ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-MARC FONTAINE
GUY LAFFAILLE

Construction de représentations p-adiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 4 (1982), p. 547-608
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_4_547_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 15, 1982, p. 547 à 608.

CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES

PAR JEAN-MARC FONTAINE ET GUY LAFFAILLE

RÉSUMÉ. — Soit G le groupe de Galois de la clôture algébrique d'un corps local de car. 0 et car. résiduelle $p \neq 0$. Le but de cet article est la construction « explicite » de représentations p-adiques de G, i. e. de représentations linéaires continues de G à valeurs dans des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie ou des $\mathbf{Z}_p$-modules de type fini. Ces représentations sont associées, de manière naturelle, à différents types de « modules de Dieudonné filtrés ». Les modules de Dieudonné des groupes p-divisibles, ou des schémas en groupes finis et plats sur les vecteurs de Witt, munis de leur filtration à un cran, la cohomologie de de Rham de certains schémas propres et lisses sur les vecteurs de Witt, munie de la filtration de Hodge et du « relèvement canonique de Frobenius », certains des « modules filtrés faiblement admissibles » introduits par l'un d'entre nous [F1] fournissent des exemples de tels modules.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 547
1. Modules filtrés 554
2. L'anneau S 559
3. Modules filtrés et modules galoisiens 561
4. Les objets simples de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$ 565
5. Inertie modérée : le calcul des $\mathrm{Ext}^i_{\widetilde{\mathcal{N}}\mathcal{F}}(\mathrm{M}, \widetilde{\mathrm{S}})$, pour $i=0, 1$ 570
6. Propriétés de pleine fidélité 581
7. Représentations à valeurs dans une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ 590
8. Application aux modules admissibles 595
9. Application aux schémas en groupes finis et plats 600
Liste des principales notations 606
Bibliographie 608

Introduction

0.1. Dans tout cet article, K est un corps local (i. e. un corps complet pour une valuation discrète) de caractéristique 0, à corps résiduel parfait k de caractéristique $p \neq 0$, $\overline{\mathrm{K}}$ est une clôture algébrique de K et $\mathrm{G} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{K}}/\mathrm{K})$.

On note K_0 le corps des fractions de l'anneau $\mathrm{W}(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k et $e = [\mathrm{K} : \mathrm{K}_0]$ l'indice de ramification absolu de K. Enfin σ désigne le Frobenius absolu opérant sur k, $\mathrm{W}(k)$ et K_0.

© Gauthier-Villars

Appelons :

(*a*) *représentation p-adique* la donnée d'un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action linéaire et continue de G;

(*b*) *module de Dieudonné filtré* la donnée d'un K_0-espace vectoriel de dimension finie D muni :

(i) d'une application bijective $F : D \to D$, additive et σ-semi-linéaire;

(ii) d'une filtration $(D_K^i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous-K-espaces vectoriels, décroissante ($D_K^{i+1} \subset D_K^i$), exhaustive ($\bigcup D_K^i = D_K$) et séparée ($\cap D_K^i = 0$).

Les représentations p-adiques (resp. les modules de Dieudonné filtrés) forment, de manière évidente, une catégorie abélienne $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (resp. additive $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\varphi}$, φ pour dimension finie). L'un de nous a défini ([F1], [F2]) la sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(G)$ des représentations cristallines de G et construit un foncteur $\underline{D}_B$ induisant une équivalence entre cette catégorie et une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{\varphi}$, la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$ des modules de Dieudonné filtrés admissibles, ainsi qu'un quasi-inverse $\underline{V}_B$ du foncteur $\underline{D}_B$.

L'un des problèmes de cette théorie est que l'on ne connaît pas de description « explicite » de $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$. On peut toutefois définir, de façon très « terre à terre », la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$ des modules de Dieudonné filtrés faiblement admissibles; on peut montrer que tout module admissible est faiblement admissible et l'on conjecture que la réciproque est vraie. Le résultat, sans doute le plus important, de cet article est une démonstration d'une partie de cette conjecture (th. 8.4) :

THÉORÈME. — *Supposons* $e=1$ (i.e. $K=K_0$). *Si* D *est un module de Dieudonné filtré faiblement admissible, dont la longueur de la filtration est* $<p$ (i.e. *tel qu'il existe un entier* j *vérifiant* $D_K^j = D_K$ *et* $D_K^{j+p} = 0$), *alors* D *est admissible.*

0.2. Avant de détailler le contenu du présent article, nous allons donner deux conséquences du théorème précédent qui nous paraissent intéressantes (on suppose toujours $e=1$) :

(*a*) Disons qu'une représentation p-adique V est *potentiellement associée à un groupe p-divisible* s'il existe un sous-groupe ouvert G′ de G et un groupe p-divisible (ou de Barsotti-Tate) Γ défini sur l'anneau des entiers de $\overline{K}^{G'}$ tels que V soit isomorphe, comme G′-module, à $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T_p(\Gamma)$ (où $T_p(\Gamma)$ est le module de Tate de Γ). Le théorème précédent nous donne, du moins si $p \neq 2$, des exemples de représentations p-adiques cristallines (B-admissibles dans la terminologie de [F1]), donc de Hodge-Tate (*cf.* [F1], p. 23, 24) qui ne sont pas dans la $\otimes$-catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{p\text{-}pd}(G)$ engendrée par les représentations potentiellement associées à des groupes p-divisibles.

En particulier, si l'on note H_V la clôture zariskienne de l'image de G dans la représentation p-adique V, on peut fabriquer des exemples de représentations cristallines V où $H_V = SL_2$ (du moins si $p \neq 2$; lorsque V est dans $\underline{\mathrm{Rep}}_{p\text{-}pd}(G)$, H_V ne peut pas être simplement connexe, *cf.* [Sel], prop. 6, p. 180) et (lettre de J.-P. Serre à l'un de nous) où $H_V = G_2$ (si $p \neq 2$) ou E_8 (si $p \neq 2, 3$) [lorsque V est dans $\underline{\mathrm{Rep}}_{p\text{-}pd}(G)$, H_V ne peut pas être un groupe exceptionnel, *cf.* [Sel], cor. 1, p. 182].

(b) Soit X un schéma propre et lisse sur $W(k)$, anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k. On conjecture (*cf.* [F2], appendice) que, pour tout $i \in \mathbf{N}$, le groupe de cohomologie étale p-adique $H^i_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ de $X_{\overline{K}} = X \times_{\mathrm{Spec}\, W(k)} \mathrm{Spec}\, \overline{K}$ est une représentation cristalline, et que le module de Dieudonné filtré associé $\underline{D}_B(H^i_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p))$ s'identifie au i-ième groupe de cohomologie de de Rham $H^i_{DR}(X_K)$ de $X_K = X \times_{\mathrm{Spec}\, W(k)} \mathrm{Spec}\, K$ (muni de la filtration de Hodge et du « relèvement canonique de Frobenius », i. e. de l'action de F sur la cohomologie cristalline de $X_k = X \times_{\mathrm{Spec}\, W(k)} \mathrm{Spec}\, k$, identifiée à la cohomologie de de Rham de X_K); ou, ce qui revient au même, que $H^i_{DR}(X_K)$ est un module de Dieudonné filtré admissible, et que la représentation cristalline associée $\underline{V}_B(H^i_{DR}(X_K))$ s'identifie à $H^i_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$.

Si l'on suppose que $\dim X_K < p$ et que les $H^j(X, \Omega^i_X)$ sont sans torsion, un résultat de Mazur ([M1], [M2], *voir* aussi [L1]) montre que, pour tout i, $H^i_{DR}(X_K)$ est faiblement admissible; comme la longueur de la filtration est $<p$, il résulte du théorème précédent que $H^i_{DR}(X_K)$ *est admissible*. On peut donc associer à X les représentations cristallines $\underline{V}_B(H^i_{DR}(X_K))$. On ne sait démontrer que $\underline{V}_B(H^*_{DR}(X_K))$ s'identifie à $H^*_{et}(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ que lorsque X est un schéma abélien; mais il est remarquable que l'on peut vérifier que les $\underline{V}_B(H^i_{DR}(X_K))$ satisfont un grand nombre des propriétés connues ou conjecturales de la cohomologie étale p-adique : par exemple, ils ont la bonne dimension et vérifient la conjecture de Tate sur la décomposition de Hodge-Tate et celle de Serre sur l'action de l'inertie modérée.

0.3. En fait, nous allons obtenir un résultat plus général que le théorème énoncé au n° 0.1 (prop. 8.12), résultat qui concerne des représentations de G à valeurs dans une extension finie E de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K telle que E contienne une uniformisante de K.

Dans toute la suite de cet article, E est donc une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K. On note $\mathfrak{O}$ (resp. A) l'anneau des entiers de E (resp. K). On choisit une uniformisante π de $\mathfrak{O}$. On note $\tilde{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}/\pi\mathfrak{O}$ le corps résiduel de $\mathfrak{O}$ et on pose $r = [\tilde{\mathfrak{O}} : \mathbf{F}_p]$ et $q = p^r$, de sorte que $\tilde{\mathfrak{O}}$ est un corps fini à q éléments.

On note E_0 le corps des fractions de l'anneau $W(\tilde{\mathfrak{O}})$ des vecteurs de Witt à coefficients dans $\tilde{\mathfrak{O}}$. On suppose que l'homomorphisme canonique de $E \otimes_{E_0} K_0$ dans K est un isomorphisme (ce qui revient à dire que $K = EK_0$, ou que $e = [E : E_0]$, ou encore que π est aussi une uniformisante de A). On note τ le E_0-automorphisme continu de $K = E \otimes_{E_0} K_0$ défini par :

$$\tau(x \otimes a) = x \otimes \sigma^r(a) \qquad \text{pour} \quad x \in E, \quad a \in K_0.$$

On a donc $K^\tau = E$, A est stable par τ, $A^\tau = \mathfrak{O}$, τ opère sur le corps résiduel k et l'on a $\tau x = x^q$, pour tout $x \in k$.

0.4. Les représentations p-adiques que l'on va construire vont être obtenues par passage à la limite (puis extension des scalaires de $\mathfrak{O}$ à E) à partir de $\mathfrak{O}$-modules de longueur finie munis d'une action de G. Ces derniers vont être associés à certains A-modules de longueur finie, munis de structures supplémentaires, qui joueront l'analogue, pour ces représentations finies, des modules de Dieudonné filtrés introduits au n° 0.1 pour les représentations p-adiques proprement dites.

Appelons donc A-*module de Dieudonné filtré* (*cf.* n° 1.2) la donnée d'un A-module M, muni d'une filtration $(M^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ par des sous-A-modules, décroissante, exhaustive et séparée, et, pour chaque entier i, d'une application $\varphi_M^i : M^i \to M$, τ-semi-linéaire, telles que, pour tout i, $\varphi_M^i(x) = \pi\varphi_M^{i+1}(x)$ si $x \in M^{i+1}$.

Les A-modules de Dieudonné filtrés forment, de manière évidente, une catégorie $\underline{\mathrm{MF}}$, additive, et même $\mathfrak{O}$-linéaire (i. e. les $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{MF}}}(M, N)$ sont, fonctoriellement, des $\mathfrak{O}$-modules).

Notons $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^f$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}$ dont les objets sont les M, dont le A-module sous-jacent est de longueur finie, qui vérifient $\sum \mathrm{Im}\,\varphi_M^i = M$. La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^f$ est abélienne et même artinienne. La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}$ en revanche n'est pas abélienne et pour pouvoir faire des dévissages (i. e. utiliser des suites exactes et des foncteurs Ext), il est commode d'introduire une catégorie abélienne $\mathscr{M}\mathscr{F}$ qui contient $\underline{\mathrm{MF}}$ comme sous-catégorie pleine. L'étude des catégories $\underline{\mathrm{MF}}$, $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^f$ et $\mathscr{M}\mathscr{F}$ est l'objet du paragraphe 1.

0.5. Au paragraphe 2, on construit un anneau S qui va nous servir de pont entre les modules filtrés et les modules galoisiens : on le munit à la fois d'une structure de A-module de Dieudonné filtré et d'une action de Galois, ces deux structures étant compatibles entre elles.

0.6. Si M est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}$, $\underline{\mathrm{U}}_S(M) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}\mathscr{F}}(M, S)$ est alors un $\mathfrak{O}$-module muni d'une action $\mathfrak{O}$-linéaire de G.

Notons $\underline{\mathrm{Rep}}_{/\mathfrak{O}}^f(G)$ la catégorie des $\mathfrak{O}$-modules de longueur finie, munis d'une action linéaire de G, et $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^f$ formée des M tels que $M^0 = M$ et $M^q = 0$. On a le résultat suivant (*cf.* th. 3.3) :

THÉORÈME. — (i) *Pour tout objet* M *de* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$, $lg_{\mathfrak{O}}\,\underline{\mathrm{U}}_S(M) = lg_A M$;

(ii) *le foncteur contravariant additif* $\underline{\mathrm{U}}_S : \underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q} \to \underline{\mathrm{Rep}}_{/\mathfrak{O}}^f(G)$ *est exact et fidèle.*

Au paragraphe 3, on montre d'abord qu'il suffit de démontrer ce théorème lorsque k est algébriquement clos.

Supposons qu'il en est ainsi et notons $\widetilde{\mathscr{M}\mathscr{F}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}\mathscr{F}$ formée des objets tués par π et $\tilde{S}$ le conoyau, dans $\mathscr{M}\mathscr{F}$, de la multiplication par π dans S. Tout objet simple de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^f$ est un objet de $\widetilde{\mathscr{M}\mathscr{F}}$; dans la fin du paragraphe 3, on utilise un dévissage pour prouver que, pour obtenir le théorème, il suffit de vérifier que, pour tout objet simple M de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$, on a :

$$\begin{cases} \dim_{\mathfrak{O}} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathscr{M}\mathscr{F}}}(M, \tilde{S}) = \dim_k M, \\ \mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathscr{M}\mathscr{F}}}(M, \tilde{S}) = 0. \end{cases}$$

0.7. Au paragraphe 4, on détermine les objets simples de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^f$ lorsque k est algébriquement clos.

A tout couple (h, i) formé d'un entier $h \geqq 1$ et d'une application $i : n \mapsto i_n$ de $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$, on associe l'objet $M = M(h; i)$ de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^f$ ainsi défini :

— le A-module sous-jacent est le k-espace vectoriel $k^{\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$;

— si $(e_m)_{m\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ est la base canonique de $k^{\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$, on pose :

$$\mathrm{M}^i = \bigoplus_{i_m \geqq i} k e_m \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{Z};$$

— les applications $\varphi_{\mathrm{M}}^i : \mathrm{M}^i \to \mathrm{M}$ sont caractérisées par :

$$\varphi_{\mathrm{M}}^{i_m}(e_m) = e_{m-1} \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}.$$

Si l'on note $\mathbf{F}_{q^h}$ l'unique sous-corps de k ayant q^h éléments, pour tout $a \in \mathbf{F}_{q^h}$, l'application k-linéaire $\nu_a : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ définie par $\nu_a(e_m) = a^{q^{-m}} e_m$ est un endomorphisme de M; l'application $\nu : a \mapsto \nu_a$ définit un plongement de $\mathbf{F}_{q^h}$ dans l'anneau $\mathrm{End}(\mathrm{M})$ des endomorphismes de M.

On démontre le résultat suivant (prop. 4.4) :

PROPOSITION. — (i) *Pour que* $\mathrm{M}(h; i)$ *soit un objet simple de* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f}$, *il faut et il suffit que la période de l'application* i *soit égale à* h (i. e. *que si* $n \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ *est tel que* $i_{n+m} = i_m$, *pour tout* m, *alors* $n = 0$).

(ii) *Si* M *est un objet simple de* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f}$, $\mathrm{End}(\mathrm{M})$ *est une extension finie de* $\mathbf{F}_q$; *si* h *est le degré de cette extension et si l'on choisit un isomorphisme de* $\mathbf{F}_{q^h}$ *sur* $\mathrm{End}(\mathrm{M})$, *il existe une application* $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, *de période* h, *et une seule, telle que* M, *muni de l'action de* $\mathbf{F}_{q^h}$, *soit isomorphe à* $\mathrm{M}(h; i)$.

0.8. Conservons les hypothèses et les notations du numéro précédent. Si $\bar{\omega}$ est un élément de $\overline{\mathrm{K}}$ qui vérifie $\bar{\omega}^{q^h-1} = \pi$, l'application, qui à $g \in \mathrm{G}$ associe l'image de $g\bar{\omega}/\bar{\omega}$ dans k, est un caractère χ_h de G à valeurs dans $\mathbf{F}_{q^h}^*$.

L'objet du paragraphe 5 est de prouver un résultat qui, d'une part, achève la démonstration du théorème 3.3 et, d'autre part, donne « l'action de l'inertie modérée », i. e. l'action de G sur les semi-simplifiées des réductions modulo π des représentations de G construites dans cet article :

THÉORÈME. — *Soit* $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *une application de période* h *telle que* $0 \leqq i_m \leqq q-1$, *pour tout* m, *et soit* $\mathrm{M} = \mathrm{M}(h; i)$. *Alors :*

(i) *on a* $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{M}\mathcal{F}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}}) = 0$;

(ii) *on a* $\dim_{\mathbf{F}_{q^h}} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{M}\mathcal{F}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}}) = 1$ [*on a muni* $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{M}\mathcal{F}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}})$ *de la structure de* $\mathbf{F}_{q^h}$-*espace vectoriel induite par l'action de* $\mathbf{F}_{q^h}$ *sur* M];

(iii) *on a* $gu = \chi_h(g)^{i_0 + q i_1 + \ldots + q^{h-1} i_{h-1}} . u$, *pour tout* $g \in \mathrm{G}$ *et tout* $u \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{M}\mathcal{F}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}})$ (*où* $i_n = i_{\bar{n}}$, *si* $n \in \mathbf{Z}$ *et si* $\bar{n}$ *est son image dans* $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$).

0.9. Il n'est pas vrai que le foncteur $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}} : \underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q} \to \underline{\mathrm{Rep}}_{/\mathcal{D}}^{f}(\mathrm{G})$ est pleinement fidèle : on a $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}(1; 0)) \simeq \underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}(1; q-1)) \simeq \mathbf{F}_q$, avec action triviale de G [si $j \in \mathbf{Z}$, on pose $\mathrm{M}(1; j) = \mathrm{M}(1; i)$, avec $i : \mathbf{Z}/\mathbf{Z} = \{0\} \to \mathbf{Z}$ défini par $i_0 = j$]. Mais c'est le seul ennui. Plus précisément, soient :

(i) $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ formée des M qui n'ont pas de quotient non trivial N tel que $\mathrm{N}^{q-1} = \mathrm{N}$;

(ii) $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q''}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ formée des M qui n'ont pas de sous-objet non trivial N tel que $\mathrm{N}^1=0$ (lorsque k est algébriquement clos, on montre qu'un objet M de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ est dans $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$ (resp. $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q''}$) si et seulement s'il n'a pas de quotient de Jordan-Hölder isomorphe à $\mathrm{M}(1;\, q-1)$ [resp. $\mathrm{M}(1;\, 0)$].

L'objet du paragraphe 6 est de prouver que la restriction du foncteur $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}$ à chacune des deux catégories $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$ et $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q''}$ est pleinement fidèle. Ici encore la démonstration se fait par réduction au cas où k est algébriquement clos, puis par dévissage. Ce résultat ne sera pas utilisé de façon essentielle dans la suite; en particulier, il n'intervient pas dans la démonstration du théorème énoncé au n° 0.1.

0.10. Au paragraphe 7, on passe à la limite.

Notons $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ la catégorie dont les objets sont les K-espaces vectoriels Δ munis :

– d'une part d'une application bijective $\Phi : \Delta \to \Delta$, τ-semi-linéaire;

– d'autre part d'une filtration $(\Delta^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ par des sous-K-espaces vectoriels de Δ, décroissante, exhaustive et séparée (avec une définition évidente des flèches). C'est une catégorie additive E-linéaire.

Notons $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd}$ la catégorie dont les objets sont les couples (Δ, M), avec Δ un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ et M un réseau fortement divisible de Δ, c'est-à-dire tel que $\sum_{i\in\mathbf{Z}} \pi^{-i}\Phi(\mathrm{M}\cap\Delta^i)=\mathrm{M}$ (avec une définition évidente des flèches).

Chaque objet (Δ, M) de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd}$ peut être muni d'une structure de module filtré, i. e. d'objet de $\underline{\mathrm{MF}}$:

– le A-module sous-jacent est M;

– la filtration est définie par $\mathrm{M}^i=\mathrm{M}\cap\Delta^i$, pour tout i;

– l'application $\varphi_{\mathrm{M}}^i : \mathrm{M}^i \to \mathrm{M}$ est définie par $\varphi_{\mathrm{M}}^i(x)=\pi^{-i}\Phi x$, pour tout $x\in\mathrm{M}^i$.

On identifie ainsi $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd}$ à une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}$ et l'on voit que, pour tout objet M de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd}$, et tout $n\in\mathbf{N}$, le conoyau de π_{M}^n dans $\mathscr{M}\mathscr{F}$ est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f}$.

Si l'on note $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd,q}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd}$ formée des M qui vérifient $\mathrm{M}^0=\mathrm{M}$ et $\mathrm{M}^q=0$, on définit alors, par passage à la limite à partir de $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}$, un foncteur :

$$\underline{\mathrm{U}}_{\hat{\mathrm{S}}} : \quad \underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd,q} \to \underline{\mathrm{Rep}}_{/\mathfrak{O}}^{f}(\mathrm{G}),$$

catégorie des $\mathfrak{O}$-modules libres de rang fini, munis d'une action linéaire et continue de G. Ce foncteur est exact (en un sens évident) et fidèle [on a $rg_{\mathfrak{O}}\,\underline{\mathrm{U}}_{\hat{\mathrm{S}}}(\mathrm{M})=rg_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$] et « presque pleinement fidèle » [sa restriction aux M tels que Coker π_{M} est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$ (*resp.* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q''}$) est pleinement fidèle].

On donne également au paragraphe 7 une description de la sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}^{f}$ de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ formée des Δ qui admettent un réseau M tel que (Δ, M) soit un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}^{fd}$. C'est une catégorie abélienne.

0.11. Au paragraphe 8, on commence par étendre les scalaires de A à K (resp. de $\mathfrak{O}$ à E). Le foncteur $\underline{U}_{\hat{S}}$ induit ainsi un foncteur contravariant E-linéaire exact et pleinement fidèle :

$$\underline{U}_{\hat{S}_K} : \quad \underline{MF}_{K/E}^{f,q} \to \underline{Rep}_{/E}^{f}(G),$$

de la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{K/E}^{f}$ formée des Δ qui vérifient $\Delta^0 = \Delta$ et $\Delta^q = 0$ dans la catégorie des E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire et continue de G.

On compare ensuite le foncteur $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ au foncteur $\underline{V}_B$ de [F1] et [F2] auquel on a fait allusion au n° 0.1.

Lorsque $E = \mathbf{Q}_p$, auquel cas $e = 1$, cela revient essentiellement à montrer que l'anneau $\hat{S} = \varprojlim S/p^n S$ s'identifie à un sous-anneau de l'anneau de Barsotti-Tate B construit dans [F2]; la catégorie $\underline{MF}_{K/E}^{f}$ s'identifie à la catégorie $\underline{MF}_K^f$ des modules de Dieudonné filtrés faiblement admissibles et on montre (th. 8.4) que $\underline{U}_{\hat{S}_K}(D)$ n'est autre alors que le dual de $\underline{V}_B(D)$. Le théorème d'admissibilité annoncé au n° 0.1 s'en déduit.

Lorsque $E \neq \mathbf{Q}_p$, la traduction est plus compliquée : il faut d'abord établir un dictionnaire entre la catégorie $\underline{MF}_{K/E}^{f}$ et une certaine catégorie d'objets de $\underline{MF}_K^f$ munis d'un plongement de E dans l'anneau des endomorphismes. C'est l'objet de la proposition 8.11. Le théorème 8.4 se généralise alors (prop. 8.12).

0.12. Au paragraphe 9 enfin, on suppose $e = 1$ et on a donc $A = W(k)$. On sait alors (*cf.* [R1] ou [F3]) que la catégorie des *p-groupes finis sur* A, i.e. des schémas en groupes commutatifs, finis et plats, de rang une puissance de p, sur Spec A (supposés à fibre spéciale unipotente si $p = 2$) est abélienne et que le foncteur, qui à un tel groupe J associe le $\mathbf{Z}_p[G]$-module $J(\bar{A})$ des points de J à valeurs dans $\bar{A}$, est pleinement fidèle.

On établit alors un dictionnaire entre la classification de ces p-groupes finis *via* les *systèmes finis de Honda* due à l'un de nous [F3] et certains modules filtrés. Plus précisément :

— on établit une équivalence entre la catégorie des systèmes finis de Honda (resp. systèmes finis de Honda unipotents) et la sous-catégorie pleine $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$ (resp. $\underline{MF}_{tor}^{f,2'}$) de $\underline{MF}_{tor}^{f}$ formée des M qui vérifient $M^0 = M$ et $M^2 = 0$ (resp. ainsi que M n'a pas de quotient non trivial N tel que $N^1 = N$);

— on montre que, si J est un p-groupe fini sur A (unipotent si $p = 2$), si (L, N) est son système fini de Honda et si M est le module filtré associé à (L, N), alors $\underline{U}_S(M)$ s'identifie à $J(\bar{A})$, si $\bar{A}$ désigne l'anneau des entiers de $\bar{K}$.

En particulier, les représentations de G de la forme $\underline{U}_S(M)$, avec M objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$, si $p \neq 2$ (resp. $\underline{MF}_{tor}^{f,2'}$) sont exactement celles qui sont de la forme $J(\bar{A})$, avec J p-groupe fini sur A (resp. p-groupe fini unipotent sur A).

Constatons avec plaisir que, compte tenu des résultats du paragraphe 5, cela permet de retrouver les résultats de Raynaud [R1] sur l'action de l'inertie modérée sur les points des p-groupes finis sur $\bar{A}$... par une méthode considérablement plus compliquée, mais finalement

équivalente à celle employée par Berthelot [B1] pour retrouver les résultats de Raynaud à l'aide des systèmes finis de Honda.

Une partie de ce travail a été faite alors que l'un des deux auteurs était membre de l'Institute for Advanced Study de Princeton; celui-ci (J.-M. Fontaine) tient à remercier l'I.A.S. pour son hospitalité et la N.S.F. pour son soutien financier.

1. Modules filtrés

On conserve les hypothèses et notations des n°s 0.1 et 0.3.

1.1. Si M est un A-module, on note M_τ le A-module déduit de M par la restriction des scalaires τ; en tant que groupe abélien (et même en tant que $\mathfrak{O}$-module) M_τ s'identifie à M et, pour tout $a \in A$, la multiplication par a dans M_τ n'est autre alors que la multiplication par τa dans M. La correspondance $M \mapsto M_\tau$ est, de manière évidente, fonctorielle.

1.2. Nous appelons (A, τ, π)-*module de Dieudonné filtré*, ou, s'il n'y a pas de risque de confusion, A-*module de Dieudonné filtré*, ou même *module filtré*, la donnée :

(i) d'un A-module M;

(ii) d'une filtration de M par des sous-A-modules $(M^i)_{i \in \mathbf{Z}}$, décroissante (i. e. $M^{i+1} \subset M^i$), exhaustive (i. e. $M = \bigcup M^i$) et séparée (i. e. $\cap M^i = 0$);

(iii) pour chaque entier i, d'une application A-linéaire :

$$\varphi_M^i : \quad M^i \to M_\tau.$$

On demande, en outre, que, pour tout entier i, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_M^{i+1}"'] & M^i \arrow[d, "\varphi_M^i"] \\ M_\tau \arrow[r, "\pi"] & M_\tau \end{tikzcd} \tag{1}$$

soit commutatif.

Par abus de langage, nous parlerons du module filtré M (la filtration et les applications φ_M^i étant sous-entendues).

1.3. Ces modules filtrés forment une catégorie que nous notons $\underline{MF}_{A,\tau,\pi}$ ou, s'il n'y a pas de risque de confusion, $\underline{MF}$: une flèche $\eta : M \to M'$ est une application A-linéaire, compatible avec les filtrations [i. e. telle que $\eta(M^i) \subset M'^i$, pour tout i] et qui commute aux φ^i (i. e. telle que, pour tout i, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M^i \arrow[r, "\eta | M^i"] \arrow[d, "\varphi_M^i"'] & M'^i \arrow[d, "\varphi_{M'}^i"] \\ M_\tau \arrow[r, "\eta_\tau"] & M'_\tau \end{tikzcd} \tag{2}$$

soit commutatif).

La catégorie $\underline{MF}$ est additive et même $\mathfrak{O}$-linéaire.

