G. BARBANÇON
M. RAÏS

Sur le théorème de Hilbert différentiable pour les groupes linéaires finis (d'après E. Noether)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 16, nº 3 (1983), p. 355-373
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_3_355_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 16, 1983, p. 355 à 373

SUR LE THÉORÈME DE HILBERT DIFFÉRENTIABLE POUR LES GROUPES LINÉAIRES FINIS (d'après E. Noether)

PAR G. BARBANÇON ET M. RAÏS

1. Introduction

1.1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, G un sous-groupe fini du groupe linéaire GL(V) de V, S l'algèbre symétrique du dual V* de V (identifiée à l'algèbre des fonctions polynômes sur V), et S_G la sous-algèbre de S constituée par les fonctions G-invariantes. Le théorème de Hilbert *algébrique* affirme que S_G est une algèbre de *type fini.* De façon précise, il existe un nombre fini s de polynômes homogènes G-invariants $p_1, \ldots, p_s$ tels que l'application $p : V \to K^s$ dont les composantes sont $p_1, \ldots, p_s$ ait la propriété suivante : pour toute fonction *polynôme* G-invariante $f : V \to K$, il existe une fonction *polynôme* $g : K^s \to K$ telle que $f = g \circ p$.

1.2. Si $K = \mathbb{R}$ (ou $K = \mathbb{C}$), on peut s'intéresser aux invariants de G dans diverses algèbres de fonctions définies dans V : fonctions continues, différentiables (sauf précision contraire, différentiable voudra toujours dire de classe C^∞), analytiques, etc. A ce propos, le théorème de Hilbert *différentiable* est maintenant bien connu : soit $p = (p_1, \ldots, p_s)$ comme plus haut, $p_1, \ldots, p_s$ étant un système de générateurs de l'algèbre S_G. Alors pour toute fonction *différentiable* G-invariante $f : V \to \mathbb{R}$, il existe une fonction *différentiable* $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ telle que $f = g \circ p$. A notre connaissance, le résultat de ce type le plus ancien est celui de Glaeser concernant les fonctions symétriques C^∞ de n variables réelles (le théorème de Newton différentiable) [5], et le plus récent est celui de D. Luna (cas des groupes réductifs), améliorant le théorème de Hilbert différentiable pour les groupes compacts établi par G. Schwarz ([7], [10]). Pour les groupes finis quelconques (quelconques étant mis par opposition aux groupes finis engendrés par des réflexions qui en fait peuvent être traités par le théorème de Glaeser), le résultat correspondant a été obtenu par Bierstone [3] [qui utilise la méthode de

Noether (*voir* 2.4 plus bas) et le théorème de préparation différentiable], et nous avons lu quelque part qu'il était aussi connu de Malgrange. Signalons enfin la généralisation du théorème de Glaeser due à J. C. Tougeron [11].

1.3. Revenons au théorème des invariants algébriques de Hilbert. Il est bien connu qu'il dépend essentiellement d'un autre théorème de Hilbert qui dit que tout idéal de l'algèbre S est de type fini, et que son apparition vers 1890 allait tuer d'un coup la théorie classique des invariants, jusque-là florissante ([12], chap. II, § 1). Ceci n'allait pas empêcher E. Noether de donner plus tard (1916) une démonstration (en caractéristique zéro) du théorème de Hilbert pour les groupes finis, qui (d'après H. Weyl) présentait deux avantages : elle était élémentaire parce qu'elle n'utilisait pas le théorème de la base finie pour les idéaux de polynômes, et elle fournissait explicitement un système de générateurs pour l'algèbre S_G des invariants. Dans sa démonstration, le groupe symétrique joue un rôle fondamental, en ce sens que le théorème des invariants pour un groupe fini quelconque résulte du théorème des invariants pour le groupe symétrique.

1.4. Le but de ce travail est de montrer que ce point de vue est encore valable quand on s'intéresse aux invariants différentiables des groupes finis. En un sens qui sera précisé plus loin, le théorème de Hilbert différentiable résulte du théorème de Newton différentiable. L'intérêt principal de cette façon de voir est qu'elle permet d'aborder le problème des invariants de classe C^p (avec $p < \infty$). Rappelons à ce propos le théorème de Barbançon [1] : si f est une fonction symétrique de classe C^{nq} de n variables réelles, il existe une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^q telle que

$$f(x) = g(\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)),$$

pour tout x (où $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires). Barbançon montre par ailleurs que c'est là le meilleur résultat possible. Autrement dit, il y a bien une *perte de dérivabilité* dans le théorème de Newton en classe C^p. Si on se pose maintenant le même problème pour un groupe fini linéaire quelconque, on constate que la méthode de Noether ramène l'évaluation de la perte de dérivabilité dans cette situation à celle des invariants du groupe symétrique. Nous étudions donc les problèmes correspondants au groupe symétrique par deux méthodes différentes. La première est une adaptation en classe C^p de la démonstration du théorème de Hilbert différentiable que nous donnons dans le paragraphe 3. On pourrait dire qu'elle est élémentaire si elle n'utilisait à la fin le théorème de Newton en classe C^p([1], convenablement généralisé (*voir* 4.1)). La deuxième s'inspire des techniques de division (dont l'initiateur est B. Malgrange dans le cas C^∞ pour le groupe symétrique, [8]), et contrairement à la première, n'utilise pas la théorie des groupes de réflexions. Notre résultat final est le suivant :

THÉORÈME. — *Soient* V *un espace vectoriel réel de dimension* n, G *un sous-groupe d'ordre* m *de* GL (V) *et* $(p_1, \ldots, p_s)$ *un système de générateurs de* S_G. *Si* f *est une fonction* G-*invariante de classe* C^q, *avec* $q = mp + n(m-1)$, *il existe une fonction* $g : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, *de classe* C^p *telle que :*

$$f(x) = g(p_1(x), \ldots, p_s(x)).$$

pour tout x.

2. Le théorème des invariants pour les groupes finis (d'après E. Noether)

2.1. Pour chaque entier $m>0$, on désignera par Σ_m le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$ et par $\rho : \Sigma_m \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ la représentation linéaire de Σ_m dans $\mathbb{R}^m$ définie de la manière suivante :

$$\rho(\sigma^{-1})(x_1, \ldots, x_m)=(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}),$$

pour tous σ dans Σ_m et $(x_1, \ldots, x_m)$ dans $\mathbb{R}^m$. Il arrivera qu'on dise de cette représentation que c'est la *représentation standard* de Σ_m. Pour chaque entier $n>0$, on désignera par ρ_n la représentation $n\rho$ de Σ_m, qui est somme directe de n représentations de Σ_m toutes *équivalentes* à la représentation standard ρ. Comme on ne distinguera pas une représentation donnée de la *classe de représentations* qu'elle définit, on précisera que l'espace de ρ_n est $\mathrm{R}^{mn}=\mathrm{R}^m\oplus\ldots\oplus\mathrm{R}^m$ et que

$$\rho_n(\sigma)(y_1, \ldots, y_n)=(\rho(\sigma)\,y_1, \ldots, \rho(\sigma)\,y_n),$$

pour tous σ dans Σ_m et $(y_1, \ldots, y_m)$ dans $\mathbb{R}^{mn}$.

