  $F'$  qui rencontre chaque composante de  $E$  en 0 ou 1 courbe fermée.*

Une remarque essentielle pour prouver le lemme 4 sera que  $M$  est irréductible c'est-à-dire que toute sphère plongée dans  $M$  y borde une boule. En effet, une telle sphère borde une boule dans la variété irréductible  $L(p, q)$ ; cette boule est nécessairement contenue dans  $M$  car elle contiendrait sinon la surface connexe  $\partial M$ , ce qui contredirait le fait que  $\Sigma \subset \partial M$  est un générateur de  $H_1(L(p, q)) \neq 0$ .

Soient  $W_1''$  et  $W_2''$  les images respectives des bretzels creux  $W_1'$  et  $W_2'$  par l'isotopie de  $M$  envoyant  $F'$  sur  $F''$ . Grâce à l'irréductibilité de  $M$ , on peut imposer en plus dans les conclusions du lemme 4 que  $E \cap W_1''$  est *incompressible* dans  $W_1''$ , c'est-à-dire que le morphisme  $\pi_1(E \cap W_1'') \rightarrow \pi_1(W_1'')$  est injectif pour tout point base. En effet, le théorème du lacet [St] fournit sinon un disque  $D$  plongé dans  $W_1''$ , avec  $\partial D = D \cap (E \cap W_1'')$ , tel que  $\partial D$  est homotopiquement non trivial dans  $E \cap W_1''$ . La courbe  $\partial D$  borde un disque  $D'$  dans la collection de disques  $E$ , et la sphère  $D \cup D'$  borde une boule  $B$  dans la variété irréductible  $M$ . En « chassant »  $F''$  de  $B$  par une isotopie, on augmente le nombre de composantes de  $E$  qui sont des disques contenus dans  $W_1''$  (nécessairement incompressibles) sans perturber les conclusions du lemme 4. Après un certain nombre de modifications de ce type, on aboutit ainsi au cas où  $E \cap W_1''$  est incompressible dans  $W_1''$ .

En général, l'intersection de  $F''$  avec  $\Delta$  est plus réduite que celle de  $F'$ . Comme  $F'$  était elle-même une simple translatée de  $F$ , on peut donc avoir envie de remplacer  $F$  par  $F''$ , mais cette idée un peu naïve se heurte au fait que  $F''$  ne contient plus  $\Sigma$ . Pour récupérer cette dernière propriété sans trop réaugmenter l'intersection avec  $\Delta$ , on utilise le lemme suivant.

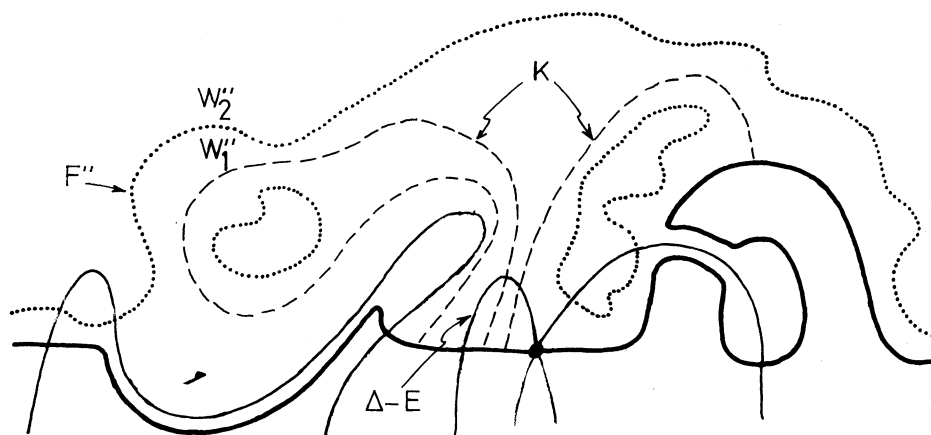


Fig. 4

LEMME 5. — *Le bretzel creux  $W_1''$  admet une fonction de Morse  $f: W_1'' \rightarrow [0, 1]$  avec uniquement des points critiques d'indice 1 telle que  $F'' = f^{-1}(1)$  et  $\partial M = f^{-1}(0)$ , et telle que les nappes de gradient descendantes issues des points critiques évitent l'adhérence de  $E$ .*

Nous reportons la démonstration de ce lemme au paragraphe 5. Celle-ci revient essentiellement à montrer que les anneaux et disques de  $E \cap W_1''$  sont « standards » pour une certaine décomposition en anses de  $W_1''$ .

Soit  $K$  l'union des nappes de gradient descendantes issues des points critiques de la fonction  $f$  fournie par le lemme 5. Par position générale, on peut supposer que  $K$  évite  $\Sigma$  et a une intersection transverse avec  $\Delta - \Sigma$ . Soit alors  $F_1$  obtenue en effectuant sur  $\partial M$  une chirurgie plongée le long de  $K$  (voir fig. 5). Par construction, la surface  $F_1$  est isotope à  $F''$  (considérer les lignes de gradient de  $f$ ) et donc à  $F$ . D'autre part,  $F_1$  coïncide avec  $F$  au voisinage de  $\Sigma$  et  $y$  est donc encore monotone relativement à  $\Delta$  au sens défini au paragraphe 3.

Enfin, elle ne rencontre pas  $E$ , et son intersection avec  $\Delta - E$  s'obtient en rajoutant à  $F \cap (\Delta - E)$  un petit cercle autour de chaque point de  $K \cap (\Delta - E)$ .