[Rappelons qu'une catégorie additive $\mathscr{C}$ est dite $\mathfrak{O}$-linéaire si on s'est donné un homomorphisme de $\mathfrak{O}$ dans $\mathrm{End}(\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$; autrement dit, si, pour chaque objet M de $\mathscr{C}$, on s'est donné un homomorphisme de $\mathfrak{O}$ dans l'anneau $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M})$, que nous écrirons :

$$a \mapsto a_{\mathrm{M}},$$

tel que, pour tout $a \in \mathfrak{O}$, toute flèche $\eta : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ de $\mathscr{C}$, $\eta \circ a_{\mathrm{M}} = a_{\mathrm{N}} \circ \eta$.

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ sont deux catégories $\mathfrak{O}$-linéaires, un foncteur $\Psi : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est dit $\mathfrak{O}$-*linéaire* s'il est additif et compatible avec les structures de $\mathfrak{O}$-modules.]

1.4. Remarques. — (*a*) Soit u une unité de $\mathfrak{O}$ et soit $\pi' = u\pi$; les catégories $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{A},\tau,\pi}$ et $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{A},\tau,\pi'}$ sont, de manière évidente, isomorphes.

(*b*) On peut donner une autre description de la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}$, description que nous utiliserons également : Les couples $(\mathrm{M}, (\mathrm{M}^i)_{i \in \mathbf{Z}})$, constitués d'un A-module M et d'une filtration $(\mathrm{M}^i)_{i \in \mathbf{Z}}$ par des sous-A-modules de M, décroissante, exhaustive et séparée, forment, de manière évidente, une catégorie additive A-linéaire, que nous notons $\underline{\mathrm{Fil}}_{\mathrm{A}}$. A tout objet $(\mathrm{M}, (\mathrm{M}^i)_{i \in \mathbf{Z}})$ de $\underline{\mathrm{Fil}}_{\mathrm{A}}$, nous associons le A-module $\overline{\mathrm{M}}$, limite inductive du diagramme :

(3)
$$\begin{tikzcd}
\cdots & \mathrm{M}^i \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"] & & \mathrm{M}^{i+1} \arrow[dl] \arrow[dr, "\pi"] & \cdots \\
\cdots \mathrm{M}^{i-1} & & \mathrm{M}^i & & \mathrm{M}^{i+1} \cdots
\end{tikzcd}$$

La correspondance $(\mathrm{M}, (\mathrm{M}^i)_{i \in \mathbf{Z}}) \mapsto \overline{\mathrm{M}}$ est, de manière évidente, un foncteur additif de la catégorie $\underline{\mathrm{Fil}}_{\mathrm{A}}$ dans celle des A-modules.

Si M est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}$, la condition de commutativité, pour tout i, du diagramme (1) revient à dire que les applications φ_{M}^i passent à la limite inductive. Autrement dit :

— se donner un objet de $\underline{\mathrm{MF}}$ revient à se donner un objet $(\mathrm{M}, (\mathrm{M}^i)_{i \in \mathbf{Z}})$ de $\underline{\mathrm{Fil}}_{\mathrm{A}}$ et une application A-linéaire :

$$\varphi_{\mathrm{M}} : \quad \overline{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}_\tau;$$

— un morphisme $\eta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ est la donnée d'une application A-linéaire de M dans M′, compatible avec les filtrations, telle que le diagramme :

(2′)
$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{M}} \arrow[r, "\overline{\eta}"] \arrow[d, "\varphi_{\mathrm{M}}"'] & \overline{\mathrm{M}}' \arrow[d, "\varphi_{\mathrm{M}'}"] \\
\mathrm{M}_\tau \arrow[r, "\eta_\tau"] & \mathrm{M}'_\tau
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

1.5. Nous notons $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$, ou $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{A},\tau,\pi,\mathrm{tor}}$ s'il y a un risque de confusion, la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}$ formée des objets M qui vérifient les deux conditions suivantes :

(i) le A-module sous-jacent est de longueur finie;

(ii) on a $\Sigma \operatorname{Im} \varphi_{\mathrm{M}}^i = \mathrm{M}_\tau$.

1.6. PROPOSITION. — *Soit* M *un module filtré dont le* A-*module sous-jacent est de longueur finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) M *est un objet de* $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$;

(ii) *l'application* $\varphi_{\mathrm{M}} : \overline{\mathrm{M}} \to \mathrm{M}_\tau$ *est surjective*;

(iii) *l'application* φ_{M} *est injective*;

(iv) *l'application* φ_{M} *est bijective.*

Démonstration. — L'équivalence de (i) et (ii) est simplement la traduction en termes de l'application φ_{M} de la définition. On a $\lg_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_\tau = \lg_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ et l'équivalence de (ii), (iii) et (iv) résulte du lemme suivant :

1.7. LEMME. — *Soit* $(\mathrm{M}, (\mathrm{M}^i)_{i \in \mathbf{Z}})$ *un objet de* $\underline{Fil}_{\mathrm{A}}$ *dont le* A-*module sous-jacent est de longueur finie. Alors* $\lg_{\mathrm{A}} \overline{\mathrm{M}} = \lg_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$.

Démonstration. — Soient $j \leqq j'$ des entiers tels que $\mathrm{M}^j = \mathrm{M}$ et $\mathrm{M}^{j'+1} = 0$. Soit $\theta : \bigoplus_{i=j+1}^{j'} \mathrm{M}^i \to \bigoplus_{i=j}^{j'} \mathrm{M}^i$ l'application définie par :

$$\theta((x_i)_{j<i\leqq j'}) = (x_{j+1}, -\pi x_{j+1} + x_{j+2}, \ldots, -\pi x_i + x_{i+1}, \ldots, -\pi x_{j'}).$$

On a une suite exacte :

$$0 \to \bigoplus_{i=j+1}^{j'} \mathrm{M}^i \xrightarrow{\theta} \bigoplus_{i=j}^{j'} \mathrm{M}^i \to \overline{\mathrm{M}} \to 0 \tag{4}$$

et on a donc :

$$\lg_{\mathrm{A}} \overline{\mathrm{M}} + \lg_{\mathrm{A}} \left(\bigoplus_{i=j+1}^{j'} \mathrm{M}^i \right) = \lg_{\mathrm{A}} \left(\bigoplus_{i=j}^{j'} \mathrm{M}^i \right) \qquad \text{d'où} \quad \lg_{\mathrm{A}} \overline{\mathrm{M}} = \lg_{\mathrm{A}} \mathrm{M}^j = \lg_{\mathrm{A}} \mathrm{M}.$$

1.8. PROPOSITION. — *La catégorie* $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$ *est abélienne et même artinienne. En outre le noyau (resp. le conoyau) d'une flèche de* $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$ *est encore un noyau (resp. un conoyau) dans* $\underline{\mathrm{MF}}$.

Commençons par établir un lemme :

1.9. LEMME. — *Soit* $(\mathrm{M}, (\mathrm{M}^i)_{i \in \mathbf{Z}})$ *un objet de* $\underline{Fil}_{\mathrm{A}}$ *et soit* $(\mathrm{L}, (\mathrm{L}^i)_{i \in \mathbf{Z}})$ *un sous-objet* (i. e. L *est un sous-*A*-module de* M *et on a* $\mathrm{L}^i \subset \mathrm{M}^i$, *pour tout* i). *Si* M *est un* A*-module de longueur finie et si l'application canonique de* $\overline{\mathrm{L}}$ *dans* $\overline{\mathrm{M}}$ *est injective, alors on a* $\mathrm{L}^i = \mathrm{M}^i \cap \mathrm{L}$, *pour tout* i.

Démonstration. — Soit i un entier tel que $\mathrm{L}^i \neq \mathrm{M}^i \cap \mathrm{L}$ et soit y un élément de $\mathrm{M}^i \cap \mathrm{L}$ qui n'est pas dans L^i. Il existe donc un entier $s < i$ tel que $y \in \mathrm{L}^s$ et $y \notin \mathrm{L}^{s+1}$. Quitte à multiplier y par une puissance de π convenable, on peut supposer que $\pi y \in \mathrm{L}^{s+1}$.

Choisissons des entiers $j \leqq j'$ tels que $\mathrm{M}^j = \mathrm{M}$, $\mathrm{L}^j = \mathrm{L}$ et $\mathrm{M}^{j'+1} = \mathrm{L}^{j'+1} = 0$. Soit z l'élément de $\bigoplus_{i=j}^{j'} \mathrm{L}^i$ dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice s qui égale à y et celle d'indice $s+1$ qui est égale à $-\pi y$. Comme $y \notin \mathrm{L}^{s+1}$, la suite exacte (4) appliquée à L montre que l'image $\bar{z}$ de z dans $\overline{\mathrm{L}}$ n'est pas nulle. En revanche, comme $y \in \mathrm{M}^i \subset \mathrm{M}^{s+1}$, la suite

exacte (4) appliquée à M montre que l'image de z dans $\overline{M}$ est nulle. On a donc trouvé un élément non nul $\bar{z}$ de $\overline{L}$ dont l'image dans $\overline{M}$ est nulle, ce qui contredit l'hypothèse d'injectivité.

1.10. DÉMONTRONS MAINTENANT LA PROPOSITION 1.8. — Soit $\eta : M' \to M$ une flèche de $\underline{MF}^f_{tor}$.

(a) On peut munir le noyau N' de l'application A-linéaire sous-jacente à η d'une structure de module filtré en prenant comme filtration la filtration induite (i.e. $N'^i = M'^i \cap N'$), les applications $\varphi^i_{N'}$ étant définies par restriction à partir des $\varphi^i_{M'}$ [la commutativité du diagramme (2) implique que $\varphi^i_{M'}(N'^i)$ est contenue dans le noyau de $\eta_\tau : M'_\tau \to M_\tau$, qui s'identifie à N'_τ]. Il est clair que N' est un noyau de η dans $\underline{MF}$.

Soit maintenant L l'image de l'application A-linéaire sous-jacente à η et, pour tout i soit L^i l'image de M'^i dans M. Alors $(L, (L^i)_{i\in\mathbf{Z}})$ est un sous-objet de l'objet $(M, (M^i)_{i\in\mathbf{Z}})$ de $\underline{Fil}_A$.

Pour tout i, la suite de A-modules :

$$0 \to N'^i \to M'^i \to L^i \to 0$$

est exacte. Les propriétés d'exactitude à droite du foncteur $\varinjlim$ (ou une vérification directe facile) montrent que la suite :

$$\overline{N}' \to \overline{M}' \to \overline{L} \to 0$$

est exacte. Comme la suite :

$$0 \to N' \to M' \to L \to 0$$

est exacte, on a $\lg_A M' = \lg_A N' + \lg_A L$; comme, d'après le lemme 1.7, $\lg_A \overline{N} = \lg_A N'$, $\lg_A \overline{M}' = \lg_A M'$ et $\lg_A \overline{L} = \lg_A L$, on a aussi $\lg_A \overline{M}' = \lg_A \overline{N}' = \lg_A \overline{L}$ et la suite :

$$0 \to \overline{N}' \to \overline{M}' \to \overline{L} \to 0$$

est exacte. Comme M' est un objet de $\underline{MF}^f_{tor}$, l'application $\varphi_{M'}$ est injective et le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \overline{N}' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{N'}"'] & \overline{M}' \arrow[d, "\varphi_{M'}"] \\ N'_\tau \arrow[r] & M'_\tau \end{tikzcd}$$

montre que $\varphi_{N'}$ est aussi injective, donc, d'après la proposition 1.6 que N' est un objet de $\underline{MF}^f_{tor}$. En particulier, N' est donc un noyau de η aussi bien dans $\underline{MF}$ que dans $\underline{MF}^f_{tor}$.

(b) L'exactitude de la suite :

$$0 \to N' \to M' \to L \to 0$$

implique celle de la suite :

$$0 \to N'_\tau \to M'_\tau \to L_\tau \to 0$$

et il existe un unique isomorphisme $\varphi_L : \overline{L} \to L_\tau$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \overline{N}' & \to & \overline{M}' & \to & \overline{L} & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{N'}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{M'}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_L} & & \\ 0 & \to & N'_\tau & \to & M'_\tau & \to & L_\tau & \to & 0 \end{array}$$

soit commutatif. On a ainsi muni L d'une structure d'objet de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$ et il est clair que L est une coimage de η dans $\underline{\mathrm{MF}}$, donc *a fortiori* dans $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$.

Il est clair que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \overline{L} & \longrightarrow & \overline{M} \\ {\scriptstyle \varphi_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_M} \\ L_\tau & \longrightarrow & M_\tau \end{array}$$

est commutatif. Comme les flèches verticales sont des isomorphismes, l'injectivité de $L_\tau \to M_\tau$ implique celle de $\overline{L} \to \overline{M}$. D'après le lemme 1.9, on a donc $L^i = L \cap M^i$, pour tout i.

Soit alors $N = M/L$ le conoyau de l'application A-linéaire sous-jacente à η et, pour tout i, soit N^i l'image de M^i dans N. Comme $L^i = L \cap M^i$, la suite :

$$0 \to L^i \to M^i \to N^i \to 0$$

est exacte, et il existe une unique application A-linéaire $\varphi^i_N : N^i \to N$ rendant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L^i & \to & M^i & \to & N^i & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^i_L} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^i_M} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi^i_N} & & \\ 0 & \to & L_\tau & \to & M_\tau & \to & N_\tau & \to & 0 \end{array}$$

commutatif. On a ainsi muni N d'une structure de module filtré et il est clair que N est un conoyau de η dans $\underline{\mathrm{MF}}$.

La surjectivité de φ_M et celle de $M_\tau \to N_\tau$ impliquent celle de φ_N et, d'après la proposition 1.6, N est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$. Comme N est un conoyau de η dans $\underline{\mathrm{MF}}$, N en est *a fortiori* un dans $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$.

(*c*) L'image de η est L muni de la filtration induite par celle de M et de la restriction des φ^i_M. Comme $L^i = L \cap M^i$, c'est aussi la coimage de η et la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$ est bien abélienne.

(*d*) Enfin le fait que tout objet de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$ est de longueur finie résulte de ce que le A-module sous-jacent l'est déjà.

1.11. La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}$, en revanche, n'est pas abélienne. Nous allons y remédier en la plongeant dans une catégorie abélienne $\mathfrak{O}$-linéaire $\mathcal{MF}$:

– un objet de $\mathcal{MF}$ consiste en la donnée :

(i) d'un A-module M et, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, d'un A-module M^i;

(ii) pour chaque entier i, de trois applications A-linéaires $\alpha^i_M : M^{i+1} \to M^i$, $\beta^i_M : M^i \to M$ et $\varphi^i_M : M^i \to M_\tau$ telles que :

$$\beta^i_M \circ \alpha^i_M = \beta^{i+1}_M \qquad \text{et} \qquad \varphi^i_M \circ \alpha^i_M = \pi \varphi^{i+1}_M;$$

— une flèche de $(M, (M^i, \alpha_M^i, \beta_M^i, \varphi_M^i)_{i\in\mathbf{Z}})$ dans $(N, (N^i, \alpha_N^i, \beta_N^i, \varphi_N^i)_{i\in\mathbf{Z}})$ consiste en la donnée d'une application A-linéaire $\eta : M \to N$ et, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, d'une application A-linéaire $\eta^i : M^i \to N^i$ telles que les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} M^i \arrow[r, "\beta_M^i"] \arrow[d, "\eta^i"'] & M \arrow[d, "\eta"] \\ N^i \arrow[r, "\beta_N^i"] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M^{i+1} \arrow[r, "\alpha_M^i"] \arrow[d, "\eta^{i+1}"'] & M^i \arrow[d, "\eta^i"] \\ N^{i+1} \arrow[r, "\alpha_N^i"] & N^i \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M^i \arrow[r, "\varphi_M^i"] \arrow[d, "\eta^i"'] & M_\tau \arrow[d, "\eta_\tau"] \\ N^i \arrow[r, "\varphi_N^i"] & N_\tau \end{tikzcd}$$

soient commutatifs.

Il est immédiat que $\mathcal{MF}$ est une catégorie abélienne $\mathfrak{O}$-linéaire. On dispose d'un foncteur $\Psi : \underline{\mathrm{MF}} \to \mathcal{MF}$: c'est celui qui, à tout module filtré M, associe $(M, (M^i, \alpha_M^i, \beta_M^i, \varphi_M^i)_{i\in\mathbf{Z}})$, où α_M^i et β_M^i sont les inclusions naturelles. Le foncteur Ψ est $\mathfrak{O}$-linéaire et pleinement fidèle et nous nous en servons pour identifier $\underline{\mathrm{MF}}$ à son image essentielle, à savoir à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{MF}$ formée des objets pour lesquels les applications α_M^i et β_M^i sont toutes injectives.

Si η est une flèche de $\underline{\mathrm{MF}}$, son noyau dans $\mathcal{MF}$ est encore un objet de $\underline{\mathrm{MF}}$, mais il n'en est pas de même en général du conoyau. Toutefois si η est une flèche de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$, le noyau (resp. le conoyau) de η dans $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$ coïncide avec le noyau (resp. le conoyau) de η dans $\mathcal{MF}$.

Enfin, si :

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{MF}$ et si M' et M'' sont des objets de $\underline{\mathrm{MF}}$ (resp. $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$), il en est de même de M.

2. L'anneau S

Avant de définir l'anneau S qui jouera un rôle essentiel dans la suite, commençons par rappeler la construction et quelques-unes des propriétés des anneaux R, $W_A(R)$ et $W_K(R)$ (pour plus de détails, *voir* [F4], [F-W] et [F2]).

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent. On note $\overline{A}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$, C le complété de $\overline{K}$ et A_C l'anneau des entiers de C.

2.1, Si f désigne l'endomorphisme de l'anneau $\overline{A}/p\overline{A}$ défini par $f(x) = x^p$, on note R la limite projective du diagramme :

$$\overline{A}/p\overline{A} \xleftarrow{f} \overline{A}/p\overline{A} \xleftarrow{f} \dots \xleftarrow{f} \overline{A}/p\overline{A} \xleftarrow{f} \overline{A}/p\overline{A} \xleftarrow{f} \dots .$$

Un élément x de R peut donc être considéré comme la donnée d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\overline{A}/p\overline{A}$ vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$, pour tout n; l'addition et la multiplication se font composante par composante.

Rappelons (*cf.* [F4], chap. V, § 1 et [F-W]) que, si $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in R$, et si on choisit, pour tout n, un relèvement $\hat{x}_n$ de x_n dans $\overline{A}$ (ou dans A_C), alors, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, la suite des $\hat{x}_{n+m}^{p^n}$

converge, pour $n \to +\infty$, vers un élément $x^{(m)} \in A_C$ qui ne dépend pas du choix des relèvements. L'application qui à x associe $(x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$ définit une bijection de R sur l'ensemble des familles $(x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$ d'éléments de A_C qui vérifient $(x^{(m+1)})^p = x^{(m)}$, pour tout m. Si l'on utilise cette bijection pour identifier R à l'ensemble de telles familles, et si $x = (x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$ et $y = (y^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$ sont deux éléments de R, on a :

$$\begin{cases} xy = (x^{(m)} y^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}, \\ x + y = (z^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}} \quad \text{avec} \quad z^{(m)} = \lim\limits_{n \to +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^n}. \end{cases}$$

Soit v la valuation de C normalisée par $v(p) = 1$. Pour tout $x = (x^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$, on pose $v_R(x) = v(x^{(0)})$, Alors v_R est une valuation de R pour laquelle il est complet et R est intégralement clos dans son corps des fractions. Celui-ci est un corps valué complet, de caractéristique p, algébriquement clos, qui est isomorphe au complété d'une clôture algébrique d'un corps local de caractéristique p et de corps résiduel k. Le corps résiduel de R s'identifie au corps résiduel $\bar{k}$ de $\bar{A}$; l'homomorphisme canonique de $\bar{k}$ dans R correspondant est celui qui, à $\varepsilon \in \bar{k}$, associe $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbf{Z}}$, où $\varepsilon^{(m)}$ est le représentant de Teichmüller, dans A_C, de $\varepsilon^{p^{-m}}$.

2.2. Notons W(R) l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R. C'est donc l'ensemble des « vecteurs » de la forme :

$$u = (u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots) \qquad \text{avec} \quad u_n \in R \quad \text{pour tout } n,$$

et l'addition et la multiplication sont données par les formules usuelles (*cf.*, par exemple, [Se2], chap. II, § 6).

L'anneau W(R) est un anneau commutatif, intègre, de caractéristique 0, séparé et complet pour la topologie p-adique.

Pour tout $x \in R$, notons $[x] = (x, 0, \ldots, 0, \ldots)$ son représentant de Teichmüller dans W(R). Le fait que R est parfait implique que tout élément de W(R) s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n [v_n]$, avec les $v_n \in R$ $\Big($on a

$$(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [u_n^{p^{-n}}]\Big).$$

2.3. La structure de k-algèbre de R fait de W(R) une W(k)-algèbre. Nous notons $W_A(R)$ la A-algèbre $A \otimes_{W(k)} W(R)$. C'est encore un anneau commutatif intègre, séparé et complet pour la topologie p-adique et l'application $a \mapsto a \otimes 1$ (resp. $u \mapsto 1 \otimes u$) nous permet d'identifier A [resp. W(R)] à un sous-anneau de $W_A(R)$.

Tout élément de $W_A(R)$ s'écrit alors, d'une manière et d'une seule, sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi^n [u_n], \qquad \text{avec les } u_n \in R.$$

2.4. Soit maintenant $W_K(R)$ la K-algèbre $K \otimes_A W_A(R) = K \otimes_{W(k)} W(R)$. C'est un anneau commutatif intègre, contenant $W_A(R)$; tout élément de $W_K(R)$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum\limits_{n \gg -\infty} \pi^n [u_n]$, avec les $u_n \in R$, presque tous nuls pour $n < 0$.

2.5. On sait (*cf.* [F2], prop. 2.4) que l'application :

$$\theta^0 : \quad W_K(R) \to C,$$

définie par $\theta^0(\sum \pi^n [u_n]) = \sum \pi^n u_n^{(0)}$, est un homomorphisme de K-algèbres; son noyau $W_K^1(R)$ est un idéal principal : si on choisit un élément $x_0 \in R$ tel que $x_0^{(0)} = -\pi$ et si on pose :

$$\xi_0 = [x_0] + \pi,$$

$W_K^1(R)$ est l'idéal engendré par ξ_0.

Notons $\Phi : W_K(R) \to W_K(R)$ l'application qui à $\sum \pi^n [u_n]$ associe $\sum \pi^n [u_n^q]$. C'est un automorphisme de l'anneau $W_K(R)$; ce n'est pas un automorphisme de la structure de A-algèbre, mais c'est une application τ-semi linéaire [on a $\Phi(au) = \tau a . \Phi u$, si $a \in A$, $u \in W_K(R)$]. Autrement dit, Φ est un isomorphisme de la A-algèbre $W_K(R)$ sur $(W_K(R))_\tau$.

2.6. On munit le A-module sous-jacent à $W_K(R)$ d'une structure de module filtré en posant, pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$W_K^i(R) = W_K(R)^i = \begin{cases} W_K(R) & \text{si} \quad i \leqq 0, \\ (W_K^1(R))^i & \text{si} \quad i \geqq 1, \end{cases}$$

[où $(W_K^1(R))^i$ désigne la puissance i-ième de l'idéal $W_K^1(R)$] et $\varphi^i_{W_K(R)}(u) = \pi^{-i} . \Phi u$, pour tout $u \in W_K^i(R)$.

2.7. Notons maintenant $S_{A,\tau,\pi}$ ou plus simplement S s'il n'y a pas de risque de confusion, le sous-ensemble de $W_K(R)$ formé des $\sum \pi^n [u_n]$ qui vérifient :

$$v_R(u_{-m}) \geqq mq . v(\pi) = mq/e \quad \text{pour tout } m > 0.$$

C'est un sous-anneau de $W_K(R)$ contenant $W_A(R)$. Si x est un élément de R tel que $v_R(x) = q/e$, on a $S = W_A(R)[\pi^{-1}[x]]$, plus petit sous-anneau de $W_K(R)$ contenant $W_A(R)$ et $\pi^{-1}[x]$.

Nous munissons le A-*module sous-jacent à* S *d'une structure de module filtré* en posant, pour tout $i \in \mathbf{Z}$:

$$S^i = W_K^i(R) \cap \{ x \in S \mid \Phi x \in \pi^i S \} \qquad \text{et} \qquad \varphi_S^i = \varphi^i_{W_K(R)|S^i}.$$

Cette structure est compatible avec la structure d'anneau [i. e., si $i, j \in \mathbf{Z}$, on a $S^i . S^j \subset S^{i+j}$ et, si $x \in S^i$, $y \in S^j$, on a $\varphi_S^{i+j}(xy) = \varphi_S^i(x) . \varphi_S^j(y)$].

3. Modules filtrés et modules galoisiens

On conserve les hypothèses et notations des paragraphes précédents.

3.1. Le groupe $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ opère sur $\overline{K}$ et $\overline{A}$ et, par continuité, sur C et A_C. Il opère continûment sur l'anneau R muni de la topologie limite projective ou, ce qui revient au même, de la topologie définie par la valuation v_R. Par fonctorialité, il opère aussi sur W(R), $W_A(R)$, $W_K(R)$ et S est stable par G. Comme l'action de G commute à celle de $\mathfrak{D}$, ceci nous permet de considérer S comme un $\mathfrak{D}[G]$-module à gauche. Comme l'action de G commute aussi à celle de A, laisse stable les S^i et commute aux φ_S^i, l'anneau $\mathfrak{D}[G]$ s'envoie dans l'anneau des endomorphismes du module filtré S.

3.2. Soit $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f}$ dont les objets sont les M qui vérifient $\mathrm{M}^0=\mathrm{M}$ et $\mathrm{M}^q=0$. Si :

$$0 \to \mathrm{M}' \to \mathrm{M} \to \mathrm{M}'' \to 0$$

est une suite exacte de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f}$, M est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ si et seulement si M′ et M″ le sont. En particulier, $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ est encore une catégorie abélienne $\mathfrak{O}$-linéaire.

Pour tout objet M de $\underline{\mathrm{MF}}$ (et même de $\mathcal{MF}$) et pour tout entier $i \geqq 0$, l'action de $\mathfrak{O}[\mathrm{G}]$ sur S munit le groupe abélien $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{M}, \mathrm{S}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{MF}}(\mathrm{M}, \mathrm{S})$ d'une structure de $\mathfrak{O}[\mathrm{G}]$-module à gauche. On peut considérer $\mathrm{Ext}^i(\ \ , \mathrm{S})$ comme un foncteur contravariant $\mathfrak{O}$-linéaire de $\underline{\mathrm{MF}}$ dans la catégorie des $\mathfrak{O}[\mathrm{G}]$-modules à gauche.

3.3. Notons $\underline{\mathrm{Rep}}_{/\mathfrak{O}}^{f}(\mathrm{G})$ la catégorie (artinienne $\mathfrak{O}$-linéaire) des $\mathfrak{O}$-modules de longueur finie, munis d'une action linéaire continue de G.

THÉORÈME. — (i) *Pour tout objet* M *de* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ *le* $\mathfrak{O}$*-module sous-jacent à* $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{M}, \mathrm{S})$ *est de longueur finie, égale à la longueur du* A*-module sous-jacent à* M;

(ii) *le foncteur* (*contravariant*) $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}} : \underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q} \to \underline{\mathrm{Rep}}_{/\mathfrak{O}}^{f}(\mathrm{G})$ *est exact et fidèle.*

3.4. REMARQUE. — Il résulte de la démonstration du théorème que, pour tout objet M de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$, M et $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ ont les mêmes facteurs invariants, autrement dit que, en tant que A-module, $\mathrm{A} \otimes_{\mathfrak{O}} \underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ est isomorphe (non canoniquement) à M.

3.5. Notons $\widetilde{\mathcal{MF}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{MF}$ formée des objets tués par π. C'est une sous-catégorie stable par sous-objet et quotient; c'est donc encore une catégorie abélienne, qui est même $\tilde{\mathfrak{O}}$-linéaire (rappelons que $\tilde{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}/\pi\mathfrak{O}$ est le corps résiduel de $\mathfrak{O}$). Notons également $\underline{\tilde{\mathrm{M}}}^q = \underline{\widetilde{\mathrm{MF}}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ formée des objets tués par π; un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ est donc dans $\underline{\tilde{\mathrm{M}}}^q$ si et seulement si le A-module sous-jacent est en fait un k-espace vectoriel.

Notons enfin $\tilde{\mathrm{S}}$ le conoyau de π_{S} dans $\mathcal{MF}$ (rappelons que, pour tout objet M de $\mathcal{MF}$ et tout $a \in \mathfrak{O}$, a_{M} désigne la multiplication par a dans M). On a $\pi_{\tilde{\mathrm{S}}} = 0$ et $\tilde{\mathrm{S}}$ est un objet de $\widetilde{\mathcal{MF}}$.

3.6. PROPOSITION. — *Supposons k algébriquement clos. Si* M *est un objet simple de* $\underline{\tilde{\mathrm{M}}}^q$, *on a* $\dim_k \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}}) = \dim_k \mathrm{M}$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}}) = 0$.

Nous démontrerons cette proposition au paragraphe 5 comme conséquence de la classification des objets simples de $\underline{\tilde{\mathrm{M}}}^q$ qui est l'objet du paragraphe 4. La fin du présent paragraphe est consacrée à la démonstration du théorème 3.3 (en admettant la proposition ci-dessus).