2.2. Il sera utile plus loin de remarquer que pour tous m et n, l'image $\rho_n(\Sigma_m)$ est un sous-groupe d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{mn})$ qui est *engendré par des réflexions*. En effet, le groupe produit $(\Sigma_m)^n$ opère naturellement dans $\mathbb{R}^{mn}$ au moyen de la représentation linéaire ρ^n telle que

$$\rho^n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(y_1, \ldots, y_n)=(\rho(\sigma_1)\,y_1, \ldots, \rho(\sigma_n)\,y_n),$$

pour tous $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ dans Σ_m, et l'image de $(\Sigma_m)^n$ par cette représentation est évidemment engendrée par des réflexions, tandis que ρ_n n'est autre que la *restriction* de ρ^n à Σ_m identifié au sous-groupe *diagonal* de $(\Sigma_m)^n$.

2.3. Revenons aux représentations ρ_n de Σ_m, au moyen desquelles Σ_m opère dans $\mathbb{R}^{mn}$. Il se trouve que l'algèbre des fonctions polynômes sur R^{mn} qui sont invariantes par cette action de Σ_m était bien connue, en ce sens qu'on en connaissait un système de générateurs, constitué par les *polarisées* des fonctions symétriques élémentaires (pour plus de détails, le lecteur peut consulter [12], chap. II, § 3).

2.4. On peut maintenant donner la démonstration d'E. Noether, telle qu'elle est rapportée par H. Weyl ([12], chap. VIII, § 15). On suppose donné un groupe de substitutions linéaires :

$$(\star)\qquad \mathrm{A}^{(k)} :\ x^{(k)}=\mathrm{A}^{(k)}x, \qquad x_i^{(k)}=\sum_j a_{ij}^{(k)}x_j \qquad (i, j=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, m)$$

Si $\mathrm{J}(x)$ est invariant, on a

$$\mathrm{J}(x)=(1/m)\sum_k \mathrm{J}(x^{(k)}).$$

Le second membre, considéré comme une fonction symétrique de mn variables indépendantes $x_i^{(k)}$ est une fonction symétrique des n vecteurs :

$$\begin{array}{c} y_1=(x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}) \\ \hdashline y_n=(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(m)}) \end{array}$$

(c'est-à-dire est invariante par Σ_m opérant dans $\mathbb{R}^{mn}$ au moyen de ρ_n). Elle s'exprime donc au moyen des fonctions symétriques élémentaires polarisées, qu'on peut définir comme les coefficients $G_{r_1, \ldots, r_n}$ dans le produit

$$\prod_k (u+u_1 x_1^{(k)}+\ldots+u_n x_n^{(k)})=u^r u_1^{r_1}\ldots u_n^{r_n} G_{r_1\ldots r_n}(x_i^{(k)}) \qquad (r+r_1+\ldots r_n)=m,$$

qui contient, en plus des $x_i^{(k)}$, les indéterminées $u, u_1, \ldots, u_n$. Les fonctions qu'on obtient à partir des $G_{r_1,\ldots,r_n}(x_i^{(k)})$ par la substitution($\star$) forment une base d'intégrité finie pour le groupe donné. Elles sont toutes de degré $\leqq m$ et leur nombre est $(m+1)\ldots(m+n)/(n!)$. Enfin, Weyl termine par le commentaire suivant : On ne peut demander plus explicite.

2.5. On va maintenant présenter les choses d'une manière plus précise. Soient V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K de caractéristique zéro, et G un sous-groupe fini d'ordre m de GL(V). Le groupe Σ de toutes les permutations de (l'ensemble sous-jacent à) G opère linéairement dans divers K-espaces vectoriels de fonctions définies dans G : si σ est dans Σ, si f est une fonction définie dans G, $\sigma.f$ est la fonction

$$(\sigma.f)(x)=f(\sigma^{-1}.x).$$

Par exemple, Σ opère dans l'espace K^G des fonctions définies dans G et à valeurs dans K, et lorsque $K=\mathbb{R}$ (au moins) la représentation obtenue n'est autre que la représentation standard ρ de Σ_m dans $\mathbb{R}^m$ (une fois les identifications nécessaires effectuées). De même, le groupe Σ opère dans l'espace vectoriel E des fonctions définies dans G et à valeurs dans V. Appelons π la représentation linéaire ainsi obtenue. Comme $E=K^G\otimes V$, on voit que π est un multiple de la représentation standard, précisément : $\pi=n\rho=\rho_n$.

2.6. Soit $L: V\to E$ l'application de V dans E qui à chaque v dans V associe l'application (orbitale de v)

$$L(v):\quad x\to x.v$$

(où $x.v$ désigne l'action de l'élément x de G sur le vecteur v de V). Il est clair que L est linéaire injective. On a, pour tous x et y dans G

$$L(y.v)(x)=L(v)(xy).$$

Cette formule peut être interprétée de la manière suivante : soit $\rho: G\to\Sigma$ l'homomorphisme de G dans Σ tel que $\rho(y)(x)=xy^{-1}$ pour tous x et y dans G. La formule devient, pour v dans V et y dans G

$$L(y.v)=\pi(\rho(y)).L(v).$$

Considérons l'application

$$L^*:\quad F(E, K)\to F(V, K),$$

telle que $L^*(f)=f\circ L$ pour tout f dans F(E, K) [d'une façon générale, on entend par F(X, Y) l'ensemble des fonctions définies dans X et à valeurs dans Y]. C'est une application linéaire, et si f est Σ-invariante, alors $L^*(f)$ est G-invariante. On a donc une application linéaire encore notée L^* qui est définie dans l'espace $F(E, K)_\Sigma$ des invariants de Σ et à valeurs dans l'espace $F(V, K)_G$ des invariants de G :

$$L^* : \quad F(E, K)_\Sigma \to F(V, K)_G.$$

On va voir qu'en fait, L^* est *surjective*.

2.7. Soit $J : F(V, K) \to F(E, K)$ telle que

$$J f(g) = (1/m) \sum_{x \in G} f(g(x)),$$

pour tous $f : V \to K$ et $g : G \to V$. Il est clair que J est linéaire, et envoie $F(V, K)$ dans l'espace $F(E, K)_\Sigma$ des fonctions Σ-invariantes. Il est immédiat par ailleurs que

$$(L^* J f)(v) = (1/m) \sum_{x \in G} f(x.v),$$

de sorte que $L^* \circ J f = f$ si et seulement si f est G-invariante. Ainsi, si J_0 est la restriction de J à $F(V, K)_G$, on a

$$L^* \circ J_0 = \mathrm{id},$$

ce qui signifie que $L^* : F(E, K)_\Sigma \to F(V, K)_G$ est surjective et que J_0 en est une *section*.

2.8. Il reste à faire une remarque : pour chaque x dans G, désignons par $e_x : E \to V$ l'application linéaire évaluation au point x, de sorte que $e_x(g) = g(x)$ pour tout g dans E. On voit alors que

$$J f = (1/m) \sum_{x \in G} f \circ e_x = (1/m) \sum_{x} e_x^*(f).$$

Il en résulte que J transforme les fonctions *polynômiales* sur V en fonctions *polynômiales* sur E. Par ailleurs, il est utile de remarquer que L^* est un *homomorphisme de* K-*algèbres* (tandis que J est seulement K-linéaire !). La démonstration d'E. Noether devient tout à fait claire : l'algèbre $S(V^*)_G$ des invariants de G étant un quotient de celle $S(E^*)_\Sigma$ des invariants de Σ, la première sera de type fini dès que la seconde le sera, et tout système de générateurs de la deuxième donne par passage au quotient un système de générateurs de la première.

