

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ATHANASE PAPADOPOULOS

## **Difféomorphismes pseudo-Anosov et automorphismes symplectiques de l'homologie**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 15, n° 3 (1982), p. 543-546

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1982\\_4\\_15\\_3\\_543\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_3_543_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DIFFÉOMORPHISMES PSEUDO-ANOSOV ET AUTOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE L'HOMOLOGIE

PAR ATHANASE PAPADOPOULOS

1. On se situe dans le cadre de la théorie de Thurston pour les surfaces et on se reporte à [3] pour les notations et les résultats classiques. Dans tout ce qui suit,  $M$  est une surface fermée de genre  $g \geq 2$  et  $\varphi$  un difféomorphisme de  $M$ ;  $[\varphi]$  désigne donc la classe d'isotopie de  $\varphi$ ;  $\mathcal{MF}$  est l'espace des classes de feuilletages mesurés sur  $M$  avec singularités au sens de Thurston modulo isotopie et opérations de Whitehead. Il est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{6g-6} - \{0\}$ ;  $\mathcal{PMF}$  est son projectifié.  $[\mathcal{F}, \mu]$  désigne la classe projective du feuilletage  $\mathcal{F}$  muni de la mesure transverse invariante  $\mu$ ;  $\mathcal{S}$  est l'espace des classes d'isotopie des courbes simples fermées connexes de  $M$ .

Nous démontrons le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — Soit  $[f]$  un élément de  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  du type pseudo-Anosov, et soient  $[\mathcal{F}^s, \mu^s]$  et  $[\mathcal{F}^u, \mu^u]$  les deux points fixes de l'action de  $[f]$  sur  $\mathcal{PMF}$  correspondant aux feuilletages stable et instable.

Si  $[\varphi]([\mathcal{F}^u, \mu^u]) \neq [\mathcal{F}^s, \mu^s]$ , il existe un entier  $k_0$  tel que, pour tout entier  $k \geq k_0$ ,  $[f^k \circ \varphi]$  soit pseudo-Anosov.

Comme application, nous démontrons (th. 2) que tous les automorphismes symplectiques de  $H_1(M)$  sont réalisables par des difféomorphismes pseudo-Anosov.

2. Pour la démonstration du théorème 1, nous utilisons les trois propositions qui suivent :

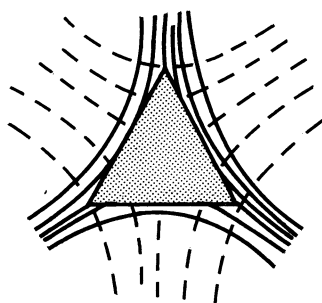
**PROPOSITION 1.** — On peut mettre une métrique sur  $\mathcal{PMF}$  pour laquelle l'action d'un élément quelconque de  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  est à dilatation bornée. De plus, étant donné un difféomorphisme pseudo-Anosov  $f$ , on peut choisir cette métrique de telle sorte que l'action de  $[f]$  sur un voisinage du point fixe  $[\mathcal{F}^u, \mu^u]$ , correspondant au feuilletage instable, soit lipschitzienne de rapport  $< 1$ .

*Démonstration (esquisse).* — L'espace  $\mathcal{MF}$  est muni d'une structure PL qu'on peut décrire à l'aide des réseaux ferroviaires (train-tracks) sur  $M$ . (Nous nous référons à [2] et [7], chap. 8, pour les définitions et les notations concernant cette théorie.)