3.7. Pour tout entier $n \geqq 1$, soit S_n le conoyau de π_{S}^n dans $\mathcal{MF}$ (on a donc $\mathrm{S}_1 = \tilde{\mathrm{S}}$). Comme S est un A-module sans torsion, π_{S}^n est un monomorphisme et la suite :

$$0 \to \mathrm{S} \xrightarrow{\pi_{\mathrm{S}}^n} \mathrm{S} \to \mathrm{S}_n \to 0$$

est exacte. Notons $\pi_{S,n}$ l'unique flèche de $\mathcal{MF}$ rendant commutatif le diagramme :

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & S & \xrightarrow{\pi_S^n} & S & \to & S_n & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_S} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{S,n}} & & \\ 0 & \to & S & \xrightarrow{\pi_S^{n+1}} & S & \to & S_{n+1} & \to & 0, \end{array}$$

et posons $S_\infty = \varinjlim S_n$ (la catégorie $\mathcal{MF}$ admet, comme la catégorie des A-modules, des limites inductives).

Notons d'autre part S_E la limite inductive du diagramme :

$$S \xrightarrow{\pi_S} S \xrightarrow{\pi_S} S \ldots S \xrightarrow{\pi_S} S \ldots$$

[en fait S_E est un objet de $\underline{MF}$ et s'identifie à $W_K(R)$]. La multiplication par π est, par construction, inversible dans S_E.

Les diagrammes (1) induisent, par passage à la limite, une suite exacte :

$$(1')\qquad 0 \to S \to S_E \to S_\infty \to 0.$$

3.8. Lemme. — *Pour tout objet* M *de* $\underline{MF}^f_{tor}$ *et pour tout entier* $i \geqq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)$ *s'identifie, canoniquement et fonctoriellement à* $\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{MF}}(M, S)$.

Démonstration. — La suite exacte (1′) induit une suite exacte :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{MF}}(M, S_E) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{MF}}(M, S) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{MF}}(M, S_E).$$

Comme M est de π-torsion, il existe un entier n tel que $\pi^n_M = 0$ et $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{MF}}(M, S_E)$ et $\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{MF}}(M, S_E)$ sont tués par π^n. Mais, comme la multiplication par π est inversible dans S_E, elle l'est aussi dans $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{MF}}(M, S_E)$ et $\mathrm{Ext}^{i+1}_{\mathcal{MF}}(M, S_E)$. Ces deux $\mathfrak{O}$-modules sont donc nuls et le lemme en résulte.

3.9. Lemme. — *Supposons k algébriquement clos. Alors, pour tout objet simple* M *de* $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, *on a* $\lg_{\mathfrak{O}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty) = \lg_A M$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty) = 0$.

Démonstration. — Les objets simples de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$ sont tués par π et sont donc les mêmes que ceux de $\widetilde{\underline{M}^q}$.

Comme Ker π_{S_∞} s'identifie à $\tilde{S}$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, \tilde{S}) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M, \tilde{S})$$

et :

$$\lg_{\mathfrak{O}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty) = \dim_{\mathfrak{O}} \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M, \tilde{S}) = \dim_k M \,(\text{prop. } 3.6) = \lg_A M.$$

Soit T une extension de M par S_∞ dans $\mathcal{MF}$. Comme M est tué par π et comme π_{S_∞} est un épimorphisme, il résulte du lemme du serpent que le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \tilde{S} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} \pi_T \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_\infty \arrow[r] \arrow[d, "\pi_S"] & T \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & S_\infty \arrow[r] & \operatorname{Im} \pi_T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

a ses lignes et ses colonnes exactes. Mais Ker π_T est alors une extension, dans $\widetilde{\mathcal{MF}}$, de M par $\tilde{S}$. Comme, d'après la proposition 3.6, $\operatorname{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M, \tilde{S})=0$, la première ligne est scindée; il en est donc de même de la seconde. Toute extension de M par S_∞ est donc triviale et $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)=0$.

3.10. *Prouvons maintenant le théorème lorsque k est algébriquement clos.* — D'après le lemme 3.8, $\underline{U}_S(M)=\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(M, S)$ s'identifie à $\operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)$. La suite exacte des Ext permet alors de déduire du lemme 3.9, par récurrence sur la longueur des objets de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{\mathrm{tor}}$ que, pour tout M dans $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{\mathrm{tor}}$, on a simultanément :

$$\lg_{\mathfrak{O}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)=\lg_A M \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)=0.$$

Si :

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte courte de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{\mathrm{tor}}$, la suite :

$$0 \to \underline{U}_S(M'') \to \underline{U}_S(M) \to \underline{U}_S(M') \to 0$$

s'identifie à la suite :

$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M'', S_\infty) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M', S_\infty) \to 0$$

et est donc exacte puisque $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(M'', S_\infty)=0$.

Enfin la fidélité résulte formellement de l'exactitude et de ce que $M \neq 0$ implique $\underline{U}_S(M) \neq 0$.

3.11. Enfin, *prouvons le théorème lorsque k n'est pas algébriquement clos.* — Le corps résiduel $\bar{k}$ de $\overline{K}$ est une clôture algébrique de k. Si l'on pose $A'=W(\bar{k})\otimes_{W(k)} A$, l'automorphisme τ se prolonge à A' en posant $\tau(x\otimes a)=\sigma^r x\otimes\tau a$ (où, rappelons-le, σ est le

Frobenius absolu), A′ est encore l'anneau des entiers d'un corps local, et π est encore une uniformisante de A′. On dispose d'un foncteur évident :

$$M \mapsto A' \otimes_A M,$$

de la catégorie $\underline{MF} = \underline{MF}_{A,\tau,\pi}$ dans la catégorie $\underline{MF}' = \underline{MF}_{A',\tau,\pi}$ qui, avec des notations évidentes, se prolonge en un foncteur $\mathfrak{D}$-linéaire exact et fidèle de la catégorie $\mathcal{MF}$ dans la catégorie $\mathcal{MF}'$.

Le plongement canonique de A′ dans A_C nous permet d'identifier $S = S_{A,\tau,\pi}$ et $S' = S_{A',\tau,\pi}$. Si, avec les notations du n° 1.11, $S_\infty = (T_\infty, (T^i_\infty, \alpha^i_{T_\infty}, \beta^i_{T_\infty}, \varphi^i_{T_\infty})_{i \in \mathbf{Z}})$, les A-modules T_∞ et T^i_∞ sont canoniquement des A′-modules et nous permettent d'identifier S_∞ à l'objet correspondant S'_∞ de $\mathcal{MF}'$.

Si M est un objet de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, $M' = A' \otimes_A M$ est, avec des conventions évidentes, un objet de $\underline{MF}'^{f,q}_{tor}$. Se donner un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)$ revient à se donner une famille $(\eta, (\eta^i)_{i \in \mathbf{Z}})$ d'applications A-linéaires :

$$\eta : \quad M \to T_\infty, \qquad \eta^i : \quad M^i \to T^i_\infty,$$

vérifiant certaines conditions de compatibilité. Il revient au même de se donner les applications A′-linéaires :

$$\eta_{A'} : \quad A' \otimes M \to T_\infty, \qquad \eta^i_{A'} : \quad A' \otimes M^i \to T^i_\infty$$

déduites par extension des scalaires. Autrement dit, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}'}(M', S'_\infty)$. Mais, d'après le lemme 3.8, $\underline{U}_S(M)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)$ et $\underline{U}_{S'}(M')$ à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}'}(M', S'_\infty)$. Le théorème résulte alors de son analogue dans le cas où le corps résiduel est algébriquement clos.

4. Les objets simples de $\underline{MF}^f_{tor}$

4.1. On conserve les hypothèses et les notations du paragraphe précédent et on suppose de plus le corps résiduel k algébriquement clos. Pour tout entier s, on note $\mathbf{F}_{p^s}$ l'unique sous-corps de k ayant p^s éléments; en particulier, on a $\mathfrak{O} = \mathbf{F}_{p^r} = \mathbf{F}_q$.

On note $\underline{\tilde{M}} = \widetilde{\underline{MF}}^f_{tor}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}^f_{tor}$ formée des M tels que $\pi_M = 0$, i. e. dont le A-module sous-jacent est un k-espace vectoriel. Les objets simples de $\underline{MF}^f_{tor}$ sont ceux de $\underline{\tilde{M}}$.

4.2. Remarquons que, si M est un module filtré dont le A-module sous-jacent est un k-espace vectoriel, la suite exacte (4) du n° 1.7 montre que $\overline{M} = \mathrm{gr}\, M = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} M^i/M^{i+1}$, de sorte que se donner un objet M de $\underline{\tilde{M}}$ revient à se donner un k-espace vectoriel de dimension finie, munie d'une filtration $(M^i)_{i \in \mathbf{Z}}$, décroissante, exhaustive et séparée, et un isomorphisme :

$$\varphi_M : \quad \mathrm{gr} M \to M_\tau,$$

où, si l'on préfère une application $\varphi_M : \mathrm{gr}M \to M$, bijective, additive et vérifiant $\varphi_M(ax) = a^q \varphi_M(x)$, si $a \in k$, $x \in \mathrm{gr}M$.

4.3. Si Λ est une $\mathbf{F}_q$-algèbre associative et unitaire, nous appelons Λ-*objet* de $\underline{\tilde{M}}$ la donnée d'un objet M de $\underline{\tilde{M}}$ et d'un homomorphisme de Λ dans $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{M}}}(M)$.

Soit h un entier $\geqq 1$ et soit $i : n \mapsto i_n$ une application de $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$. On appelle *période* de l'application i le plus petit entier $m \geqq 1$ tel que $i_{n+m} = i_n$, pour tout $n \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ (où $n+m$ désigne la somme de n et de l'image canonique de m dans $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$); c'est un entier qui divise h.

Si $h \in \mathbf{N}^*$ et si $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, on note $M(h; i)$ ou $M(h; i_0, i_1, \ldots, i_{h-1})$ le module filtré suivant :

— le A-module sous-jacent est $M = k^{\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$;

— si $(e_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ est la base canonique de M, on a :

$$M^i = \bigoplus_{i_m \geqq i} k e_m \quad \text{pour tout } i \in \mathbf{Z};$$

— si $\bar{e}_m$ désigne l'image de e_m dans M^{i_m}/M^{i_m+1}, on a :

$$\varphi_M(\bar{e}_m) = e_{m-1}.$$

Il est clair que $M = M(h; i)$ est un objet de $\underline{\tilde{M}}$; si, pour tout $a \in \mathbf{F}_{q^h}$, on note ν_a l'application k-linéaire de M dans lui-même définie par $\nu_a(e_m) = a^{q^{-m}} e_m$, on voit que $\nu_a \in \mathrm{End}_{\underline{\tilde{M}}}(M)$ et que l'application $a \mapsto \nu_a$ munit $M(h; i)$ d'une structure de $\mathbf{F}_{q^h}$-objet de $\underline{\tilde{M}}$.

4.4. Proposition. — (i) *Pour que* $M(h; i)$ *soit un objet simple de* $\underline{\tilde{M}}$, *il faut et il suffit que la période de l'application i soit égale à h. S'il en est ainsi, l'application* ν *définie ci-dessus est un isomorphisme de* $\mathbf{F}_{q^h}$ *sur* $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{M}}}(M)$.

(ii) *Si* M *est un objet simple de* $\underline{\tilde{M}}$, $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{M}}}(M)$ *est une extension finie de* $\mathbf{F}_q$; *si h est le degré de cette extension et si on choisit un isomorphisme de* $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{M}}}(M)$ *sur* $\mathbf{F}_{q^h}$, *il existe une application* $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, *de période h, et une seule telle que le* $\mathbf{F}_{q^h}$-*objet* M *soit isomorphe à* $M(h; i)$.

4.5. Remarque. — En d'autres termes, l'ensemble des classes d'équivalence, en un sens évident, des couples (J, i') formés d'un espace principal homogène J sous $\mathbf{Z}$ et d'une application périodique $i' : J \to \mathbf{Z}$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme des objets simples de $\underline{\tilde{M}}$: Au couple (J, i'), on associe la classe de $M(h; i)$, où h est la période de i' et où, une fois choisi un point j de J, $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est définie par $i_n = i'_{\hat{n}+j}$ (si $\hat{n}$ désigne un relèvement de n dans $\mathbf{Z}$); les h différents choix de j modulo $h\mathbf{Z}$ correspondent aux différents isomorphismes de $\mathbf{F}_{q^h}$ sur $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{M}}}(M)$.

4.6. Si M est un objet de $\underline{\tilde{M}}$, nous notons $d^0 : M \to \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ l'application définie par :

$$d^0(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0, \\ i & \text{si } x \in M^i - M^{i+1}, \end{cases}$$

et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ l'application définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x=0, \\ \varphi_{\mathrm{M}}(\bar{x}), \text{ où } \bar{x} \text{ est l'image de } x \text{ dans } \mathrm{M}^{d^0(x)}/\mathrm{M}^{d^0(x)+1}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.7. Lemme. — *Soit* M *un objet de* $\underline{\tilde{\mathrm{M}}}$. *Pour qu'un sous-k-espace vectoriel* N *de* M *soit (le sous-espace vectoriel sous-jacent à) un sous-objet de* M, *il faut et il suffit que* $f(\mathrm{N}) \subset \mathrm{N}$.

Démonstration. — Si l'on munit N de la filtration induite par M, grN s'identifie à un sous-k-espace vectoriel de grM et $\varphi_{\mathrm{M}}(\mathrm{grN})$ est le sous-k-espace vectoriel de M_τ engendré par $f(\mathrm{N})$. Si N est un sous-objet de M, on doit avoir $f(\mathrm{N}) \subset \mathrm{N}$; réciproquement, si cette condition est satisfaite, la restriction de φ_{M} à grN, qui est une application k-linéaire injective de grN dans M_τ, a son image contenue dans N_τ; c'est donc un isomorphisme de N sur N_τ et N est bien un sous-objet.

4.8. Lemme. — *Soit* M *un objet non nul de* $\underline{\tilde{\mathrm{M}}}$ *et soit* μ *la dimension du k-espace vectoriel sous-jacent. Il existe un entier h, vérifiant* $1 \leqslant h \leqq \mu$, *tel que l'ensemble des* $x \in \mathrm{M}$ *qui vérifient* $f^h(x)=x$ *ne soit pas réduit à* 0.

Démonstration. — Soit $\mathscr{J}$ l'ensemble des relations de la forme

$$\sum_{j \in \mathrm{J}} a_j f^j(x)=0,$$

où x est un élément non nul de M, J un sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$ et, pour tout $j \in \mathrm{J}$, a_j est un élément non nul de k. Comme M est un k-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{J}$ n'est pas vide.

A tout sous-ensemble fini non vide J de $\mathbf{N}$, on associe le couple $(m_{\mathrm{J}}, n_{\mathrm{J}})$ avec $m_{\mathrm{J}}=\sup_{j \in \mathrm{J}} j$ et $n_{\mathrm{J}}=\operatorname{card} \mathrm{J}$. On munit $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ de l'ordre lexicographique et on choisit une relation de $\mathscr{J}$:

$$\sum_{j \in \mathrm{J}} a_j f^j(x)=0$$

telle que le couple $(m_{\mathrm{J}}, n_{\mathrm{J}})$ soit minimal.

On a certainement $0 \in \mathrm{J}$, car, sinon, si l'on pose $\mathrm{J}-1=\{j-1 \mid j \in \mathrm{J}\}$, on aurait la relation :

$$\sum_{j \in \mathrm{J}-1} a_{j+1} f^j(f(x))=0,$$

et pourtant $m_{\mathrm{J}-1}=m_{\mathrm{J}}-1<m_{\mathrm{J}}$.

Posons $i_0=\inf_{j \in \mathrm{J}} d^0 f^j(x)$. Pour tout $j \in \mathrm{J}$, on a :

$$\varphi_{\mathrm{M}}^{i_0}(f^j(x))=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad d^0 f^j(x)>i_0, \\ f^{j+1}(x) & \text{si} \quad d^0 f^j(x)=i_0, \end{cases}$$

donc, si $J' = \{ j \in J \mid d^0 f^j(x) = i_0 \}$:

$$\sum_{j \in J'} a_j^q f^{j+1}(x) = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{j \in J'} a_j^q f^j(f(x)) = 0,$$

et la minimalité implique que $d^0 f^j(x) = i_0$ pour tout $j \in J$. De la même manière et par récurrence, on en déduit que, pour tout $s \in \mathbf{N}$, il existe un entier i_s tel que $d^0 f^{j+s}(x) = i_s$, pour tout $j \in J$. Donc tout élément de J est une période de la suite $(d^0 f^s(x))_{s \in \mathbf{N}}$; on en déduit que si h désigne le pgcd des éléments de J, on a $d^0 f^{h+s}(x) = d^0 f^s(x)$, pour tout $s \in \mathbf{N}$.

Notons N le sous-k-espace vectoriel engendré par les $f^{hn}(x)$, pour $n \in \mathbf{N}$; si on pose $m_J = hh'$, les $f^{hn}(x)$, pour $0 \leqq n \leqq h'-1$, forment une base de N. Comme tous les $f^{hn}(x)$ sont dans M^{i_0}, $N \subset M^{i_0}$. Si $y \in N \cap M^{i_0+1}$, on a :

$$y = \sum_{n=0}^{h'-1} b_n f^{hn}(x)$$

et :

$$\varphi_M^{i_0}(y) = 0 = \sum_{n=0}^{h'-1} b_n^q f^{hn+1}(x) = \sum_{n=0}^{h'-1} b_n^q f^{hn}(f(x)),$$

et la minimalité implique que tous les b_n^q sont nuls, donc que $y = 0$; autrement dit $N \subset M^{i_0}$ et $N \cap M^{i_0+1} = 0$. On en déduit que $f|_N = \varphi_M^{i_0}|_M$, donc que $f|_N$ est τ-semi-linéaire; par récurrence sur s, on montre de même, que pour tout $s \in \mathbf{N}$, $f^s|_N$ est τ^s-semi-linéaire. En particulier, $f^h|_N$ est une application bijective de N dans N qui est τ^h-semi-linéaire. Il existe donc ([J1], th. 15) $y \in N$ non nul et $a \in k$ tel que $f^h(y) = ay$; comme k est algébriquement clos, on peut, quitte à multiplier y par une constante non nulle, supposer que $f^h(y) = y$. Enfin, comme $hh' = m_J$ et $1 \leqq m_J \leqq \mu$, on a $1 \leqq h \leqq \mu$, d'où le lemme.

4.9. Lemme. — (i) *Soit* $M = M(h; i)$. *Si la période de i est égale à h, l'application* ν *est un isomorphisme de* $\mathbf{F}_{q^h}$ *sur* $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{M}}}(M)$.

(ii) *Soit* $M' = M(h'; i')$. *On a* $\mathrm{Hom}_{\underline{\tilde{M}}}(M', M) \neq 0$ *si et seulement s'il existe un entier m tel que* $i'_n = i_{n+m}$ *pour tout* $n \in \mathbf{Z}$.

(On a noté de la même manière l'application $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ et son composé avec la projection canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$; on a fait de même pour i'.)

Démonstration. — Montrons (ii) : Soit $(e'_m)_{m \in \mathbf{Z}/h'\mathbf{Z}}$ [resp. $(e_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$] la base canonique de M' (resp. M) et pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$, posons $e'_n = e'_{\bar{n}}$ (resp. $e_n = e_{\bar{n}}$), avec $\bar{n}$ l'image de n modulo h' (resp. h).

Soit $\eta \in \mathrm{Hom}_{\underline{\tilde{M}}}(M', M)$ et, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, posons :

$$\eta(e'_n) = \sum_{m=0}^{h-1} a_{m,n} e_m \qquad \text{avec les } a_{m,n} \in k.$$

Pour tout n, soit J_n l'ensemble des m tels que $a_{m,n} \neq 0$. On a $J_{n+h'} = J_n$; comme on doit avoir $\eta(e'_n) \in M^{i'_n}$, on a $m \in J_n \Rightarrow i_m \geqq i'_n$. On doit aussi avoir :

$$\varphi_M^{i'_n}(\eta(e'_n)) = \eta(\varphi_{M'}^{i'_n}(e'_n)),$$

ou encore :

$$\sum_{\substack{m\in J_n\\ i_m=i'_n}} a^q_{m,\,n}\, e_{m-1} = \eta(e'_{n-1}) = \sum a_{m,\,n-1}\, e_m.$$

On en déduit tout d'abord que Card $J_{n-1} \leqq$ Card J_n. Comme $J_{n+h'} = J_n$, on doit donc avoir Card $J_{n-1} =$ Card J_n et ceci implique que $m \in J_n \Rightarrow i_m = i'_n$.

Mais on voit aussi que $J_{n-1} = J_n - 1 = \{m-1 \mid m \in J_n\}$. Donc $m \in J_n \Rightarrow i_{m-1} = i'_{n-1}$. Finalement, on voit que, si $m \in J_0$, alors m appartient à l'ensemble J des m vérifiant $i_{m-s} = i'_{-s}$, pour tout s, ou encore $i_{m+n} = i'_n$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Par conséquent, s'il n'existe pas d'entier m tel que $i_{m+n} = i'_n$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a bien $\mathrm{Hom}_{\underline{\tilde{M}}}(M', M) = 0$. En revanche, si un tel entier m existe, et si on pose $u'h' = uh$, avec u et u' des entiers >0 premiers entre eux, on vérifie immédiatement qu'il existe un homomorphisme non nul $\eta : M' \to M$ et un seul qui satisfait

$$\eta(e'_0) = e_m + e_{m-h'} + e_{m-2h'} + \ldots + e_{m-(u'-1)h'},$$

d'où (ii).

Supposons enfin $M = M'$, $i = i'$ et la période exactement h. On voit que J_0 est alors contenu dans l'ensemble réduit au seul élément 0. On a donc nécessairement $\eta(e_0) = be_0$, avec $b \in k$; on en déduit que l'on doit avoir $\eta(e_{-n}) = b^{q^n} e_{-n}$, pour tout n; en particulier, il faut $b^{q^h} = b$, d'où $b \in \mathbf{F}_{q^h}$ et $\eta = \nu_{b^q}$, d'où l'assertion (i).

4.10. Démontrons maintenant la proposition 4.4. — Soit M un objet simple de $\underline{\tilde{M}}$ et soit μ la dimension du k-espace vectoriel sous-jacent. D'après le lemme 4.8, il existe un entier h vérifiant $1 \leqq h \leqq \mu$ et un élément non nul x de M tel que $f^h(x) = x$. Pour $0 \leqq n \leqq h-1$, posons $i_n = d^0 f^{h-n}(x)$.

Il est clair que l'application k-linéaire :

$$\eta : \quad M' = M(h;\, i_0, i_1, \ldots, i_{h-1}) \to M,$$

qui à e_{-n} associe $f^{\hat{n}}(x)$ (où $\hat{n}$ est un relèvement, dans $\mathbf{N}$, de n), est un morphisme non nul de modules filtrés. Comme M est simple, c'est un épimorphisme et l'application k-linéaire sous-jacente est surjective. Comme $\dim_k M = h \leqq \mu = \dim_k M'$, on a $h = \mu$ et η est un isomorphisme. On a ainsi démontré que *tout objet simple de* $\underline{\tilde{M}}$ *est isomorphe à un* $M(h;\, i)$, *pour h et i convenables.*

Montrons alors l'assertion (i) : Si $M = M(h;\, i)$, M n'est pas simple si et seulement s'il existe un morphisme non nul d'un $M' = M(h';\, i')$ dans M, avec $1 \leqq h' < h$; d'après le lemme 4.9, pour qu'un tel morphisme existe, il faut et il suffit qu'il existe un entier m tel que $i'_n = i_{n+m}$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$; en particulier, i et i' doivent avoir la même période. Donc :

— si la période de i est exactement h, h' doit être un multiple de h : c'est impossible puisque $1 \leqq h' < h$ et M est simple;

— si la période de i est h', avec $h = h'h''$, $h'' \neq 1$, il suffit de prendre $M' = M(h';\, i)$ et M n'est pas simple.

Enfin, le fait que, dans le premier cas, ν est un isomorphisme résulte du (i) du lemme 4.9, d'où (i).

Compte tenu de ce qui précède, l'assertion (ii) est maintenant évidente.

4.11. REMARQUE. — Soit $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ et soit h' la période de i. Soit $i' : \mathbf{Z}/h'\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ l'application déduite de i par passage au quotient. Il est facile de voir que $\mathrm{M}(h; i)$ est isotypique, isomorphe à la somme directe de h/h' copies de $\mathrm{M}(h'; i')$.

5. Inertie modérée : le calcul des $\mathrm{Ext}^i_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}})$ pour $i = 0, 1$

On garde les notations des paragraphes précédents et on suppose encore le corps résiduel k algébriquement clos.

5.1. Pour tout corps commutatif L et tout entier $n \geqq 1$, notons $\boldsymbol{\mu}_n(\mathrm{L})$ le groupe des racines de l'unité, contenues dans L, dont l'ordre divise n.

Si n est premier à p, $\boldsymbol{\mu}_n(\mathrm{K})$ est cyclique d'ordre n et la réduction modulo l'idéal maximal induit un isomorphisme de $\boldsymbol{\mu}_n(\mathrm{K})$ sur $\boldsymbol{\mu}_n(k)$. Si π' est une uniformisante de K (on peut prendre, par exemple, $\pi' = \pi$) et si π_n est une solution, dans $\overline{\mathrm{K}}$, de l'équation $\mathrm{X}^n = \pi'$, $\mathrm{K}(\pi_n)$ est l'unique extension de K de degré n contenue dans $\overline{\mathrm{K}}$; l'application :

$$\eta_n : \quad \mathrm{G} \to \mathrm{K}^*,$$

définie par $g(\pi_n) = \eta_n(g).\pi_n$, est un homomorphisme de G sur $\boldsymbol{\mu}_n(\mathrm{K})$, qui ne dépend ni du choix de π' ni de celui de π_n.

Si maintenant $n = q^h - 1$, avec h entier $\geqq 1$, $\boldsymbol{\mu}_n(k)$ s'identifie au groupe multiplicatif $F^*_{q^h}$ et nous appelons *caractère fondamental de niveau h* le caractère :

$$\chi_h : \quad \mathrm{G} \to \mathbf{F}^*_{q^h}$$

composé de $\eta_{q^h-1} : \mathrm{G} \to \boldsymbol{\mu}_{q^h-1}(\mathrm{K})$ avec l'isomorphisme canonique de $\boldsymbol{\mu}_{q^h-1}(\mathrm{K})$ sur $\mathbf{F}^*_{q^h}$.

5.2. Si h est un entier $\geqq 1$, si $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ et si $\mathrm{M} = \mathrm{M}(h; i)$, $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ s'identifie, d'après le lemme 3.8, à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(\mathrm{M}, \mathrm{S}_\infty)$ qui est égal à $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}})$, puisque M est un objet de $\widetilde{\mathcal{MF}}$. En outre le plongement de $\mathbf{F}_{q^h}$ dans $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{\mathrm{M}}}}(\mathrm{M})$ (*cf.* n° 4.3) induit, par fonctorialité, une structure de $\mathbf{F}_{q^h}$-espace vectoriel sur $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$.

Comme, d'après la proposition 4.4, tout objet simple de $\underline{\tilde{\mathrm{M}}}$ est isomorphe à un $\mathrm{M}(h; i)$ avec i de période h, le théorème suivant entraîne la proposition 3.6 :

5.3. THÉORÈME. — *Soit $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ une application de période h telle que $0 \leqq i_n \leqq q-1$ pour tout n et soit $\mathrm{M} = \mathrm{M}(h; i)$. Alors :*

(i) *on a* $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}}) = 0$;

(ii) *le $\mathbf{F}_{q^h}$-espace vectoriel* $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{S}})$ *est de dimension* 1;

(iii) *on a* $gu = \chi_h(g)^{i_0 + qi_1 + \ldots + q^{h-1} i_{h-1}}.u$, *pour tout* $g \in \mathrm{G}$ *et tout* $u \in \underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$.

La démonstration de ce théorème, qui ne consiste qu'à calculer tout explicitement, est techniquement horriblement compliquée. Indiquons-en les grandes lignes :

— on commence (lemme 5.4) par donner une description détaillée de l'anneau S;

— on montre ensuite (n° 5.5) que, pour démontrer le théorème, on peut remplacer $\tilde{S}$, objet de $\widetilde{\mathcal{MF}}$, par un objet $\tilde{T}$ de la catégorie plus maniable $\underline{\widetilde{MF}}$; le k-espace vectoriel sous-jacent à $\tilde{T}$ n'est autre que la réduction modulo π de S;

— on donne ensuite (n° 5.7 à 5.9) une description explicite de $\tilde{T}$: c'est un anneau de polynômes en une variable ξ à coefficients dans l'anneau $\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}$, où $\overline{A}^{\vee}$ est la A-algèbre déduite de $\overline{A}$ par l'extension des scalaires τ;

— on commence alors (n° 5.10) la démonstration proprement dite du théorème : on ramène les points (i) et (ii) à la résolution de congruences modulo π dans $\overline{A}$; le cas où $M=M(1;\, q-1)$ se distingue des autres et son étude est repoussée au n° 5.14;

— aux n°s 5.11 et 5.12, on montre que, lorsque $M\neq M(1;\, q-1)$, ces congruences sont en fait équivalentes à des équations dans $\overline{A}$, que l'on résout ;

— au n° 5.13, on démontre (iii), toujours en supposant $M\neq M(1;\, q-1)$;

— au n° 5.14, enfin, on étudie le cas $M=M(1;\, q-1)$.