2.9. *Remarque.* — Puisque L est injective, on peut identifier V à $L(V)$, sous-espace de E. L'application L^* devient alors l'application restriction à V des fonctions définies dans E. Ce qui précède montre en particulier que toute orbite de G dans V est l'intersection avec V d'une unique orbite de Σ dans E.

3. Le théorème de Hilbert différentiable

3.1. Supposons dorénavant $K = \mathbb{R}$. Il est maintenant clair que les applications L^* et J transforment les fonctions C^∞ (resp. de classe C^p, analytiques, ...) en fonctions de même nature, et que lorsqu'on munit ces espaces de fonctions de leurs topologies naturelles, L^* et J opèrent continûment. On a par exemple

$$C^\infty(E)_\Sigma \overset{L^*}{\to} C^\infty(V)_G \to 0$$

et $J_0 : C^\infty(V)_G \to C^\infty(E)_\Sigma$ est une section *linéaire continue* de l'épimorphisme précédent. Montrons maintenant comment le théorème de Hilbert différentiable pour G se déduit immédiatement du théorème correspondant pour Σ. Soit $(p_1, \ldots, p_s)$ un système de générateurs de l'algèbre $S(E^*)_\Sigma$ et soit f une fonction G-invariante de classe C^∞ sur V. Si le théorème de Hilbert différentiable est établi pour Σ, il existe une fonction g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^s$ telle que

$$J f(h) = g(p_1(h), \ldots, p_s(h)),$$

pour tout h dans E. Mais alors :

$$f(v) = J f(L(v)) = g(q_1(v), \ldots, q_s(v)),$$

pour tout v dans V, avec $q_i = L^* p_i$ $(i=1, \ldots, s)$. D'où le résultat.

Tout revient donc à démontrer le théorème de Newton *généralisé* (nous disons généralisé car il s'agit bien du groupe symétrique Σ_m, mais non pas seulement des fonctions symétriques envisagées par Glaeser, puisque Σ_m opère dans $\mathbb{R}^{mn}$ au moyen de ρ_n). Mais comme on va le voir (ce qui a déjà été remarqué dans [9]), ceci se ramène au théorème de Glaeser, de façon assez élémentaire.

3.2. Soit W (W comme Weyl) un sous-groupe fini de GL(V), qui soit *engendré par des réflexions*, et soit H (H comme harmonique) un sous-espace vectoriel gradué de $S = S(V^*)$, qui soit W-invariant et supplémentaire (dans S) de l'idéal de S engendré par les polynômes W-invariants de degré strictement positif. La représentation de W dans H est équivalente à la représentation régulière de W et l'application bilinéaire $(h, f) \to hf$ induit un isomorphisme de W-modules de $H \otimes S_W$ sur S ([4], chap. 5, n° 5.2, th. 2). Ainsi S est un S_W-module libre (de rang égal à *l'ordre* de W). Il a été annoncé dans [9] que ce résultat s'étendait aux fonctions C^∞. Nous en donnons ici la démonstration (non publiée jusqu'ici) parce qu'elle sert de modèle dans les considérations en classe C^p qui sont présentées plus loin.

3.3. PROPOSITION. — *Soit* $(h_1, \ldots, h_m)$ *une base de* H, *constituée d'éléments homogènes. Alors c'est une base de* $C^\infty(V)$ *considéré comme* $C^\infty(V)_W$*-module.*

Démonstration. — Écrivons les éléments de W sous la forme $w_1, \ldots, w_m$, avec $w_1 = \mathrm{id}_V$. Comme $S = HS_W$, il est clair que pour tout v dans V, le nombre d'éléments de l'orbite $W.v$ de v est le rang de la matrice : $(h_j(w_i . v))_{i,j}$. Comme il existe des points v dont l'orbite a m éléments, on voit que la fonction polynôme D définie sur V par

$$D(v) = \text{dét.}(h_j(w_i . y)),$$

est non nulle. Ceci étant, soit f une fonction C^∞ sur V. Elle est limite dans $C^\infty(V)$ d'une suite (P_k) de fonctions polynômes. Comme $(h_1, \ldots, h_m)$ est une base de S sur S_W, il existe des polynômes invariants $P_{k,j}$ tels que

$$P_k = \sum_j h_j P_{k,j},$$

pour tout k. On en déduit pour chaque v, un système de m équations

$$P(w_i . v) = \sum_j h_j(w_i . v) P_{k,j}(v) \qquad (i=1, \ldots, m).$$

D'après les formules de Cramer, on a

$$D(v) P_{k,j}(v) = \sum_i D_{ij}(v) P_k(w_i . v) \qquad (j=1, \ldots, m),$$

où les D_{ij} sont les cofacteurs du déterminant D (ce sont donc des fonctions polynômes sur V). Lorsque $k \to \infty$, le second membre de chacune des égalités précédentes, considéré comme fonction de v, converge dans $C^\infty(V)$ vers la fonction

$$v \to \sum_i D_{ij}(v) f(w_i . v).$$

Ainsi, la suite $(DP_{k,j})_k$ converge dans $C^\infty(V)$. Du théorème de Fréchet, et du fait que l'idéal engendré par D dans l'algèbre $C^\infty(V)$ est fermé (*voir* [6] et aussi le corollaire 1.6, chap. VI de (11 *bis*) qui est une généralisation), il résulte que la suite $(P_{k,j})_k$ converge elle-même dans $C^\infty(V)_W$ vers une fonction f_j, et on a (pour tous v et j)

$$D(v) f_j(v) = \sum_i D_{ij}(v) f(w_i . v).$$

On a donc

$$f(v) = \sum_j h_j(v) f_j(v),$$

dans l'ouvert (dense dans V) où D ne s'annule pas, donc partout dans V. L'unicité des f_j étant évidente, on a bien démontré que $(h_1, \ldots, h_m)$ est une base de $C^\infty(V)$ sur $C^\infty(V)_W$.

3.4. Soient maintenant G un sous-groupe de W et $(h_1, \ldots, h_r)$ une base du sous-espace H_G de H constitué par les éléments G-invariants de H. Ce qui précède montre que $(h_1, \ldots, h_r)$ est une base de $C^\infty(V)_G$ sur $C^\infty(V)_W$ (r est l'indice de G dans W, ([9], 2.8)). Le théorème de Hilbert différentiable pour G résulte donc du théorème correspondant pour W, lequel est contenu dans le théorème de Glaeser. Compte tenu de la remarque faite en 2.2, on a en particulier prouvé le théorème de Newton généralisé.

3.5. La même méthode de démonstration que celle de la proposition 3.3 permet d'obtenir des énoncés analogues pour d'autres espaces que l'espace $C^\infty(V)$ ([9], 2.5).