Fig. 5

Nous affirmons que  $F_1 \cap (\Delta - \Sigma)$  est plus simple que  $F \cap (\Delta - \Sigma)$  en un sens que nous précisons maintenant. Pour cela, on considère le graphe  $\Gamma$  dual de la décomposition cellulaire du disque  $\Delta - \Sigma$  définie par  $F \cap (\Delta - \Sigma)$ ; les sommets et arêtes de  $\Gamma$  représentent respectivement les composantes de  $\Delta - F$  et  $F \cap (\Delta - \Sigma)$ . Puisqu'on veut se ramener au cas où tous les sommets sont de ce type-là, il est naturel de marquer d'un signe distinctif les sommets de  $\Gamma$  représentant des composantes de  $\Delta - F$  dont l'adhérence dans  $\Delta$  rencontre  $\Sigma$ ; disons par exemple que ces sommets sont « blancs », de type  $\circ$ , tandis que les autres sont « noirs », de type  $\bullet$ . Les sommets blancs forment un sous-arbre de l'arbre  $\Gamma$ . Enfin, on munit chaque sommet d'un poids 1 ou 2 selon que la composante de  $\Delta - F$  correspondante est contenue dans  $\text{int}(W_1)$  ou  $\text{int}(W_2)$ .

La même définition associe à  $F_1$  un graphe  $\Gamma_1$  du même type. Les poids 1 et 2 sont ici déterminés par les images respectives de  $W_1$  et  $W_2$  par l'isotopie envoyant  $F$  sur  $F_1$ .

Par construction de  $F_1$ , le graphe  $\Gamma_1$  s'obtient à partir de  $\Gamma$  de la façon suivante. On efface de  $\Gamma$  toutes les arêtes correspondant à des composantes de  $(F - \partial M) \cap (\Delta - \Sigma)$  ainsi que tous les sommets ainsi isolés, ce qui donne le graphe  $\Gamma'$  associé à la décomposition de  $\Delta - \Sigma$  définie par  $\partial M \cap (\Delta - \Sigma)$ . Le graphe  $\Gamma_1$  s'obtient alors en attachant à  $\Gamma'$  un certain nombre de sommets  $\text{---}\bullet^1$  (un par point de  $K \cap \Delta$ ) sur les sommets de poids 2 de  $\Gamma'$  correspondant aux composantes de  $(\Delta - E) \cap \text{int}(M)$ .

Deux remarques essentielles interviennent maintenant. La première est que, en passant de  $\Gamma$  à  $\Gamma'$ , on efface en particulier toutes les extrémités noires de poids 1 de  $\Gamma$  (celles-ci correspondent aux composantes de  $D_1$ ). D'autre part, lors du passage de  $\Gamma'$  à  $\Gamma_1$ , aucun sommet  $\text{---}\bullet^1$  n'est attaché sur une extrémité noire de  $\Gamma'$ , ni sur un sommet blanc qui ne soit déjà adjacent à un sommet noir (par définition de  $E$ ). Il s'ensuit que, si  $\rho(\Gamma)$  désigne le maximum sur  $\Gamma$  de la fonction « distance à l'ensemble des sommets blancs » (pour la métrique usuelle sur les graphes),  $\rho(\Gamma_1) \leq \rho(\Gamma') \leq \rho(\Gamma)$ . De plus, à distance  $\rho(\Gamma)$  de l'ensemble des sommets blancs,  $\Gamma_1$  n'a plus aucun sommet de poids 1, et a au plus autant de sommets de poids 2 que  $\Gamma$ . C'est en ce sens que l'on peut dire que  $F_1 \cap \Delta$  est plus simple que  $F \cap \Delta$  (du moins si  $\Gamma$  avait un sommet de poids 1 à distance  $\rho(\Gamma)$  des sommets blancs).



Ces considérations permettent de conclure aisément. En effet, appliquons maintenant à  $F_1$  le processus effectué précédemment sur  $F$ , mais en échangeant les rôles de  $W_1$  et  $W_2$ . Ceci fournit une surface  $F_2$  dont le graphe  $\Gamma_2$  associé est tel que  $\rho(\Gamma_2) \leq \rho(\Gamma_1) \leq \rho(\Gamma)$ . De plus,  $\Gamma_2$  n'a maintenant plus aucun sommet à distance  $\rho(\Gamma)$  de l'ensemble des sommets blancs, et donc  $\rho(\Gamma_2) < \rho(\Gamma)$ . En itérant le procédé, on aboutira à la fin à la surface  $F_n$  dont le graphe  $\Gamma_n$  associé est tel que  $\rho(\Gamma_n) = 0$ . Cette dernière propriété est équivalente au fait qu'aucune composante de  $F_n \cap (\Delta - \Sigma)$  n'est une courbe fermée. Comme, par construction, la surface  $F_n$  est isotope à  $F$ , contient  $\Sigma$  et est encore monotone par rapport à  $\Delta$  au voisinage de  $\Sigma$ , ceci accomplit l'objectif que nous nous étions fixé pour cette section.

### 3. Fin de la preuve du théorème 1

On s'est ramené au paragraphe 2 au cas où  $F \cap (\Delta - \Sigma)$  ne contient aucune courbe fermée, tandis que  $F$  satisfait encore les conditions imposées au paragraphe 1. On peut remarquer que  $F \cap (\Delta - \Sigma)$  est non vide puisque nous avons vu au paragraphe 1 que le nombre de ses arcs est congru à  $\pm q$  modulo  $p$  (variante : sinon,  $\Delta$  serait contenu à l'intérieur d'un bretzel dans lequel  $\Sigma$  représenterait un élément de torsion non trivial du groupe fondamental, ce qui est évidemment une absurdité). Choisissons alors une composante  $k$  de  $F \cap (\Delta - \Sigma)$  qui est « le plus vers le bord » dans le disque  $\Delta - \Sigma$ , c'est-à-dire telle que l'une des deux composantes de  $(\Delta - \Sigma) - k$  soit un disque ouvert  $D_0$  ne recoupant pas  $F$ . Supposons par exemple  $D_0$  contenu dans le bretzel  $W_1$ .