Au passage (n° 5.8), on aura muni $\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}$ d'une structure d'objet de $\underline{\widetilde{MF}}$; on remarquera dans les n°s 5.11 à 5.13 que, *si* $M\neq M(1;\, q-1)$, *on a aussi* $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M,\, \overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})=0$ *et* que *l'application de* $\tilde{T}$ *dans* $\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}$ *qui à* $\sum c_j\xi^j$ *associe* c_0, bien que n'étant pas un morphisme de $\underline{\widetilde{MF}}$, *induit un isomorphisme de* $\underline{U}_S(M)=\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M,\, \tilde{T})$ *sur* $\mathrm{Hom}_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M,\, \overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})$.

5.4. Lemme. — *Soit* $x_0\in R$ *tel que* $x_0^{(0)}=-\pi$ *et soit* $\xi_0=[x_0]+\pi$. *On a* $S=W_A(R)[\pi^{-1}\xi_0^q]$. *Pour* $0\leqq i<q$, *on a* $S^i=W_K^i(R)\cap S$ *et* S^i *est l'idéal de* S *engendré par* ξ_0^i *et* $\pi^{-1}\xi_0^q$; *si* $\eta=\pi^{-1}[x_0^q]+1$, *on a* $\varphi_S^i(\xi_0^i)=\eta^i$ *et* $\varphi_S^i(\pi^{-1}\xi_0^q)=\pi^{q-1-i}\eta^q$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que $\Phi(S)\subset S$ et que, en particulier, on a bien $S^0=S$.

On voit que $\pi^{-1}\xi_0^q-\pi^{-1}[x_0^q]\in\pi.W_A(R)$, donc $\eta\in S$ et, comme

$$v_R(x_0^q)=q.v_R(x_0)=q.v(\pi),$$

on a bien, d'après le n° 7, $S=W_A(R)\,[\pi^{-1}\,\xi_0^q]$.

Supposons $1\leqq i<q$. Il est clair que $W_A(R)\cap W_K^i(R)=\xi_0^i\,W_A(R)$. Comme $\pi^{-1}\xi_0^q\in W_K^i(R)$, $W_K^i(R)\cap S$ est l'idéal de S engendré par ξ_0^i et $\pi^{-1}\xi_0^q$. Si $u\in W_K^i(R)\cap S$, on peut l'écrire $u=u'.\xi_0^i+u''.\pi^{-1}\xi_0^q$, avec $u',\, u''\in S$; si on pose $\varphi^i=\varphi^i_{W_K}(R)$, on a :

$$\varphi^i(u)=\Phi(u').\varphi^i(\xi_0^i)+\Phi(u'').\varphi^i(\pi^{-1}\xi_0^q)$$

et il suffit, pour achever la démonstration du lemme, de calculer $\varphi^i(\xi_0^i)$ et $\varphi^i(\pi^{-1}\xi_0^q)$.

Mais $\Phi(\xi_0)=[x_0^q]+\pi=\pi\eta$. Donc

$$\varphi^i(\xi_0^i)=\pi^{-i}.\Phi(\xi_0^i)=\pi^{-i}.(\Phi\,\xi_0)^i=\pi^{-i}.(\pi\eta)^i=\eta^i\in S$$

et

$$\varphi^i(\pi^{-1}\xi_0^q)=\pi^{-i-1}.(\Phi\,\xi_0^q)=\pi^{q-i-1}\,\eta^q\in S$$

puisque $i<q$.

5.5. Si, avec les notations du n° 3.11, on a :

$$S_\infty=(T_\infty,\, (T_\infty^i,\, \alpha^i_{T_\infty},\, \beta^i_{T_\infty},\, \varphi^i_{T_\infty})_{i\in\mathbf{Z}})\qquad\text{et}\qquad \tilde{S}=(\tilde{T},\, (\tilde{T}^i,\, \alpha^i_{\tilde{T}},\, \beta^i_{\tilde{T}},\, \varphi^i_{\tilde{T}})_{i\in\mathbf{Z}})$$

le fait que $S^i = W_K^i(R) \cap S$ pour $i<q$, implique que, toujours pour $i<q$, les applications $\alpha_{T_\infty}^{i-1}$, $\beta_{T_\infty}^i$, $\alpha_{\tilde{T}}^{i-1}$, $\beta_{\tilde{T}}^i$ sont injectives. Nous nous en servons pour identifier la suite des T_∞^i (resp. $\tilde{T}^i$), pour $i<q$, à une suite décroissante de sous-A-modules (resp. sous-k-espaces vectoriels) de T_∞ (resp. $\tilde{T}$) (les applications $\alpha_{T_\infty}^{i-1}$, $\beta_{T_\infty}^i$, $\alpha_{\tilde{T}}^{i-1}$, $\beta_{\tilde{T}}^i$ devenant alors les inclusions naturelles).

Par abus de langage, nous notons T_∞ (resp. $\tilde{T}$) l'objet de $\underline{MF}$ (resp. de la sous-catégorie pleine $\widetilde{\underline{MF}}$ de $\underline{MF}$ formée des objets M tels que $\pi_M=0$) défini par :

– le A-module sous-jacent est T_∞ (resp. $\tilde{T}$);

– la filtration est donnée par :

$$\mathrm{Fil}^i T_\infty = \begin{cases} T_\infty^i & \text{si } i<q \\ 0 & \text{si } i \geqq q \end{cases} \left(\text{resp. } \mathrm{Fil}^i \tilde{T} = \begin{cases} \tilde{T}^i & \text{si } i<q \\ 0 & \text{si } i \geqq q \end{cases} \right);$$

– pour $i<q$, les applications $\varphi_{T_\infty}^i$ (resp. $\varphi_{\tilde{T}}^i$) sont celles qui ont déjà été définies.

Compte tenu de ce que, pour tout objet M de $\underline{MF}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$, on a $M^q=0$ et de ce que $\underline{U}_S(M)$ s'identifie (lemme 3.8) à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty)$, la proposition suivante est évidente :

PROPOSITION (i) *Pour tout objet* M *de* $\underline{MF}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$, $\underline{U}_S(M)$ *s'identifie, canoniquement et fonctoriellement à* $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, T_\infty)$.

(ii) *Si* M *est un objet de* $\underline{M}^q = \underline{MF}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$, $\underline{U}_S(M)$ *s'identifie, canoniquement et fonctoriellement, à* $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, \tilde{T})$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M, \tilde{S})$ *à* $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(M, \tilde{T})$.

En particulier, on peut, pour démontrer le théorème 5.3, remplacer $\tilde{S}$ par $\tilde{T}$.

5.6. REMARQUE. – On voit que le A-module sous-jacent à T_∞ s'identifie, avec son action de G, à $W_K(R)/S = K \otimes_A S/S$.

5.7. LEMME. – *Soit* $\alpha = \sum_{j=0}^{m} [u_j].(\pi^{-1}\xi_0^q)^j$, *avec* $u_0, u_1, \ldots, u_m \in R$. *Pour que* $\alpha \in \pi.S$, *il faut et il suffit que tous les* u_j *appartiennent à l'idéal de* R *engendré par* x_0^q.

Démonstration. – Comme $\pi^{-1}\xi_0^q - \pi^{-1}[x_0^q] \in \pi.W_A(R)$, on a $\alpha \in \pi S$ si et seulement si :

$$\alpha' = \sum_{j=0}^{m} [u_j].(\pi^{-1}[x_0^q])^j = \sum_{j=0}^{m} \pi^{-j}.[u_j x_0^{jq}] \in \pi S.$$

Comme tout élément de $W_K(R)$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{n \gg -\infty} \pi^n.[y_n]$, avec les $y_n \in R$, il résulte de la définition de S que $\alpha' \in \pi S$ si et seulement si :

$v_R(u_j x_0^{jq}) \geqq (j+1).q.v(\pi)$ pour tout j, ou encore si

$v_R(u_j) \geqq q.v(\pi) = v_R(x_0^q)$, pour tout j.

5.8. Notons $\overline{A}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$ et, pour tout nombre réel $t \geqq 0$, $\mathfrak{a}^t$ l'idéal de $\overline{A}$ formé des éléments de valuation $\geqq q^{-1}.t.v(\pi)$.

Nous notons $\overline{A}^{\vee}$ la A-algèbre déduite de $\overline{A}$ par l'extension des scalaires τ. Nous utilisons l'application $x \mapsto 1 \otimes x$ pour identifier l'anneau sous-jacent à $\overline{A}$ à celui qui est sous-jacent à $\overline{A}^{\vee}$; la multiplication par $a \in A$ dans $\overline{A}^{\vee}$ est alors la multiplication par $\tau^{-1}(a)$ dans $\overline{A}$.

Nous munissons la A-algèbre $\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}$ (qui, en tant qu'anneau s'identifie à $\overline{A}/\pi\overline{A}$) d'*une structure de* A-*module filtré* de la manière suivante :

– pour tout $i \in \mathbf{N}$, $(\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^i$ est l'image de $\mathfrak{a}^i$ dans $\overline{A}/\pi\overline{A}$ (on a donc $(\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^i = 0$ si $i \geqq q$) :

– si $0 \leqq i < q$ et si $x \in (\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^i$, on choisit un relèvement $\hat{x}$ de x dans $\overline{A}$ et $\varphi^i_{\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}}(x)$ est l'image de $\pi^{-i}\hat{x}^q$ dans $\overline{A}/\pi\overline{A}$ (cela ne dépend pas du choix du relèvement).

5.9. L'application de $W_A(R)$ dans $R/R\,x_0^q$, qui envoie $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^n [u_n]$ sur l'image de u_0 dans $R/R\,x_0^q$ est un homomorphisme d'anneaux. L'application de R dans l'anneau A_C des entiers de C, qui à x associe $x^{(r)}$ (*cf.* n° 2.1) induit, par passage aux quotients, un isomorphisme de $R/R\,x_0^q$ sur $\overline{A}/\pi\overline{A}$, puisque :

$$(x_0^q)^{(r)} = (x_0^{(r)})^q = x_0^{(0)} = -\pi.$$

Nous notons $\rho : W_A(R) \to \overline{A}/\pi\overline{A}$ l'homomorphisme obtenu en composant les deux homomorphismes précédents. On voit que l'on peut considérer ρ comme un homomorphisme de A-algèbres de $W_A(R)$ dans $\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}$. On prolonge ρ en un homomorphisme de la A-algèbre S dans la A-algèbre $(\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})[\xi]$ des polynômes en la variable ξ à coefficients dans la A-algèbre $\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}$, en posant $\rho(\pi^{-1}\xi_0^q) = \xi$; d'après le lemme 5.5, ρ est bien défini. On voit que ρ induit un isomorphisme de A-algèbres :

$$\tilde{\rho} : \quad \tilde{T} \to (\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})[\xi];$$

nous nous en servons pour identifier $\tilde{T}$ à $(\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})[\xi]$.

On voit alors que :

– pour $0 \leqq i < q$, $\tilde{T}^i$ est l'idéal de $\tilde{T} = (\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})[\xi]$ engendré par $(\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^i$ et ξ; si $x = \lambda_0 + \lambda_1\xi + \ldots + \lambda_n\xi^n \in \tilde{T}^i$, on a :

$$\varphi^i_{\tilde{T}}(x) = \begin{cases} \varphi^i_{\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}}(\lambda_0).(1+\xi)^i & \text{si} \quad i \neq q-1, \\ \varphi^{q-1}_{\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}}(\lambda_0).(1+\xi)^{q-1} + \lambda_1^q.(1+\xi)^q & \text{si} \quad i = q-1; \end{cases}$$

– si $g \in G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, on a $g(x_0^{(0)}) = x_0^{(0)}$ (car $x_0^{(0)} = -\pi$), d'où l'on déduit que, si l'on pose $gx_0 = \varepsilon(g).x_0$, on a $v_R(\varepsilon(g)-1) \geqq p/(p-1)$; il en résulte facilement que $g(\pi^{-1}\xi_0^q) - \pi^{-1}\xi_0^q \in \pi S$; l'action de G sur $\tilde{T}$, qui est compatible avec la structure d'anneau, est donc l'action évidente sur $\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee}$ et l'action triviale sur ξ.

On a donc obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Le module filtré* $\tilde{\mathrm{T}}$ *s'identifie (en tant que k-espace vectoriel) à l'anneau* $(\bar{\mathrm{A}}^{\nu}/\pi\bar{\mathrm{A}}^{\nu})[\xi]$ *des polynômes en la variable* ξ *à coefficients dans* $\bar{\mathrm{A}}^{\nu}/\pi\bar{\mathrm{A}}^{\nu}$. *Pour* $i \leqq 0$, *on a* $\tilde{\mathrm{T}}^{i}=\tilde{\mathrm{T}}$, *et, pour* $0<i<q$, $\tilde{\mathrm{T}}^{i}$ *est l'idéal de* $\tilde{\mathrm{T}}$ *engendré par* $(\bar{\mathrm{A}}^{\nu}/\pi\bar{\mathrm{A}}^{\nu})^{i}$ *et* ξ. *En outre* :

(i) *on a* :

$$\varphi^{i}_{\tilde{\mathrm{T}}}(\sum \lambda_j \xi^j)=\begin{cases} \varphi^{i}_{\bar{\mathrm{A}}^{\nu}/\pi\bar{\mathrm{A}}^{\nu}}(\lambda_0).(1+\xi)^{i} & si \quad 0 \leqq i \leqq q-1, \\ \varphi^{q-1}_{\bar{\mathrm{A}}^{\nu}/\pi\bar{\mathrm{A}}^{\nu}}(\lambda_0).(1+\xi)^{i}+\lambda_1^{q}.(1+\xi)^{q} & si \quad i=q-1; \end{cases}$$

(ii) *on a* :

$$g(\sum \lambda_j \xi^j)=\sum g(\lambda_j).\xi^j, \textit{ pour tout } g \in \mathrm{G}.$$

5.10. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.3. — Rappelons (*cf.* n° 5.5) que l'on peut remplacer $\tilde{\mathrm{S}}$ par $\tilde{\mathrm{T}}$.

Soit :

$$0 \to \tilde{\mathrm{T}} \to \Lambda \to \mathrm{M} \to 0$$

une extension de M par $\tilde{\mathrm{T}}$ dans $\widetilde{\mathscr{M}\mathscr{F}}$. Il est clair que Λ est en fait, comme M et $\tilde{\mathrm{T}}$, un objet de $\underline{\widetilde{\mathrm{MF}}}$.

Soit $(e_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ la base canonique de M. On a $d^0(e_m)=i_m$ et on peut choisir un relèvement $\hat{e}_m$ de e_m appartenant à Λ^{i_m}. On a $\varphi^{i_m}_{\Lambda}(\hat{e}_m)=\hat{e}_{m-1}-d_{m-1}$, avec $d_{m-1} \in \tilde{\mathrm{T}}$. L'extension est triviale si et seulement si l'on peut trouver des $u_m \in \tilde{\mathrm{T}}^{i_m}$ tels que, pour tout m, on ait $\varphi^{i_m}_{\Lambda}(\hat{e}_m+u_m)=\hat{e}_{m-1}+u_{m-1}$, ou encore si et seulement si l'on peut résoudre le système :

$$(1) \quad \begin{cases} (a) \ u_m \in \tilde{\mathrm{T}}^{i_m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}, \\ (b) \ \varphi^{i_m}_{\tilde{\mathrm{T}}}(u_m)-u_{m-1}=d_{m-1} \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Soit maintenant $u \in \mathrm{Hom}_{\underline{\widetilde{\mathrm{MF}}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{T}})$. C'est une application k-linéaire qui est déterminée par les $u_m=u(e_m)$, pour $m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$; dire que u est un morphisme de modules filtrés équivaut à dire que, pour tout $m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, on a $u_m \in \tilde{\mathrm{T}}^{i_m}$ et $\varphi^{i_m}_{\tilde{\mathrm{T}}}(u_m)=u_{m-1}$. Autrement dit, $\mathrm{Hom}_{\underline{\widetilde{\mathrm{MF}}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{T}})$ s'identifie à l'ensemble des solutions de (1) avec tous les d_m nuls.

Pour montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathscr{M}\mathscr{F}}}(\mathrm{M}, \tilde{\mathrm{T}})=0$, il suffit donc de montrer que le système (1) a une solution quels que soient les $d_m \in \tilde{\mathrm{T}}$. Pour montrer que $\dim_{\mathbf{F}_{q^h}} \underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})=1$, il suffit de montrer que, si les d_m sont tous nuls, alors le système (1) a exactement q^h solutions.

En utilisant la $\mathbf{F}_q$-linéarité des applications $\varphi^{i_m}_{\tilde{\mathrm{T}}}$, on se ramène au cas où tous les d_m sont nuls sauf peut-être un.

A une permutation circulaire près des e_m, le système à résoudre s'écrit alors (avec $d \in \tilde{\mathrm{T}}$) :

$$(1') \qquad u_m \in \tilde{\mathrm{T}}^{i_m} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_{\tilde{\mathrm{T}}}^{i_m}(u_m) - u_{m-1} = 0 & \text{si} \quad m \neq 1, \\ \varphi_{\tilde{\mathrm{T}}}^{i_1}(u_1) - u_0 = d. \end{cases}$$

D'après la proposition 5.9, d s'écrit $d = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \xi^j$, avec les $d_j \in \overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}}$, presque tous nuls, et on cherche des u_m de la forme :

$$u_m = a_m + b_m \xi + \sum_{j=2}^{\infty} c_{m,j} \xi^j \qquad \text{avec} \quad a_m, b_m, c_{m,j} \in \overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}},$$

les $c_{m,j}$ presque tous nuls et $a_m \in (\overline{\mathrm{A}}^{\vee}/\pi\overline{\mathrm{A}}^{\vee})^{i_m}$ (rappelons que l'on a identifié les *anneaux* $\overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{A}}^{\vee}/\pi\overline{\mathrm{A}}^{\vee}$).

Posons :

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqq i < q-1, \\ 1 & \text{si} \quad i = q-1. \end{cases}$$

Si l'on pose $\varphi^i = \varphi^i_{\overline{\mathrm{A}}^{\vee}/\pi\overline{\mathrm{A}}^{\vee}}$, on a :

$$\varphi_{\tilde{\mathrm{T}}}^{i_m}(u_m) = \varphi^{i_m}(a_m).(1+\xi)^{i_m} + \varepsilon(i_m).b_m^q.(1+\xi)^q.$$

En identifiant les coefficients des ξ^i, le système (1′) devient :

($1'_0$) *en degré* 0 :

$$\begin{cases} \varphi^{i_m}(a_m) + \varepsilon(i_m).b_m^q - a_{m-1} = 0 & \text{si} \quad m \neq 1, \\ \varphi^{i_1}(a_1) + \varepsilon(i_1).b_1^q - a_0 = d_0, \end{cases}$$

($1'_1$) *en degré* 1 :

$$\begin{cases} i_m.\varphi^{i_m}(a_m) - b_{m-1} = 0 & \text{si} \quad m \neq 1, \\ i_1.\varphi^{i_1}(a_1) - b_0 = d_1, \end{cases}$$

($1'_j$) *en degré* $j \geqq 2$ *et* $\neq q$:

$$\begin{cases} \binom{i_m}{j}.\varphi^{i_m}(a_m) - c_{m-1,j} = 0 & \text{si} \quad m \neq 1, \\ \binom{i_1}{j}.\varphi^{i_1}(a_1) - c_{0,j} = d_j, \end{cases}$$

($1'_q$) *en degré* q :

$$\begin{cases} \varepsilon(i_m).b_m^q - c_{m-1,q} = 0 & \text{si} \quad m \neq 1, \\ \varepsilon(i_1).b_1^q - c_{0,q} = d_q. \end{cases}$$

Les équations, pour $j \geqq 2$, permettent de calculer les $c_{m,j}$ en fonction des a_m et des b_m; il suffit donc d'étudier les équations $(1'_0)$ et $(1'_1)$.

Le système qui reste est encore $\mathbf{F}_q$-linéaire en les a_m et b_m; on peut donc le résoudre en supposant d'abord que $d_1=0$, puis que $d_0=0$. Or, si l'on pose $b'_0=b_0+d_1$, on ramène, à une permutation circulaire près des équations, le cas $d_0=0$ au cas $d_1=0$. Pour prouver les assertions (i) et (ii) du théorème, il suffit donc de démontrer le lemme suivant :

5.11. Lemme. — *Pour tout $d \in \overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}}$, le système :*

$$(2)\quad \begin{cases} (a) & a_m \in (\overline{\mathrm{A}}^{\vee}/\pi\overline{\mathrm{A}}^{\vee})^{i_m} \quad \textit{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}, \\ (b) & \begin{cases} \varphi^{i_m}(a_m)+\varepsilon(i_m).b_m^q-a_{m-1}=0 & \textit{si} \quad m \neq 1, \\ \varphi^{i_1}(a_1)+\varepsilon(i_1).b_1^q-a_0=d, \end{cases} \\ (c) & i_m.\varphi^{i_m}(a_m)-b_{m-1}=0 \quad \textit{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}, \end{cases}$$

a des solutions. Si $d=0$, il en a exactement q^h.

Démonstration pour $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}(1;\, q-1)$. — Choisissons un relèvement $\hat{d}$ de d dans $\overline{\mathrm{A}}$.

(i) Montrons l'*existence d'une solution du système* (2) *lorsque* $i_0 \neq q-1$ *ou* $i_1=0$ *ou* $v(\hat{d}) \geqq q^{-1}.v(\pi)$: Considérons le système d'équations :

$$(3)\quad \begin{cases} \pi^{-i_m}.\mathrm{X}_m^q-\mathrm{X}_{m-1}=0 & \text{si} \quad m \neq 1, \\ \pi^{-i_1}.\mathrm{X}_1^q-\mathrm{X}_0=\hat{d}. \end{cases}$$

L'élimination des X_m, pour $m \neq 0$, conduit, en posant :

$$i=i_1+qi_2+\ldots+q^{h-2}i_{h-1}+q^{h-1}i_0,$$

à $\pi^{-i}.\mathrm{X}_0^{q^h}-\mathrm{X}_0=\hat{d}$, ou encore à :

$$(4)\qquad \mathrm{X}_0^{q^h}-\pi^i.\mathrm{X}_0-\pi^i.\hat{d}=0.$$

Il est immédiat que l'on peut trouver, dans $\overline{\mathrm{A}}$, une solution $\hat{a}_0$ de (4) vérifiant $v(\hat{a}_0) \geqq q^{-h}.(i.v(\pi)+v(\hat{d}))$.

Avec $\hat{a}_h=\hat{a}_0$ et $i_h=i_0$, posons, pour $m=h-1,\, h-2,\, \ldots,\, 1$, $\hat{a}_m=\pi^{-i_{m+1}}.\hat{a}_{m+1}^q$. Les $\hat{a}_m$ fournissent une solution de (3) et l'on voit que, pour $m=h,\, h-1,\, \ldots,\, 1$:

$$v(\hat{a}_m) \geqq q^{-h}.(q^{h-m}i_1+q^{h-m+1}i_2+\ldots+q^{h-1}i_m).v(\pi)+q^{-m}.v(\hat{d}).$$

Pour $m=0,\, 1,\, \ldots,\, h-1$, posons $\hat{b}_m=i_{m+1}.\pi^{-i_{m+1}}.\hat{a}_{m+1}^q$. Pour $m=1,\, 2,\, \ldots,\, h-1$, on a :

$$v(\hat{b}_m) \geqq q^{-h}.(q^{h-m}i_1+\ldots+q^{h-1}i_m).v(\pi) \text{ et} \qquad v(\varepsilon(i_m).\hat{b}_m^q) \geqq v(\pi).$$

On a $\hat{b}_0=i_1.\pi^{-i_1}.\hat{a}_1^q$ et $\varepsilon(i_0).\hat{b}_0^q=0$ si $i_0 \neq q-1$ ou si $i_1=0$; si $v(\hat{d}) \geqq q^{-1}.v(\pi)$, on a :

$$v(\hat{b}_0) \geqq -i_1.v(\pi)+q.v(\hat{a}_1) \geqq v(\hat{d}) \qquad \text{et} \qquad v(\varepsilon(i_0).\hat{b}_0^q) \geqq v(\pi).$$

Il est alors clair que, par réduction modulo π, les $\hat{a}_m$ et les $\hat{b}_m$ fournissent une solution de (2).

(ii) Montrons l'*existence d'une solution de* (2) *lorsque l'on a simultanément* $i_0 = q-1$, $i_1 \neq 0$ et $v(\hat{d}) < q^{-1}.v(\pi)$: Choisissons $\hat{d}' \in \overline{A}$ tel que $\hat{d} = \pi^{-i_1}(\hat{d}')^q$ et notons d' l'image de $\hat{d}'$ dans $\overline{A}/\pi\overline{A}$; on a donc $d' \in (\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^{i_1}$.

Pour $m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, posons :

$$\begin{cases} a'_m = a_m & \text{si} \quad m \neq 1, \\ a'_1 = a_1 - d', \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} b'_m = b_m & \text{si} \quad m \neq 0, \\ b'_0 = b_0 - i_1 . \varphi^{i_1}(d') = b_0 - i_1 d. \end{cases}$$

On voit que le système (2) est remplacé par le système :

$$(2') \quad \begin{cases} (a) & a'_m \in (\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^{i_m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}, \\ (b) & \varphi^{i_m}(a'_m) + \varepsilon(i_m).b'^q_m - a'_{m-1} = \begin{cases} d' & \text{si} \quad m=2, \\ (i_1 d)^q & \text{si} \quad m=0, \\ 0 & \text{si} \quad m \neq 0, 2, \end{cases} \\ (c) & i_m . \varphi^{i_m}(a'_m) - b'_{m-1} = 0 \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}. \end{cases}$$

En utilisant la linéarité du système, on est ramené à résoudre successivement :

– le même système où l'on remplace $-(i_1 d)^q$ par 0;

– puis le même système où l'on remplace d' par 0.

Le premier est, à une permutation circulaire près des i_m, un système du type (2) où d est remplacé par d'; comme $i_1 \neq 0$, *on a* $v(d') \geqq q^{-1}.v(\pi)$ et, d'après (i), ce système a une solution.

Le second est, à une permutation circulaire près des i_m, un système du type (2), mais c'est maintenant i_{h-1} qui joue le rôle de i_0; si $i_{h-1} \neq q-1$, on peut appliquer (i) et on a une solution; sinon on recommence la même opération un certain nombre de fois; l'entier i_0 est remplacé successivement par $i_{h-1}, i_{h-2}, \ldots$ Comme $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}(1; q-1)$, il existe un entier m tel que $i_m \neq q-1$; on finit donc par se ramener à un système du type (2) avec $i_0 \neq q-1$, et on peut appliquer (i).

(iii) *Montrons que, si* $d=0$, *alors* (2) *a exactement* q^h *solutions* : Comme les i_m ne sont pas tous égaux à $q-1$, on peut, quitte à faire une permutation circulaire des i_m, supposer que $i_0 \neq q-1$. Choisissons des relèvements de $\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ compris entre $-h+1$ et 0. Soit $(a_m, b_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ une solution de (2). Alors les $\varepsilon(i_m).b^q_m$ sont tous nuls : en effet, sinon soit n le plus grand entier tel que $\varepsilon(i_n).b^q_n \neq 0$; on a $i_n = q-1$ donc $n<0$ et $a_n \in (\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^{q-1}$; comme $b_n = i_{n+1}.\varphi^{n+1}(a_{n+1})$ et $\varphi^{i_{n+1}}(a_{n+1}) = a_n$ (puisque $b_{n+1}=0$), on a aussi $b_n \in (\overline{A}^{\vee}/\pi\overline{A}^{\vee})^{q-1}$ et $b^q_n = 0$.