4. Un théorème de Hilbert en classe C^p (*première méthode*)

Dans ce qui suit, on se propose d'établir un théorème de Hilbert en classe C^p (avec $p < \infty$) pour les groupes linéaires finis, en précisant la perte de dérivabilité, et ceci par deux méthodes différentes. On remarquera que l'une et l'autre font jouer un rôle crucial au problème analogue pour le groupe Σ_m et les multiples de sa représentation standard, conformément aux idées de Noether. On aura donc de toute façon à utiliser le théorème de Newton en classe C^p pour les représentations ρ^n, sous la forme suivante :

4.1. PROPOSITION. – *Soient* $V = \mathbb{R}^{mn}$ *et* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ *l'application de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *dont les composantes sont les fonctions symétriques élémentaires en m variables. Pour toute fonction f, définie et de classe* C^{mp} *dans* V, *invariante par le sous-groupe* $\rho^n(\Sigma_m)$ *de* GL(V), *il existe une fonction g définie et de classe* C^p *dans* $\mathbb{R}^{mn}$ *telle que pour tout* $(x^1, \ldots, x^n)$ *dans* $(\mathbb{R}^m)^n$, *on ait :*

$$f(x^1, \ldots, x^n) = g(\sigma(x^1), \ldots, \sigma(x^n)).$$

Démonstration. – Soit $\theta : \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{mn}$ l'application définie par :

$$\theta(x^1, \ldots, x^n) = (\sigma(x^1), \ldots, \sigma(x^n))$$

pour tous $x^1, \ldots, x^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Il est clair que la matrice Jacobienne de θ, au point $x = (x^1, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{R}^{mn}$, s'écrit sous forme quasi diagonale :

$$\begin{pmatrix} D\sigma(x^1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D\sigma(x^2) & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & & D\sigma(x^n) \end{pmatrix}.$$

où $D\sigma(x^i)$ est la matrice jacobienne de σ au point x^i de $\mathbb{R}^m$. Moyennant des constructions techniques, pour lesquelles nous renvoyons à [1], effectuées dans $\mathbb{R}^{mn}$ au lieu de $\mathbb{R}^m$, la proposition se ramène à vérifier que l'équation :

$$f'(x) = g'(\theta(x)) \circ \theta'(x),$$

se résoud (en g') dans la classe C^{pm-m}. Or cette équation équivaut au système :

$$f'_j(x) = D\sigma(x^j)\, g'_j(\theta(x)), \qquad 1 \leqq j \leqq n,$$

où f'_j et g'_j désignent les (vecteurs) dérivées partielles de f et g respectivement par rapport à x^j. La même démonstration que dans [1] montre alors que pour chacune des équations du système précédent, la résolution s'effectue dans la classe C^{pm-m}. Au total on est conduit à la même perte de dérivabilité que dans le théorème de Newton et la fonction g est de classe C^p.

4.2. La première façon d'aborder le problème, et qui a son intérêt propre, consiste à étudier la perte de dérivabilité dans la décomposition d'une fonction de classe C^p par rapport à la base $(h_1, \ldots, h_m)$ constituée par les polynômes harmoniques, dans le cas d'un groupe W engendré par des réflexions.

Pour cela, on est amené (*voir* 3.3) à résoudre des systèmes d'un type particulier, et on va commencer par quelques remarques de nature technique sur ces systèmes. Soient donc comme plus haut V un espace vectoriel réel de dimension finie et W un sous-groupe fini d'ordre m de GL(V), engendré par des réflexions. Notons R l'ensemble des réflexions de W, choisissons pour chaque telle réflexion τ, une forme linéaire λ_τ sur V dont le noyau soit l'hyperplan des points fixes de τ, et posons :

$$J=\prod_{\tau\in R}\lambda_\tau.$$

4.2. Lemme. — *Soient* $Q_1, \ldots, Q_m$ *des fonctions polynômes sur* V. *On écrit* $W=\{w_1, \ldots, w_m\}$ *en convenant que* $w_1=\mathrm{id}$ *et on pose*

$$B(v)=\text{dét}(Q_j(w_i.v)).$$

Pour chaque (i, j), *on désigne par* $B_{ij}(v)$ *le cofacteur de* $Q_j(w_i.v)$.

1° *Il existe une fonction polynôme* $\underline{B}$ *sur* V *telle que*

$$B=J^{m/2}\,\underline{B}.$$

2° *Pour chaque* (i, j), *il existe une fonction polynôme* $\underline{B}_{ij}$ *telle que*

$$B_{ij}=J^{(m/2)-1}\,\underline{B}_{ij}.$$

3° *Soit* P *un polynôme de la forme*

$$P=Q_1P_1+\ldots+Q_mP_m,$$

où $P_1, \ldots, P_m$ *sont* W-*invariantes. On a alors, pour tout* $j=1, \ldots, m$ *et pour tout* v *dans* V

$$\underline{B}(v)\,J(v)\,P_j(v)=\sum_i \underline{B}_{ij}(v)\,P(w_i.v).$$

Démonstration. — 1° Soient τ une réflexion de W et K_τ l'hyperplan des points fixes de τ. Si v est un point de K_τ, on a $w_k.v=w_l.v$ *dès que* w_k et w_l sont équivalents modulo le sous-groupe $\{1, \tau\}$ de W, qui est d'indice $(m/2)$ dans W. Il en résulte que les m lignes du déterminant B se répartissent en $(m/2)$ « paquets », chaque paquet étant constitué de deux lignes qui coïncident sur K_τ. Donc B est divisible par λ_τ. Mais il est clair qu'il en est de même de toute dérivée d'ordre inférieur à $m/2$ de la fonction B, car une telle dérivée est une somme de déterminants où subsiste au moins un paquet de deux lignes coïncidant sur K_τ. Donc B est en fait divisible par $(\lambda_\tau)^{m/2}$. Comme les λ_τ sont premiers entre eux, B est divisible par $J^{m/2}$.

2° le même raisonnement montre que chaque B_{ij} est divisible par $J^{(m/2)-1}$, la seule différence étant qu'on ne dispose plus que de $((m/2)-1)$ paquets.

3° Soit $P=Q_1P_1+\ldots+Q_mP_m$, où $P_1, \ldots, P_m$ sont W-invariants. On a alors, pour tous w_i dans W et v dans V :

$$P(w_i.v)=\sum_{1\leq j\leq m} Q_j(w_i.v)\,P_j(v),$$

de sorte que les formules de Cramer s'écrivent

$$\mathrm{B}(v)\,\mathrm{P}_j(v)=\sum_i \mathrm{B}_{ij}(v)\,\mathrm{P}(w_i.v).$$

En remplaçant B par $\underline{\mathrm{B}}\,\mathrm{J}^{m/2}$ et chaque B_{ij} par $\underline{\mathrm{B}}_{ij}\,\mathrm{J}^{(m/2)-1}$, on trouve la formule annoncée.

4.3. Théorème. — *Soient* W *et* V *comme ci-dessus et* $(h_1, \ldots, h_m)$ *une base de l'espace* H *comme dans la proposition* 3.3. *Pour toute fonction* f *de classe* C^{p+r} *sur* V (*où* r *est le cardinal de* R), *il existe des fonctions* $f_1, \ldots, f_m$ *de classe* C^p *sur* V, *déterminées de manière unique et* W-*invariantes telles que*

$$f=h_1 f_1+\ldots+h_m f_m,$$

Démonstration. — On reprend la méthode et les notations de 3.3. Désignons par Ω l'ouvert complémentaire dans V de l'ensemble des zéros de D. Pour toute fonction $f:\mathrm{V}\to\mathbb{R}$, il existe des fonctions $f_i (1\leqq i\leqq m)$ définies de manière unique dans Ω par les formules

$$\mathrm{D}(v)\,f_j(v)=\sum_i \mathrm{D}_{ij}(v)\,f(w_i.v) \qquad (1\leqq j\leqq m)$$

et telles que pour tout v dans Ω, on ait

$$f(v)=\sum_j h_j(v)\,f_j(v).$$

Tout revient à démontrer que si f est de classe C^{p+r}, alors les fonctions f_j, *a priori* définies et de classe C^{p+r} dans Q, se laissent prolonger à V par des fonctions de classe C^p. Or il résulte du point 1 du lemme 4.2 que D est divisible par $\mathrm{J}^{m/2}$. Mais alors, des considérations de degré (*voir* appendice) montrent que

$$\mathrm{D}=c\,\mathrm{J}^{m/2},$$

avec c réel non nul. Le point 2 du même lemme montre que les D_{ij} sont de la forme $\mathrm{J}^{(m/2)-1}\,\underline{\mathrm{D}}_{ij}$, et en définitive les formules définissant les f_j dans Ω s'écrivent

$$c\,\mathrm{J} f_j(v)=\sum_i \underline{\mathrm{D}}_{ij}(v)\,f(w_i.v) \qquad (1\leqq j\leqq m).$$

