ATHANASE PAPADOPOULOS

Difféomorphismes pseudo-Anosov et automorphismes symplectiques de l'homologie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 3 (1982), p. 543-546
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_3_543_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série t. 15, 1982, p. 543 à 546

DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV ET AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE L'HOMOLOGIE

PAR ATHANASE PAPADOPOULOS

1. On se situe dans le cadre de la théorie de Thurston pour les surfaces et on se reporte à [3] pour les notations et les résultats classiques. Dans tout ce qui suit, M est une surface fermée de genre $g \geqq 2$ et φ un difféomorphisme de M; $[\varphi]$ désigne donc la classe d'isotopie de φ; $\mathscr{M}\mathscr{F}$ est l'espace des classes de feuilletages mesurés sur M avec singularités au sens de Thurston modulo isotopie et opérations de Whitehead. Il est homéomorphe à $R^{6g-6} - \{0\}$; $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$ est son projectifié. $[\mathscr{F}, \mu]$ désigne la classe projective du feuilletage $\mathscr{F}$ muni de la mesure transverse invariante μ; $\mathscr{S}$ est l'espace des classes d'isotopie des courbes simples fermées connexes de M.

Nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $[f]$ un élément de π_0 Diff(M) du type pseudo-Anosov, et soient $[\mathscr{F}^s, \mu^s]$ et $[\mathscr{F}^u, \mu^u]$ les deux points fixes de l'action de $[f]$ sur $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$ correspondant aux feuilletages stable et instable.*

Si $[\varphi]([\mathscr{F}^u, \mu^u]) \neq [\mathscr{F}^s, \mu^s]$, il existe un entier k_0 tel que, pour tout entier $k \geqq k_0$, $[f^k \circ \varphi]$ soit pseudo-Anosov.

Comme application, nous démontrons (th. 2) que tous les automorphismes symplectiques de $H_1(M)$ sont réalisables par des difféomorphismes pseudo-Anosov.

2. Pour la démonstration du théorème 1, nous utilisons les trois propositions qui suivent :

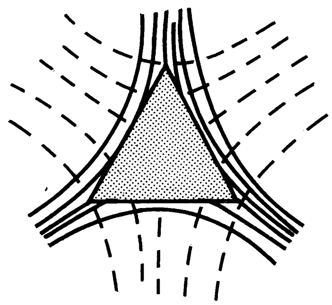
PROPOSITION 1. — *On peut mettre une métrique sur $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$ pour laquelle l'action d'un élément quelconque de π_0 Diff(M) est à dilatation bornée. De plus, étant donné un difféomorphisme pseudo-Anosov f, on peut choisir cette métrique de telle sorte que l'action de $[f]$ sur un voisinage du point fixe $[\mathscr{F}^u, \mu^u]$, correspondant au feuilletage instable, soit lipschitzienne de rapport <1.*

Démonstration (esquisse). — L'espace $\mathscr{M}\mathscr{F}$ est muni d'une structure PL qu'on peut décrire à l'aide des réseaux ferroviaires (train-tracks) sur M. (Nous nous référons à [2] et [7], chap. 8, pour les définitions et les notations concernant cette théorie.)

Si τ est un réseau ferroviaire sur M, on définit, comme dans [2], l'ensemble $\mathcal{MF}(\tau)$ des feuilletages mesurés portés par τ et un plongement φ_τ de $\mathcal{MF}(\tau)$ dans un espace linéaire $\mathbb{R}^n_+$, ayant pour image un cône convexe. Si τ est maximal, $\mathcal{MF}(\tau)$ est un ouvert dans $\mathcal{MF}$ et on peut parler de l'atlas dont les ouverts de cartes sont portés par des réseaux ferroviaires ([7], prop. 9.5.8). Il découle de la définition même des réseaux ferroviaires et de la nature fonctionnelle des feuilletages mesurés que les changements de cartes de cet atlas $(\mathcal{MF}(\tau_i), \varphi_{\tau_i})$ sont linéaires. Ces cartes sont invariantes par l'action de $\mathbb{R}_+$, action qui, dans les $\varphi_{\tau_i}(\mathcal{MF}(\tau_i))$, se traduit par une multiplication scalaire. Il vient aussi que relativement à cet atlas, l'action de $\pi_0 \operatorname{Diff}(M)$ est linéaire par morceaux et commute avec l'action de $\mathbb{R}_+$.

Recouvrons $\mathcal{MF}$ par un nombre fini d'ouverts portés par des réseaux ferroviaires. On définit alors une métrique riemannienne sur $\mathcal{MF}$ en recollant à l'aide d'une partition de l'unité les métriques induites sur chaque ouvert $\mathcal{MF}(\tau)$ par le plongement réalisé par φ_τ. En identifiant $\mathcal{PMF}$ à une section lisse de $\mathcal{MF}$ et en prenant la métrique induite, l'action de $\pi_0 \operatorname{Diff}(M)$ sur $\mathcal{PMF}$ se traduit par une action sur cette section en passant par la projection le long des rayons. On vérifie alors la première partie de la proposition 1.