LEMME 6. — *Il existe un disque fermé  $D_1$  dans  $W_1$  avec  $D_1 \cap \partial W_1 = \partial D_1$ , tel que la courbe  $\partial D_1$  rencontre  $\Sigma$  transversalement et en exactement un point.*

Démonstration. — Le point essentiel est la remarque que les deux extrémités de  $k$  sont nécessairement situées sur des côtés opposés de  $\Sigma$ , ce qui découle de l'hypothèse de monotonie de  $\Delta$  par rapport à  $F$ . Il suffit alors de perturber légèrement  $D_0$  au voisinage de  $\Sigma$  pour obtenir un disque ouvert qui est l'intérieur d'un disque fermé  $D_1$  avec les propriétés annoncées, comme indiqué sur l'exemple de la figure 6.  $\square$

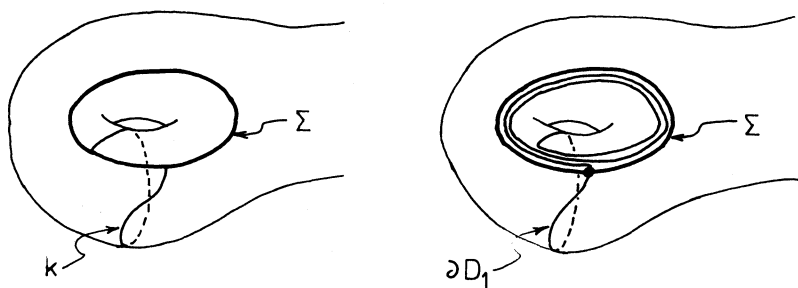


Fig. 6

Considérons  $\Sigma'$  obtenue en poussant légèrement  $\Sigma$  dans l'intérieur de  $W_1$ , et soit  $V$  le complémentaire dans  $L(p, q)$  d'un petit voisinage tubulaire ouvert de  $\Sigma'$ .

Nous affirmons que la surface  $F$  est alors un scindement de Heegaard du tore solide  $V$ . En effet, la variété obtenue en découpant  $W_1$  le long de  $D_1$  est un bretzel de genre  $g-1$  (voir par exemple [Z]), et admet donc une famille de  $g-1$  disques méridiens  $D_2, \dots, D_g$  la découpant en une boule. Comme  $\Sigma \cap \partial D_1$  est formée d'un seul point, la trace de  $\Sigma \cup D_1$  sur le bord de ce bretzel est contractile, et peut donc être évitée par les  $D_2, \dots, D_g$ . Nous imposons cette condition, de sorte que les  $D_2, \dots, D_g$  peuvent aussi être interprétés comme une famille de disques méridiens dans  $W_1$ , évitant  $\Sigma$  et  $D_1$ , et découpant  $W_1$  en un tore solide. A l'aide des  $D_i$ , on construit alors aisément une décomposition de  $(V \cap W_1; \partial V, F)$  en  $g-1$  anses d'indice 1. Comme  $F$  sépare  $V$  en  $V \cap W_1$  et en le bretzel  $W_2$ , ceci montre bien que  $F$  définit un scindement de Heegaard de  $V$ .

**PROPOSITION 7.** — *Tout scindement de Heegaard du tore solide  $V$  est obtenu par stabilisations du scindement de Heegaard de genre 1 (à isotopie près).*

Remarquer que l'on peut parler du scindement de Heegaard de genre 1 de  $V$  par unicité des voisinages colliers du bord. D'autre part, la preuve de la proposition 7 se généralise immédiatement pour montrer que tout scindement de Heegaard d'un bretzel de genre  $g$  est obtenu par stabilisation du scindement standard de genre  $g$ .

L'application de la proposition 7 à  $F$  achève la démonstration du théorème 1. En effet, le complémentaire dans  $L(p, q)$  de l'intérieur de  $V$  étant un tore solide, tout scindement de Heegaard de  $V$  est aussi un scindement de Heegaard de  $L(p, q)$ . Nous avons donc montré que tout scindement de Heegaard de  $L(p, q)$  est obtenu par stabilisations d'un scindement de genre 1. Le théorème 1 découle alors immédiatement de l'unicité du scindement de Heegaard de genre 1 de  $L(p, q)$  ([Bo], [Ho]) et du fait que l'opération de stabilisation est bien définie à isotopie près.

**Démonstration de la proposition 7.** — Soit  $F$  un tel scindement de Heegaard de genre  $g$ , découpant  $V$  en un bretzel creux  $V_1$  et un bretzel  $V_2$ . Considérons un disque méridien  $D$  du tore solide  $V$ . Par un résultat que nous avons déjà utilisé au paragraphe 2 et que nous démontrerons au paragraphe 4 (proposition 8), le disque  $D$  peut être choisi de sorte qu'il rencontre  $F$  (transversalement) en exactement une courbe fermée. En outre, nous montrerons au paragraphe 5 (lemme 11), qu'il existe dans  $V_1$  une famille  $D_1$  de disques disjoints, avec  $\partial D_1 = D_1 \cap F$ , qui évitent l'anneau  $D \cap V_1$  et découpent  $V_1$  en un voisinage collier de  $\partial V$ .

Dans  $F$ , soit  $k$  un arc joignant les deux côtés de la courbe  $D \cap F$ , et dont l'intérieur évite  $D$  et  $D_1$ ; l'existence de  $k$  provient de la propriété que l'anneau  $D \cap V_1$  ne sépare pas le collier de  $\partial V$  obtenu en découpant  $V_1$  le long de  $D_1$ . On considère alors la courbe  $C$  qui est le bord d'un voisinage régulier de  $k \cup (D \cap F)$  dans  $F$ . Cette courbe borde un disque dans le collier de  $\partial V$  obtenu en découpant  $V_1$  le long de  $D_1$ , et donc dans  $V_1$ . De même, elle borde dans  $V_2$  un disque qui est la frontière d'un voisinage régulier de  $k \cup (D \cap V_2)$  dans  $V_2$ . Soit  $S$  l'union de ces deux disques. La sphère  $S$  borde une boule  $B$  dans le tore solide  $V$ , telle que  $B \cap F$  est une surface de bord  $C$  et de genre  $g-1$  (remarquer que  $D \cap F$  est dans la même composante de  $V-S$  que  $\partial V$ , et n'est donc pas dans  $B$ ).