Autrement dit le système à résoudre se réduit à :

$$(5) \qquad a_m \in (\overline{A}^{\nu}/\pi\overline{A}^{\nu})^{i_m} \quad \text{et} \quad \varphi^{i_m}(a_m) = a_{m-1} \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z},$$

les b_m étant ensuite déterminés par :

$$b_m = i_{m+1} \cdot \varphi^{i_{m+1}}(a_{m+1}).$$

Pour achever la démonstration, il suffit donc de prouver le lemme suivant :

5.12. Lemme. — *Supposons* $M \neq M(1; q-1)$. *Alors*:

(i) *la réduction modulo* π *induit une bijection de l'ensemble des solutions du système* :

$$(\hat{5}) \qquad \hat{a}_m \in \overline{A}, \quad \hat{a}_m^q = \pi^{i_m} . \hat{a}_{m-1} \quad \textit{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}.$$

sur l'ensemble des solutions de (5);

(ii) *le système* $(\hat{5})$ *a exactement* q^h *solutions.*

Démonstration de (i). — Il est clair que (i) revient à prouver que, pour tout entier $n \geqq 1$, si $(x_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ sont des éléments de $\overline{A}$ vérifiant :

$$x_m^q \equiv \pi^{i_m} . x_{m-1} \pmod{\pi^{i_m+n}\overline{A}},$$

il existe des $y_m \in \overline{A}$ tels que :

$$(x_m + \pi^n y_m)^q \equiv \pi^{i_m}(x_{m-1} + \pi^n y_{m-1}) \pmod{\pi^{i_m+n+1}\overline{A}},$$

et que ces y_m sont uniquement déterminés modulo π.

Un calcul simple montre que, modulo $\pi^{i_m+n+1}\overline{A}$:

$$(x_m + \pi^n y_m)^q \equiv \begin{cases} x_m^q & \text{si} \quad n \geqq 2, \\ x_m^q + \pi^{i_m+1}(\pi^{q-i_m-1} y_m^q + q\,\pi^{-i_m} x_m^{q-1} y_m) & \text{si} \quad n = 1. \end{cases}$$

Si on pose $x_m^q = \pi^{i_m} x_{m-1} + \pi^{i_m+1} u_{m-1}$, on voit que l'on est ramené à résoudre les équations suivantes : pour tout m :

— si $n \geqq 2$, $y_{m-1} \equiv u_{m-1} \pmod{\pi\overline{A}}$,

— si $n = 1$, $-\varepsilon(i_m) . y_m^q - q\,\pi^{-i_m} x_m^{q-1} y_m + y_{m-1} \equiv u_{m-1} \pmod{\pi\overline{A}}$

et l'existence et l'unicité des y_m modulo π est évidente si $n \geqq 2$; elle se vérifie facilement pour $n = 1$ si l'on observe que, pour tout m, $v(q\,\pi^{-i_m} x_m^{q-1}) > 0$, et que, comme tous les i_m ne sont pas égaux à $q-1$, l'un au moins des $\varepsilon(i_m)$ est nul.

Démonstration de (ii). — L'élimination des $\hat{a}_m$, pour $m \neq h-1$, conduit, en posant $\mu = i_0 + qi_1 + \ldots + q^{h-1} i_{h-1}$, à :

$$(6) \qquad \hat{a}_{h-1}^{q^h} = \pi^{\mu} . \hat{a}_{h-1}.$$

Cette équation a exactement q^h solutions dans $\overline{A}$ et chacune d'elles détermine exactement une solution de $(\hat{5})$.

5.13. FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.3 POUR $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}(1; q-1)$. — Il reste à prouver l'assertion (iii). Si $\hat{a}_{h-1}$ est une solution non nulle de (6), c'est la puissance μ-ième d'une racine q^h-ième de π et, d'après la définition de χ_h (n° 5.1), on a :

$$g\hat{a}_{h-1} = \chi_h^{\mu}(g).\hat{a}_{h-1} \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{G}.$$

Si a_{h-1} désigne l'image de $\hat{a}_{h-1}$ dans $\overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}}$, on a donc :

$$ga_{h-1} = \chi_h^{\mu}(g).a_{h-1} \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{G};$$

ou encore, si l'on considère maintenant a_{h-1} *comme un élément de* $\overline{\mathrm{A}}^{\vee}/\pi\overline{\mathrm{A}}^{\vee}$:

$$ga_{h-1} = \chi_h^{\mu q}(g).a_{h-1} \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{G}.$$

Si $(a_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ est l'unique solution correspondante du système (5), on voit que, *dans* $(\overline{\mathrm{A}}^{\vee}/\pi\overline{\mathrm{A}}^{\vee})$:

$$ga_m = \chi_h^{\mu q^{-m}}(g).a_m \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{G}, \quad \text{tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}.$$

Si $u : \mathrm{M} \to \tilde{\mathrm{T}}$ est le morphisme correspondant, il résulte du n° 5.10 et de la nullité de tous les $\varepsilon(i_m).b_m^q$ [n° 5.11, (iii)] que :

$$u(e_m) = a_m.(1+\xi)^{i_m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}.$$

Donc, pour tout g, tout m :

$$(gu)(e_m) = g(a_m).(1+g\xi)^{i_m} = \chi_h^{\mu q^{-m}}(g).(1+\xi)^{i_m} = \chi_h^{\mu q^{-m}}(g).u(e_m);$$

Si l'on utilise l'application $a \mapsto \nu_a$ du n° 4.3 pour identifier $\mathbf{F}_{q^h}$ à $\mathrm{End}_{\underline{\tilde{\mathrm{M}}}}(\mathrm{M})$, on voit que :

$$gu = \chi_h^{\mu}(g).u \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{G},$$

ce qu'il fallait démontrer.

5.14. Il reste à démontrer le théorème 5.3 lorsque $\mathrm{M} = \mathrm{M}(1; q-1)$, c'est-à-dire, plus précisément, à vérifier, dans ce cas d'une part le lemme 5.11 et d'autre part l'assertion (iii) du théorème :

(i) *Démonstration du lemme* 5.11 *pour* $\mathrm{M} = \mathrm{M}(1; q-1)$: il s'agit de prouver que, pour tout $d \in \overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}}$, le système :

$$\begin{cases} a \in (\overline{\mathrm{A}}^{\vee}/\pi\overline{\mathrm{A}}^{\vee})^{q-1}, \quad b \in \overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}}, \\ \varphi^{q-1}(a) + b^q - a = d, \\ -\varphi^{q-1}(a) - b = 0, \end{cases}$$

a, au moins une solution, et que, si $d=0$, il en a exactement q.

On doit avoir $b = -\varphi^{q-1}(a)$ et on est ramené à :

$$(-\varphi^{q-1}(a))^q + \varphi^{q-1}(a) - a = d,$$

ou encore, en notant $\hat{d}$ (resp. $\hat{a}$) un relèvement dans $\overline{A}$ de d (resp. a) à :

$$(-(\pi^{1-q}\hat{a}^q))^q+\pi^{1-q}\hat{a}^q-\hat{a}\equiv\hat{d}\ (\mathrm{mod}\ \pi\overline{A}),$$

ou :

$$(7)\quad \hat{a}^{q^2}+(-1)^q.\pi^{(q-1)^2}\hat{a}^q+(-1)^q.\pi^{q(q-1)}\hat{a}-(-1)^q.\pi^{q(q-1)}\hat{d}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\pi^{q(q-1)+1}\overline{A}).$$

Il est immédiat que le membre de gauche est un polynôme en $\hat{a}$ qui a exactement $q(q-1)$ racines de valuation égale à $q^{-1}(q-1).v(\pi)$; la réduction modulo π de chacune d'elles fournit une solution de la congruence (7).

Si $d=0$, on peut choisir $\hat{d}=0$. Un calcul facile montre que les solutions de (7) sont exactement les solutions de :

$(\hat{a}^q+(-1)^q.\pi^{q-1}\hat{a})^q-\pi^{(q-1)^2}(\hat{a}^q+(-1)^q.\pi^{q-1}\hat{a})\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi^{q(q-1)+1}\overline{A}$, ou encore de :

$$\prod_{\substack{v\in A\\ v^q=v}}(\hat{a}^q+(-1)^q.\pi^{q-1}\hat{a}-\pi^{q-1}v)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\pi^{q(q-1)+1}\overline{A}).$$

ou encore les $\hat{a}$, pour lesquels il existe $v\in A$ vérifiant $v^q=v$ tel que :

$$(7_v)\qquad \hat{a}^q+(-1)^q.\pi^{q-1}\hat{a}-\pi^{q-1}v\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \pi^q\overline{A}).$$

Il est facile de voir que toute solution de (7_v) se relève en une solution de :

$$(\hat{7}_v)\qquad X^q+(-1)^q.\pi^{q-1}X-\pi^{q-1}v=0,$$

et que les q solutions de $(\hat{7}_v)$ ont même réduction modulo π. Le système a donc bien q solutions distinctes correspondant aux q valeurs de v.

(ii) *Démonstration de l'assertion* (iii) *du théorème* 5.3 *pour* $M=M(1:q-1)$: Si $u : M\to\tilde{T}$ est non nul, on a $u(e_0)=\sum a_j\xi^j$ et u est déterminé par $a=a_0$ qui doit être non nul. Il existe un unique v vérifiant $v^q=v$ tel que tout relèvement de a dans $\overline{A}$ est solution de (7_v) et on peut choisir ce relèvement $\hat{a}$ pour qu'il soit solution de $(\hat{7}_v)$. Pour tout $g\in G$, $g\hat{a}$ est encore solution de $(\hat{7}_v)$; on en déduit que $ga=a$, ce qui implique $gu=u$; on a donc bien $gu=\chi_1^{q-1}(g).u$, puisque χ_1 est un caractère d'ordre $q-1$.

5.15. Pour terminer ce paragraphe, nous allons établir un résultat qui nous sera utile au paragraphe 7. Rappelons (prop. 5.5) que, pour tout objet M de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, $\underline{U}_S(M)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, T_\infty)$.

PROPOSITION. — *Soit* M *un objet de* $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$ *et soit* $\hat{M}=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}[G]}(\underline{U}_S(M), T_\infty)$. *L'application* $\xi : M\to\hat{M}$, *définie par* $\xi(x).u=u(x)$, *si* $x\in M$, $u\in\underline{U}_S(M)$, *est injective.*

Démonstration. — Il est immédiat que l'on peut se ramener au cas où k est algébriquement clos. On procède par récurrence sur la longueur de M :

— si celle-ci est égale à 1, cela se vérifie directement;

— si celle-ci est $\geqq 2$, soit :

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte non triviale. Avec des notations évidentes, il lui correspond une suite exacte de $\mathfrak{O}[G]$-modules :

$$0 \to U'' \to U \to U' \to 0.$$

Soit alors $x \in M$. Si son image x'' dans M'' est non nulle, il existe, par hypothèse de récurrence, un élément $u'' \in U''$ tel que $u''(x'') \neq 0$; si l'on identifie U'' à un sous-module de U, on a $u''(x) = u''(x'') \neq 0$.

Si $x'' = 0$, mais $x \neq 0$, alors x s'identifie à un élément non nul de M'; par hypothèse de récurrence, il existe $u' \in U'$ tel que $u'(x) \neq 0$; si u est un relèvement de u' dans U, on a $u(x) = u'(x) \neq 0$.

6. Propriétés de pleine fidélité

6.1. On garde les notations des paragraphes précédents.

THÉORÈME. — *Soit* $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ *(resp.* $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$*) la sous-catégorie pleine de* $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$ *formée des objets qui n'admettent pas de quotient non trivial* N *tel que* $N = N^{q-1}$ *(resp. de sous-objet non trivial* N *tel que* $N^1 = 0$*).*

(i) *Soit :*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$*. Alors* M *est un objet de* $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ *(resp.* $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$*) si et seulement si* M' *et* M'' *sont des objets de* $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ *(resp.* $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$*).*

(ii) *La restriction du foncteur* $\underline{U}_S$ *à chacune de ces deux catégories est pleinement fidèle.*

6.2. *Réduction au cas où k est algébriquement clos.* Reprenons les notations du n° 3.11. Soit K' le corps des fractions de A', on identifie K' à un sous-corps de C et K à un sous-corps de K'.

Comme le foncteur évident $M \to A' \otimes_A M$ de $\underline{MF}$ dans $\underline{MF}'$ est exact et fidèle, l'assertion (i) du théorème résulte de son analogue dans le cas où k est algébriquement clos.

Pour prouver (ii), il suffit de montrer que l'application canonique de $\mathrm{Hom}_{MF}(M, N)$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}[G]}(\underline{U}_S(N), \underline{U}_S(M))$ est surjective.

Si M est un objet de $\underline{MF}$, G opère sur $A' \otimes M$ par $g(a \otimes x) = ga \otimes x$. Si M et N sont des objets de $\underline{MF}$, G opère donc sur $\mathrm{Hom}_{MF'}(A' \otimes M, A' \otimes N)$ [on a $(g\eta)(x) = g(\eta(g^{-1}x))$], et $\mathrm{Hom}_{MF}(M, N)$ s'identifie à $(\mathrm{Hom}_{MF'}(A' \otimes M, A' \otimes N))^G$.

Comme S s'identifie à S' (n° 3.11), $T_\infty = K \otimes_A S/S$ (*cf.* n° 5.6) s'identifie à $T'_\infty = K' \otimes_{A'} S'/S'$. Si M est un objet de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, $\underline{U}_S(M) = \mathrm{Hom}_{MF}(M, T_\infty)$ (*cf.* n° 5.5)

s'identifie à $\underline{U}_{S'}(A'\otimes M)=\mathrm{Hom}_{\underline{MF}'}(A'\otimes M, T'_\infty)$ [à $u : M \to T_\infty$ dans $\underline{U}_S(M)$, on associe l'application A'-linéaire $u' : A'\otimes M \to T_\infty = T'_\infty$ déduite par extension des scalaires].

Soit $\overline{K}'$ la fermeture algébrique de K' dans C. Le groupe $G'=\mathrm{Gal}(\overline{K}'/K')$ s'identifie à un sous-groupe fermé de G.

Soient M et N deux objets de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$ et soit $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}[G']}(\underline{U}_{S'}(A'\otimes N), \underline{U}_{S'}(A'\otimes M))$. Si $\underline{U}_{S'}$ est pleinement fidèle, il existe $\eta \in \mathrm{Hom}_{\underline{MF}'}(A'\otimes M, A'\otimes N)$ tel que $\alpha(u')=u'\circ\eta$, pour tout $u' \in \underline{U}_{S'}(A'\otimes N)$. On a :

$$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}[G]}(\underline{U}_{S'}(A'\otimes N), \underline{U}_{S'}(A'\otimes M))=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{O}[G]}(\underline{U}_S(N), \underline{U}_S(M))$$

si et seulement si, pour tout $g \in G$, et tout $u' \in \underline{U}_{S'}(A'\otimes N)$, alors $g(\alpha(u'))=\alpha(gu')$, ce qui équivaut à $gu'\circ g\,\eta = gu'\circ\eta$. La fidélité du foncteur $\underline{U}_{S'}$ implique que l'on doit avoir $g\,\eta=\eta$, pour tout g; donc $\eta \in (\mathrm{Hom}_{\underline{MF}'}(A'\otimes M, A'\otimes N))^G = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, N)$ et le foncteur $\underline{U}_S$ est bien pleinement fidèle.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on suppose k algébriquement clos.

6.3. Lemme. — *Posons* $\mathrm{Ext}^1=\mathrm{Ext}^1_{\underline{MF}^f_{tor}}$ *et soit* M *un objet simple de* $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$:

(i) *Si* $M \not\simeq M(1;0)$, *on a* $\mathrm{Ext}^1(M(1;0), M)=0$;

(ii) *si* $M \not\simeq M(1;q-1)$, *on a* $\mathrm{Ext}^1(M, M(1;q-1))=0$.

Démonstration. — On peut supposer (prop. 4.4) que $M=M(h;i)$, avec h un entier $\geqq 1$ et $i : \mathbf{Z}/h\mathbf{Z} \to \{0, 1, \ldots, q-1\}$ une application de période h. Soit :

$$0 \to M \to N \to M(1;0) \to 0$$

une extension de $M(1;0)$ par M. Soit x la base canonique de $M(1;0)$ et $\hat{x}$ un relèvement de x dans N. Alors $\pi\hat{x}=y \in M$ et $\varphi^0_N(\hat{x})=\hat{x}+z$, avec $z \in M$; d'où :

$$\varphi^0_M(y)=\varphi^0_N(y)=\pi\varphi^0_N(\hat{x})=y+\pi z=y.$$

Si $M \neq M(1;0)$, y doit être nul et N, étant tué par π, est encore un k-espace vectoriel.

L'extension N est triviale si et seulement si l'on peut trouver $t \in M$ tel que $\varphi^0_N(\hat{x}+t)=\hat{x}+t$, ou encore $\hat{x}+z+\varphi^0_M(t)=\hat{x}+t$, ou $\varphi^0_M(t)=t-z$.

Si $(e_m)_{m\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ est la base canonique de M et si $t=\sum\lambda_m e_m$, on a :

$$\varphi^0_M(t)=\sum\varepsilon(m)\lambda_m^q . e_{m-1},$$

avec :

$$\varepsilon(m)=\begin{cases}0 & \text{si } i_m\neq 0,\\ 1 & \text{si } i_m=0.\end{cases}$$

Si $z=\sum\mu_m e_m$, on est ramené à résoudre dans k le système de h équations (les μ_m sont donnés, les λ_m sont les inconnues) :

$$\varepsilon(m)\lambda_m^q-\lambda_{m-1}=-\mu_{m-1}, \text{ pour tout } m\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}.$$

On vérifie facilement que ce système a bien une solution, ce qui prouve l'assertion (i).

Soit maintenant :

$$0 \to \mathrm{M}(1;\, q-1) \to \mathrm{N} \to \mathrm{M} \to 0$$

une extension de M par $\mathrm{M}(1; q-1)$. Soit x la base canonique de $\mathrm{M}(1;\, q-1)$; soient $(e_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ la base canonique de M et $\hat{e}_m$ un relèvement de e_m dans N. Il existe α_m, $\gamma_m \in k$ tels que :

$$\pi\, \hat{e}_m = \alpha_m x \qquad \text{et} \qquad \varphi_{\mathrm{N}}^{i_m}(\hat{e}_m) = \hat{e}_{m-1} + \gamma_{m-1}\, x.$$

D'où :

$$\varphi_{\mathrm{N}}^{i_m}(\pi\, \hat{e}_m) = \varphi_{\mathrm{N}}^{i_m}(\alpha_m x) = \alpha_{m-1}\, x,$$

ce qui entraîne que tous les α_m sont nuls si $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}(1;\, q-1)$. Donc N est un k-espace vectoriel et l'extension est triviale si et seulement s'il existe des $\beta_m \in k$ tels que $\varphi_{\mathrm{N}}^{i_m}(\hat{e}_m + \beta_m x) = \hat{e}_{m-1} + \beta_{m-1}\, x$. Si l'on pose :

$$\varepsilon'(m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i_m \neq q-1, \\ 1 & \text{si} \quad i_m = q-1, \end{cases}$$

on voit que l'on est ramené à résoudre dans k le système de h équations (les γ_m sont donnés, les β_m sont les inconnues) :

$$\varepsilon'(m)\, \beta_m^q - \beta_{m-1} = -\gamma_{m-1},$$

qui a bien une solution, ce qui prouve l'assertion (ii).

6.4. Démonstration du (i) du théorème 6.1. — Pour prouver l'assertion concernant $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$, il suffit de vérifier que $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$ *est la sous-catégorie pleine* $\underline{\mathrm{M}}'$ *de* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ *formée des objets qui n'ont aucun quotient de Jordan-Hölder isomorphe à* $\mathrm{M}(1;\, q-1)$.

Pour toute sous-catégorie $\underline{\mathrm{C}}$ de $\underline{\mathrm{MF}}$, notons $\tilde{\underline{\mathrm{C}}}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{C}}$ formée des objets tués par π. Il suffit de vérifier que $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}} = \tilde{\underline{\mathrm{M}}}'$. Posons $\mathrm{Ext}^1_{\sim} = \mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f}}}$. On voit tout de suite que $\mathrm{Ext}^1_{\sim}(\mathrm{M}(1;\, q-1),\, M(1;\, q-1)) = 0$ et on en déduit :

— d'une part qu'un objet N de $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}}$ vérifie $\mathrm{N}^{q-1} = \mathrm{N}$ si et seulement s'il est isomorphe à une somme directe de copies de $\mathrm{M}(1;\, q-1)$;

— d'autre part, compte tenu du lemme 6.3, que $\mathrm{Ext}^1_{\sim}(\mathrm{M},\, \mathrm{M}(1;\, q-1)) = 0$, pour tout objet simple M de $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}}$, donc aussi, par dévissage, pour tout objet de $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}}$.

On en déduit qu'un objet M de $\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}}$ a un quotient de Jordan-Hölder isomorphe à $\mathrm{M}(1;\, q-1)$ si et seulement s'il a un quotient isomorphe à $\mathrm{M}(1;\, q-1)$, ou encore si et seulement s'il a un quotient non trivial N tel que $\mathrm{N}^{q-1} = \mathrm{N}$.

On montre de manière analogue que $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q''}$ *est la sous-catégorie pleine de* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$ *formée des objets qui n'ont aucun quotient de Jordan-Hölder isomorphe à* $\mathrm{M}(1;\, 0)$.

6.5. Démonstration du (ii) du théorème 6.1. — D'après le théorème 4.3 le foncteur $\underline{U}_S$ est exact et fidèle. Si M et N sont des objets simples de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, on a $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, N)=0$ si $M \not\simeq N$ et $\mathrm{End}_{\underline{MF}}(M(h; i)) \simeq \mathbf{F}_{q^h}$ (prop. 4.4). Le théorème 5.3 donne l'action de G sur $\underline{U}_S(M(h; i))$ et permet de vérifier que, si M et N sont simples et tous deux soit dans $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ soit dans $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}[G]}(\underline{U}_S(N), \underline{U}_S(M))=0$ si $M \not\simeq N$ et $\mathrm{End}_{\mathfrak{D}[G]}(\underline{U}_S(M(h; i))) \simeq \mathbf{F}_{q^h}$. D'où la pleine fidélité lorsque l'on se restreint aux objets simples des deux catégories considérées.

On procède alors par récurrence sur les longueurs de M et N en utilisant les suites exactes longues des Ext. On est ramené, par une chasse au diagramme, à montrer que la flèche canonique de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}\mathcal{F}}(M, N)$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{D}[G]}(\underline{U}_S(N), \underline{U}_S(M))$ est injective. Par un dévissage standard, on est ramené au cas où M et N sont simples.

Si :

$$0 \to N \to P \to M \to 0$$

est une suite exacte dans $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, avec M et N simples, et si P n'est pas tué par π, on voit tout de suite que $\underline{U}_S(P)$ non plus n'est pas tué par π et la suite exacte :

$$0 \to \underline{U}_S(M) \to \underline{U}_S(P) \to \underline{U}_S(N) \to 0$$

n'est pas scindée.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit donc de prouver la proposition suivante :

6.6. Proposition. — *Si* M *et* N *sont deux objets simples de* $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ (resp. $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$), *alors l'application canonique de* $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{M}\mathcal{F}}}(M, N)$ *dans* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{F}_q[G]}(\underline{U}_S(N), \underline{U}_S(M))$ *est injective.*

Nous ne démontrerons cette proposition que dans le cas de $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ (on se contentera d'indications sur la façon de procéder pour $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$). Le principe de la démonstration est le suivant :

(*a*) on montre (prop. 6.7) que, si M est un objet de $\widetilde{\underline{MF}^{f,q'}_{tor}}$, si H est le noyau de l'action de G sur $\underline{U}_S(M)$ et si $L=\overline{K}^H$, on peut, pour calculer $\underline{U}_S(M)$ « remplacer $\overline{K}$ par L »;

(*b*) on montre que, si l'on remplace $\overline{K}$ par une extension modérément ramifiée, on ne peut espérer calculer $\underline{U}_S(M)$ que si M est semi-simple.

6.7. Soit L une extension de K contenue dans $\overline{K}$ et soit A_L l'anneau de ses entiers. L'anneau $A_L/\pi A_L$ s'identifie à un sous-anneau de $\overline{A}/\pi\overline{A}$, la k-algèbre $A^\vee_L/\pi A^\vee_L$ déduite de $A_L/\pi A_L$ par l'extension des scalaires τ s'identifie à une sous-k-algèbre de $\overline{A}^\vee/\pi\overline{A}^\vee$ et, lorsque l'on identifie l'anneau sous-jacent à $\overline{A}^\vee/\pi\overline{A}^\vee$ à $\overline{A}/\pi\overline{A}$, l'anneau sous-jacent à $A^\vee_L/\pi A^\vee_L$ s'identifie à $A_L/\pi A_L$. On voit que, pour tout i, $\varphi^i((A^\vee_L/\pi A^\vee_L) \cap (\overline{A}^\vee/\pi\overline{A}^\vee)^i) \subset A_L/\pi A_L$ et $A^\vee_L/\pi A^\vee_L$ peut être considéré, de manière évidente, comme un sous-A-module de Dieudonné filtré de $\overline{A}^\vee/\pi\overline{A}^\vee$.

De même la sous-k-algèbre $\tilde{T}_L = (A_L^\vee/\pi A_L^\vee)[\xi]$ de $\tilde{T} = (\bar{A}^\vee/\pi \bar{A}^\vee)[\xi]$ a une structure naturelle de sous-A-module de Dieudonné filtré de $\tilde{T}$. Pour tout objet M de $\widetilde{\underline{MF}^{f,q}_{tor}}$, $\underline{U}_{S,L}(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, \tilde{T}_L)$ est un sous-$\mathbf{F}_q$-espace vectoriel de $\underline{U}_S(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, \tilde{T})$, stable par G si $\bar{L}/K$ est galoisienne.

PROPOSITION. — *Soit* M *un objet de* $\widetilde{\underline{MF}^{f,q}_{tor}}$, *soit* H *le noyau de l'action de* G *sur* $\underline{U}_S(M)$ *et soit* L *une extension de* K *contenue dans* $\bar{K}$. *Pour que l'inclusion naturelle de* $\underline{U}_{S,L}(M)$ *dans* $\underline{U}_S(M)$ *soit surjective, il faut et il suffit que* $L \supset \bar{K}^H$.

6.8. Commençons par établir un lemme :

LEMME. — *Soit* $M(h; i)$ *un objet simple de* $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$ *et soit :*

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq q-1, \\ 1 & si \quad i = q-1. \end{cases}$$

On suppose donnés, pour tout $m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}$, *des éléments* $\hat{a}_m, \hat{b}_m, \hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m \in \bar{A}$ *tels que les* $\hat{a}_m$ *et* $\hat{b}_m$ *soient solutions du système de congruences :*

$$(1) \qquad \begin{cases} \pi^{-i_m} Y_m^q + \varepsilon(i_m) Z_m^q - Y_{m-1} \equiv \hat{\alpha}_{m-1} \pmod{\pi}, \\ i_m \pi^{-i_m} Y_m^q - Z_{m-1} \equiv \hat{\beta}_{m-1} \pmod{\pi}. \end{cases}$$

Alors le système d'équations :

$$(\hat{1}) \qquad \begin{cases} \pi^{-i_m} Y_m^q + \varepsilon(i_m) Z_m^q - Y_{m-1} = \hat{\alpha}_{m-1}, \\ i_m \pi^{-i_m} Y_m^q - Z_{m-1} = \hat{\beta}_{m-1} \end{cases}$$

a, dans $\bar{A}$, *une solution* $(y_m, z_m)_{m \in \mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ *et une seule vérifiant* $y_m \equiv \hat{a}_m \pmod{\pi}$ *et* $z_m \equiv \hat{b}_m \pmod{\pi}$.