Si f est un difféomorphisme pseudo-Anosov, on construit un train-track τ qui porte le feuilletage mesuré instable $(\mathcal{F}^u, \mu^u)$ en contractant le complémentaire d'un voisinage des singularités de $\mathcal{F}^u$ suivant les feuilles de $\mathcal{F}^s$ (Sur la figure, on a représenté les feuilles stables en pointillé.)



La densité des feuilles de $\mathcal{F}^s$ montre que cette opération est légitime, et l'invariance des feuilletages stable et instable montre que $f(\tau)$ est porté par τ. Donc $\mathcal{MF}(f(\tau)) \subset \mathcal{MF}(\tau)$.

On identifie, par φ_τ, $\mathcal{MF}(\tau)$ à un cône convexe E dans $\mathbb{R}^n_+$. On définit une application linéaire de $\mathbb{R}^n_+$ dans lui-même par une matrice A à ceofficients entiers $\geqq 0$ de la manière suivante : après isotopie et opérations de Whitehead, $f(\tau)$ est amené dans un voisinage adapté de τ. A_{ij} représente alors le nombre de fois que l'arête $f(i)$ coupe les traverses de l'arête j. Par restriction sur E, cette matrice décrit l'action de $[f]$ sur $\mathcal{MF}(\tau)$. Comme f est pseudo-Anosov, on a $AX \neq X$ pour tout $X \in E - 0$. On applique la théorie de Perron-Frobenius pour les matrices à coefficients positifs [1] et on obtient que le nombre $\lambda = \sup \{ \nu : \exists Y \in E$ tel que $AY - \nu Y$ a toutes ses coordonnées $\geqq 0 \}$ est une valeur propre simple de A correspondant à un vecteur propre $X_\lambda \in E$. On sait *a posteriori* que X_λ correspond au feuilletage instable de f.

En prenant, comme ci-dessus, sur $\mathcal{MF}(\tau)$ la métrique induite par le plongement φ_τ, et pour $\mathcal{PMF}$ une section localement orthogonale au sous-espace propre engendré par χ_λ, on démontre la dernière assertion de la proposition 1. $\square$

PROPOSITION 2. — *L'élément* $[\varphi]\in\pi_0\,\mathrm{Diff}(\mathrm{M})$ *est de classe pseudo-Anosov si et seulement si son action sur* $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$ *a exactement deux points périodiques.*

Démonstration. — On utilise le théorème de Thurston sur la classification des classes d'isotopie des difféomorphismes : si $[\varphi]$ n'est pas pseudo-Anosov, il est période ou réductible. Dans le premier cas, tous les points de $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$ sont périodiques, et il est facile de se convaincre que dans le deuxième cas il y en a au moins trois : la courbe qui « réduit » le difféomorphisme, considérée par l'opération d'élargissement ([3], exposé 5) comme un élément de $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$, et au moins deux autres feuilletages partiels de M provenant de la surface réduite, qui par élargissement, donnent des éléments de $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$.

La réciproque est classique ([3], exposé 12). □

Soit f un élément de $\pi_0\,\mathrm{Diff}(\mathrm{M})$ de classe pseudo-Anosov, et soient $[\mathscr{F}^u,\mu^u]$ et $[\mathscr{F}^s,\mu^s]$ les classes projectives de ses feuilletages instable et stable.

PROPOSITION 3. — *Pour tout élément* $[\mathscr{F},\mu]$ *de* $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$ *différent de* $[\mathscr{F}^s,\mu^s]$, *on a :* $\lim_{n\to\infty}[f]^n([\mathscr{F},\mu])=[\mathscr{F}^u,\mu^u]$. *De plus, la convergence est uniforme sur les compacts de* $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}-\{[\mathscr{F}^s,\mu^s]\}$.

Démonstration. — Dans [3], exposé 12, il est démontré que, pour tout $\alpha\in\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$ provenant d'un élément de $\mathscr{S}$, on a $\lim_{n\to\infty}[f]^n(\alpha)=[\mathscr{F}^u,\mu^u]$.

Pour étendre ce résultat à tous les éléments de $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$, on utilise les deux faits suivants (*voir* [4] ou [5]) :

1° La fonction intersection géométrique, d'abord définie sur $\mathscr{M}\mathscr{F}\times\mathscr{S}$, s'étend en une fonction continue sur $\mathscr{M}\mathscr{F}\times\mathscr{M}\mathscr{F}$.

2° Si $\mathscr{F}$ est un feuilletage uniquement ergodique et $\mathscr{G}$ un feuilletage tel que $i(\mathscr{F},\mathscr{G})=0$, alors $\mathscr{G}=\mathscr{F}$ dans $\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}$.

