A. GRIGIS

Propagation des singularités sur des groupes de Lie nilpotents de rang 2. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 15, nº 1 (1982), p. 161-171
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1982_4_15_1_161_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 15, 1982, p. 161 à 171.

PROPAGATION DES SINGULARITÉS SUR DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS DE RANG 2. II

PAR A. GRIGIS

Dans cet article nous entreprenons l'étude de la propagation des singularités pour des opérateurs différentiels invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent de rang 2. L'étude de l'hypoellipticité $\mathscr{C}^\infty$ pour de tels opérateurs a été faite par Rockland [16] pour le cas particulier du groupe d'Heisenberg et par Beals ([1], [2]) et Helffer [9] pour les groupes de rang 2. Ensuite Helffer, Nourrigat ([10], [11]) ont généralisé les résultats obtenus en montrant la conjecture de Rockland.

Nous nous sommes restreints à l'étude d'opérateurs de degré 2, autoadjoints et elliptiques par rapport à un sous-espace de directions contenant les directions génératrices. Et en fait nous nous contentons d'appliquer nos résultats microlocaux de propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles, décrits dans [6] et [7]. Il est intéressant de noter la description des propriétés étudiées dans ces articles en termes de notions relatives à la théorie des représentations des groupes de Lie. Dans le cas particulier d'un groupe isomorphe à $H_{2d'+1} \times \mathbb{R}^{d''}$, $H_{2d'+1}$ désignant le groupe d'Heisenberg de dimension $2d'+1$, nous avons un théorème de propagation du support singulier très complet et satisfaisant. Pour d'autres groupes, il y a en général des points du fibré cotangent où nos théorèmes de [6] et [7] ne s'appliquent pas.

Dans le paragraphe 1 nous présentons quelques propriétés générales de l'opérateur P et du groupe G considérés. Dans le paragraphe 2 nous rappelons les résultats connus d'hypoellipticité et nous relions l'étude de P dans les représentations unitaires irréductibles de G et les propriétés d'hypoellipticité microlocale telles qu'elles sont décrites dans Boutet de Monvel, Grigis, Helffer [4] et Grigis [5]. Au paragraphe 3 nous écrivons les résultats de propagation des singularités découlant de [7]. Enfin au paragraphe 4 nous énonçons un résultat complet pour $G = H_{2d'+1} \times \mathbb{R}^{d''}$ et au paragraphe 5 nous proposons le cas du groupe libre nilpotent de rang 2 à 3 générateurs.

Nous avons suivi Métivier [15] pour l'écriture des représentations.

Nous tenons à remercier Bernard Helffer et Patrick Delorme pour d'instructives discussions sur les groupes de Lie.

1. Présentation générale

1 (*a*) Soit G un groupe de Lie connexe, simplement connexe, nilpotent de rang 2. On décompose son algèbre de Lie $\mathscr{G}$ en :

$$(1.1) \qquad \mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_2,$$

avec $\mathscr{G}_2 \supset [\mathscr{G}, \mathscr{G}]$ et $\mathscr{G}_2$ contenu dans le centre de $\mathscr{G}$.

On munit $\mathscr{G}$ d'une famille de dilatations δ_t, $t>0$ définie par :

$$(1.2) \qquad \delta_t(X) = t^j X \quad \text{pour } X \in \mathscr{G}_j, \qquad j=1,2.$$

Cette famille de dilatations se prolonge à l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathscr{G})$ que l'on identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G.

On considère l'opérateur différentiel invariant à gauche sur G :

$$(1.3) \qquad P = -\sum_{j=1}^{d} X_j^2 + \frac{1}{i} b Y_1, \qquad b \in \mathbb{R},$$

où $X_1, \ldots, X_d$ est une base de $\mathscr{G}_1$ et $Y_1, \ldots, Y_{n-d}$ une base de $\mathscr{G}_2$. Donc P est autoadjoint, homogène de degré 2, elliptique dans les directions de $\mathscr{G}_1$ et tout opérateur qui a ces propriétés s'écrit ainsi dans une certaine base de $\mathscr{G}$.

On aura besoin de faire une étude microlocale de P. Pour cela on va utiliser des notions compatibles avec l'invariance à gauche. Si $L(g)$ désigne la translation à gauche par $g \in G$:

$$(1.4) \qquad (L(g)f)(h) = f(g^{-1}h), \qquad \forall f \in C^\infty(G),$$

on a :

$$PL(g) = L(g)P.$$

On remarque que si P est hypoelliptique en un point de G, par exemple à l'origine e, il l'est en tout point de G.