Soit maintenant $(\mathrm{P}_k)_k$ une suite de fonctions polynômes sur V qui converge vers f dans $\mathrm{C}^{p+r}(\mathrm{V})$. Posons

$$g_j(v)=\sum_i \underline{\mathrm{D}}_{ij}(v)\,f(w_i.v),$$

$$g_{k,\,j}(v)=\sum_i \underline{\mathrm{D}}_{ij}(v)\,\mathrm{P}_k(w_i.v),$$

pour tous k, $1 \leqq j \leqq m$ et v dans V, de sorte que chaque g_j est la limite (pour $k \to \infty$) dans $C^{p+r}(V)$ de la suite $(g_{k,j})_k$. Mais il existe des fonctions polynômes $P_{k,j}$ telles que

$$P_k = \sum_j h_j P_{k,j}$$

et on a en fait

$$g_{k,j} = c\, J P_{k,j}.$$

Par passage à la limite (pour $k \to \infty$), on voit que g_j appartient à l'adhérence de l'idéal engendré par $J = c \prod_\tau \lambda_\tau$ dans $C^{p+r}(V)$. La formule de Taylor suffit maintenant pour diviser successivement par chaque λ_τ. Ainsi chaque g_j est divisible par J dans la classe C^p, ce qui revient à dire que chaque f_j se prolonge à V en fonction de classe C^p.

4.4. *Exemples.* — 1° Si $V = \mathbb{R}$ et $W = \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$, la perte de dérivabilité est 1. Ceci correspond au fait bien connu qu'une fonction impaire de classe C^{p+1} est divisible par x dans la classe C^p.

2° On peut prendre la base $(h_1, \ldots, h_m)$ de telle sorte que $h_m = J$. Avec ce choix, si f est anti-invariante, on a $f_1 = \ldots = f_{m-1} = 0$ et $f = J f_m$, de sorte que si f est de classe C^{p+r}, en général f_m sera de classe C^p, mais non de classe C^{p+1}. C'est ce qui se produit dans l'exemple suivant : $V = \mathbb{R}^2$, W est le sous-groupe de GL(V) engendré par les deux réflexions $(x, y) \to (-x, y)$ et $(x, y) \to (x, -y)$, et f est une fonction anti-invariante, de classe C^∞ en dehors de zéro, et telle que :

$$f(x, y) = x^3 y^3 (-\mathrm{Log}(x^2+y^2))^\alpha \qquad (\text{pour } 0 < x^2+y^2 \leqq (1/2))$$

$$f(0, 0) = 0$$

(avec $0 < \alpha < 1$). Une telle fonction est globalement de classe C^5, et au voisinage de l'origine, son quotient f_2 par $J = xy$ est donné par

$$f_2(x, y) = x^2 y^2 (-\mathrm{Log}(x^2+y^2))^\alpha$$

qui est globalement de classe C^3 mais n'est pas de classe C^4.

3° On peut prendre la base $(h_1, \ldots, h_m)$ de telle sorte que $h_1 = 1$. Avec ce choix, si f est invariante, on a $f_2 = \ldots = f_m = 0$ et $f_1 = f$ est de classe C^{p+r} comme f. Ainsi la perte de dérivabilité est *nulle* pour les fonctions W-invariantes. Cet exemple et le précédent semblent indiquer que si W_0 est un sous-groupe de W, la perte de dérivabilité pour les coefficients f_j des fonctions f qui sont W_0-invariantes, telle qu'elle est estimée dans le théorème 4.3, est en fait trop *sévère*. Dans les deux exemples extrêmes examinés, cette perte de dérivabilité n'est pas r mais plutôt $r - r_0$, où r_0 est le nombre de réflexions contenues dans W_0. Dans les paragraphes qui suivent, nous nous contenterons de démontrer un tel résultat uniquement lorsque W est un $\rho^n(\Sigma_m)$ et $W_0 = \rho^n(\Sigma_{m-1})$, le groupe Σ_{m-1} étant identifié au sous-groupe de Σ_m qui stabilise un élément de $\{1, \ldots, m\}$.

4.5. Soient $M(x)$ le déterminant (de Van der Monde) de la matrice (x_i^k) $(0 \leqq k \leqq m-1,\ 1 \leqq i \leqq m)$ et pour chaque (i, k), $M_{ik}(x)$ le cofacteur de x_i^k. On a évidemment

$$M(x) = \prod_{1 \leqq p < q \leqq m} (x_p - x_q),$$

$$M_{ik}(x) = N_{ik}(x) \prod_{\substack{1 \leqq p < q \leqq m \\ p \neq i,\ q \neq i}} (x_p - x_q),$$

où N_{ik} est une fonction polynôme indépendante de la variable x_i. Deux propriétés utiles des cofacteurs M_{ik} sont données dans les lemmes suivants (la démonstration du premier est indiquée dans [1], p. 448).

4.6. LEMME. — *Pour chaque* (k, j) *avec* $0 \leqq k \leqq m-1$ *et* $0 < j \leqq m-1$, *la fonction polynôme* $B_{k,j}$

$$B_{k,j}(x) = \sum_{i=1}^{m-j} M_{ik}(x)(x_i - x_m) \ldots (x_i - x_{m-j+1}),$$

est divisible par M.

4.7. LEMME. — *Soient* (j, r) *tels que* $0 < j \leqq m-1$, $0 < r < m-j$ *et* g_i $(1 \leqq i \leqq m-j)$ *des fonctions définies et de classe* C^q *dans* $V = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$. *On suppose que la fonction* $A_{k,j}$

$$A_{k,j}(x, y) = \sum_{i=1}^{m-j} M_{ik}(x)(x_i - x_m) \ldots (x_i - x_{m-j+1}) g_i(x, y),$$

s'annule sur (l'hyperplan de V *d'équation)* $x_r = x_{m-j}$. *Alors la fonction* $g_r - g_{m-j}$ *s'annule aussi sur cet hyperplan et on a*

$$g_r - g_{m-j} = (x_r - x_{m-j}) g_{m-j,r},$$

avec $g_{m-j,r}$ *de classe* C^{q-1} *dans* V.

Démonstration. — D'après l'hypothèse et le lemme 4.6, la fonction

$$A_{k,j}(x, y) - B_{k,j}(x, y) g_{m-j}(x, y) = \sum_{i < m-j} M_{ik}(x)(x_i - x_m) \ldots (x_i - x_{m-j+1})(g_i - g_{m-j})(x, y),$$

s'annule sur l'hyperplan $x_r = x_{m-j}$, ainsi que chacun des termes du deuxième membre, sauf peut-être celui de rang r, puisque pour $i \neq r$, M_{ik} contient le facteur $(x_r - x_{m-j})$. Il en résulte que le terme de rang r, à savoir $M_{rk}(x) \ldots (g_r - g_{m-j})(x, y)$ s'annule aussi sur cet hyperplan, ce qui ne peut provenir que de l'annulation de $g_r - g_{m-j}$. La classe de dérivabilité de $g_{m-j,r}$ s'obtient simplement par la formule de Taylor.