L'uniformité de la convergence découle d'un lemme classique sur les homéomorphismes d'un espace compact ayant deux points fixes dont l'un est attractif pour tous les points du complémentaire de l'autre ([6], chap. 2, lemme 6). □

3. *Démonstration du théorème* 1. — L'hypothèse implique qu'on peut trouver un voisinage V de $[\mathscr{F}^u,\mu^u]$ homéomorphe à un disque fermé tel que $[\mathscr{F}^s,\mu^s]\notin[\varphi](\mathrm{V})$.

D'après la proposition 3, pour n assez grand, on a $[f^n\circ\varphi](V)\subset V$, et d'après la proposition 1 et le théorème des applications contractantes, pour n assez grand, $[f^n\circ\varphi]$ a un unique point fixe attractif dans V.

Regardons maintenant $\mathrm{V}'=\overline{\mathscr{P}\mathscr{M}\mathscr{F}-\mathrm{V}}$. On remarque que $[f^{-1}]$ est pseudo-Anosov ayant pour points fixes stable et instable respectivement $[\mathscr{F}^u,\mu^u]$ et $[\mathscr{F}^s,\mu^s]$. Comme $[\varphi^{-1}]([\mathscr{F}^s,\mu^s])\notin\mathrm{V}$, il existe un voisinage W de $[\mathscr{F}^s,\mu^s]$ dont l'image par $[\varphi^{-1}]$ ne rencontre pas V.

En appliquant de nouveau les propositions 3, puis 1, on obtient que, pour n assez grand, on a : $[f^{-n}](\mathrm{V}')\subset\mathrm{W}$, donc $[\varphi^{-1}\circ f^{-n}](\mathrm{V}')\subset\mathrm{V}'$. On applique encore une fois le théorème des applications contractantes, qui montre que $[\varphi^{-1}\circ f^{-n}]$ a un seul point fixe dans V′, attractif pour tous les points de V′.

Ce qui montre que $[f^n \circ \varphi]^{-1}$ n'a qu'un seul point périodique dans V'. On en déduit finalement que $[f^n \circ \varphi]$ n'a que deux points périodiques dans $\mathscr{PMF}$.

La proposition 2 montre que $[f^n \circ \varphi]$ est pseudo-Anosov. $\square$

4. Comme application du théorème 1, nous démontrons le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Pour tout difféomorphisme* φ *de* M, *il existe un difféomorphisme* χ *pseudo-Anosov, ayant la même action que* φ *sur* $H_1(M)$.

Démonstration. — On commence par prendre deux courbes simples fermées α et β sur M, homologues à zéro, vérifiant $[\varphi]([\alpha]) \neq [\beta]$, et telles que $M - \{\alpha \cup \beta\}$ soit une réunion de cellules. On suppose que les deux courbes sont en position d'intersection minimale.

Pour tout $n > 0$, le difféomorphisme $f_n = \tau_\alpha^n \circ \tau_\beta^{-n}$, construit avec n twists de Dehn négatifs le long de β suivis de n twists positifs le long de α, est de classe pseudo-Anosov. De plus, quand $n \to +\infty$, le feuilletage instable de $[f_n]$ tend (dans $\mathscr{PMF}$) vers $[\alpha]$ tendis que son feuilletage stable tend vers $[\beta]$. (Pour voir ceci, on se place dans le α-atlas ([3], exposé 13), et on est ramené à étudier les pentes des directions propres d'un difféomorphisme linéaire du plan).

On peut alors choisir n de telle sorte que la condition du théorème 1 soit vérifiée et on trouvera χ de la forme $f_n^k \circ \varphi$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BERMAN et R. PLEMMONS, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Acad. Press, 1979.

[2] F. BONAHON, *Ribbon Fibered Knots, Cobordism of Surface Diffeomorphisms and Pseudo-Anosov Diffeomorphisms*, §4, Preprint Orsay, 1982 (à paraître).

[3] A. FATHI, F. LAUDENBACH et V. POENARU, *Travaux de Thurston sur les surfaces* (*Astérisque*, 66-67, 1979).

[4] H. MASUR, *Two Boundaries of Teichmuller Space* (*Duke Math. J.*, vol. 49, 1982, p. 183-190).

[5] M. REES, *An Alternative Approach to the Ergodic Theory of Measured Foliations on Surfaces* (*Erg. th. and Dynam. Syst.*, vol. 1, 1981, p. 461-488).

[6] M. SHUB, *Stabilité globale des systèmes dynamiques* (*Astérisque*, vol. 56, 1978, 2e édition).

[7] W. THURSTON, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Notes polycopiées de l'Université de Princeton.

A. PAPADOPOULOS
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
Département de Mathématiques (Bât. n° 425)
91405 Orsay Cedex.

(Manuscrit reçu le 17 septembre 1982).