Par construction,  $S \cap V_1$  découpe  $V_1$  en un collier de  $\partial V$  et en le bretzel  $B \cap V_1$  de genre  $g-1$ . De même, le disque  $S \cap V_2$  découpe le bretzel  $V_2$  en un tore solide et en le bretzel  $B \cap V_2$  de genre  $g-1$ . Il suit alors de [Wa<sub>1</sub>] que la surface  $B \cap F$ , qui découpe  $B$  en deux bretsels, est

isotope par une isotopie de  $B$  fixant un voisinage du bord à la stabilisation d'ordre  $g-1$  d'un disque  $D'$  de bord  $C$ . Ainsi,  $F$  est isotope à une stabilisation d'ordre  $g-1$  du tore  $(F-B) \cup D'$  qui borde par construction un collier de  $\partial V$  dans  $V$ .  $\square$

Ceci achève la preuve du théorème 1, modulo les résultats dont nous avons repoussé la preuve jusqu'aux paragraphes 4 et 5.

#### 4. Le lemme de Haken

Cette section est consacrée à la preuve du résultat suivant, que nous venons d'utiliser dans la preuve de la proposition 7 et qui démontre par ailleurs le lemme 4 énoncé au paragraphe 2.

**PROPOSITION 8.** — *Dans une variété irréductible  $N$  munie d'un scindement de Heegaard  $G$ , soit  $S$  une surface formée de disques fermés disjoints telle que  $S \cap \partial N = \partial S$ . Il existe alors une isotopie de  $G$  (ou, de façon équivalente, de  $S$ ) après laquelle chaque composante de  $S$  rencontre  $G$  en 0 ou 1 courbe fermée.*

Le lemme 4 s'obtient par application de la proposition 8 au cas où  $N$  est le complémentaire dans  $M$  d'un voisinage collier ouvert du bord, où  $S = E \cap N$  et où  $G = F'$ .

Dans [Ha], W. Haken montre un résultat similaire, à savoir : Dans la variété fermée  $N$  munie d'un scindement de Heegaard  $G$ , supposons qu'il existe une sphère essentielle (c'est-à-dire ne bordant pas une boule dans  $N$ ). Alors, il existe une telle sphère essentielle rencontrant  $G$  en exactement une courbe; en d'autres termes, le scindement de Heegaard se décompose en somme connexe. La démonstration de la proposition 8 que nous donnons ici est une simple adaptation de la preuve de [Ha] au cas qui nous intéresse.

L'idée générale consiste à simplifier successivement les intersections de  $S$  avec chacun des deux bretzels creux  $W_1$  et  $W_2$  découpés par  $G$  dans  $N$ , et ceci en utilisant des disques de compression et de  $\partial$ -compression. Par définition, un *disque de compression* pour une surface  $F$  dans une variété  $M$  de dimension 3 est un disque fermé  $D$  plongé dans  $M$  tel que  $D \cap F = \partial D$  et que  $\partial D$  soit non trivial dans  $\pi_1(F)$ . De même, si  $F \cap \partial M = \partial F$  et si  $A$  est une partie de  $\partial M$ , un *disque de  $\partial$ -compression* vers  $A$  pour  $F$  est un disque  $D$  tel que  $\partial D$  se décompose en l'union de deux arcs correspondant respectivement à  $D \cap F$  et  $D \cap \partial M$ , que  $D \cap \partial M$  soit contenu dans  $A$  et que  $D \cap F$  soit non-trivial dans  $\pi_1(F, F \cap A)$ .

D'autre part, rappelons que nous avons défini un *bretzel creux* comme une variété compacte orientable connexe  $W$  de dimension 3 dont le bord  $\partial W$  se décompose en deux morceaux disjoints  $\partial_e W$  et  $\partial_i W$ , formés de composantes de  $\partial W$ , tels que la triade  $(W; \partial_i W, \partial_e W)$  admette une décomposition en anses d'indices 0 et 1. Les deux surfaces  $\partial_i W$  et  $\partial_e W$  sont respectivement appelées le *bord intérieur* et le *bord extérieur* de  $W$ .

L'outil essentiel est alors le suivant.

**LEMME 9.** — *Dans le bretzel creux  $W$ , de bord extérieur  $\partial_e W$  et de bord intérieur  $\partial_i W$ , soit  $T$  une surface orientable compacte telle que  $T \cap \partial W = \partial T$ . Supposons que  $T$  n'admette aucun disque de compression, ni aucun disque de  $\partial$ -compression vers le bord extérieur  $\partial_e W$ . Alors, chaque composante de  $T$  rencontrant  $\partial_e W$  est, ou bien un disque, ou bien un anneau joignant  $\partial_e W$  à  $\partial_i W$  (c'est-à-dire un anneau possédant une composante de bord dans  $\partial_e W$  et l'autre dans  $\partial_i W$ ).*

*Démonstration.* — Elle est basée sur l'observation que  $\pi_1(W, \partial_e W)$  est nul et que, si une composante de  $T$  rencontrant  $\partial_e W$  n'est ni un disque ni un anneau joignant  $\partial_e W$  à  $\partial_i W$ ,  $\pi_1(T, T \cap \partial_e W; \star)$  est non nul pour un certain point base  $\star$ . Il existe donc dans ce cas un chemin dans  $F$  et un chemin dans  $\partial_e W$  de mêmes extrémités qui sont homotopes dans  $W$  à extrémités fixes. Un argument standard, utilisant le théorème du lacet [St], permet d'en déduire l'existence d'un disque de  $\partial$ -compression vers  $\partial_e W$  ou d'un disque de compression.  $\square$

Nous pouvons maintenant commencer la démonstration de la proposition 8. Pour la commodité de l'exposition, on démontrera la version où  $G$  reste fixe et où c'est  $S$  que l'on isotope.