On identifie $\mathscr{G}$ à $T_e G$ et $\mathscr{G}^*$ à $T_e^* G$. On choisit des coordonnées exponentielles sur G, par exemple celles définies à l'aide de la base où P s'écrit sous la forme (1.3), et on utilise la transformée de Fourier dans ces coordonnées pour étudier la régularité des distributions sur G à support près de l'origine.

Définition (1.5). — Soit $u \in \mathscr{D}'(X)$, X ouvert de G. Soit Γ un ouvert conique ou parabolique (i. e. stable par les δ_t, $t>0$) de $\mathscr{G}^*$. Soit ω un ouvert de X. On dit que u est $\mathscr{C}^\infty$ dans $\omega \times \Gamma$ si pour tout $g \in \omega$ il existe $\chi \in C_0^\infty(\omega)$, $\chi(g) \neq 0$ tel que la transformée de Fourier de $L(g)\chi u$ soit à décroissance rapide à l'infini dans Γ.

On peut alors définir des notions de front d'onde usuelles (à l'aide des ouverts coniques) ou plus générales comme dans Hörmander [12], très pratiques pour l'étude des opérateurs invariants à gauche car il suffit de travailler dans la fibre au-dessus de l'origine c'est-à-dire dans $\mathscr{G}^*$. Par exemple, pour le front d'onde ordinaire, on dit que $(g, \xi) \notin \mathrm{WF}(u)$ si u est $\mathscr{C}^\infty$ dans $\omega \times \Gamma$ où ω est un voisinage de $g \in \mathrm{G}$ et Γ un voisinage conique de paragraphe $\xi \in \mathscr{G}^*$.

Définition (1.6). — Soit P invariant à gauche sur G. On dit que P est hypoelliptique dans Γ, Γ comme dans (1.5), si on a, pour un ouvert ω de G :

$$(1.6) \qquad \mathrm{P}u \in \mathscr{C}^\infty(\omega \times \Gamma) \Rightarrow u \in \mathrm{C}^\infty(\omega \times \Gamma), \qquad \forall u \in \mathscr{D}'(\omega).$$

On remarque bien sûr que si P vérifie (1.6) dans $\omega \times \Gamma$, il le vérifie dans $g\omega \times \Gamma$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Par suite l'expression « P est hypoelliptique dans Γ » n'est pas abusive.

1 (*b*) Dans la suite on demandera parfois au groupe G de satisfaire l'hypothèse.

(H_c) *Hypothèse de rang constant :* le rang de la forme bilinéaire sur $\mathscr{G}_1$:

$$\mathrm{B}_\eta(\mathrm{X}, \mathrm{X}') = \langle \eta, [\mathrm{X}, \mathrm{X}'] \rangle$$

est indépendant de $\eta \in \mathscr{G}_2^* \setminus \{0\}$.

Cette hypothèse est vérifiée par les groupes considérés dans [15] ou il est requis que B_η soit non dégénérée pour tout $\eta \in \mathscr{G}_2^* \setminus \{0\}$.

Remarque (1.7). — D'après les hypothèses sur $\mathscr{G}$, les termes de la matrice de B_η dans une base de $\mathscr{G}_1$ sont des formes linéaires sur $\mathscr{G}_2^*$. Il existe donc un ouvert de Zariski conique de $\mathscr{G}_2^*$ où le rang de B_η est maximal, et donc constant sur cet ouvert. Si (H_c) est vérifiée cet ouvert est $\mathscr{G}_2^* \setminus \{0\}$.

Notations (1.8). — On note : $\Omega \subset \mathscr{G}_2^*$ l'ouvert de Zariski conique défini ci-dessus; $2d'$ le rang de B_η pour $\eta \in \Omega$; $\mathrm{R}_\eta \subset \mathscr{G}_1$ le radical de B_η; d'' la dimension de R_η pour $\eta \in \Omega$. On a donc $d = 2d' + d''$.

Proposition (1.9). — *Soit* $\eta_0 \in \Omega$. *Alors* $\exp(\mathrm{R}_{\eta_0})$ *est un sous-groupe commutatif de* G.