4.8. Soient $V = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$, W le sous-groupe de GL(V) engendré par les $\rho(\sigma) \times \mathrm{id}(\mathbb{R}^s)$, σ décrivant Σ_m, et W_0 le sous-groupe de W qui laisse invariante la fonction (première coordonnée) $(x, y) \to x_1$. L'*algèbre* des fonctions polynômes W_0-invariantes sur V est engendrée par x_1, les fonctions symétriques élémentaires en les $(m-1)$ variables $x_2, \ldots, x_m$, et par les fonctions coordonnées $y_1, \ldots, y_s$. Considérée comme *module* sur l'algèbre $S(V^*)_W$ des invariants polynômiaux de W, c'est un module *libre*, et les m fonctions $1, x_1, \ldots, x_1^{m-1}$ en forment une base. La méthode du paragraphe 4.3 montre que toute fonction W_0-invariante f, définie et de classe $C^{p+(m(m-1)/2)}$ dans V s'écrit de manière unique sous la forme

$$f(x, y)=f_0(x, y)+x_1 f_1(x, y)+\ldots+x_1^{m-1} f_{m-1}(x, y),$$

où les f_k sont W-invariantes et de classe C^p. Il suffit en effet d'utiliser aux lieu et place des w_i de 4.3, les m permutations circulaires

$$\gamma_i=\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots m \\ i & i+1\ldots i-1 \end{pmatrix}.$$

Les fonctions f_j sont définies de manière unique dans l'ouvert Λ constitué par les (x, y) tels que $M(x) \neq 0$, par les formules de Cramer

$$M(x) f_j(x, y)=\sum_i M_{ij}(x) f(\gamma_i . x, y) \qquad (0 \leqq j \leqq m-1)$$

et se prolongent à V en fonctions de classe C^p. On va voir qu'en réalité la perte de dérivabilité est moindre.

4.9. Proposition. — *On reprend les notations du paragraphe précédent. Toute fonction* W_0*-invariante* f*, définie et de classe* C^{p+m-1} *dans* V *s'écrit de manière unique*

$$f(x, y)=f_0(x, y)+x_1 f_1(x, y)+\ldots+x_1^{m-1} f_{m-1}(x, y),$$

avec des f_k W*-invariantes et de classe* C^p. *Si* $w \in GL(\mathbb{R}^s)$ *et si* f *est invariante par* $\mathrm{id} \times w$, *il en est de même de chaque* f_k.

Démonstration. — La fonction f étant donnée et k étant fixé, on pose

$$F_k(x, y)=\sum_{i=1}^{m} M_{ik}(x) f(\gamma_i . x, y).$$

Comme F_k est nulle dans le complémentaire de Λ, le lemme 4.7 assure qu'il existe des fonctions $g_{m, i} (1 \leqq i \leqq m-1)$ définies et de classe C^{p+m-2} dans V telles que

$$f(\gamma_i . x, y)-f(\gamma_m . x, y)=(x_i-x_m) g_{m, i}(x, y).$$

On écrit maintenant

$$F_k(x, y)=(\sum_i M_{ik}(x)) f(\gamma_i . x, y)+\sum_{i<m} M_{ik}(x)(f(\gamma_i . x, y)-f(\gamma_m . x, y))$$

$$=(\sum_i M_{ik}(x)) f(\gamma_m . x, y)+\sum_{i<m} M_{ik}(x)(x_i-x_m) g_{m, i}(x, y).$$

Comme le premier membre de ces égalités, aussi bien que le premier terme du dernier membre s'annule en dehors de Λ (lemme 4.6), il en est de même du dernier terme, à savoir

$$\sum_{i<m} \mathrm{M}_{ik}(x)(x_i - x_m) g_{m,\,i}(x, y).$$

A nouveau en vertu du lemme 4.7, on peut affirmer l'existence de fonctions $g_{m,\,m-1,\,i}(1 \leqq i \leqq m-2)$ définies et de classe C^{p+m-3} dans V telles que

$$(g_{m,\,i} - g_{m,\,m-1})(x, y) = (x_i - x_{m-1}) g_{m,\,m-1,\,i}(x, y).$$

On a donc à ce stade

$$\mathrm{F}_k(x, y) = (\sum_i \mathrm{M}_{ik}(x)) f(\gamma_m . x, y) + (\sum_{i \leqq m-1} \mathrm{M}_{ik}(x)(x_i - x_m)) g_{m,\,m-1}(x, y)$$
$$+ \sum_{i \leqq m-2} \mathrm{M}_{ik}(x)(x_i - x_m)(x_i - x_{m-1}) g_{m,\,m-1,\,i}(x, y).$$

Après itération de ce procédé, on obtient

$$\mathrm{F}(x, y) = (\sum_i \mathrm{M}_{ik}(x)) f(\gamma_m . x, y) + (\sum_{i \leqq m-1} \mathrm{M}_{ik}(x)(x_i - x_m)) g_{m,\,m-1}(x, y)$$
$$+ \ldots + \mathrm{M}_{1k}(x) \prod_{j>1} (x_1 - x_j) g_{m,\,m-1,\ldots,\,1}(x, y),$$

où *tous les termes* du second membre sont des produits de M par des fonctions de classe au moins C^p. Autrement dit, F_k est divisible par M dans la classe C^p, ce qui est exactement ce qu'on voulait démontrer. L'invariance des f_k par $\mathrm{id} \times w$ est évidente.

4.10. Corollaire. — *Identifions* Σ_{m-1} *au sous-groupe de* Σ_m *qui stabilise un éléemnt choisi de* $\{1, 2, \ldots, m\}$. *Soient* $\mathrm{V} = \mathbb{R}^{mn}$, $\mathrm{W} = \rho^n(\Sigma_m)$ *et* $\mathrm{W}_0 = \rho^n(\Sigma_{m-1})$. *Il existe des fonctions polynômes* $h_k (1 \leqq k \leqq \mathrm{N} = m^n)$, W_0*-invariantes sur* V *ayant la propriété suivante : toute fonction f de classe* $\mathrm{C}^{p+n(m-1)}$ *et* W_0 *invariante dans* V *s'écrit de manière unique*

$$f = \sum h_k f_k,$$

où les f_k *sont* W*-invariantes, définies et de classe* C^p *dans* V.

Démonstration. — C'est une application directe *n* fois de suite de la proposition précédente, qui permet même d'expliciter, si on le désire, les fonctions $h_1, \ldots, h_\mathrm{N}$. (Il est clair que dans la proposition précédente, le rôle joué par la variable x_1 peut être joué par n'importe quelle autre parmi $x_1, \ldots, x_m$).

4.11. On remarquera que dans les énoncés 4.9 et 4.10, on a utilisé, comme base sur $\mathrm{S(V^*)_W}$, une base constituée de polynômes qui n'appartiennent pas forcément à un espace H de polynômes W-harmoniques fixé d'avance. Il est facile toutefois de montrer que 4.9 et 4.10 peuvent effectivement être énoncés tels quels en termes de décomposition relative à une base constituée de polynômes harmoniques W_0-invariantes.

Quoiqu'il en soit, on peut maintenant donner la première démonstration du résultat principal de ce travail.