Si  $S$  ne satisfait pas la condition cherchée, l'adhérence d'une composante de  $S - G$  contenue dans, disons,  $W_1$  rencontre  $G$  en au moins deux courbes. Alors, d'après le lemme 9,  $S \cap W_1$  admet dans  $W_1$  un disque  $D$  de compression ou de  $\partial$ -compression vers  $\partial_e W_1 = G$ .

Si  $D$  est un disque de compression, la courbe  $\partial D$  borde dans  $S$  un disque  $D'$ , qui rencontre nécessairement  $G$ . Par arrondissement des coins de  $(S - D) \cup D'$ , on peut alors construire une surface  $S_1$  qui est isotope à  $S$  (car la sphère  $D \cup D'$  borde une boule dans la variété irréductible  $N$ ) et rencontre  $G$  en moins de composantes que  $S$ .

Si  $D$  est un disque de  $\partial$ -compression vers  $G$ , soit  $S_1$  la surface obtenue en « tirant »  $S$  le long de  $D$  à travers  $G$  comme sur la figure 7. Abstraitement,  $S_1 \cap W_1$  s'obtient à partir de  $S \cap W_1$  par chirurgie plongée le long de  $S \cap D$ , tandis que  $S_1 \cap W_2$  est isomorphe à l'union de  $S \cap W_2$  et d'un voisinage collier de  $D \cap G$  dans  $G$ .

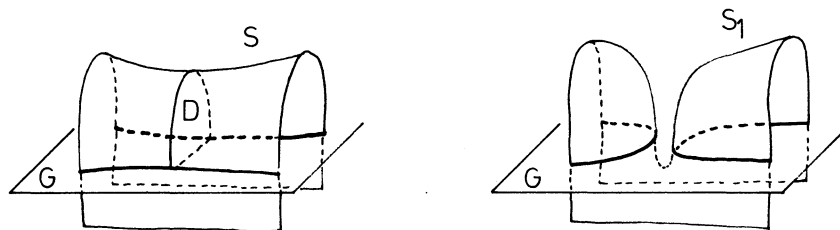


Fig. 7

Si  $S_1 \cap W_1$  admet à son tour dans  $W_1$  un disque de compression ou de  $\partial$ -compression vers  $G$ , on lui applique le même procédé pour définir une nouvelle surface  $S_2$ , et on recommence jusqu'à ce que l'on atteigne une surface  $S_n$  telle que  $S_n \cap W_1$  n'admette plus aucun tel disque de compression ou de  $\partial$ -compression vers  $G$  dans  $W_1$ . Le fait que ce processus s'arrête est un lemme classique sur les découpages de surfaces (voir également notre remarque après la fin de la preuve).

D'après le lemme 9,  $S_n \cap W_1$  est constituée de composantes entières de  $S_n$ , de disques à bord dans  $G$  et d'anneaux joignant  $W_1 \cap \partial M$  à  $G$ . L'idée consiste maintenant à reprendre le même procédé dans  $W_2$ , par réductions successives de  $S_n \cap W_2$  le long de disques de compression et de  $\partial$ -compression vers  $G$ . Le fait que ce processus va finir par aboutir à une surface du type cherché est basé sur l'observation suivante de W. Haken :

Considérons une suite  $T_0, T_1, \dots, T_w$  de surfaces compactes planaires, munies chacune d'une collection privilégiée  $\partial^* T_i$  de composantes de  $\partial T_i$  (les  $T_i$  seront formées de composantes de  $S_i \cap W_1$  et  $\partial^* T_i$  sera  $G \cap T_i$ ), telles que chaque  $T_{i+1}$  soit obtenue à partir de  $T_i$  par l'une des opérations I, II et III ci-dessous,  $\partial^* T_{i+1}$  étant la famille de composantes de  $\partial T_{i+1}$  correspondant de façon naturelle à  $\partial^* T_i$  dans le processus.

I. Découper  $T_i$  le long d'un arc  $k$  joignant une composante de  $\partial^* T_i$  à elle-même et non-trivial dans  $\pi_1(T_i, \partial^* T_i)$ .

II. Découper  $T_i$  le long d'un arc joignant deux composantes distinctes de  $\partial^* T_i$ .

III. Recoller un disque le long d'un certain nombre de composantes de  $\partial^* T_i$ .

LEMME 10. — Avec les données ci-dessus, supposons qu'en outre aucune composante de  $T_0$  ne soit un disque et que chaque composante de  $T_w$  contienne au plus une composante de  $\partial^* T_w$ . Alors

$$\# \partial^* T_w \leq \# \partial T_0 - \# T_0$$

où  $\# X$  désigne le nombre de composantes de  $X$ .

Démonstration. — En considérant d'abord le cas de deux telles opérations, on établit facilement l'existence d'une suite similaire  $T_0 = T'_0, T'_1, \dots, T'_w = T_w$  telle que chaque  $T'_{i+1}$  se déduit de  $T'_i$  par une opération de type I si  $0 \leq i < u$ , de type II si  $u \leq i < v$  et de type III si  $v \leq i < w$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $T'_i = T_i$ . On a alors les relations suivantes :

$$\# T_u - \# T_0 = \# \partial T_u - \# \partial T_0 = u,$$

$$\# \partial^* T_w \leq \# T_w = \# T_u,$$

$$\# \partial T_u \geq 2 \# T_u,$$

où la dernière inégalité provient de la remarque qu'aucune composante de  $T_u$  n'est un disque, ce qui découle de la définition des opérations de type I et des hypothèses sur  $T_0$ . On obtient aisément l'inégalité cherchée en combinant toutes ces relations.  $\square$

Si  $D$  désigne l'union des composantes de  $S \cap W_1$  qui sont des disques (et restent donc inchangées lors du passage de  $S$  à  $S_n$ ), on peut appliquer le lemme 10 aux  $T_i = (S_i \cap W_1) - D$  et  $\partial^* T_i = T_i \cap G$ , avec  $S_0 = S$ . On en déduit que

$$\#(S_n \cap G) \leq \#(S \cap G) + \#(\partial M \cap W_1 \cap (S - D)) - \#(W_1 \cap (S - D)).$$

En particulier, le passage de  $S$  à  $S_n$  n'augmente pas l'intersection de la surface avec  $G$ , et la réduit strictement si une composante de  $S \cap W_1$  évite  $\partial M$  et n'est pas un disque.