Démonstration. — Par définition Ω est ouvert et le rang de B_η est constant sur Ω. Pour tout couple $\mathrm{X}_{\eta_0}^{(i)} \in \mathrm{R}_{\eta_0}$, $i = 1,2$, on peut construire $\mathrm{X}_{\eta_0+\varepsilon\eta}^{(i)}$, $i = 1,2$, analytique en $\eta_0 + \varepsilon\eta$ pour $|\eta| \leqq 1$ et $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ (ε_0 fixé assez petit) tels que :

$$\mathrm{X}_{\eta_0+\varepsilon\eta}^{(i)} \in \mathrm{R}_{\eta_0+\varepsilon\eta}, \qquad i = 1,2.$$

On développe en ε l'expression :

$$\langle (\eta_0 + \varepsilon\eta), [\mathrm{X}_{\eta_0+\varepsilon\eta}^{(1)}, \mathrm{X}_{\eta_0+\varepsilon\eta}^{(2)}] \rangle = 0,$$

$$0 = \varepsilon(\langle \eta, [\mathrm{X}_{\eta_0}^{(1)}, \mathrm{X}_{\eta_0}^{(2)}] \rangle + \langle \eta_0, [\mathrm{X}_{\eta_0}^{(1)}, \tilde{\mathrm{X}}^{(2)}] + \langle \eta_0, [\tilde{\mathrm{X}}^{(1)}, \mathrm{X}_{\eta_0}^{(2)}] \rangle) + \varepsilon^2 \ldots$$

avec :

$$\tilde{\mathrm{X}}^{(i)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} (\mathrm{X}_{\eta_0+\varepsilon}^{(i)} - \mathrm{X}_{\eta_0}^{(i)}), \qquad i = 1,2.$$

On en déduit :

$$\langle \eta, [X^{(1)}_{\eta_0}, X^{(2)}_{\eta_0}] \rangle = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{G}_2^*, \quad |\eta| \leqq 1,$$

et donc :

$$[X^{(1)}_{\eta_0}, X^{(2)}_{\eta_0}] = 0.$$

Ainsi R_{η_0} est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{G}_1$ et $\exp(R_{\eta_0})$ est un sous-groupe commutatif de G.

Remarque (1.10). — Si on choisit des coordonnées exponentielles sur G, on l'identifie à $\mathbb{R}^n$ en tant que variété. Non seulement les sous-groupes $\exp(R_\eta)$, $\eta \in \Omega$ sont identifiés à des sous-variétés linéaires de $\mathbb{R}^n$ mais aussi les espaces $g \exp(R_\eta)$, $g \in G$ sont identifiés à des sous-variétés affines de $\mathbb{R}^n$. C'est évident par la formule de Campbell-Hausdorff :

$$\exp X . \exp X' = \exp\left(X + X' + \frac{1}{2}[X, X']\right). \tag{1.11}$$

Remarque (1.12). — Si $\eta_0 \notin \Omega$, la dimension de R_η varie au voisinage de η_0. En général il n'est plus vrai que R_{η_0} soit une sous-algèbre commutative de $\mathcal{G}_1$.

Pour un contre-exemple il suffit de considérer l'algèbre libre nilpotente de rang 2 à 4 générateurs laquelle est de dimension 10. Soit :

$$X_i,\ 1 \leqq i \leqq 4, \qquad \text{base de } \mathcal{G}_1,$$
$$Y_{i,j} = [X_i, X_j],\ 1 \leqq i < j \leqq 4, \qquad \text{base de } \mathcal{G}_2.$$

Le rang de B_η est égal à 4 sur Ω et tombe à 2 sur un cône lisse de $\mathcal{G}_2^*$. En ces points où B_η dégénère on voit par un calcul simple que R_η n'est pas une sous-algèbre.

2. Rappels sur l'hypoellipticité et les représentations irréductibles

Rappelons d'abord le théorème bien connu :

THÉORÈME (2.1) (Beals [2] et Helffer [9]). — P *est hypoelliptique si et seulement si pour toute représentation unitaire irréductible non triviale* π *de* G, $\pi(P)$ *est injectif dans* $\mathcal{S}_\pi$ *l'espace des vecteurs* $\mathscr{C}^\infty$ *de* π.

Nous allons relier ce résultat à l'étude de l'hypoellipticité microlocale menée dans [4], [5], [7].