4.12. THÉORÈME. — *Soient* V *un espace vectoriel réel de dimension* n, G *un sous-groupe fini d'ordre* m *de* GL(V) *et* $(p_1, \ldots, p_s)$ *un système de générateurs de l'algèbre* S_G *des fonctions polynômes* G-*invariantes sur* V. *Pour toute fonction* G-*invariante* f, *définie et de classe* C^q *dans* V, *avec* $q = mp + n(m-1)$, *il existe une fonction* g, *définie et de classe* C^p *dans* R^s *telle que :*

$$f(v) = g(p_1(v), \ldots, p_s(v)),$$

pour tout v *dans* V.

Démonstration. — (*a*) On reprend les notations du numéro 2. On a déjà remarqué que l'espace vectoriel réel E de toutes les fonctions définies dans G et à valeurs dans V s'identifie à $\mathbb{R}^G \otimes V$. Choisissons maintenant une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V, de sorte que l'application $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \to \sum_i \varphi_i \otimes v_i$ établisse une bijection linéaire de $(\mathbb{R}^G)^n$ sur E, et désignons toujours par Σ le groupe des permutations de l'ensemble G. On peut alors définir une représentation linéaire γ de $(\Sigma)^n$ dans E de la manière suivante

$$\gamma(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\sigma_1 . \varphi_1, \ldots, \sigma_n . \varphi_n),$$

pour tous $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ dans Σ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans $\mathbb{R}^G$ [on rappelle que $\sigma . \varphi$ est la fonction (sur G) : $x \to \varphi(\sigma^{-1} . x)$]. La restriction de γ au sous-groupe diagonal de $(\Sigma)^n$ est la représentation π définie dans 2.5.

(*b*) Soit f une fonction de classe C^q sur V et

$$Jf = (1/m) \sum_x f \circ e_x,$$

de sorte que Jf est somme des m fonctions $f_x = f \circ e_x$ $(x \in G)$; définies et de classe C^q dans E. Par définition, on a

$$f \circ e_x(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = f(\varphi_1(x) v_1 + \ldots + \varphi_n(x) v_n),$$

pour tous $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ dans $\mathbb{R}^G$. Ceci montre immédiatement que la fonction $f \circ e_x$ est *invariante* par le sous-groupe $\gamma((\Sigma_x)^n)$, où Σ_x est le stabilisateur de x dans Σ.

(*c*) Si on écrit $G = \{x_1, \ldots, x_m\}$, on peut identifier de façon naturelle Σ à Σ_m d'une part et l'espace vectoriel E à $\mathbb{R}^{mn}$ d'autre part, de sorte que la représentation γ de $(\Sigma)^n$ est transportée en la représentation ρ^n de $(\Sigma_m)^n$ et la représentation π de Σ est transportée en la représentation ρ_n de Σ_m. On peut donc appliquer le corollaire 4.10 à chacune des fonctions $f \circ e_x$. Il existe donc des fonctions polynômes h_i (en nombre fini) sur E ayant la propriété suivante : pour toute fonction f de classe C^q [avec $q = mp + n(m-1)$], il existe des fonctions $\gamma(\Sigma^n)$-invariantes f_i, définies et de classe C^{mp} dans E telles que :

$$Jf = \sum h_i f_i.$$

Comme Jf est $\pi(\Sigma)$-invariante (2.7), on peut supposer (et on le fera dans la suite) que les fonctions h_i sont elles-mêmes $\pi(\Sigma)$-invariantes. De plus, d'après 4.1, chaque f_i s'exprime, par l'intermédiaire d'un système (fini) de générateurs de l'algèbre des fonctions polynômes $\gamma(\Sigma^n)$-invariantes sur E, comme une fonction de classe C^p.

(*d*) On applique maintenant les considérations précédentes aux fonctions f qui sont G-*invariantes*. On a alors (2.7)

$$f = L^* Jf = \sum_i L^* h_i \, L^* f_i.$$

Comme les $L^* h_i$ sont des polynômes G-invariants, on voit qu'on a démontré le résultat suivant : il existe un nombre fini $P_1, \ldots, P_r$ de fonctions polynômes G-invariantes sur V telles que toute fonction $f : V \to \mathbb{R}$, G-invariante et de classe C^q s'écrive :

$$f(v) = g(P_1(v), \ldots, P_r(v)) \qquad \text{(pour tout } v \text{ dans V)},$$

avec $g : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ de classe C^p. Le théorème en résulte immédiatement.

4.13. *Remarque*. — En utilisant le théorème 4.3 dans le cas où $V = \mathbb{R}^{mn}$, $W = \rho^n((\Sigma_m)^n)$, de sorte que le nombre r des réflexions de W est $nm(m-1)/2$, puis la proposition 4.1, on voit que toute fonction f, définie et de classe C^q, avec $q = mp + nm(m-1)/2$ sur $\mathbb{R}^{mn}$, invariante par le sous-groupe diagonal $\rho_n(\Sigma_m)$ de W, est une fonction de classe C^p des fonctions symétriques élémentaires polarisées. Ainsi, l'application de la méthode de Noether, selon le schéma de 3.4, montre que la formule :

$$q = mp + nm(m-1)/2,$$

gouverne la perte de dérivabilité dans le théorème de Hilbert pour tout groupe fini d'ordre m opérant linéairement dans un espace vectoriel réel de dimension n. Mais on remarquera que cette formule est *moins bonne* que celle

$$q = mp + n(m-1),$$

donnée par le théorème 4.12. C'est que pour obtenir ce théorème, il a fallu se livrer à un examen bien plus attentif de la méthode de Noether, en traitant séparément chaque fonction $f \circ e_x$, alors que la méthode de 3.4 traite globalement la fonction Jf.

5. Un théorème de Hilbert en classe C^p (*deuxième méthode*)

5.1. De la même manière que le théorème de division en classe C^p [1] apparaît comme un corollaire du théorème de Newton, la proposition 4.1 permet d'étudier la perte de dérivabilité dans la division simultanée par plusieurs polynômes génériques. Pour tout ceci, nous renvoyons à [2].

5.2. Proposition. — *Soient* $V = \mathbb{R}^n$, *dont les éléments sont de la forme* $v = (x_1, \ldots, x_n)$ *et pour chaque* $i = 1, \ldots, n$:

$$P_i(x_i; \sigma^i) = x_i^m - \sigma_1^i x_i^{m-1} + \ldots + (-1)^m \sigma_m^i,$$

le polynôme générique de degré m en x_i. *Si f est définie et de classe* C^q *dans* V, *avec* $q=mp+n(m-1)$, *il existe n fonctions* g_i *définies et de classe* $C^{q'}$ *dans* $V\times\mathbb{R}^{nm}$, *avec* $q'=p-[n/m]$ ($[n/m]$ *étant la partie entière de* n/m), *et des fonctions* h_α ($\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $0\leqq\alpha_i\leqq m-1$) *définies et de classe* C^p *dans* $\mathbb{R}^{nm}$, *telles que :*

$$f(v)=\sum_i P_i(x_i;\ \sigma^i)\,g_i(v,\ \sigma)+\sum_\alpha h_\alpha(\sigma)\,x^\alpha,$$

pour tout v dans V *et tout* $\sigma=(\sigma^1,\ldots,\sigma^n)$ *dans* $\mathbb{R}^{nm}$.

Démonstration. — On procède comme dans [1] (p. 454 et 455) successivement pour chaque $P_i (1\leqq i\leqq n)$, en interrompant chaque fois les opérations avant d'appliquer le théorème de Newton. On termine en appliquant d'un seul coup la proposition 4.1.