On conclut alors en réappliquant le processus à  $S^{(1)} = S_n$ , mais en échangeant les rôles de  $W_1$  et  $W_2$ , de façon à aboutir à une surface  $S^{(2)}$  isotope à  $S$  et reconstruant  $W_2$  selon des disques ou des anneaux joignant  $W_2 \cap \partial M$  à  $G$ . Par itération, on définit ainsi une suite  $S^{(i)}$  de surfaces isotopes à  $S$  telles que  $S^{(i)} \cap W_1$  quand  $i$  est impair, et  $S^{(i)} \cap W_2$  quand  $i$  est pair, soit formé de disques ou d'anneaux joignant  $\partial M$  à  $G$ . De plus

$$\#(S^{(i+1)} \cap G) \leq \#(S^{(i)} \cap G),$$

avec inégalité stricte si  $i$  est impair (resp. pair) et s'il existe une composante de  $S$  à bord dans  $W_1 \cap \partial M$  (resp.  $W_2 \cap \partial M$ ) qui rencontre  $G$  en au moins deux courbes. Cette dernière propriété entraîne que, à partir d'un certain rang, chaque composante de  $S^{(i)}$  rencontre  $G$  en au plus 1 courbe [et  $S^{(i+1)} = S^{(i)}$ ].

Ceci termine la preuve de la proposition 8.  $\square$

Nous terminons cette section par quelques remarques. La première concerne le fait, admis en cours de preuve, que les réductions successives de  $S \cap W_1$  finissent par amener à une surface sans disques de compression ou  $\partial$ -compression vers  $G$  dans  $W_1$ . En fait, le genre d'argument utilisé pour démontrer le lemme 10 fournit, avec les notations utilisées :

$$\# \partial T_i \leq 3 \# \partial T_0 - 4 \# T_0 - i,$$

ce qui montre bien que la suite des  $S_i$  ne peut être infinie.

D'autre part, on remarquera que l'hypothèse que les composantes de  $S$  sont des disques est absolument nécessaire pour conclure à l'aide du lemme 10 (*voir* quand même [Ha] pour un résultat analogue avec des sphères). Pour un anneau, par exemple, les réductions utilisées peuvent conduire à un « processus perpétuel » qui ne s'arrête jamais.

Enfin, si l'on supprime des hypothèses de la proposition 8 le fait que  $N$  est irréductible, le même argument fournit une famille  $S'$  de disques disjoints qui coïncide avec  $S$  près du bord, telle que chaque composante de  $S'$  rencontre  $G$  en au plus une courbe fermée. Toutefois, il n'est en général pas possible d'exiger que  $S'$  soit isotope à  $S$ .

## 5. Anneaux dans les bretzels creux

Cette section est consacrée à la preuve du lemme 5 énoncé au paragraphe 2, ainsi que du lemme 11 ci-dessous que nous avons utilisé au paragraphe 3 dans la démonstration de la proposition 7.

Soit  $W$  un bretzel creux de bord intérieur  $\partial_i W$  et de bord extérieur  $\partial_e W$ . Par définition, la triade  $(W; \partial_i W, \partial_e W)$  admet une décomposition en anses d'indices 0 et 1. Rappelons d'autre part qu'un anneau joignant  $\partial_i W$  à  $\partial_e W$  est un anneau ayant une composante de bord dans  $\partial_i W$  et l'autre dans  $\partial_e W$ .

**LEMME 11.** — *Dans le bretzel creux  $W$ , dont le bord intérieur est non vide et sans composante sphérique, soit  $S$  une collection d'anneaux incompressibles disjoints joignant  $\partial_i W$  à  $\partial_e W$ . Il existe alors une collection  $D$  de disques disjoints, avec  $\partial D = D \cap \partial_e W$ , qui évite  $S$  et découpe  $W$  en une variété difféomorphe à  $\partial_i W \times I$  (modulo arrondissement des coins).*

*Démonstration.* — L'hypothèse qu'aucune composante de  $\partial_i W$  n'est une sphère assure que  $W$  est irréductible. En effet, l'intérieur de son revêtement universel est alors homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ , d'où la propriété suit aisément.

Parmi toutes les collections de disques à bord dans  $\partial_e W$  et découpant  $W$  en une copie de  $\partial_i W \times I$ , choisissons en une,  $D$ , qui rencontre (transversalement)  $S$  en un nombre minimal de composantes. Le fait que de telles surfaces existent s'obtient en retirant un certain nombre de composantes à la collection des co-âmes d'indice 1 d'une décomposition de  $(W; \partial_i W, \partial_e W)$  en anses d'indice 0 et 1.

On peut montrer que  $D$  ne rencontre pas  $S$ . Un argument standard, utilisant l'incompressibilité de  $S$  et l'irréductibilité de  $W$ , montre déjà qu'aucune composante de  $D \cap S$  n'est une courbe fermée.