Démonstration. — Comme M appartient à $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, on a $M(h; i) \neq M(1; q-1)$, donc il existe un m tel que $i_m \neq q-1$; on peut supposer, à une permutation circulaire près des e_m, que $i_0 \neq q-1$ et donc que $\varepsilon(i_0) = 0$. On a :

$$\begin{cases} \pi^{-i_0} Y_0^q - Y_{h-1} = \hat{\alpha}_{h-1}, \\ i_0 \pi^{-i_0} Y_0^q - Z_{h-1} = \hat{\beta}_{h-1}. \end{cases}$$

Par conséquent, la donnée de y_0 détermine y_{h-1} et z_{h-1}; comme y_m et z_m déterminent y_{m-1} et z_{m-1}, on en déduit que y_0 détermine tous les autres y_m et tous les z_m. On peut donc éliminer toutes les variables sauf Y_0 et on obtient une équation de degré $\leq q^h$. Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que, si $(\hat{a}_m, \hat{b}_m)$ est une solution des congruences, il existe dans $\bar{A}$ au moins une solution des équations :

$$\begin{cases} \pi^{-i_m}(\hat{a}_m + \pi Y_m)^q + \varepsilon(i_m)(\hat{b}_m + \pi Z_m)^q - (\hat{a}_{m-1} + \pi Y_{m-1}) = \hat{\alpha}_{m-1}, \\ i_m \pi^{-i_m}(\hat{a}_m + \pi Y_m)^q - (\hat{b}_{m-1} + \pi Z_{m-1}) = \hat{\beta}_{m-1}. \end{cases}$$

Par hypothèse sur $\hat{a}_m$ et $\hat{b}_m$, il existe α'_m et $\beta'_m \in \bar{A}$ tels que :

$$\begin{cases} \pi^{-i_m} \hat{a}_m^q + \varepsilon(i_m) \hat{b}_m^q - \hat{a}_{m-1} = \hat{\alpha}_{m-1} + \pi\alpha'_{m-1}, \\ i_m \pi^{-i_m} \hat{a}_m^q - \hat{b}_{m-1} = \hat{\beta}_{m-1} + \pi\beta'_{m-1}. \end{cases}$$

On obtient donc en développant :

$$\begin{cases} \pi^{-i_m}\left(\sum_{s=1}^{q}\binom{q}{s}\hat{a}_m^{q-s}\pi^{s-1}Y_m^s\right)+\varepsilon(i_m)\left(\sum_{s=1}^{q}\binom{q}{s}\hat{b}_m^{q-s}\pi^{s-1}Z_m^s\right)-Y_{m-1}=\alpha'_{m-1} \\ i_m\pi^{-i_m}\left(\sum_{s=1}^{q}\binom{q}{s}\hat{a}_m^{q-s}\pi^{s-1}Y_m^s\right)-Z_{m-1}=\beta'_{m-1}. \end{cases}$$

On a :

$$v\left(\pi^{-i_m}\binom{q}{s}\hat{a}_m^{q-s}\pi^{s-1}\right)\geqq(-i_m+1+(q-s)i_m q^{-1}+s-1)v(\pi)$$

$$=s(1-i_m q^{-1})v(\pi)>0 \qquad \text{si} \quad 1\leqq s\leqq q-1$$

On en déduit que :

$$Y_{m-1}=\sum_{s=0}^{q}\lambda_s Y_m^s+\sum_{s=1}^{q}\mu_s Z_m^s$$

avec : λ_s, $\mu_s\in\overline{A}$ et λ_1, $\mu_1\in\overline{\mathfrak{m}}$, idéal maximal de $\overline{A}$, et que $Z_{m-1}=\sum_{s=0}^{q}\nu_s Y_m^s$ avec $\nu_s\in\overline{A}$ et $\nu_1\in\overline{\mathfrak{m}}$. En éliminant les Y_m pour $m\neq 0$ et les Z_m par ces formules, on obtient une équation en Y_0 de la forme : $Y_0=\sum_{s=0}^{q^h}\lambda'_s Y_0^s$ avec $\lambda'_s\in\overline{A}$ et $\lambda'_1\in\overline{\mathfrak{m}}$; cette équation a une solution entière et en calculant les y_m et les z_m par les formules ci-dessus, on obtient une solution dans $\overline{A}$ de toutes les équations. Le lemme est donc démontré.

6.9. Démonstration de la proposition 6.7. — Il est clair que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de vérifier que, si $L=\overline{K}^H$ et si $u\in\underline{U}_S(M)$, alors $u(M)\subset\tilde{T}_L$.

Procédons par récurrence sur la longueur de M :

— Si M est simple, on a vu au n° 5.12 que, pour calculer $\underline{U}_S(M)$, il suffit de résoudre une équation de la forme $X^{q^h}=\pi^{\mu}X$; et au n° 5.13 que l'action de G sur $\underline{U}_S(M)$ est l'action sur les racines de cette équation. Le corps L est alors le corps engendré par ces racines et la proposition est vraie.

— Sinon, on a une suite exacte de la forme :

$$0\to N\to M\to M(h;\,i)\to 0$$

avec $M(h;\,i)$ un objet simple de $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,\,q'}$.

Soit $(e_m)_{m\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ la base canonique de $M(h;\,i)$. Pour tout m, choisissons un relèvement $\hat{e}_m$ de e_m dans M^{i_m}; on a :

$$\varphi_M^{i_m}(\hat{e}_m)=\hat{e}_{m-1}+d_{m-1} \qquad \text{avec} \quad d_{m-1}\in N.$$

Si u^0 désigne la restriction de u à N, on a $u(d_m)=u^0(d_m)=\delta_m\in\tilde{\mathrm{T}}_{\mathrm{L}}$, par hypothèse de récurrence. Si l'on pose $u(\hat{e}_m)=u_m$, les u_m forment une solution du système d'équations :

$$\begin{cases} u_m\in\tilde{\mathrm{T}}^{i_m}, \\ \varphi_{\tilde{\mathrm{T}}}^{i_m}(u_m)=u_{m-1}+\delta_{m-1}. \end{cases}$$

Posons :

$$u_m=a_m+b_m\xi+\sum_{j=2}^{\infty}c_{m,j}\xi^j \qquad \text{et} \qquad \delta_m=\alpha_m+\beta_m\xi+\sum_{j=2}^{\infty}\gamma_{m,j}\xi^j,$$

avec a_m, b_m, $c_{m,j}\in\overline{\mathrm{A}}/\pi\overline{\mathrm{A}}$ et α_m, β_m, $\gamma_{m,j}\in\mathrm{A_L}/\pi\mathrm{A_L}$.

En identifiant, comme au n° 5.10, les coefficients de ξ^j, on trouve :

$$(1_0)\qquad \varphi^{i_m}(a_m)+\varepsilon(i_m)b_m^q-a_{m-1}=\alpha_{m-1},$$

$$(1_1)\qquad i_m.\varphi^{i_m}(a_m)-b_{m-1}=\beta_{m-1},$$

$$(1_j)\qquad \binom{i_m}{j}.\varphi^{i_m}(a_m)-c_{m-1,j}=\gamma_{m-1,j} \qquad \text{si} \quad j\geqq 2 \quad \text{et} \quad j\neq q,$$

$$(1_q)\qquad \varepsilon(i_m).b_m^q-c_{m-1,q}=\gamma_{m-1,q}.$$

En particulier, les $c_{m-1,j}$ s'écrivent en fonction des $\gamma_{m-1,j}$, des a_m et des b_m et il suffit de montrer que les a_m et les b_m sont dans $\mathrm{A_L}/\pi\mathrm{A_L}$.

Si l'on choisit des relèvements $\hat{\alpha}_m$ de α_m et $\hat{\beta}_m$ de β_m dans $\mathrm{A_L}$ et des relèvements $\hat{a}_m$ de a_m et $\hat{b}_m$ de b_m dans $\overline{\mathrm{A}}$, on voit que $(\hat{a}_m,\hat{b}_m)_{m\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ est une solution du système de congruences (1). D'après le lemme 6.8, quitte à changer les relèvements des a_m et b_m, on peut supposer que $(\hat{a}_m,\hat{b}_m)_{m\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ est aussi une solution du système d'équations $(\hat{1})$.

Si $g\in\mathrm{H}$, $(g\hat{a}_m, g\hat{b}_m)_{m\in\mathbf{Z}/h\mathbf{Z}}$ est encore une solution de $(\hat{1})$; comme $g\hat{a}_m=a_m$ et $g\hat{b}_m=b_m$, l'unicité de la solution de $(\hat{1})$ relevant une solution donnée de (1) prouve que $g\hat{a}_m=\hat{a}_m$ et $g\hat{b}_m=\hat{b}_m$. Les $\hat{a}_m$ et $\hat{b}_m$ sont donc dans $\mathrm{A_L}$ et les a_m et b_m sont bien dans $\mathrm{A_L}/\pi\mathrm{A_L}$.

6.10. Proposition. — *Soit* L *l'extension maximale modérément ramifiée de* K *contenue dans* $\overline{\mathrm{K}}$ *et soit* M *un objet de* $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$. *Alors on a* $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S,L}}(\mathrm{M})=\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ *si et seulement si* M *est semi-simple.*

Démonstration. — Pour tout $\rho\in\mathbf{Z}_{(p)}$, de la forme $\rho=a/b$, avec $a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N}^*$, $(b,p)=1$, choisissons $\pi_\rho\in\mathrm{L}$ tel que $\pi_\rho^b=\pi^a$, de manière que, si ρ, $\rho'\in\mathbf{Z}_{(p)}$, on ait $\pi_\rho.\pi_{\rho'}=\pi_{\rho+\rho'}$. Soit $\mathrm{P}=\mathbf{Z}_{(p)}\cap[0,1[$. Si, pour tout $\rho\in\mathrm{P}$, on note $\tilde{\pi}_\rho$ l'image de π_ρ dans $\mathrm{A_L}/\pi\mathrm{A_L}$, tout élément de $\mathrm{A_L}/\pi\mathrm{A_L}$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{\rho\in\mathrm{P}}a_\rho\tilde{\pi}_\rho$, avec les $a_\rho\in k$, presque tous nuls.

Pour tout $\rho\in\mathrm{P}$, on voit qu'il existe un et un seul couple (h^ρ, i^ρ), formé d'un entier $h^\rho\in\mathbf{N}^*$ et d'une application $i^\rho:\mathbf{Z}/h^\rho\mathbf{Z}\to\{0,1,\ldots,q-1\}$, de période h^ρ, tel que :

$$\rho=(i_1^\rho+qi_2^\rho+\ldots+q^{h^\rho-2}i_{h^\rho-1}+q^{h^\rho-1}i_0)/(q^{h^\rho}-1).$$

Si l'on pose $\bar{\omega}_\rho=\tilde{\pi}_\rho.(1+\xi)^{i_1^\rho}$, on voit que $\bar{\omega}_\rho\in\tilde{\mathrm{T}}_{\mathrm{L}}^{i_0^\rho}$ et que $\varphi_{\tilde{\mathrm{T}}_{\mathrm{L}}}^{i_0^\rho}(\bar{\omega}_\rho)=\bar{\omega}_{\rho q-i_0}$.

Soit $\tilde{T}_{L,ss}$ le sous-k-espace vectoriel de $\tilde{T}_L$ engendré par les $\bar{\omega}_\rho$. On voit que $\tilde{T}_{L,ss}$ a une structure naturelle de sous-objet de $\tilde{T}_L$ et que $\tilde{T}_{L,ss}$ est la somme directe d'un représentant de chaque classe d'isomorphisme d'objets simples de $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$. Si M est un objet de $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$, on a donc $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, \tilde{T}_{L,ss}) = \underline{U}_S(M)$ si et seulement si M est semi-simple.

Notons $\tilde{\Theta}_L$ le quotient, dans $\mathscr{MF}$, de $\tilde{T}_L$ par $\tilde{T}_{L,ss}$. On voit que c'est encore un module filtré, que, si $\tilde{\xi}$ désigne l'image de ξ dans $\tilde{\Theta}_L$, tout élément de $\tilde{\Theta}_L$ s'écrit, d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \tilde{\xi}^j$, avec les $a_j \in A_L/\pi A_L$, presque tous nuls, et que $\tilde{\Theta}_L^{q-1} = \tilde{\Theta}_L$, $\tilde{\Theta}_1^q = 0$.

En outre, $\varphi_{\tilde{\Theta}_L}^{q-1}(\sum a_j \tilde{\xi}^j)$ est l'image, dans $\tilde{\Theta}_L$, de $a_1^q(1+\xi^q)$. Mais a_1^q est une combinaison linéaire des $\tilde{\pi}_{\rho q}$, avec $\rho \in P$ et $\rho < 1/q$; comme $i_1^{\rho q} = 0$, on a $\tilde{\pi}_{\rho q} = \bar{\omega}_{\rho q}$ et $a_1^q \in \tilde{T}_{L,ss}$; finalement :

$$\varphi_{\tilde{\Theta}_L}^{q-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \tilde{\xi}^j\right) = a_1^q \tilde{\xi}^q.$$

Un calcul simple montre alors que $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, \tilde{\Theta}_L) = 0$, pour tout objet M de $\widetilde{\underline{MF}^{f,q'}_{tor}}$ (il suffit de le vérifier pour un objet simple). On a donc $\underline{U}_{S,L}(M) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, \tilde{T}_L) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, \tilde{T}_{L,ss})$ et la proposition en résulte.

6.11. Montrons maintenant la proposition 6.6 pour $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$. — Soit toujours L l'extension maximale modérément ramifiée de K contenue dans $\bar{K}$ et soit $H = \mathrm{Gal}(\bar{K}/L)$. Soit :

$$0 \to N \to \Lambda \to M \to 0$$

une suite exacte dans $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$, avec M et N simples, telle que la suite exacte :

$$0 \to \underline{U}_S(M) \to \underline{U}_S(\Lambda) \to \underline{U}_S(N) \to 0$$

soit scindée.

D'après la proposition 6.10, H opère trivialement sur $\underline{U}_S(M)$ et $\underline{U}_S(N)$, donc aussi sur $\underline{U}_S(\Lambda)$. D'après la proposition 6.7, on a donc $\underline{U}_S(\Lambda) = \underline{U}_{S,L}(\Lambda)$, ce qui, d'après la proposition 6.10, implique que Λ est semi-simple. La suite :

$$0 \to N \to \Lambda \to M \to 0$$

est donc scindée.

6.12. Indications sur la démonstration de la proposition 6.6 pour $\widetilde{\underline{MF}^{f,q''}_{tor}}$. — Une première méthode consiste à vérifier par un calcul directe que, si N est un objet simple de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, $N \not\simeq M(1;0)$, $M(1;q-1)$, alors l'application canonique de

$\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}(1;\, q-1),\, \mathrm{N})$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{F}_q[\mathrm{G}]}(\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}),\, \mathbf{F}_q)$ est injective [dans les autres cas, ou bien M et N sont tous les deux dans $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q'}_{\mathrm{tor}}$, ou bien $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M},\, \mathrm{N})=0$].

Une seconde méthode consiste à introduire le sous-A-module S″ de $\mathrm{W}_{\mathrm{K}}(\mathrm{R})$ formé des $\sum \pi^n [u_n]$ qui vérifient :

$$v_{\mathrm{R}}(u_{-m}) > mq \cdot v(\pi) \qquad \text{si} \quad m \geqq 0.$$

C'est, de manière naturelle, un sous-module filtré de S. Si S/S″ est le quotient de S par S″ dans $\mathcal{MF}$, on vérifie facilement que, pour tout objet simple M de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q''}_{\mathrm{tor}}$, donc pour tout objet de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q''}_{\mathrm{tor}}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(\mathrm{M},\, \mathrm{S}/\mathrm{S}'')=\mathrm{Ext}^1(\mathrm{M},\, \mathrm{S}/\mathrm{S}'')=0$. En particulier, si M est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q''}_{\mathrm{tor}}$, $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})=\mathrm{Ext}^1(\mathrm{M},\, \mathrm{S})$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{M},\, \mathrm{S}'')$. On peut alors recommencer avec S″ ce qui a été fait pour S et l'on obtient des résultats analogues aux propositions 6.6 et 6.7.

6.13. Remarques. — (*a*) On voit que le foncteur pleinement fidèle $\underline{\mathrm{U}}'_{\mathrm{S}}$ (resp. $\underline{\mathrm{U}}''_{\mathrm{S}}$), restriction de $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}$ à $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q'}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q''}_{\mathrm{tor}}$), induit une anti-équivalence entre la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q'}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q''}_{\mathrm{tor}}$) formée des objets semi-simples et la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Rep}}^f_{\mathfrak{O}}(\mathrm{G})$ également formée des objets semi-simples.

Lorsque l'on ne se restreint plus aux objets semi-simple, ni $\underline{\mathrm{U}}'_{\mathrm{S}}$ ni $\underline{\mathrm{U}}''_{\mathrm{S}}$ n'est essentiellement surjectif [par exemple, on a $\mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\mathcal{MF}}}(\mathrm{M}(1;\, 0),\, \mathrm{M}(1;\, 0))=0$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{F}_q[\mathrm{G}]}(\mathbf{F}_q,\, \mathbf{F}_q)\neq 0$]. Il ne semble pas aisé de donner une caractérisation raisonnable de l'image essentielle de $\underline{\mathrm{U}}'_{\mathrm{S}}$ (resp. $\underline{\mathrm{U}}''_{\mathrm{S}}$). On peut toutefois montrer que, si M est un objet de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q'}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q''}_{\mathrm{tor}}$), si H est le noyau de l'action de G sur $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ et si $\mathrm{L}=\overline{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}$, alors les nombres de ramification >0 (en numérotation inférieure) de l'extension L/K sont premiers à p.

(*b*) La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}$ est munie, de manière évidente, d'un produit tensoriel. Si M et N sont deux objets de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{tor}}$, il en est de même de $\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}$.

Soient M et N deux objets de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q'}_{\mathrm{tor}}$ tels que $\mathrm{M}\otimes\mathrm{N}$ soit encore dans $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q'}_{\mathrm{tor}}$ [cela revient à demander d'une part que, si i (resp. j) est le plus grand entier tel que $\mathrm{M}^i\neq 0$ (resp. $\mathrm{N}^j\neq 0$), alors $i+j<q$, et, d'autre part que, si M a un quotient de Jordan-Hölder isomorphe à $\mathrm{M}(1;\, l)$ et N un quotient de Jordan-Hölder isomorphe à $\mathrm{M}(1;\, l')$, alors $l+l'\neq q-1$]. La multiplication dans S est compatible avec la structure de module filtré et induit un homomorphisme :

$$\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M} \otimes_{\mathfrak{O}} \underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}) \to \underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M}\otimes\mathrm{N});$$

on vérifie facilement (par dévissage, le cas où M et N sont tous les deux simples est trivial) que c'est un isomorphisme.

Le résultat analogue serait faux si l'on remplaçait $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q'}_{\mathrm{tor}}$ par $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q}_{\mathrm{tor}}$ ou $\underline{\mathrm{MF}}^{f,\,q''}_{\mathrm{tor}}$ [mais redeviendrait vrai, dans ce dernier cas, si l'on remplaçait $\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}$ par $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{MF}}(\quad,\, \mathrm{S}'')$, où S″ est le module filtré défini au n° 6.12].

7. Représentations à valeurs dans une extension finie de $\mathbf{Q}_p$

7.1. Rappelons (*cf.* introduction) que E désigne le corps des fractions de $\mathfrak{O}$.

Notons $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ la catégorie suivante :

— un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ consiste en la donnée d'un K-espace vectoriel Δ, d'une application τ-semi-linéaire bijective Φ de Δ dans lui-même (i. e., si l'on préfère, d'une application K-linéaire de Δ dans Δ_τ), et d'une filtration $(\Delta^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ de Δ par des sous-K-espaces vectoriels, décroissante, exhaustive et séparée (par abus de langage, on parlera de l'objet Δ, l'application Φ et la filtration étant sous-entendues);

— un morphisme de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ est une application K-linéaire des espaces vectoriels sous-jacents qui commute à Φ et est compatible avec les filtrations.

La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ est une catégorie E-linéaire. Elle n'est pas abélienne, mais elle a des limites inductives et projectives finies, ce qui permet de parler de noyaux, de conoyaux, de morphismes stricts (i. e. pour lesquels l'image et la coïmage coïncident) et de suites exactes (suites de morphismes stricts tels que l'image d'un morphisme coïncide avec le noyau du suivant).

7.2. Lorsque $\mathrm{E}=\mathbf{Q}_p$, $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ n'est autre que la catégorie notée $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}}$ dans [F 1], n° 1.2.

La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$ est équipée d'un produit tensoriel, d'un « hom interne », d'une notion de dual, et possède un objet-unité. Toutes ces constructions sont évidentes (*cf.* [F 1], n° 1.2, dans le cas de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}}$).

7.3. Pour tout objet Δ de $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$, dont le K-espace vectoriel sous-jacent est de dimension finie, on pose :

$$t_{\mathrm{H}}(\Delta)=\begin{cases} 0 & \text{si } \Delta=0, \\ i & \text{si } \Delta=\Delta^i, \quad \Delta^{i+1}=0 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathrm{K}}\Delta=1, \\ t_{\mathrm{H}}(\overset{n}{\wedge}\Delta) & \text{si } \dim_{\mathrm{K}}\Delta=n\geqq 2, \end{cases}$$

et, en notant v_π la valuation de K normalisée par $v_\pi(\pi)=1$:

$$t_{\mathrm{N}}(\Delta)=\begin{cases} 0 & \text{si } \Delta=0, \\ v_\pi(a) & \text{si } \Delta=\mathrm{K}\,d \quad \text{et} \quad \Phi\,d=ad, \\ t_{\mathrm{N}}(\overset{n}{\wedge}\Delta) & \text{si } \dim_{\mathrm{K}}\Delta\geqq 2 \end{cases}$$

[l'invariant t_{N} est bien défini : si $\Delta=\mathrm{K}\,d=\mathrm{K}\,d'$, on a $d'=bd$, avec $b\in\mathrm{K}^*$; si $\Phi\,d=ad$ et $\Phi\,d'=a'\,d'$, on a $a'=b^{-1}.\tau b.a$ et $v_\pi(a')=v_\pi(a)$].

Si $E = \mathbf{Q}_p$ et si k est algébriquement clos, on vérifie facilement que les définitions de t_H et t_N données ici coïncident avec celles de 4.1.2 de [F 1].

Il est immédiat que les applications t_H et t_N sont additives, i. e. que, si :

$$0 \to \Delta' \to \Delta \to \Delta'' \to 0$$

est une suite exacte courte de $\underline{MF}_{K/E}$, alors $t_H(\Delta) = t_H(\Delta') + t_H(\Delta'')$ et $t_N(\Delta) = t_N(\Delta') + t_N(\Delta'')$.

7.4. Nous notons $\underline{MF}^f_{K/E}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{K/E}$ formée des objets Δ, de dimension finie comme K-espaces vectoriels, qui vérifient $t_H(\Delta) = t_N(\Delta)$ et, pour tout sous-objet Δ' de Δ, $t_H(\Delta') \leqq t_N(\Delta')$ (un sous-objet de Δ est un sous-K-espace vectoriel stable par Φ, que l'on munit de l'application Φ et de la filtration induites par celles de Δ).

7.5. Proposition. — *La catégorie $\underline{MF}^f_{K/E}$ est abélienne et le noyau (resp. le conoyau) d'un morphisme dans cette catégorie coïncide avec le noyau (resp. le conoyau) dans $\underline{MF}_{K/E}$. En outre*:

(i) *le dual Δ^*, dans $\underline{MF}_{K/E}$, d'un objet de $\underline{MF}^f_{K/E}$ est un objet de $\underline{MF}^f_{K/E}$;*

(ii) *pour qu'un sous-objet Δ' (resp. un quotient Δ''), dans $\underline{MF}_{K/E}$, d'un objet de $\underline{MF}^f_{K/E}$ soit un objet de $\underline{MF}^f_{K/E}$, il faut et il suffit que $t_H(\Delta') = t_N(\Delta')$ [resp. $t_H(\Delta'') = t_N(\Delta'')$];*

(iii) *si* :

$$0 \to \Delta' \to \Delta \to \Delta'' \to 0$$

est une suite exacte courte dans $\underline{MF}_{K/E}$ et si deux des trois objets qui y figurent sont dans $\underline{MF}^f_{K/E}$, il en est de même du troisième.

Démonstration. — Lorsque $E = \mathbf{Q}_p$ et k est algébriquement clos, c'est la proposition 4.2.1 de [F 1]; la démonstration qui repose sur l'additivité de t_N et t_H s'étend sans difficulté au cas considéré ici.

7.6. Remarque. — Supposons k algébriquement clos. La classification, essentiellement due à Dieudonné, des F-iso-cristaux (*cf.* [M 3]) s'étend facilement à la classification des K-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une application Φ bijective, τ-semi-linéaire (qui, en particulier, forment une catégorie semi-simple); lorsque Δ est un objet de $\underline{MF}_{K/E}$, cela permet de définir, comme dans [F 1], n° 4.3, les pentes et les polygone de Newton et de Hodge de Δ; la proposition 4.3.3 de [F 1] s'étend sans difficulté.

7.7. Définition. — Soit Δ un objet de $\underline{MF}_{K/E}$ et soit M un réseau de Δ (i. e. un sous-A-module de type fini tel que l'application évidente de $K \otimes_A M$ dans Δ soit un isomorphisme). Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on pose $M^i = M \cap \Delta^i$. On dit que M est un *réseau fortement divisible* si $\sum_{i \in \mathbf{Z}} \pi^{-i} \Phi(M^i) = M$ (lorsque $E = \mathbf{Q}_p$, la notion de réseau fortement divisible équivaut à la notion de réseau adapté de [L 1]).

7.8. PROPOSITION. — *Soit Δ un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{K/E}$, de dimension finie comme* K*-espace vectoriel. Pour qu'il existe un réseau de Δ qui soit fortement divisible, il faut et il suffit que Δ soit dans $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$. S'il en est ainsi, pour qu'un réseau* M *de Δ soit fortement divisible, il faut et il suffit que $\Phi \mathrm{M}^i \subset \pi^i \mathrm{M}$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. — On se ramène immédiatement au cas où les pentes de Δ sont $\geqq 0$. Si $E = \mathbf{Q}_p$, c'est alors le théorème 3.2 de [L 1]. La démonstration de ce théorème s'étend au cas considéré ici en remplaçant F par Φ et p par π.

7.9. COROLLAIRE. — *La catégorie $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$ est stable par produit tensoriel.*

En effet, si Δ_1 et Δ_2 sont deux objets de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$ et si M_1 (resp. M_2) est un réseau fortement divisible de Δ_1 (resp. Δ_2), $\mathrm{M}_1 \otimes_A \mathrm{M}_2$ s'identifie à un réseau fortement divisible de $\Delta_1 \otimes \Delta_2$.

7.10. REMARQUES. — (*a*) De la proposition 7.5 et du corollaire précédent, résultent facilement que la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$ est tannakienne (*cf.* [Sa 1], n° III.3.2) : plus précisément $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$ s'identifie à la catégorie des représentations de dimension finie du groupe pro-algébrique, défini sur K, des automorphismes du foncteur fibre qui, à tout objet de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$, associe le K-espace vectoriel sous-jacent.

(*b*) Soit Δ un objet de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$ et soit M un réseau de Δ. Alors il existe un plus petit réseau fortement divisible contenant M (resp. un plus grand réseau fortement divisible contenu dans M); c'est l'intersection (resp. la réunion) des réseaux fortement divisibles contenant M (resp. contenus dans M).

7.11. Notons $\underline{\mathrm{MF}}^{fd}_{K/\mathfrak{O}}$ la catégorie suivante :

— un objet de $\underline{\mathrm{MF}}^{fd}_{K/\mathfrak{O}}$ est un couple (Δ, M) formé d'un objet Δ de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{K/E}$ et d'un réseau fortement divisible M de Δ;

— un morphisme $\xi : (\Delta, \mathrm{M}) \to (\Delta', \mathrm{M}')$ est un morphisme de Δ dans Δ' tel que l'application K-linéaire sous-jacente envoie M dans M'.

Il est clair que $\underline{\mathrm{MF}}^{fd}_{K/\mathfrak{O}}$ est une catégorie additive $\mathfrak{O}$-linéaire. Le foncteur qui, à l'objet (Δ, M) de $\underline{\mathrm{MF}}^{fd}_{K/\mathfrak{O}}$ associe Δ est un foncteur $\mathfrak{O}$-linéaire exact et fidèle; si (Δ, M) et (Δ', M') sont deux objets de $\underline{\mathrm{MF}}^{fd}_{K/\mathfrak{O}}$, $\mathrm{Hom}(\Delta, \Delta')$ s'identifie à $E \otimes_{\mathfrak{O}} \mathrm{Hom}((\Delta, \mathrm{M}), (\Delta', \mathrm{M}'))$.

7.12. A tout objet (Δ, M) de $\underline{\mathrm{MF}}^{fd}_{K/\mathfrak{O}}$ on peut associer un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{A,\tau,\pi} = \underline{\mathrm{MF}}$, de la manière suivante :

— le A-module sous-jacent est M;

— la filtration de M est la filtration induite (i.e. $\mathrm{M}^i = \mathrm{M} \cap \Delta^i$, pour tout $i \in \mathbf{Z}$);

— pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on a $\varphi^i_{\mathrm{M}}(x) = \pi^{-i}\Phi(x)$, pour tout $x \in \mathrm{M}^i$.

On a ainsi obtenu un objet de $\underline{\mathrm{MF}}$ dont le A-module sous-jacent est de type fini et qui vérifie :

$(\underline{fd})_1$ le A-module sous-jacent M est sans torsion;

$(\underline{fd})_2$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$, M^i est facteur direct de M;

$(\underline{fd})_3$ on a $\sum \operatorname{Im} \varphi_M^i = M_\tau$.

Réciproquement, étant donné un objet M de $\underline{MF}$, de type fini comme A-module, qui vérifie $(\underline{fd})_1$, $(\underline{fd})_2$ et $(\underline{fd})_3$, on lui associe l'objet (M_K, M) de $\underline{MF}_{K/\mathfrak{O}}^{fd}$, où $M_K = K \otimes_A M$ est muni de la filtration déduite de celle de M par extension des scalaires, où $\Phi : M_K \to M_K$ est définie par $\Phi(a \otimes x) = \pi^i a \otimes \varphi_M^i(x)$, si $a \in K$, $x \in M^i$ (pour tout $x \in M$, il existe i tel que $x \in M^i$, et la définition de Φ ne dépend pas du choix de i) et où l'on utilise l'application $x \mapsto 1 \otimes x$ pour identifier M à un réseau de M_K.

Il est clair que ces deux constructions réciproques sont fonctorielles et nous permettent d'identifier $\underline{MF}_{K/\mathfrak{O}}^{fd}$ à la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}$ formée des objets dont le A-module sous-jacent est de type fini qui vérifient $(\underline{fd})_1$, $(\underline{fd})_2$ et $(\underline{fd})_3$.