Si  $\tau$  est un réseau ferroviaire sur  $M$ , on définit, comme dans [2], l'ensemble  $\mathcal{MF}(\tau)$  des feuilletages mesurés portés par  $\tau$  et un plongement  $\varphi_\tau$  de  $\mathcal{MF}(\tau)$  dans un espace linéaire  $\mathbb{R}_+^n$ , ayant pour image un cône convexe. Si  $\tau$  est maximal,  $\mathcal{MF}(\tau)$  est un ouvert dans  $\mathcal{MF}$  et on peut parler de l'atlas dont les ouverts de cartes sont portés par des réseaux ferroviaires ([7], prop. 9.5.8). Il découle de la définition même des réseaux ferroviaires et de la nature fonctionnelle des feuilletages mesurés que les changements de cartes de cet atlas ( $\mathcal{MF}(\tau_i)$ ,  $\varphi_{\tau_i}$ ) sont linéaires. Ces cartes sont invariantes par l'action de  $\mathbb{R}_+$ , action qui, dans les  $\varphi_{\tau_i}(\mathcal{MF}(\tau_i))$ , se traduit par une multiplication scalaire. Il vient aussi que relativement à cet atlas, l'action de  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  est linéaire par morceaux et commute avec l'action de  $\mathbb{R}_+$ .

Recouvrons  $\mathcal{MF}$  par un nombre fini d'ouverts portés par des réseaux ferroviaires. On définit alors une métrique riemannienne sur  $\mathcal{MF}$  en recollant à l'aide d'une partition de l'unité les métriques induites sur chaque ouvert  $\mathcal{MF}(\tau)$  par le plongement réalisé par  $\varphi_\tau$ . En identifiant  $\mathcal{PMF}$  à une section lisse de  $\mathcal{MF}$  et en prenant la métrique induite, l'action de  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  sur  $\mathcal{PMF}$  se traduit par une action sur cette section en passant par la projection le long des rayons. On vérifie alors la première partie de la proposition 1.

Si  $f$  est un difféomorphisme pseudo-Anosov, on construit un train-track  $\tau$  qui porte le feuilletage mesuré instable ( $\mathcal{F}^u, \mu^u$ ) en contractant le complémentaire d'un voisinage des singularités de  $\mathcal{F}^u$  suivant les feuilles de  $\mathcal{F}^s$  (Sur la figure, on a représenté les feuilles stables en pointillé.)



La densité des feuilles de  $\mathcal{F}^s$  montre que cette opération est légitime, et l'invariance des feuilletages stable et instable montre que  $f(\tau)$  est porté par  $\tau$ . Donc  $\mathcal{MF}(f(\tau)) \subset \mathcal{MF}(\tau)$ .

On identifie, par  $\varphi_\tau$ ,  $\mathcal{MF}(\tau)$  à un cône convexe  $E$  dans  $\mathbb{R}_+^n$ . On définit une application linéaire de  $\mathbb{R}_+^n$  dans lui-même par une matrice  $A$  à coefficients entiers  $\geq 0$  de la manière suivante : après isotopie et opérations de Whitehead,  $f(\tau)$  est amené dans un voisinage adapté de  $\tau$ .  $A_{ij}$  représente alors le nombre de fois que l'arête  $f(i)$  coupe les traverses de l'arête  $j$ . Par restriction sur  $E$ , cette matrice décrit l'action de  $[f]$  sur  $\mathcal{MF}(\tau)$ . Comme  $f$  est pseudo-Anosov, on a  $AX \neq X$  pour tout  $X \in E - 0$ . On applique la théorie de Perron-Frobenius pour les matrices à coefficients positifs [1] et on obtient que le nombre  $\lambda = \sup \{ v : \exists Y \in E \text{ tel que } AY - vY \text{ a toutes ses coordonnées } \geq 0 \}$  est une valeur propre simple de  $A$  correspondant à un vecteur propre  $X_\lambda \in E$ . On sait *a posteriori* que  $X_\lambda$  correspond au feuilletage instable de  $f$ .