Si  $D \cap S$  est non vide, il existe alors une composante (à bord)  $k$  de  $D \cap S$  qui est « le plus vers le bord » dans  $S$ , c'est-à-dire qui borde avec un arc dans  $\partial S$  un disque  $D_s$  dans  $S$  dont l'intérieur ne recoupe pas  $D$ . Si  $D_1$  est la composante de  $D$  contenant  $k$ , le bord d'un voisinage régulier  $U$  de  $D_1 \cup D_s$  dans  $W$  est formé de trois disques, dont l'un est simplement un translaté de  $D_1$ ; soient  $D'_1$  et  $D''_1$  les deux autres. Alors  $(D - D_1) \cup D'_1 \cup D''_1$  est une collection de disques disjoints qui rencontre  $S$  en moins de composantes que  $D$  et découpe  $W$  en l'union d'un collier de  $\partial_i W$  et d'une boule (utiliser le fait que  $U$  est une boule, et que tout disque dans un collier est parallèle à un disque du bord). En retirant une composante de  $(D - D_1) \cup D'_1 \cup D''_1$ , on obtiendrait alors une collection de disques contredisant l'hypothèse de minimalité sur  $D$ , ce qui est exclu.

Donc,  $D \cap S$  est vide, ce qui prouve le lemme.  $\square$

**COROLLAIRE 12.** — *Sous les hypothèses du lemme 11, il existe une fonction de Morse  $f: W \rightarrow [a, b]$  avec uniquement des points critiques d'indice 1, telle que  $f^{-1}(b) = \partial_e W$ ,  $f^{-1}(a) = \partial_i W$  et les nappes descendantes issues des points critiques évitent  $S$ .*

*Démonstration.* — D'après le lemme 11,  $W$  est obtenue en recollant sur  $V \cong \partial_i W \times I$  des anses d'indice 2 le long de paires de disques dans  $\partial_i W \times I$ , de sorte que  $S$  soit contenue dans  $V$ .

Par un lemme de F. Waldhausen ([Wa<sub>2</sub>], lemme 3.4), le paramétrage  $V \cong \partial_i W \times I$  peut être choisi de sorte que  $S$  soit verticale, c'est-à-dire union de fibres  $\star \times I$  de  $\partial_i W \times I$ . La fonction de Morse  $f$  s'obtient alors facilement à partir de cette décomposition en anses.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 5 du paragraphe 2.

*Démonstration du lemme 5.* — Rappelons quelle était la situation. On considère le bretzel creux  $W'_1$  dont le bord intérieur  $\partial_e W'_1 = \partial M$  est connexe et n'est pas une sphère [sinon la courbe  $\Sigma \subset \partial M$  ne pourrait représenter un générateur de  $H_1(L(p, q)) \neq 0$ ]. On a également une surface  $E \cap \text{int}(W'_1)$  proprement plongée dans  $\text{int}(W'_1)$  qui est formée de disques ouverts et d'anneaux ouverts incompressibles joignant  $\partial_i W'_1$  à  $\partial_e W'_1$  (pour la définition évidente de cette notion). L'adhérence de  $E \cap \text{int}(W'_1)$  n'est en général pas formée de disques et anneaux fermés, en raison de recollements possibles le long de  $\Sigma \subset \partial M$ .

Comme on préfère parler de variétés compactes, soit  $V \cong \partial M \times I$  un « petit » voisinage collier de  $\partial M$  dans  $W'_1$ , et soit  $W_0$  le bretzel creux  $W'_1 - \text{int}(V)$ . Alors,  $E \cap W_0$  est formée de disques fermés et d'anneaux fermés incompressibles joignant  $\partial_i W_0$  à  $\partial_e W_0$ . Soit  $f: W_0 \rightarrow [1/2, 1]$  la fonction de Morse obtenue par application du corollaire 12 à  $W = W_0$  et à l'union  $S$  des composantes de  $E \cap W_0$  qui sont des anneaux. Par construction, l'union  $K$  des nappes de gradient descendantes issues des points critiques de  $f$  évite  $S$ .

Comme le morphisme  $\pi_1(\partial_i W_0) \rightarrow \pi_1(W_0)$  est injectif, le bord de chaque composante  $E_0$  de  $E \cap W_0$  qui est un disque borde un disque  $D_0$  dans  $\partial_i W_0$ , et la sphère  $E_0 \cup D_0$  borde une boule dans la variété irréductible  $W$ . On peut alors facilement modifier  $f$  par une isotopie fixant un voisinage des composantes annulaires de  $E \cap W_0$  de sorte que  $K$  évite toutes ces boules. En particulier,  $K$  évite  $E \cap W_0$ .

On veut maintenant étendre  $f$  en une fonction de Morse convenable  $W_1'' \rightarrow [0, 1]$ . Rappelons que l'adhérence  $\bar{E}$  de  $E$  est en général singulière au voisinage de  $\Sigma$ . Toutefois, une partie de l'adhérence de chaque composante de  $E$  correspond à une composante de  $F \cap (\Delta - \Sigma)$ , où  $\bar{E}$  est non singulière. Si le collier  $V \cong \partial M \times I$  a été choisi suffisamment petit, chaque composante de  $\partial_i W_0 - E$  contient donc l'extrémité d'une fibre  $\star \times I$  évitant  $\bar{E} \cap V$ . Si l'on isotope  $f$  de sorte que chaque point de  $\partial K$  soit au-dessus d'une telle fibre,  $f$  s'étend alors immédiatement en une fonction de Morse  $W_1'' \rightarrow [0, 1]$  du type cherché.  $\square$

## 6. Scindements de Heegaard orientés

On démontre ici le théorème 2. D'après le théorème 1, il suffit de déterminer quand, pour un scindement de Heegaard  $F$  de  $L(p, q)$ , il existe un difféomorphisme de  $L(p, q)$  qui est isotope à l'identité et respecte  $F$  en renversant son orientation.

Pour un scindement de Heegaard  $F$  de genre 1 découpant  $L(p, q)$  en deux tores solides  $V_1$  et  $V_2$ , un calcul élémentaire montre que, si  $v_1$  et  $v_2$  engendrent les images respectives de  $H_1(V_1)$  et  $H_1(V_2)$  dans  $H_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}/p$ ,  $v_2$  s'écrit  $rv_1$  avec  $qr$  congru à  $\pm 1$  modulo  $p$ . Il s'ensuit qu'il ne peut exister d'isotopie de  $L(p, q)$  échangeant  $V_1$  et  $V_2$  que si  $q$  est congru à  $\pm 1$  modulo  $p$ . Réciproquement, si  $q$  est congru à  $\pm 1$  modulo  $p$ , il existe une isotopie simple entre l'âme de  $V_1$  et l'âme de  $V_2$ , passant par une courbe tracée sur  $F$  (voir par exemple [Bo], lemme 4), qui fournit une isotopie échangeant  $V_1$  et  $V_2$ .