2(*a*) LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES IRRÉDUCTIBLES DE G. — D'après la théorie de Kirillov [13], on associe une représentation unitaire irréductible à chaque orbite de la représentation coadjointe de G dans $\mathcal{G}^*$. Or l'orbite de $(\xi_0, 0)$, $\xi_0 \in \mathcal{G}_1^* \setminus \{0\}$ est réduite à 1 point. D'autre part l'orbite de $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{G}_1^* \times (\mathcal{G}_2^* \setminus \{0\})$ est :

$$\begin{aligned} O_{(\eta_0, \zeta_0)} = \{(\xi, \eta_0);\ \xi \in \mathcal{G}_1,\ \langle \xi, R_{\eta_0} \rangle = \langle \xi_0, R_{\eta_0} \rangle \\ = \langle \zeta_0, R_{\eta_0} \rangle\},\ \eta_0 \in \mathcal{G}_2^* \setminus \{0\},\ \zeta_0 \in R_{\eta_0}^*. \end{aligned} \tag{2.2}$$

On a désigné par ζ_0 l'unique élément de $R^*_{\eta_0}$ tel que :

$$\langle \zeta_0, R_{\eta_0} \rangle = \langle \xi_0, R_{\eta_0} \rangle$$

et on a repéré l'orbite par (η_0, ζ_0) plutôt que par (ξ_0, η_0). (En fait on a identifié $R^*_{\eta_0}$ au quotient de $\mathscr{G}_1^*$ par l'annulateur de R_η). Le stabilisateur de $O_{(\eta_0, \zeta_0)}$ est le sous-groupe de G : $\exp(R_{\eta_0} \oplus \mathscr{G}_2)$.

Voici maintenant une construction des représentations irréductibles (nous suivons [15]). Il y a d'abord les représentations triviales sur $\exp \mathscr{G}_2$; elles sont paramétrées par $\xi \in \mathscr{G}_1^*$ et elles sont scalaires : pour $\xi \in \mathscr{G}_1^*$, π_ξ est définie par :

$$\forall X \in \mathscr{G}, \quad \pi_\xi(\exp X) = e^{iX.\xi}. \tag{2.3}$$

On ne s'occupera pas beaucoup de ces représentations car notre opérateur P est elliptique dans les directions de $\mathscr{G}_1$ et donc $\pi_\xi(P)$ est inversible $\forall \xi \in \mathscr{G}_1^* \setminus \{0\}$.

On va construire maintenant les représentations non triviales sur $\exp \mathscr{G}_2$, qui sont paramétrées par les couples (η, ζ), $\eta \in \mathscr{G}_2^* \setminus \{0\}$, $\zeta \in R^*_\eta$.

Pour $\eta \in \mathscr{G}_2^* \setminus \{0\}$ (prenons $\eta \in \Omega$ pour utiliser les notations (1.8) et ne pas surcharger), il existe une base de $\mathscr{G}_1$, (T_j, Z_j, W_k) $1 \leqq j \leqq d'$, $1 \leqq k \leqq d''$ tels que :

$$\begin{cases} B_\eta(T_j, T_{j'}) = B_\eta(T_j, W_k) = B_\eta(Z_j, Z_{j'}) = B_\eta(Z_j, W_k) = B_\eta(W_k, W_{k'}) = 0, \\ B_\eta(T_j, Z_{j'}) = \delta_{jj'}. \end{cases} \tag{2.4}$$

On définit alors $\pi_{(\eta, \zeta)}$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^{d'}_s)$ par :

$$\pi_{(\eta, \zeta)}(\exp(\textstyle\sum t_j T_j + \sum z_j Z_j + \sum w_k W_k + y)) f(s) = e^{i(y.\eta + z.t/2 + z.s + w.\zeta)} f(s+t), \tag{2.5}$$

où on a noté $z.s = z_1 s_1 + z_2 s_2 + \ldots + z_{d'} s_{d'}$ et autres.

La représentation $\pi_{(\eta, \zeta)}$ ainsi construite dépend évidemment du choix de la base (T, Z, W) mais sa classe d'équivalence ne dépend, elle, que de (η, ζ) $\eta \in \mathscr{G}_2^* \setminus \{0\}$, $\zeta \in R^*_\eta$.