En prenant, comme ci-dessus, sur  $\mathcal{MF}(\tau)$  la métrique induite par le plongement  $\varphi_\tau$ , et pour  $\mathcal{PMF}$  une section localement orthogonale au sous-espace propre engendré par  $X_\lambda$ , on démontre la dernière assertion de la proposition 1.  $\square$

PROPOSITION 2. — *L'élément  $[\varphi] \in \pi_0 \text{Diff}(M)$  est de classe pseudo-Anosov si et seulement si son action sur  $\mathcal{PMF}$  a exactement deux points périodiques.*

*Démonstration.* — On utilise le théorème de Thurston sur la classification des classes d'isotopie des difféomorphismes : si  $[\varphi]$  n'est pas pseudo-Anosov, il est période ou réductible. Dans le premier cas, tous les points de  $\mathcal{PMF}$  sont périodiques, et il est facile de se convaincre que dans le deuxième cas il y en a au moins trois : la courbe qui « réduit » le difféomorphisme, considérée par l'opération d'élargissement ([3], exposé 5) comme un élément de  $\mathcal{PMF}$ , et au moins deux autres feuilletages partiels de  $M$  provenant de la surface réduite, qui par élargissement, donnent des éléments de  $\mathcal{PMF}$ .

La réciproque est classique ([3], exposé 12).  $\square$

Soit  $f$  un élément de  $\pi_0 \text{Diff}(M)$  de classe pseudo-Anosov, et soient  $[\mathcal{F}^u, \mu^u]$  et  $[\mathcal{F}^s, \mu^s]$  les classes projectives de ses feuilletages instable et stable.

PROPOSITION 3. — *Pour tout élément  $[\mathcal{F}, \mu]$  de  $\mathcal{PMF}$  différent de  $[\mathcal{F}^s, \mu^s]$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f]^n([\mathcal{F}, \mu]) = [\mathcal{F}^u, \mu^u]$ . De plus, la convergence est uniforme sur les compacts de  $\mathcal{PMF} - \{[\mathcal{F}^s, \mu^s]\}$ .*

*Démonstration.* — Dans [3], exposé 12, il est démontré que, pour tout  $\alpha \in \mathcal{PMF}$  provenant d'un élément de  $\mathcal{S}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f]^n(\alpha) = [\mathcal{F}^u, \mu^u]$ .

Pour étendre ce résultat à tous les éléments de  $\mathcal{PMF}$ , on utilise les deux faits suivants (voir [4] ou [5]) :

1° La fonction intersection géométrique, d'abord définie sur  $\mathcal{MF} \times \mathcal{S}$ , s'étend en une fonction continue sur  $\mathcal{MF} \times \mathcal{MF}$ .

2° Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage uniquement ergodique et  $\mathcal{G}$  un feuilletage tel que  $i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = 0$ , alors  $\mathcal{G} = \mathcal{F}$  dans  $\mathcal{PMF}$ .

L'uniformité de la convergence découle d'un lemme classique sur les homéomorphismes d'un espace compact ayant deux points fixes dont l'un est attractif pour tous les points du complémentaire de l'autre ([6], chap. 2, lemme 6).  $\square$

3. *Démonstration du théorème 1.* — L'hypothèse implique qu'on peut trouver un voisinage  $V$  de  $[\mathcal{F}^u, \mu^u]$  homéomorphe à un disque fermé tel que  $[\mathcal{F}^s, \mu^s] \notin [\varphi](V)$ .

D'après la proposition 3, pour  $n$  assez grand, on a  $[f^n \circ \varphi](V) \subset V$ , et d'après la proposition 1 et le théorème des applications contractantes, pour  $n$  assez grand,  $[f^n \circ \varphi]$  a un unique point fixe attractif dans  $V$ .

Regardons maintenant  $V' = \overline{\mathcal{PMF} - V}$ . On remarque que  $[f^{-1}]$  est pseudo-Anosov ayant pour points fixes stable et instable respectivement  $[\mathcal{F}^u, \mu^u]$  et  $[\mathcal{F}^s, \mu^s]$ . Comme  $[\varphi^{-1}](\overline{[\mathcal{F}^s, \mu^s]}) \notin V$ , il existe un voisinage  $W$  de  $[\mathcal{F}^s, \mu^s]$  dont l'image par  $[\varphi^{-1}]$  ne rencontre pas  $V$ .