Ceci démontre le théorème 2 pour les scindements de genre  $g=1$ . Le cas  $g \geq 2$  découle immédiatement de l'observation suivante (voir [Wa<sub>1</sub>]).

LEMME 13. — Soit  $T$  un scindement de Heegaard orienté de genre 1 de  $L(p, q)$ . Alors, en tant que scindements orientés, la stabilisation (d'ordre 1) de  $T$  est isotope à la stabilisation de  $-T$ .

Démonstration. — Soit  $T_0 \subset T$  le complément d'un disque ouvert dans  $T$ , et soit  $F$  le bord d'un voisinage régulier  $V$  de  $T_0$ , orienté comme tel. La surface  $F$  est clairement un scindement de Heegaard de genre 2 de  $L(p, q)$ .

Soit  $D_1$  un disque méridien du tore solide  $V_1 \subset L(p, q)$  dont le bord orienté est  $-T$ . On peut supposer  $\partial D_1$  contenu dans  $T_0$ , et il existe alors un arc  $k$  dans le tore percé  $T_0$ , avec  $\partial k = k \cap \partial T_0$ , qui rencontre (transversalement)  $\partial D_1$  en exactement un point. Si  $V'$  est l'adhérence de  $L(p, q) - V$ , l'arc  $k$  fournit un disque  $D$  dans  $V$  dont le bord rencontre dans  $F$  le bord de  $D' = D_1 \cap V'$  en exactement un point. En considérant une boule voisine régulière de  $D \cup D'$ , il est classique que cette situation présente le scindement orienté  $F$  comme stabilisation de  $T$  (voir [Wa<sub>1</sub>]).

Par symétrie,  $F$  est aussi isotope à la stabilisation de  $-T$ , d'où le lemme.  $\square$

La preuve ci-dessus du lemme 13, tirée de [Wa<sub>1</sub>], se généralise immédiatement pour montrer que la stabilisation d'ordre  $g$  d'un scindement de Heegaard de genre  $g$  est « réversible », c'est-à-dire est ramenée sur elle-même avec orientation opposée par une isotopie ambiante.



## BIBLIOGRAPHIE

- [Bo] F. BONAHOE, *Difféotopies des espaces lenticulaires*, à paraître dans *Topology*.
- [BO] F. BONAHOE et J.-P. OTAL, *Scindements de Heegaard des espaces lenticulaires* (C.R. Acad. Sc., Paris, t. 294, série I, 1982).
- [BGM] J. BIRMAN, F. GONZALES-ACUÑA, J.-M. MONTESINOS, *Minimal Heegaard Splittings of 3-Manifolds Are Not Unique* (*Michigan Math. J.*, vol. 23, 1976, p. 97-103).
- [En] R. ENGMANN, *Nicht-homöomorphe Heegaard Zerlegungen von Geschlecht 2 der zusammenhängenden Summe zweier Linsenräume*, (*Abh. Math. Sem. Hamburg*, vol. 35, 1971, p. 33-38).
- [Ha] W. HAKEN, *Some Results on Surfaces in 3-Manifolds* (*Studies in Modern Topology*, P. J. HILTON, éd., Prentice Hall, 1968, p. 39-98).
- [Ho] C. D. HODGSON, *Involutions and Isotopies of Lens Spaces* (Thèse de l'Université de Melbourne, 1981).
- [Ki] R. KIRBY, *Problems in Low-Dimensional Manifold Theory* (*Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 32, Part 2, 1978, 273-312).
- [O<sub>1</sub>] J.-P. OTAL, *Présentations en ponts du nœud trivial* (C.R. Acad. Sc., Paris, t. 294, série I, 1982, p. 553-556).
- [O<sub>2</sub>] J.-P. OTAL, *Scindements de Heegaard et présentations en ponts*, (Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Orsay 1982).
- [Re<sub>1</sub>] K. REIDEMEISTER, *Zur dreidimensionalen Topologie* (*Abh. math. Semin. Univ. Hamburg*, vol. 9, 1933, p. 189-194).
- [Re<sub>2</sub>] K. REIDEMEISTER, *Homotopieringe und Linsenräume* (*Abh. math. Semin. Univ. Hamburg*, vol. 11, 1936, p. 102-109).
- [Sc] H. SCHUBERT, *Knoten mit zwei Brücken* (*Math. Zeit.*, vol. 65, 1956, p. 133-170).
- [Si] J. SINGER, *Three-Dimensional Manifolds and Their Heegaard Diagrams*, (*Trans. A.M.S.*, vol. 35, 1933, p. 88-111).
- [St] J. STALLINGS, *On the Loop Theorem* (*Ann. of Math.*, vol. 72, 1960, p. 12-19).
- [Wa<sub>1</sub>] F. WALDHAUSEN, *Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre*, (*Topology*, vol. 7, 1968, p. 195-203).
- [Wa<sub>2</sub>] F. WALDHAUSEN, *On Irreducible Manifolds which Are Sufficiently Large* (*Ann. of Math.*, vol. 87, 1968, p. 56-88).
- [Z] H. ZIESCHANG, *Über einfache Kurven auf Vollbrezeln* (*Abh. math. Semin. Univ. Hamburg*, vol. 25, 1962), p. 231-250).

(Manuscrit reçu le 11 juin 1982,  
révisé le 19 novembre 1982).

F. BONAHOE et J.-P. OTAL  
Mathématique, Bât. n° 425,  
Université de Paris-Sud,  
91405 Orsay cedex.  
France.