7.13. Remarque. — Soit M un objet de $\underline{MF}$ dont le A-module sous-jacent est de type fini. Alors :

— M vérifie $(\underline{fd})_1$ si et seulement si π_M est un monomorphisme de $\mathcal{MF}$;

— M vérifie $(\underline{fd})_2$ si et seulement si le conoyau de π_M dans $\mathcal{MF}$ est encore un module filtré, i. e. est un objet de $\underline{MF}$;

— si M vérifie $(\underline{fd})_1$, M vérifie $(\underline{fd})_3$ si et seulement si le conoyau de π_M, dans $\mathcal{MF}$, est un objet de $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f}$.

7.14. Soit M un objet de $\underline{MF}_{K/\mathfrak{O}}^{fd}$. Pour tout entier $n \geqq 1$, soit M_n le conoyau de π_M^n. On voit que M s'identifie à $\varprojlim M_n$. Si $M^0 = M$ et $M^q = 0$, les M_n sont des objets de $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,q}$ et chaque $\underline{U}_S(M_n)$ est un $(\mathfrak{O}/\pi^n \mathfrak{O})$-module, libre de rang égal au rang h du A-module sous-jacent à M, qui s'identifie à $\operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M_n, S_n) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_n)$.

Pour tout n, la multiplication par π induit un monomorphisme de M_n dans M_{n+1} donc, par fonctorialité, un épimorphisme de $\underline{U}_S(M_{n+1})$ sur $\underline{U}_S(M_n)$. On peut donc parler de $\varprojlim \underline{U}_S(M_n)$ qui est un $\mathfrak{O}$-module libre de rang h, avec action linéaire et continue de G.

Si on note $\hat{S}$ le séparé complété de S pour la topologie p-adique (muni de sa structure de module filtré définie par passage à la limite), on voit que $\varprojlim \underline{U}_S(M_n)$ s'identifie à $\underline{U}_{\hat{S}}(M) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, \hat{S})$. On a ainsi construit un foncteur contravariant additif :

$$\underline{U}_{\hat{S}} : \quad \underline{MF}_{K/\mathfrak{O}}^{fd,q} \to \underline{\operatorname{Rep}}_{\mathfrak{O}}^{lf}(G)$$

de la sous-catégorie pleine $\underline{MF}_{K/\mathfrak{O}}^{fd,q}$ de $\underline{MF}_{K/\mathfrak{O}}^{fd}$ formée des objets M qui vérifient $M^0 = M$ et $M^q = 0$ dans la catégorie $\underline{\operatorname{Rep}}_{\mathfrak{O}}^{lf}(G)$ des $\mathfrak{O}$-modules libres de type fini, munis d'une action linéaire et continue de G. La proposition suivante résulte des théorèmes 3.3 et 6.1 :

7.15. Proposition. — (i) *Le foncteur* $\underline{U}_{\hat{S}}$ *est exact (en un sens évident) et fidèle et, pour tout objet* M *de* $\underline{MF}_{K/\mathfrak{O}}^{fd,q}$, $\operatorname{rg}_{\mathfrak{O}} \underline{U}_{\hat{S}}(M) = \operatorname{rg}_A M$.

(ii) *La restriction de* $\underline{U}_{\hat{S}}$ *à la sous-catégorie pleine de* $\underline{MF}^{f,q}_{K/\mathfrak{S}}$ *formée des* M *tels que* $M_1 = \operatorname{Coker} \pi_M$ *est un objet de* $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ (*resp. de* $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$) *est pleinement fidèle.*

7.16. Posons $\hat{S}_K = K \otimes_A \hat{S}$; on munit $\hat{S}_K$ de la filtration déduite par extension des scalaires de celle de $\hat{S}$ (en particulier, on a $\hat{S}_K = \hat{S}^0_K$) et on définit $\Phi : \hat{S}_K \to \hat{S}_K$ par $\Phi(a \otimes x) = a^\tau \otimes \varphi^0_{\hat{S}}(x)$, si $a \in K$, $x \in \hat{S}$. On a ainsi muni $\hat{S}_K$ d'une structure d'objet de $\underline{MF}_{K/E}$.

Notons $\underline{MF}^{f,q}_{K/E}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}^{f}_{K/E}$ formée des objets Δ qui vérifient $\Delta^0 = \Delta$ et $\Delta^q = 0$; et $\underline{Rep}^{f}_{/E}(G)$ la catégorie des E-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de G.

On obtient un foncteur contravariant E-linéaire :

$$\underline{U}_{\hat{S}_K} : \quad \underline{MF}^{f,q}_{K/E} \to \underline{Rep}^{f}_{/E}(G),$$

en posant $\underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta) = \operatorname{Hom}_{\underline{MF}_{K/E}}(\Delta, \hat{S}_K)$.

7.17. Proposition. — *Pour tout objet* Δ *de* $\underline{MF}^{f,q}_{K/E}$:

i) *on a* $\dim_E(\underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta)) = \dim_K \Delta$;

(ii) *l'application canonique de* Δ *dans* $\operatorname{Hom}_{E[G]}(\underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta), \hat{S}_K)$ *est injective.*

Démonstration. — Soit M un réseau fortement divisible de Δ.

(i) On a $\operatorname{rg}_{\mathfrak{S}} \underline{U}_{\hat{S}}(M) = \operatorname{rg}_A M$, d'après l'assertion (i) de la proposition 7.15, donc $\dim_E(\underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta)) = \dim_K \Delta$.

(ii) Soit $\hat{M} = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}[G]}(\underline{U}_{\hat{S}}(M), \hat{S})$ et soit $\xi : M \to \hat{M}$ l'application qui, à $x \in M$ associe $u \mapsto u(x)$. Alors $\hat{\Delta} = \operatorname{Hom}_{E[G]}(\underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta), \hat{S}_K)$ s'identifie à $K \otimes_A M$ et l'application canonique de Δ dans $\hat{\Delta}$ est l'application K-linéaire ξ_K déduite par extension des scalaires de ξ.

Pour tout entier $n \geqq 1$, soit $M_n = \operatorname{Coker} \pi^n_M$ et soit $\xi_n : M_n \to \hat{M}/\pi^n \hat{M}$ l'application déduite de ξ par passage aux quotients. Le A-module $\hat{M}/\pi^n \hat{M}$ s'identifie à un sous-A-module de $\hat{M}_n = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{S}[G]}(\underline{U}_S(M_n), T_\infty)$ et le composé de ξ_n avec l'injection de $\hat{M}/\pi^n \hat{M}$ dans $\hat{M}_n$ est injectif, d'après la proposition 5.15. On a donc, pour tout n, $\operatorname{Ker} \xi \subset \pi^n M$, donc ξ et ξ_K sont injectives.

7.18. Remarques. — (*a*) Soit $\underline{\Delta}_{\hat{S}_K} : \underline{Rep}^{f}_{/E}(G) \to \underline{MF}_{K/E}$ le foncteur contravariant E-linéaire qui à U associe $\operatorname{Hom}_{E[G]}(U, \hat{S}_K)$ (muni de la structure d'objet de $\underline{MF}_{K/E}$ induite par celle de $\hat{S}_K$). On verra au paragraphe 8 (remarques 8.5 et 8.13 *a*) que $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ est pleinement fidèle et que la restriction de $\underline{\Delta}_{\hat{S}_K}$ à l'image essentielle de $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ est un quasi-inverse.

(*b*) La pleine fidélité de $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ peut se voir directement : la pleine fidélité de la restriction de $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ aux catégories $\underline{MF}^{f,q'}_{K/E}$ et $\underline{MF}^{f,q''}_{K/E}$ résulte de l'assertion (ii) de la proposition 7.15. Le cas général peut s'en déduire en regardant d'un peu près les objets de $\underline{MF}^{f,q}_{tor}$, tués par π^2, qui ne sont pas simultanément dans $\underline{MF}^{f,q'}_{tor}$ et $\underline{MF}^{f,q''}_{tor}$.

8. Application aux modules admissibles

8.1. Rappelons que K_0 désigne le corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k, σ le Frobenius absolu opérant sur k, $W(k)$ et K_0, e le degré de l'extension K/K_0.

Nous appelons K-*module filtré* (il vaudrait peut-être mieux dire (K, σ)-module de Dieudonné filtré) la donnée d'un K_0-espace vectoriel D muni d'une application bijective $F : D \to D$, σ-semi-linéaire, et d'une filtration par des sous-K-espaces vectoriels $(D_K^i)_{i \in \mathbf{Z}}$ de $D_K = K \otimes_{K_0} D$, décroissante, exhaustive et séparée.

Les K-modules filtrés forment, de manière évidente, une catégorie $\mathbf{Q}_p$-linéaire, déjà introduite dans [F 1], que l'on note $\underline{MF}_K$. Rappelons aussi (*cf.* [F 1], ou [F 2], § 5) que l'on introduit une sous-catégorie pleine $\underline{MF}_K^f$ de $\underline{MF}_K$ qui est abélienne; que, à tout anneau de Barsotti-Tate B, on peut associer une sous-catégorie pleine, $\underline{MF}_{K,B}$ de $\underline{MF}_K^f$, la catégorie des K-*modules filtrés* B-*admissibles* (resp. la catégorie $\underline{Rep}_B(G)$ ou $\underline{Rep}_{cris}(G)$ des *représentations* B-*admissibles* ou *cristallines*, sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{Rep}(G)$ des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de G) stable par sous-objet, quotient, produit tensoriel, dual; on peut aussi associer à B deux foncteurs $\mathbf{Q}_p$-linéaires :

$$\underline{V}_B : \quad \underline{MF}_{K,B} \to \underline{Rep}_B(G) \qquad \text{et} \qquad \underline{D}_B : \quad \underline{Rep}_B(G) \to \underline{MF}_{K,B},$$

compatibles avec les opérations de produit tensoriel et de dual sur ces deux catégories, quasi-inverses l'un de l'autre et induisant une équivalence entre ces deux catégories.

8.2. Dans toute la suite, B est *l'anneau de Barsotti-Tate construit dans* [F 2]. Nous nous proposons de montrer que les modules galoisiens construits au paragraphe 7 sont B-admissibles et de préciser les relations entre les foncteurs $\underline{V}_B$ et $\underline{U}_{\hat{S}_K}$.

8.3. Commençons par nous placer dans le cas, particulièrement simple, où $E = \mathbf{Q}_p$. On a alors $K = K_0$, $e = 1$ et la catégorie $\underline{MF}_K$ (resp. $\underline{MF}_K^f$) s'identifie à $\underline{MF}_{K/\mathbf{Q}_p}$ (resp. $\underline{MF}_{K/\mathbf{Q}_p}^f$).

8.4. THÉORÈME. — *Supposons* $E = \mathbf{Q}_p$.

(i) *Si* D *est un objet de* $\underline{MF}_K^f$ *tel qu'il existe un entier* j *vérifiant* $D^j = D$ *et* $D^{j+p} = 0$, *alors* D *est* B-*admissible. En particulier,* $\underline{MF}_K^{f,p} = \underline{MF}_{K/\mathbf{Q}_p}^{f,p}$ *est une sous-catégorie de* $\underline{MF}_{K,B}$.

(ii) *Soit* $\underline{V}_B^* : \underline{MF}_{K,B} \to \underline{Rep}^f(G)$ *le foncteur contravariant qui à* D *associe le dual de* $V_B(D)$. *Le foncteur* $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ *et la restriction de* $\underline{V}_B^*$ *à* $\underline{MF}_K^{f,p}$ *sont naturellement équivalents.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de R formé des éléments x tels que $v_R(x) \geqq p$. On voit que la K-algèbre $\hat{S}_K$ s'identifie, en tant qu' « anneau galoisien filtré » à l'anneau noté $B_{\mathfrak{a}}^+$ dans [F 2], § 4.

Soit alors D un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{f,p}$ et soit $V = \underline{U}_{\hat{S}_K}(D)$. D'après la proposition 7.17, la flèche canonique de D dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, \hat{S}_K)$ est injective et on a donc :

$$\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, \hat{S}_K) \geqq \dim_K D = \dim_{\mathbf{Q}_p} V.$$

Mais :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, \hat{S}_K) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(V, B_a^+) = (V^* \otimes_{\mathbf{Q}_p} B_a^+)^G$$

s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $\underline{D}_B(V^*)$ (*cf.* [F 2], §4). D'où $\dim_K \underline{D}_B(V^*) \geqq \dim_{\mathbf{Q}_p} V = \dim_{\mathbf{Q}_p} V^*$, ce qui entraîne ([F 1], n° 3.2) que l'on a l'égalité, donc que D s'identifie à $\underline{D}_B(V^*)$, et que V^* est B-admissible, donc aussi V (*loc. cit.*, prop. 3.4.3). Mais alors $V = \underline{U}_{\hat{S}_K}(D) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{MF}}_K}(D, \hat{S}_K) = \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{MF}}_K}(D, B_0^+)$ s'identifie (*cf.* [F 2], §4) à un sous-$\mathbf{Q}_p[G]$-module de $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{MF}}_K}(D, B) = \underline{V}_B^*(D)$. Comme ils ont tous les deux la même dimension sur $\mathbf{Q}_p$, on a $\underline{V}_B^*(D) = \underline{U}_{\hat{S}_K}(D)$, ce qui achève la démonstration de l'assertion (ii).

Enfin, si D est comme dans l'assertion (i), on peut, grâce à la proposition 7.8, l'écrire sous la forme $D = D_1 \otimes D_2$, avec D_1 objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^{f,p}$ et D_2 objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K^f$ vérifiant $\dim_K D_2 = 1$. D'après ce qui précède, D_1 est B-admissible; comme $\dim_K D_2 = 1$, D_2 l'est aussi (*cf.* [F 1], prop. 4.4.1); il en est de même de $D = D_1 \otimes D_2$ puisque $\underline{\mathrm{MF}}_{K,B}$ est stable par produit tensoriel.

8.5. Remarque. — Soit $\underline{\Delta}_{\hat{S}_K} : \underline{\mathrm{Rep}}^f(G) \to \underline{\mathrm{MF}}_K$ le foncteur contravariant $\mathbf{Q}_p$-linéaire qui à U associe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_p[G]}(U, \hat{S}_K)$. On voit que la restriction de $\underline{\Delta}_{\hat{S}_K}$ à l'image essentielle de $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ s'identifie à la restriction du foncteur $\underline{D}_B^* : U \mapsto \underline{D}_B(U^*)$. En particulier, la restriction de $\underline{\Delta}_{\hat{S}_K}$ est un quasi-inverse du foncteur pleinement fidèle $\underline{U}_{\hat{S}_K}$.

8.6. Revenons au cas général ([E : $\mathbf{Q}_p$] quelconque). Pour énoncer un résultat qui généralise le théorème 8.4, nous avons besoin d'un dictionnaire entre objets de $\underline{\mathrm{MF}}_{K/E}$ et certains objets de $\underline{\mathrm{MF}}_K$, munis d'un plongement de E dans l'anneau de leurs endomorphismes.

Notons $\underline{\mathrm{MF}}_{E\otimes K}$ la catégorie suivante :

— un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{E\otimes K}$ consiste en la donnée d'un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_K$ et d'un plongement de E dans l'anneau de ses endomorphismes;

— un morphisme de $\underline{\mathrm{MF}}_{E\otimes K}$ est un morphisme des objets de $\underline{\mathrm{MF}}_K$ sous-jacents, qui est E-linéaire.

Autrement dit, un objet de $\underline{\mathrm{MF}}_{E\otimes K}$ est un $(E \otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-module D muni :
— d'une part d'une application additive bijective $F : D \to D$ vérifiant :

$$F((x \otimes a).d) = (x \otimes \sigma(a)).F d \qquad \text{si} \quad x \in E, \quad a \in K_0, \quad d \in D;$$

– d'autre part d'une filtration $(D_K^i)_{i\in\mathbf{Z}}$ du $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)$-module

$$D_K=(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)\otimes_{E\otimes\mathbf{Q}_p K_0} D=K\otimes_{K_0} D,$$

par des sous-$(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)$-modules, décroissante, exhaustive et séparée.

Un morphisme $\xi : D\to D'$ de $\underline{MF}_{E\otimes K}$ est une application $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-linéaire des modules sous-jacents qui commute à l'action de F et est telle que l'application $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)$-linéaire de D_K dans D'_K déduite de ξ par extension des scalaires respecte la filtration.

La catégorie $\underline{MF}_{E\otimes K}$ est une catégorie E-linéaire qui possède un produit tensoriel : si D_1 et D_2 sont deux objets de $\underline{MF}_{E\otimes K}$, le produit tensoriel de D_1 et D_2 (dans $\underline{MF}_{E\otimes K}$, ne pas confondre avec le produit tensoriel, dans $\underline{MF}_K$, des objets de $\underline{MF}_K$ sous-jacents) est $D=D_1\otimes_{E\otimes K_0} D_2$, avec $F(d_1\otimes d_2)=F d_1\otimes F d_2$, si $d_1\in D_1$ et $d_2\in D_2$, la filtration de $D_K=K\otimes_{K_0} D=D_{1K}\otimes_{E\otimes K} D_{2K}$ étant définie pae $D_K^i=\sum_{i'+i''=i} D_{1K}^{i'}\otimes_{E\otimes K} D_{2K}^{i''}$, pour tout $i\in\mathbf{Z}$.

8.7. Remarque. – L'application de $E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$ dans lui-même, qui à $x\otimes a$ associe $x\otimes\sigma(a)$, permute les idempotents primitifs de $E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$. On en déduit que, si D est un objet de $\underline{MF}_{E\otimes K}$, le $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-module sous-jacent est libre; de même D_K est donc un $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)$-module libre; les $(D_K^i)_{i\in\mathbf{Z}}$, en revanche, ne sont pas en général des sous $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)$-modules libres de D_K.

8.8. Soit $\lambda : E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K\to K$ l'application qui à $x\otimes a$ associe xa et soit ε l'unique idempotent primitif de $E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K$ tel que $\lambda(\varepsilon)=1$, soit $\varepsilon'=1-\varepsilon$.

Si D est un objet de $\underline{MF}_{E\otimes K}$, on pose, pour tout $i\in\mathbf{Z}$, $(\varepsilon D_K)^i=D_K^i\cap\varepsilon D_K$.

Nous notons $\underline{MF}_{E\otimes K/E}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{E\otimes K}$ formée des objets D qui vérifient :

pour tout $i\in\mathbf{Z}$:

$$D_K^i=\begin{cases}(\varepsilon D_K)^i\oplus\varepsilon' D_K & \text{si } i\leq 0,\\ (\varepsilon D_K)^i & \text{si } i>0.\end{cases}$$

Il est facile de voir que $\underline{MF}_{E\otimes K/E}$ est stable par produit tensoriel.

8.9. Nous allons construire une équivalence entre la catégorie $\underline{MF}_{E\otimes K/E}$ et la catégorie $\underline{MF}_{K/E}$ définie au n° 7.1.

Pour cela, commençons par introduire l'application $\lambda_0 : E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0\to K$ définie par $\lambda_0(x\otimes a)=xa$, si $x\in E$, $a\in K_0$, et par noter ε_0 l'unique idempotent primitif de $E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$ tel que $\lambda_0(\varepsilon_0)=1$. Remarquons :

(i) que, si D est un $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-module et si D_K est le $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)$-module déduit de D par extension des scalaires, alors, comme $\lambda_0(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)=K$, $\varepsilon_0 D$ est, de manière naturelle, un K-espace vectoriel; en outre, l'application :

$$\xi_D : \varepsilon_0 D\to\varepsilon D_K$$

définie par $\xi_D(d)=\varepsilon.(1\otimes d)$ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, l'application inverse :

$$\xi_D^{-1}: \quad \varepsilon D_K \to \varepsilon_0 D,$$

étant définie par $\xi_D^{-1}(\sum x_i\otimes d_i)=\sum \mathrm{tr}_{K/K_0}(x_i)\,d_i$, si les x_i sont dans K et les d_i dans D.

(ii) que, si D est un $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)[F]$-module [i.e. un $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-module muni d'une application $F: D\to D$ telle que $F((x\otimes a).d)=(x\otimes\sigma a).F\,d$ si $x\in E$, $a\in K_0$, $d\in D$], alors $\varepsilon_0 D$ est stable par F^r et peut être considéré comme un $\mathbf{Q}_p[F^r]$-module; en outre, l'application :

$$\eta_D: \quad \mathbf{Q}_p[F]\otimes_{\mathbf{Q}_p[F^r]}\varepsilon_0 D\to D,$$

qui à $\sum F^i\otimes d_i$ associe $\sum F^i d_i$, est un isomorphisme.

8.10. Pour tout objet D de $\underline{MF}_{E\otimes K/E}$, nous notons $\underline{\varepsilon}(D)$ l'objet de $\underline{MF}_{K/E}$ ainsi défini :

– le K-espace vectoriel sous-jacent est $\Delta=\varepsilon_0 D$ sur lequel Φ opère comme F^r :

– la filtration est définie par $\Delta^i=\xi_D^{-1}(D_K^i\cap\varepsilon D_K)$, pour tout i.

De même, pour tout objet Δ de $\underline{MF}_{K/E}$, nous notons $\underline{t}(\Delta)$ l'objet de $\underline{MF}_{E\otimes K/E}$ défini ainsi :

– le $\mathbf{Q}_p[F]$-module sous-jacent est $D=\mathbf{Q}_p[F]\otimes_{\mathbf{Q}_p[\Phi]}\Delta$ (on a identifié $\mathbf{Q}_p[\Phi]$ à une sous-$\mathbf{Q}_p$-algèbre de $\mathbf{Q}_p[F]$ en posant $\Phi=F^r$), muni de la structure de $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K)$-module définie par :

$$(x\otimes a).(\sum F^i\otimes d_i)=\sum F^i\otimes(x\,\sigma^{-i}(a)).d_i;$$

– on note $\xi_\Delta:\Delta\to\varepsilon D_K$ l'application définie par $\xi_\Delta(\delta)=\xi_D(1\otimes_{\mathbf{Q}_p[\Phi]} d)$ (où ξ_D a été définie au n° 8.9), et la filtration de D_K est définie par :

$$D_K^i=\begin{cases}\xi_\Delta(\Delta^i)\oplus\varepsilon' D_K & \text{si } i\leqq 0,\\ \xi_\Delta(\Delta^i) & \text{si } i>0.\end{cases}$$

On peut considérer, de manière évidente, $\underline{\varepsilon}$ et $\underline{t}$ comme des foncteurs et ceux-ci sont E-linéaires.

8.11. Proposition. – *Le foncteur* $\underline{t}:\underline{MF}_{K/E}\to\underline{MF}_{E\otimes K/E}$ *induit une équivalence entre ces deux catégories et* $\underline{\varepsilon}:\underline{MF}_{E\otimes K/E}\to\underline{MF}_{K/E}$ *est un quasi-inverse.*

Démonstration. – Soit Δ un objet de $\underline{MF}_{K/E}$, soit $D=\underline{t}(\Delta)$ et soit $\Delta'=\underline{\varepsilon}(D)$. L'application ξ_Δ est un isomorphisme de Δ sur le K-espace vectoriel sous-jacent à Δ'; on vérifie immédiatement que c'est un isomorphisme d'objets de $\underline{MF}_{K/E}$, fonctoriel en Δ.

Soit D un objet de $\underline{MF}_{E\otimes K/E}$, soit $\Delta=\underline{\varepsilon}(D)$ et soit $D'=\underline{t}(\Delta)$. Par construction, le K-espace vectoriel sous-jacent à Δ est $\varepsilon_0 D$ et l'application $\delta\mapsto 1\otimes_{\mathbf{Q}_p[\Phi]}\delta$ définit un isomorphisme de Δ sur $\varepsilon_0 D'$; d'où un isomorphisme du K-espace vectoriel $\varepsilon_0 D$ sur $\varepsilon_0 D'$. Celui-ci induit, grâce

aux isomorphismes η_D et $\eta_{D'}$ considérés au n° 8.9, un isomorphisme du $(E\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)[F]$-module D sur D'; on vérifie que c'est un isomorphisme dans la catégorie $\underline{\mathrm{MF}}_{K/E}$ (i.e. que l'application K-linéaire déduite par extension des scalaires envoie D_K^i sur $D_K'^i$, pour tout i), fonctoriel en D. La proposition en résulte.

8.12. Notons $\underline{\mathrm{MF}}^f_{E\otimes K/E}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}_{E\otimes K/E}$ formée des objets dont le K-module filtré sous-jacent est faiblement admissible et $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{E\otimes K/E}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{MF}}^f_{E\otimes K/E}$ formée des objets D tels que $D^0=D$ et $D^q=0$.

PROPOSITION. — (i) *Pour tout objet* D *de* $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{E\otimes K/E}$, *l'objet de* $\underline{\mathrm{MF}}_K$ *sous-jacent est* B-*admissible.*

(ii) *La catégorie* $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{E\otimes K/E}$ *est l'image essentielle de la restriction à* $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{K/E}$ *du foncteur* $\underline{t}$. *Les foncteurs* $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ *et* $\underline{V}^*_B\,\underline{t}$ *de* $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{K/E}$ *dans* $\underline{\mathrm{Rep}}_{/E}(G)$ *sont naturellement équivalents*;

[On a muni le $\mathbf{Q}_p[G]$-module $\underline{V}^*_B(\underline{t}(\Delta))$ de la structure de E-espace vectoriel induite par le plongement donné de E dans l'anneau des endomorphismes du module filtré B-admissible sous-jacent à $\underline{t}(\Delta)$].

La *démonstration* de cette proposition est analogue à celle du théorème 8.4 qu'elle généralise. Contentons-nous d'indiquer comment on peut définir la flèche qui induit l'équivalence naturelle :

Soit $W_{K_0}(R)=K_0\otimes_{W(k)}W(R)$. Tout élément de $W_{K_0}(R)$ peut s'écrire, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{n\gg-\infty} p^n[u_n]$, avec les $u_n\in R$, presque tous nuls pour $n<0$. Notons S_0 le sous-anneau de $W_{K_0}(R)$ formé des éléments $\sum_{n\gg-\infty} p^n[u_n]$, vérifiant :

$$v_R(u_{-m})\geqq mq.v(p) \quad \text{pour tout } m>0.$$

Soit $\mathrm{tr}: W_K(R)=K\otimes_{W(k)}W(R)\to W_{K_0}(R)$ l'application qui à $x\otimes_{K_0}a$ associe $\mathrm{tr}_{K/K_0}(x).a$. Il est clair que $\mathrm{tr}(S)\subset S_0$ et que la restriction de tr à S se prolonge par continuité en une application $W(k)$-linéaire de $\hat{S}=\varprojlim S/\pi^n S$ dans $\hat{S}_0=\varprojlim S_0/p^n S_0$; nous notons encore $\mathrm{tr}: \hat{S}_K=K\otimes_A\hat{S}=K_0\otimes_{W(k)}\hat{S}\to\hat{S}_{K_0}=K_0\otimes_{W(k)}\hat{S}_0$ l'application K_0-linéaire déduite par extension des scalaires. Si $\mathfrak{a}$ désigne l'idéal de R formé des x vérifiant $v_R(x)\geqq q.v(p)$, $\hat{S}_{K_0}$ s'identifie, en tant que K_0-algèbre munie d'une action de G, à $B_{\mathfrak{a}}^+$ (*cf.* [F 2], §4).

Soit alors Δ un objet de $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{K/E}$ et soit $u\in\underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta)=\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{MF}}_{K/E}}(\Delta,\hat{S}_K)$. On définit une application K_0-linéaire :

$$\hat{u}: \quad D=\underline{t}(\Delta)=\mathbf{Q}_p[F]\otimes_{\mathbf{Q}_p[\Phi]}\Delta\to B_{\mathfrak{a}}^+=\hat{S}_{K_0},$$

en posant $\hat{u}(\sum F^i\otimes\delta_i)=\sum F^i(\mathrm{tr}(u(\delta_i)))$. Il est clair que l'application $\hat{u}$ commute à l'action de F et on vérifie que l'application K-linéaire $\hat{u}_K: D_K\to B^+_{K,\mathfrak{a}}$ déduite de $\hat{u}$ par extension des

scalaires est compatible avec les filtrations de D_K et $B^+_{K,a}$. Autrement dit $\hat{u} \in \mathrm{Hom}_{\underline{MF}_{K/E}}(D, B^+_a)$. Mais (*cf.* [F 2], § 4), $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}_{K/E}}(D, B^+_a)$ s'identifie lui-même à un sous-module de $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}_{K/E}}(D, B) = \underline{V}^*_B(D)$. On a ainsi obtenu un homomorphisme injectif :

$$u \mapsto \hat{u}$$

de $\underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta)$ dans $\underline{V}^*_B(\underline{t}(\Delta))$. En procédant comme pour le théorème 8.4, on en déduit que $D = \underline{t}(\Delta)$ est B-admissible et que $u \mapsto \hat{u}$ est un isomorphisme.