En appliquant de nouveau les propositions 3, puis 1, on obtient que, pour  $n$  assez grand, on a :  $[f^{-n}](V') \subset W$ , donc  $[\varphi^{-1} \circ f^{-n}](V') \subset V'$ . On applique encore une fois le théorème des applications contractantes, qui montre que  $[\varphi^{-1} \circ f^{-n}]$  a un seul point fixe dans  $V'$ , attractif pour tous les points de  $V'$ .

Ce qui montre que  $[f^n \circ \varphi]^{-1}$  n'a qu'un seul point périodique dans  $V'$ . On en déduit finalement que  $[f^n \circ \varphi]$  n'a que deux points périodiques dans  $\mathcal{PMF}$ .

La proposition 2 montre que  $[f^n \circ \varphi]$  est pseudo-Anosov.  $\square$

4. Comme application du théorème 1, nous démontrons le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — *Pour tout difféomorphisme  $\varphi$  de  $M$ , il existe un difféomorphisme  $\chi$  pseudo-Anosov, ayant la même action que  $\varphi$  sur  $H_1(M)$ .*

*Démonstration.* — On commence par prendre deux courbes simples fermées  $\alpha$  et  $\beta$  sur  $M$ , homologues à zéro, vérifiant  $[\varphi](\alpha) \neq [\beta]$ , et telles que  $M - \{\alpha \cup \beta\}$  soit une réunion de cellules. On suppose que les deux courbes sont en position d'intersection minimale.

Pour tout  $n > 0$ , le difféomorphisme  $f_n = \tau_\alpha^n \circ \tau_\beta^{-n}$ , construit avec  $n$  twists de Dehn négatifs le long de  $\beta$  suivis de  $n$  twists positifs le long de  $\alpha$ , est de classe pseudo-Anosov. De plus, quand  $n \rightarrow +\infty$ , le feuilletage instable de  $[f_n]$  tend (dans  $\mathcal{PMF}$ ) vers  $[\alpha]$  tandis que son feuilletage stable tend vers  $[\beta]$ . (Pour voir ceci, on se place dans le  $\alpha$ -atlas ([3], exposé 13), et on est ramené à étudier les pentes des directions propres d'un difféomorphisme linéaire du plan).

On peut alors choisir  $n$  de telle sorte que la condition du théorème 1 soit vérifiée et on trouvera  $\chi$  de la forme  $f_n^k \circ \varphi$ .  $\square$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BERMAN et R. PLEMMONS, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Acad. Press, 1979.
- [2] F. BONAHON, *Ribbon Fibered Knots, Cobordism of Surface Diffeomorphisms and Pseudo-Anosov Diffeomorphisms*, §4, Preprint Orsay, 1982 (à paraître).
- [3] A. FATHI, F. LAUDENBACH et V. POENARU, *Travaux de Thurston sur les surfaces (Astérisque, 66-67, 1979)*.
- [4] H. MASUR, *Two Boundaries of Teichmüller Space (Duke Math. J., vol. 49, 1982, p. 183-190)*.
- [5] M. REES, *An Alternative Approach to the Ergodic Theory of Measured Foliations on Surfaces (Erg. th. and Dynam. Syst., vol. 1, 1981, p. 461-488)*.
- [6] M. SHUB, *Stabilité globale des systèmes dynamiques (Astérisque, vol. 56, 1978, 2<sup>e</sup> édition)*.
- [7] W. THURSTON, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Notes polycopiées de l'Université de Princeton.

A. PAPADOPOULOS  
 Université de Paris-Sud,  
 Centre d'Orsay,  
 Département de Mathématiques (Bât. n° 425)  
 91405 Orsay Cedex.

(Manuscrit reçu le 17 septembre 1982).