5.3. Soient encore une fois $V=\mathbb{R}^n$, G un sous-groupe d'ordre m de GL(V) et $(p_1,\ldots,p_s)$ un système de générateurs de l'algèbre S_G des fonctions polynômes G-invariantes sur V. On sait que l'algèbre S des fonctions polynômes sur V est un *module de type fini* sur S_G. Soit $(q_1,\ldots,q_t)$ un système de générateurs de ce module.

5.4. Théorème. — *On utilise les notations de* 5.3. *Pour toute fonction f, définie et de classe* C^q *dans* V, *avec* $q=mp+n(m-1)$, *il existe t fonctions* $r_1,\ldots,r_t$, *définies et de classe* C^p *dans* R^s, *telles que*

$$f(v)=\sum_i r_i(p_1(v),\ldots,p_s(v))\,q_i(v),$$

pour tout v dans V.

Démonstration. — On écrit $G=\{w_1,\ldots,w_m\}$ et on pose, comme dans 2.4

$$y_i=(x_i^{(1)},\ldots,x_i^{(m)})\qquad(1\leqq i\leqq n),$$

où $x_i^{(j)}$ est la i-ième coordonnée de $w_j.v$. Dans la proposition 5.2, on substitue aux σ^i les fonctions symétriques élémentaires

$$\sigma(y_i)=(\sigma_1(y_i),\ldots,\sigma_m(y_i)),$$

des $x_i^{(j)} (1\leqq i\leqq n)$. Alors :

$$P_i(x_i;\ \sigma(y_i))=0,$$

pour tout i et on obtient

$$f(v)=\sum_\alpha h_\alpha(\sigma(y_1),\ldots,\sigma(y_n))\,x^\alpha.$$

Il suffit maintenant de remarquer que les $\sigma_j(y_i)$, considérées comme fonctions de v, sont des fonctions polynômiales G-invariantes et d'exprimer les x^α comme combinaisons linéaires des q_i (à coefficients fonctions polynômes G-invariantes) pour obtenir le résultat sans nouvelle perte de dérivabilité.

5.5. Bien entendu, le théorème de Hilbert en classe C^p, tel qu'il est énoncé dans 4.12, résulte du précédent en prenant la moyenne sur G.

5.6. *Exemple.* — Si $V=\mathbb{R}^2$ et $G=\{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$, on peut prendre $s=3$, $p_1(x, y)=x^2$, $p_2(x, y)=y^2$ et $p_3(x, y)=xy$. La fonction f définie par

$$f(x, y)=xy^{2q+(1/3)},$$

est invariante et de classe C^{2q}. Par ailleurs

$$f=p_3 p_2^{q-(1/3)}$$

et la fonction $(x, y, z) \to zy^{q-(1/3)}$ n'est que de classe $q-1$, comme le prévoit le théorème démontré.

5.7. *Remarques.* — Il est banal de remarquer que si l'on s'intéresse à un groupe particulier, la perte de dérivabilité observée réellement pourra se révéler bien inférieure à celle annoncée. La proposition 4.1 décrit une telle situation. Une autre est celle du groupe $\rho_n(\Sigma_m)$ pour laquelle le théorème 4.12 dit que la perte de dérivabilité est gouvernée par la formule

$$q=(m!)p+mn((m!)-1),$$

alors que déjà dans 4.13, nous avions signalé qu'on pouvait utiliser la formule

$$q=mp+nm(m-1)/2.$$

APPENDICE

La somme des degrés des polynômes harmoniques

Soient V un espace vectoriel réel de dimension n, W un sous-groupe d'ordre m de GL(V), engendré par des réflexions. On sait que l'algèbre S_W des fonctions polynômes W-invariantes sur V est engendrée par n polynômes homogènes algébriquement indépendants et que si on note $d_1,\ldots, d_n$ les degrés respectifs de ces polynômes, on a

$$d_1 d_2 \ldots d_n=m$$

$$\sum_k (d_k-1)=r,$$

où r est le nombre de réflexions de W (pour tout ceci, on peut consulter [4]). Soit maintenant H un espace de fonctions polynômes W-harmoniques, de sorte que H est un sous-espace vectoriel gradué de S et $H\otimes S_W$ est isomorphe à S. La série de Poincaré de S (resp. S_W) est $1/(1-T)^n$ (resp. $\prod_k 1/(1-T^{d_k})$). Celle de H est un polynôme et s'écrit donc $\sum a_k T^k$ où a_k est la dimension de l'espace des polynômes harmoniques homogènes de degré k. On a donc

$$\sum a_k T^k=\prod_k (1-T^{d_k})/(1-T)=\prod_k (1+T+\ldots+T^{-1+d_k}).$$

D'où par dérivation :

$$\sum k a_k \mathrm{T}^{k-1} = \sum_j (1+2\mathrm{T}+\ldots+(d_j-1)\mathrm{T}^{-2+d_j}) \prod_{k\neq j} (1+\mathrm{T}+\ldots+\mathrm{T}^{-1+d_k})$$

et par suite :

$$\sum k a_k = \sum_j (d_j(d_j-1)/2)(d_1\ldots d_n/d_j) = ((d_1\ldots d_n)/2) \sum_k (d_k-1) = mr/2.$$

Ainsi, si $h_1,\ldots,h_m$ est une base de H constituée de polynômes homogènes, la somme des degrés des h_i est $mr/2$, et la formule donnant le polynôme D dans 4.3 en résulte. Signalons que cette formule peut être aussi démontrée en utilisant [4] (chap. 5, § 5, prop. 6) et (par exemple) le théorème 30 et le lemme 2 du paragraphe 11, chapitre 5 dans « Commutative Algebra » (O. Zariski et P. Samuel).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. BARBANÇON, *Théorème de Newton pour les fonctions de classe* C^r, (*Annal. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4^e^ série, t. 5, 1972, p. 435-458).

[2] G. BARBANÇON, *Pertes de dérivabilité* (*Thèse Sciences*, Université de Strasbourg, 1975).

[3] E. BIERSTONE, *Local Properties of Smooth Maps Equivariant with Respect to Finite Group Actions* (*J. Diff. Geometry*, Vol. 10, n° 4, 1975, p. 523-540).

[4] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[5] G. GLAESER, *Fonctions composées différentiables* (*Annals of Math.*, vol. 77, 1963, p. 193-209).

[6] L. HÖRMANDER, *On the division of distributions by Polynomials* (*Ark. Mat.*, vol. 3, 1958, p. 555-568).

[7] D. LUNA, *Fonctions différentiables invariantes sous l'action d'un groupe réductif* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 26, n° 1, 1976, p. 33-49).

[8] B. MALGRANGE, *Ideals of Differential Functions* (*Tata Inst. of Fund.* Research, 1966).

[9] M. RAIS, *Action de certains groupes dans les espaces de fonctions* C^∞ [*Non Commutative Harmonic Analysis* (*Lect. Notes in Math.*, n° 466, Springer 1974)].

[10] G. SCHWARZ, *Smooth Functions Invariant Under the Action of a Compact Lie Group* (Topology, vol. 14, 1975, p. 63-68).

[11] J. C. TOUGERON, *Fonctions composées différentiables : cas algébrique* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, vol. 30, n° 4, 1980, p. 51-74).

[11 *bis*] J. C. TOUGERON, *Idéaux de Fonctions différentiables* (*Erg. Der Math*, n° 71, Springer-Verlag, 1972).

[12] H. WEYL, *The Classical Groups*, Princeton University Press, 1946.

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1981,
révisé le 10 février 1983.)

G. BARBANÇON
U.L.P., Département de Mathématiques,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.

M. RAÏS
Université de Poitiers,
Département de Mathématiques,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.