8.13. Remarques. — (*a*) Il résulte immédiatement des propositions 8.11 et 8.12 que la restriction à l'image essentielle de $\underline{U}_{\hat{S}_K}$ du foncteur $\underline{\Delta}_{\hat{S}_K} : \underline{\mathrm{Rep}}^f_E(G) \to \underline{MF}_{K/E}$, défini dans la remarque (*a*) du n° 7.18, est un quasi-inverse du foncteur pleinement fidèle $\underline{U}_{\hat{S}_K}$.

(*b*) Si Δ est un objet de $\underline{MF}^{f,q}_{K/E}$, le $\mathbf{Q}_p[G]$-module sous-jacent à $V = \underline{U}_{\hat{S}_K}(\Delta)$ est B-admissible et est donc, en particulier, de Hodge-Tate.

(*c*) Réciproquement, si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}^f_E(G)$, on peut écrire $V_C = C \otimes_{\mathbf{Q}_p} V = \varepsilon V_C \oplus \varepsilon' V_C$, où ε et ε' sont les idempotents de $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} K \subset E \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ définis au n° 8.8 (on voit donc que εV_C s'identifie à $C \otimes_E V$). On voit facilement que, pour qu'un objet V de $\underline{\mathrm{Rep}}^f_E(G)$ soit dans l'image essentielle de $\underline{U}_{\hat{S}_K}$, il faut et il suffit que le $\mathbf{Q}_p[G]$-module sous-jacent soit B-admissible et que l'on ait :

(i) $\{ v \in \varepsilon V_C \mid gv = \chi^i(g).v$, pour tout $g \in G \} = 0$ si $i < 0$ ou $i \geqq q$;

(ii) $\dim_K (\varepsilon' V_C)^G = \dim_C (\varepsilon' V_C)$,

(où, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, χ^i désigne, comme d'habitude, la puissance i-ième du caractère qui donne l'action de G sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p).

Pour tout C-espace vectoriel U de dimension finie, sur lequel G opère semi-linéairement [i. e. tel que $g(cu) = gc.gu$, pour tout $g \in G$, $c \in C$, $u \in U$], posons $U\{i\} = \{ u \in U \mid gu = \chi^i(g).u$, si $g \in G \}$. Si V est un objet de $\underline{\mathrm{Rep}}^f_E(G)$ tel que le $\mathbf{Q}_p[G]$-module sous-jacent est B-admissible, la condition (i) revient à dire que :

$$C \otimes_E V \simeq \bigoplus_{i=0}^{q-1} C \otimes_K ((C \otimes_E V)\{i\})$$

et la condition (ii) revient à dire que, pour tout $\mathbf{Q}_p$-plongement $\gamma : E \to C$, différent de l'inclusion :

$$C \otimes_E V \simeq C \otimes_K ((C \otimes_E V)\{i\}).$$

9. Application aux schémas en groupes finis et plats

Dans ce paragraphe, on suppose $e = 1$ [on a donc $A = W(k)$], $r = 1$ (on a donc $\tau = \sigma =$ Frobenius absolu et $\mathfrak{O} = \mathbf{Z}_p$) et $\pi = p$. Les n°s 9.1 à 9.6 sont consacrés à des rappels sur les schémas en groupes finis et plats sur Spec k et Spec A (*cf.* par exemple [F3], [F4]).

9.1. On note D_k l'anneau (non commutatif si $k \neq \mathbf{F}_p$) engendré par A et deux éléments F et V, soumis aux relations :

$$\begin{cases} \mathrm{FV} = \mathrm{VF} = p, \\ \mathrm{F}a = \sigma a . \mathrm{F} \quad \text{pour tout } a \in \mathrm{A}, \\ a\mathrm{V} = \mathrm{V} . \sigma a \quad \text{pour tout } a \in \mathrm{A}. \end{cases}$$

A toute k-algèbre associative, commutative et unitaire $\mathfrak{R}$, on associe le D_k-module à gauche $\mathrm{CW}(\mathfrak{R})$ des « covecteurs de Witt à coefficients dans $\mathfrak{R}$ » :

— se donner un élément $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1}, x_0)$ de $\mathrm{CW}(\mathfrak{R})$ revient à se donner une famille $(x_{-n})_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{R}$ vérifiant :

(ψ) *il existe un entier $s \geqq 0$ tel que l'idéal de $\mathfrak{R}$ engendré par les x_{-n}, pour $n \geqq s$, est nilpotent;*

— l'addition et la multiplication par les éléments de A sont définies de la manière usuelle (*cf.* [F4], chap. II, § 1);

— pour tout $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0) \in \mathrm{CW}(\mathfrak{R})$, on a :

$$\mathrm{F}x = (\ldots, x_{-n}^p, \ldots, x_{-1}^p, x_0^p) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}x = (\ldots, x_{-n-1}, \ldots, x_{-2}, x_{-1}).$$

9.2. Appelons p-groupe fini sur k (resp. sur A) la donnée d'un schéma en groupes commutatifs, fini et plat, de rang une puissance de p, sur Spec k (resp. sur Spec A).

Si J est un p-groupe fini sur k, si $\mathcal{O}_k(\mathrm{J})$ est son algèbre affine et si :

$$m^* : \quad \mathcal{O}_k(\mathrm{J}) \to \mathcal{O}_k(\mathrm{J}) \otimes_k \mathcal{O}_k(\mathrm{J})$$

est le coproduit, le module de Dieudonné $\underline{\mathrm{M}}(\mathrm{J})$ de J s'identifie au sous-D_k-module à gauche de $\mathrm{CW}(\mathcal{O}_k(\mathrm{J}))$ formé des covecteurs $(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0)$ qui vérifient :

$$(\ldots, m^* x_{-n}, \ldots, m^* x_0) = (\ldots, x_{-n} \otimes 1, \ldots, x_0 \otimes 1) + (\ldots, 1 \otimes x_{-n}, \ldots, 1 \otimes x_0).$$

On sait que $\underline{\mathrm{M}}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des p-groupes finis sur k dans celle des D_k-*modules finis* (i. e. des D_k-modules à gauche dont le A-module sous-jacent est de longueur finie) et que $\underline{\mathrm{M}}$ induit une anti-équivalence entre ces deux catégories.

9.3. Si $\mathfrak{R}$ est une A-algèbre, commutative et unitaire, qui est séparée et complète pour la topologie p-adique, on pose :

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{K}} = \mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}} \mathfrak{R} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{R}_k = k \otimes_{\mathrm{A}} \mathfrak{R}.$$

Si $x = (\ldots, x_{-n}, \ldots, x_0) \in \mathrm{CW}(\mathfrak{R}_k)$ et si l'on choisit des relèvements $\hat{x}_{-n}$ des x_{-n} dans $\mathfrak{R}$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-1} \hat{x}_{-n}^{p^n}$ converge dans $\mathfrak{R}_{\mathrm{K}}$ (pour la topologie p-adique) et son image $w_{\mathfrak{R}}(x)$ dans $\mathfrak{R}_{\mathrm{K}}/\mathfrak{R}$ ne dépend pas du choix des relèvements. L'application :

$$w_{\mathfrak{R}} : \quad \mathrm{CW}(\mathfrak{R}_k) \to \mathfrak{R}_{\mathrm{K}}/\mathfrak{R}$$

ainsi définie est A-linéaire.

9.4. On appelle *système fini de Honda* la donnée d'un couple (L, M) formé d'un D_k-module fini M et d'un sous-A-module L de M vérifiant :

(SH_1) on a $FM \cap L = pL$;

(SH_2) on a $L/pL = M/FM$,

(SH_3) la restriction de V à L est injective.

On dit qu'un système fini de Honda (L, M) est *unipotent* si l'action de V sur M est nilpotente.

Les systèmes finis de Honda forment, de manière évidente, une catégorie que nous notons $\underline{SH}_A^f$; nous notons $\underline{SH}_A^{f,u}$ la sous-catégorie pleine formée des systèmes finis de Honda unipotents. Les catégories $\underline{SH}_A^f$ et $\underline{SH}_A^{f,u}$ sont abéliennes et même artiniennes.

9.5. Soit J un p-groupe fini sur A et soit $\mathcal{O}_A(J)$ son algèbre affine. Alors $(\mathcal{O}_A(J))_k$ s'identifie à l'algèbre affine $\mathcal{O}_k(J_k)$ de sa fibre spéciale J_k et $(\mathcal{O}_A(J))_K$ à l'algèbre affine $\mathcal{O}_K(J_K)$ de sa fibre générique J_K.

Soit $\underline{L}(J)$ le noyau de la restriction de $w_{\mathcal{O}_A(J)}$ à $\underline{M}(J_k) \subset CW(\mathcal{O}_k(J_k))$. Le couple $\underline{LM}(J) = (\underline{L}(J), \underline{M}(J_k))$ est un système fini de Honda.

On peut considérer $\underline{LM}$ comme un foncteur contravariant additif de la catégorie des p-groupes finis sur A dans $\underline{SH}_A^f$. On sait alors (*cf.* [F3]) que :

— si $p \neq 2$, $\underline{LM}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes finis sur A et $\underline{SH}_A^f$:

— pour p quelconque, $\underline{LM}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes finis unipotents (i.e. à dual connexe) sur A et $\underline{SH}_A^{f,u}$.

9.6. Enfin, si J est un p-groupe fini sur A, si $(L, M) = \underline{LM}(J)$ et si $\mathfrak{S}$ est une A-algèbre séparée et complète pour la topologie p-adique, on montre que le groupe $J(\mathfrak{S})$ des points de J à valeurs dans $\mathfrak{S}$ s'identifie au groupe des applications D_k-linéaires à gauche de M dans $CW(\mathfrak{S}_k)$ qui envoient L dans le noyau de $w_{\mathfrak{S}}$.

9.7. Notons $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{tor}^f$ formée des M qui vérifient $M^0 = M$ et $M^2 = 0$. On se propose de construire deux foncteurs $\underline{I} : \underline{SH}_A^f \to \underline{MF}_{tor}^{f,2}$ et $\underline{H} : \underline{MF}_{tor}^{f,2} \to \underline{SH}_A^f$, quasi-inverses l'un de l'autre.

Commençons par $\underline{I}$: soit (L, M) un objet de $\underline{SH}_A^f$. Alors :

(i) le A-module sous-jacent à $\underline{I}(L, M)$ est le A-module sous-jacent à $M_{\sigma^{-1}}$ [autrement dit, on identifie le groupe abélien sous-jacent à $\underline{I}(L, M)$ à M et la multiplication par $a \in A$ dans $\underline{I}(L, M)$ est la multiplication par $\sigma^{-1} a$ dans M];

(ii) la filtration de $\underline{I}(L, M)$ est définie par :

$$\underline{I}(L, M)^i = \begin{cases} M & \text{si } i \leqq 0, \\ VL & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i \geqq 2; \end{cases}$$

(iii) on a $\varphi_M^0 = F$ et, pour tout $x \in VL$, $\varphi_M^1(x)$ est l'unique $y \in L$ tel que $x = V\,y$ [l'unicité résulte de (SH_3)].

On a bien $\varphi_M^0(V\,y) = FV\,y = py = p\,\varphi_M^1(V\,y)$, pour tout $V\,y \in VL$ et les conditions (SH_1) et (SH_2) impliquent que $\varphi_M^0(M^0) + \varphi_M^1(M^1) = M$; par conséquent, $\underline{I}(L, M)$ est bien un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$.

Il est clair que $\underline{I}$ est, de manière évidente, un foncteur additif de $\underline{SH}_A^f$ dans $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$.

9.8. Soit M un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$. Le A-module $\overline{M}$ est la limite inductive du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & M^1 \arrow[dl, "\text{incl.}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ M^0 & & M^1 \end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif de A-modules :

$$\begin{tikzcd} & M^1 \arrow[dl, "\text{incl.}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ M^0 \arrow[dr, "\alpha_M^0"'] & & M^1 \arrow[dl, "\alpha_M^1"] \\ & \overline{M} & \end{tikzcd}$$

De la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & M^1 \arrow[dl, "\text{incl.}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ M^0 \arrow[dr, "p"'] & & M^1 \arrow[dl, "\text{incl.}"] \\ & M^0 & \end{tikzcd}$$

résulte l'existence d'une application A-linéaire unique $\beta_M : \overline{M} \to M$ telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & M^1 \arrow[dl, "\text{incl.}"'] \arrow[dr, "p"] & \\ M^0 \arrow[dr, "\alpha_M^0"'] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & M^1 \arrow[dl, "\alpha_M^1"] \arrow[ddl, bend left, "\text{incl.}"] \\ & \overline{M} \arrow[d, "\beta_M"] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Comme M est un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f}$, l'application A-linéaire :

$$\varphi_M : \overline{M} \to M_\sigma$$

est bijective. On munit le A-module M_σ d'une structure de D_k-module fini en définissant l'action de F et V par (rappelons que le groupe abélien sous-jacent à M_σ s'identifie à M) :

$$\begin{cases} F = \varphi_M^0 \, (= \varphi_M \circ \alpha_M^0), \\ V = \beta_M \circ \varphi_M^{-1}. \end{cases}$$

9.9. Proposition. — *Soit* M *un objet de* $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$. *Le couple* $\underline{H}(M) = (L, M_\sigma)$, *où* M_σ *est le* D_k-*module fini défini ci-dessus et où* $L = \operatorname{Im} \varphi_M^1$, *est un système fini de Honda.*

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de vérifier les quatre propriétés suivantes :

(SH_1') on a $pL \subset FM \cap L$;

(SH_1'') on a $FM \cap L \subset pL$;

(SH_2') on a $M = FM + L$;

(SH_3) la restriction de V à L est injective.

Vérifions (SH_1') : si $x \in pL$, $x = py$ avec $y \in L$ et $y = \varphi_M^1(z)$ avec $z \in M^1$, d'où $x = py = \varphi_M^1(pz) = \varphi_M^0(z) = Fz$ et $x \in FM \cap L$.

Vérifions (SH_1'') : soit $x \in FM \cap L$; il existe $y \in M^0$ et $z \in M^1$ tels que $x = \varphi_M^0(y) = \varphi_M^1(z)$; d'où $\varphi_M(\alpha_M^0(y)) = \varphi_M(\alpha^1(z))$ ou encore $\alpha_M^0(y) = \alpha_M^1(z)$; donc $y \in M^1$ et :

$$x = \varphi_M^0(y) = p\,\varphi_M^1(y) \in pL.$$

Vérifions (SH_2') : on a $M = \varphi_M(\overline{M}) = \varphi_M^0(M) + \varphi_M^1(M^1) = FM + L$.

Enfin, vérifions (SH_3) : si $x \in L$, $x = \varphi_M^1(y)$, avec $y \in M^1$ et $Vx = (\beta_M \cdot \varphi_M^{-1} \cdot \varphi_M^1)(y) = (\beta_M \circ \varphi_M^{-1} \circ \varphi_M \circ \alpha_M^1)(y) = (\beta_M\, \alpha_M^1)(y) = y \neq 0$ si $x \neq 0$.

9.10. Le résultat suivant est alors immédiat :

Proposition. — *Le foncteur* $\underline{I}$ *induit une équivalence entre* $\underline{SH}_A^f$ *et* $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$ *et* $\underline{H}$ *est un quasi-inverse.*

9.11. En composant le foncteur $\underline{LM}$ et le foncteur $\underline{I}$, on obtient un foncteur contravariant additif :

$$\underline{ILM} : \quad (p\text{-groupes finis sur A}) \to \underline{MF}_{tor}^{f,2}.$$

Si l'on note $MF_{tor}^{f,2'}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$ formée des objets qui n'admettent pas de quotient non trivial N tel que $N = N^1$, on voit facilement qu'un système fini de Honda (L, M) est unipotent si et seulement si $\underline{I}$ (L, M) est un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,2'}$. Il résulte alors du n° 9.5 et de la proposition 9.10 que :

— *si* $p \neq 2$, *le foncteur* $\underline{ILM}$ *induit une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes finis sur* A *et la catégorie* $\underline{MF}_{tor}^{f,2}$;

— *pour p quelconque, le foncteur* $\underline{ILM}$ *induit une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes finis* unipotents *sur* A *et la catégorie* $\underline{MF}_{tor}^{f,2'}$.

9.12. PROPOSITION. — *Soit* J *un p-groupe fini sur* A (*si* $p=2$, *on suppose* J *unipotent*). *Soit* $M=\underline{ILM}(J)$. *Alors le groupe* $J(\overline{A})$ *s'identifie* (*canoniquement et fonctoriellement*) *à* $\underline{U}_S(M)$.

Démonstration. — Notons $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ le A-module quotient de $CW(\overline{A}/p\overline{A})$ par le noyau de V. Les éléments de $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ peuvent encore se représenter par des covecteurs :

$$x=(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})$$

dont les composantes, indexées par les entiers *strictement négatifs*, sont des éléments de $\overline{A}/p\overline{A}$ vérifiant encore la condition (ψ) du n° 9.1. L'addition et la multiplication par un élément de A sont données par les formules usuelles.

Si $x=(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1})\in CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$, et si $\hat{x}_{-n}$ est un relèvement dans le complété A_C de $\overline{A}$ de x_{-n}, la série $\sum_{n=1}^{\infty} p^{-n}\hat{x}_{-n}^{p^n}$ converge dans le complété C de $\overline{K}$ et son image $\theta_0(x)$ dans $C/A_C=\overline{K}/\overline{A}$ ne dépend pas du choix du relèvement des x_{-n}. L'application :

$$\theta_0 : \quad CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})\to\overline{K}/\overline{A}$$

ainsi définie est A-linéaire.

On munit le A-module $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ d'une structure de module filtré de la manière suivante :

(i) la filtration est définie par

$$(CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A}))^i=\begin{cases} CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A}) & \text{si } i\leqq 0,\\ \ker\theta_0 & \text{si } i=1\\ 0 & \text{si } i\geqq 2;\end{cases}$$

(ii) on a $\varphi^0_{CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})}=F$, autrement dit, pour tout :

$$x=(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-1})\in CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A}),$$
$$\varphi^0_{CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})}(x)=(\ldots, x_{-n}^p, \ldots, x_{-1}^p);$$

(iii) si $x=(\ldots, x_{-n}, \ldots, x_{-2}, x_{-1})\in\ker\theta_0$ et si x_0 est l'image dans $\overline{A}/p\overline{A}$ de l'élément $\hat{x}_0\in A_C$ défini par $\sum_{n=1}^{\infty} p^{-n}\hat{x}_{-n}^{p^n}+\hat{x}_0=0$ on a :

$$\varphi^1_{CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})}(x)=(\ldots, x_{-n+1}, \ldots, x_{-1}, x_0).$$

Soit BW(R) le module des bivecteurs de Witt à coefficients dans R (*cf.* [F4], chap. V, § 1 et [F2], § 6). On sait ([F4], chap. V, § 1) que tout élément $x\in BW(R)$ peut s'écrire $x=(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, avec les $x_n\in R$, presque tous dans l'idéal maximal de R pour $n<0$.

Pour tout $x\in R$, notons $\tilde{x}$ l'image de $x^{(0)}\in A_C$ dans $A_C/pA_C=\overline{A}/p\overline{A}$. Si $\mathfrak{a}$ est l'idéal de R formé des éléments x vérifiant $v_R(x)\geqq p$, l'application qui à $x=(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in BW(R)$ associe

$(\ldots, \tilde{x}_{-n}, \ldots, \tilde{x}_{-1})$ est A-linéaire surjective et son noyau est le sous-A-module noté $BW_a(R)$ dans [F2], § 6. Ceci nous permet d'identifier $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ au quotient $BW(R)/BW_a(R)$.

On sait (*cf.* [F2], § 6) que $BW(R)$ s'identifie à un sous-A-module de $B_a^+ = \hat{S}_K$ ($= K \otimes_A \hat{S}$ où $\hat{S}$ est le séparé complété de S pour la topologie p-adique) et que $\hat{S} \cap BW(R) = BW_a(R)$.

Par passage aux quotients, ceci nous permet de considérer $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ comme un sous-A-module de $\hat{S}_K/\hat{S} = S_K/S = T_\infty$. Il est facile de voir que l'inclusion de $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ dans T_∞ est un morphisme de $\mathcal{MF}$.

9.13. Venons-en alors à la démonstration proprement dite de la proposition. Soit $(L, M) = \underline{LM}(J)$. D'après le n° 9.7, $J(\overline{A}) = J(A_C)$ s'identifie au groupe des applications D_k-linéaires de M dans $CW(\overline{A}/p\overline{A})$ qui envoient L dans le noyau de w_{A_C}. On voit (en étendant convenablement la définition du foncteur $\underline{I}$) que $\underline{I}(\ker w_{A_C}, CW(\overline{A}/p\overline{A}))$ s'identifie à $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ et il en résulte immédiatement que $J(\overline{A})$ s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(\underline{ILM}(J), CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})) = \mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})).$$

Comme l'inclusion de $CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})$ dans S_∞ est un morphisme de $\mathcal{MF}$, $\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A}))$ est un sous-module de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{MF}}(M, S_\infty) = \underline{U}_S(M)$. Comme :

$$\lg_{Z_p}(J(\overline{A})) = \lg_A M = \lg_{Z_p}(\underline{U}(M)),$$

on a :

$$\mathrm{Hom}_{\underline{MF}}(M, CW_{-1}(\overline{A}/p\overline{A})) = \underline{U}_S(M)$$

et la proposition en résulte.

Listes des principales notations

$K, k, p, \overline{K}, G, W(k), K_0, e, \sigma$: 0.1
$E, \mathfrak{O}, A, \pi, \tilde{\mathfrak{O}}, r, q, W(\tilde{\mathfrak{O}}), E_0, \tau$: 0.3
M_τ : 1.1
M^i, φ_M^i : 1.2
$\underline{MF}_{A,\tau,\pi} = \underline{MF}$: 1.3
$\underline{Fil}_A, \overline{M}, \varphi_M$: 1.4
$\underline{MF}^f_{tor} = \underline{MF}^f_{A,\tau,\pi,tor}$: 1.5
$\mathcal{MF}, \alpha_M^i, \beta_M^i$: 1.11
$\overline{A}, C, A_C$: 2
$R, (x^{(m)})_{m \in Z}, v, v_R$: 2.1
$W(R), [x]$: 2.2
$W_A(R)$: 2.3
$W_K(R)$: 2.4
$\theta^0, W_K^1(R); x_0, \xi_0, \Phi$: 2.5
$W_K^i(R), \varphi^i_{W_K(R)}$: 2.6
$S_{A,\tau,\pi} = S, S^i, \varphi_S^i$: 2.7

$\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q}$: 3.2
$\underline{\mathrm{U}}_{\mathrm{S}}$: 3.3
$\widetilde{\mathscr{M}\mathscr{F}}$, $\tilde{\mathrm{M}}^q$, $\tilde{\mathrm{S}}$: 3.5
S_n, S_∞, S_{E} : 3.7
$\bar{k}$, A' : 3.12
$\underline{\tilde{\mathrm{M}}} = \widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}_{\mathrm{tor}}^{f}$: 4.1
$\mathrm{M}(h; i)$, ν_a, $\mathbf{F}_{q^h}$: 4.3
d^0, f : 4.4
$\boldsymbol{\mu}_n$, η_n, χ_h : 5.1
$\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}$, T_∞, $\tilde{\mathrm{T}}$: 5.5
$\mathfrak{a}^t$, $\bar{\mathrm{A}}^\vee$, $(\bar{\mathrm{A}}^\vee/\pi\bar{\mathrm{A}}^\vee)^i$, $\varphi^i_{\bar{\mathrm{A}}^\vee/\pi\bar{\mathrm{A}}^\vee}$: 5.8
ξ, ρ : 5.9
$\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q'}$, $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{tor}}^{f,q''}$: 6.1
$\mathrm{Ext}^1_{\sim} = \mathrm{Ext}^1_{\widetilde{\underline{\mathrm{MF}}}_{\mathrm{tor}}}$: 6.4
$\mathrm{A}^\vee_{\mathrm{L}}/\pi\mathrm{A}^\vee_{\mathrm{L}}$, $\tilde{\mathrm{T}}_{\mathrm{L}}$: 6.7
$\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K/E}}$: 7.1
$\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{K/E}}$: 7.4
$\underline{\mathrm{MF}}^{f^d}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}$, $\underline{\mathrm{MF}}^{f^d,q}_{\mathrm{K}/\mathfrak{O}}$: 7.11
$\hat{\mathrm{S}}$, $\underline{\mathrm{U}}_{\hat{\mathrm{S}}}$, $\underline{\mathrm{Rep}}^{lf}_{/\mathfrak{O}}(\mathrm{G})$: 7.14
$\underline{\mathrm{Rep}}^f_{/\mathrm{E}}(\mathrm{G})$, $\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{K}}$, $\underline{\mathrm{U}}_{\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{K}}}$, $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{\mathrm{K}/\mathrm{E}}$: 7.16
$\underline{\Delta}_{\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{K}}}$: 7.18
$\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K}}$, $\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{K}}$, $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{K,B}}$, $\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{B}}(\mathrm{G})$,
$\underline{\mathrm{Rep}}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{G})$: 8.1
$\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{B}}$, $\underline{\mathrm{D}}_{\mathrm{B}}$: 8.1
$\underline{\mathrm{MF}}^{f,p}_{\mathrm{K}} = \underline{\mathrm{MF}}^{f,p}_{\mathrm{K}/\mathbf{Q}_p}$, $\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{B}}$: 8.4
$\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{K}}$, $\underline{\mathrm{MF}}_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{K/E}}$: 8.6
ε, ε' : 8.8
ε_0, ξ_{D}, η_{D} : 8.9
$\underline{\varepsilon}(\mathrm{D})$, $\underline{t}(\Delta)$, ξ_Δ : 8.10
$\underline{\mathrm{MF}}^f_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{K/E}}$, $\underline{\mathrm{MF}}^{f,q}_{\mathrm{E}\otimes\mathrm{K/E}}$: 8.12
D_k, V, $\mathrm{CW}(\mathfrak{R})$: 9.1
$\mathcal{O}_k(\mathrm{J})$, $\underline{\mathrm{M}}(\mathrm{J})$: 9.2
$\mathfrak{R}_{\mathrm{K}}$, $\mathfrak{R}_k$, $w_{\mathfrak{R}}$: 9.3
$\underline{\mathrm{SH}}^f_{\mathrm{A}}$, $\underline{\mathrm{SH}}^{f,u}_{\mathrm{A}}$: 9.4
$\underline{\mathrm{L}}(\mathrm{J})$, $\underline{\mathrm{LM}}(\mathrm{J})$: 9.5
$\underline{\mathrm{MF}}^{f,2}_{\mathrm{tor}}$, $\underline{\mathrm{I}}$, $\underline{\mathrm{M}}$: 9.7
$\mathrm{CW}_{-1}(\bar{\mathrm{A}}/p\bar{\mathrm{A}})$, θ_0 : 9.12

BIBLIOGRAPHIE

[B1] P. BERTHELOT, *Systèmes de Honda des schémas en* $\mathbf{F}_q$*-vectoriels*, (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 105, 1977, p. 225-239).

[F1] J.-M. FONTAINE, *Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate*, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes*, (*Astérisque*, vol. 65, Soc. math. de France, Paris, 1979, p. 3-80).

[F2] J.-M. FONTAINE, *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local : construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, (*Annals of Math.*, vol. 115, 1982, p. 529-577).

[F3] J.-M. FONTAINE, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 280, 1975, p. 1423-1425).

[F4] J.-M. FONTAINE, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux* (*Astérisque*, vol. 47-48, Soc. math. de France, Paris, 1977).

[F-W] J.-M. FONTAINE et J.-P. WINTENBERGER, *Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, vol. 288, 1979, p. 441-444).

[J1] N. JACOBSON, *The Theory of Rings* (*Math. Surveys* II, 3rd Printing, Amer. Math. Society, 1966).

[L1] G. LAFFAILLE, *Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 108, 1980, p. 187-206).

[M1] B. MAZUR, *Frobenius and the Hodge Filtration* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 78, 1972, p. 653-667).

[M2] B. MAZUR, *Frobenius and the Hodge Filtration* (*Estimates*) (*Ann. of Math.*, vol. 98, 1973, p. 58-95).

[M3] I. MANIN, *The Theory of Commutative Formal Groups Over Fields of Finite Characteristic* (*Russian math. Surveys*, vol. 18, 1963, p. 1-83).

[R1] M. RAYNAUD, *Schémas en groupes de type* $(p, p, \ldots, p)$ (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 102, 1974, p. 241-280).

[Sa1] N. SAAVEDRA RIVANO, *Catégories tannakiennes* (*Lecture Notes* n° 265, Springer, Berlin, 1972).

[Se1] J.-P. SERRE, *Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate*, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes* (*Astérisque*, vol. n° 65, Soc. math. de France, Paris, 1979, p. 155-187).

[Se2] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, 2e éd., Hermann, Paris, 1968.

(Manuscrit reçu le 17 juin 1981,
révisé le 21 mai 1982).

J.-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE,
Laboratoire de Mathématiques pures,
Institut Fourier dépendant
de l'Université Scientifique et Médicale
de Grenoble,
associé au C.N.R.S.,
B. P. n° 74, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex (France).