Si $\eta \in \Omega$ on peut construire les T_j, Z_j, W_k analytiques au voisinage de η et homogènes. On a alors pour $x \in \mathscr{G}_1$:

$$x = \sum t_j(x, \eta) T_j + \sum z_j(x, \eta) Z_j + \sum w_k(x, \eta) W_k,$$

les coordonnées étant analytiques au voisinage de η, homogènes en η de degré 1/2, linéaires en x.

Notre opérateur P s'écrit comme un polynôme $P_\eta(T, Z, W)$ non commutatif à coefficients analytiques homogènes de degré 1 en η. On peut remarquer qu'on peut choisir la base (T, Z, W) tel qu'on ait en fait :

$$P_\eta(T, Z, W) = A^1_\eta(T, Z) + A^2_\eta(W),$$

ceci car P est autoadjoint d'ordre 2, et sa partie principale définit sur $\mathscr{G}_1$ une forme quadratique non dégénérée. On peut alors choisir pour supplémentaire de R_η dans $\mathscr{G}_1$ l'orthogonal de R_η pour cette forme quadratique. On obtient alors :

$$\pi_{(\eta, \zeta)}(P) = A_\eta^1\left(\frac{\partial}{\partial s}, is\right) + A_\eta^2(\zeta). \tag{2.6}$$

Il est alors facile d'étudier le spectre de $\pi_{(\eta, \zeta)}(P)$ car on sait le décomposer en une somme d'oscillateurs harmoniques.

2 (*b*) Hypoellipticité microlocale.

Théorème (2.7). — *Soit* P *écrit en* (1.3). *On a au sens de* (1.6) *:*

(i) P *est hypoelliptique en dehors d'un voisinage conique de* $(\xi = 0)$;

(ii) *Soit* $\eta_0 \in \Omega$, $\zeta_0 \in R_{\eta_0}^*$ *tel que* $\pi_{(\eta_0, \zeta_0)}(P)$ *soit injectif. Alors* P *est hypoelliptique dans un voisinage parabolique* (*stable par les* δ_t) *de l'orbite* $O_{(\eta_0, \zeta_0)}$.

Démonstration. — On choisit sur G les coordonnées exponentielles définies à l'aide de la base de $\mathscr{G}$:

$$X_1, \ldots, X_d \in \mathscr{G}_1, \qquad Y_1, \ldots, Y_{n-d} \in \mathscr{G}_2,$$

où P s'écrit sous la forme (1.3) :

$$P = -\sum_{j=1}^{d} X_j^2 + \frac{1}{i} b Y_1.$$

La structure de l'algèbre $\mathscr{G}$ est définie par :

$$[X_j, X_{j'}] = \sum_{k=1}^{n-d} A_{jj'}^k Y_k, \qquad A_{jj'}^k = -A_{j'j}^k, \tag{2.8}$$

si bien que dans les coordonnées exponentielles, les champs invariants à gauche sur G s'expriment ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} X_j &= \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\sum_{j', k} A_{jj'}^k x_{j'} \frac{\partial}{\partial y_k} \\ Y_k &= \frac{\partial}{\partial y_k} \end{aligned}\right\} 1 \leqq j, j' \leqq d, \qquad 1 \leqq k \leqq n-d. \tag{2.9}$$

On travaille maintenant dans $\mathbb{R}_{x, y}^n$ au voisinage de l'origine et à l'aide de la transformée de Fourier définie dans ces coordonnées. Le symbole de P est :

$$p = p_2 + p_1 = \sum_{j=1}^{d}\left(\xi_j - \frac{1}{2}\sum_{j', k} A_{jj'}^k x_{j'} \eta_k\right)^2 + b\,\eta_1. \tag{2.10}$$

L'opérateur P est à caractéristiques doubles sur la variété Σ d'équations :

$$\Sigma : u_j = \xi_j - \frac{1}{2}\sum_{j', k} A_{jj'}^k x_{j'} \eta_k = 0, \qquad j = 1, \ldots, d \tag{2.11}$$

et est transversalement elliptique sur Σ.

On a donc évidemment le point (i) du théorème (2.7) car P est elliptique aux points $(0; \xi, \eta)$, $\xi \neq 0$.

LEMME 2.12. — *Si* $\eta \in \Omega$ *la variété* Σ *est* ω*-feuilletée régulière* (*au sens de* [6]) *dans un voisinage conique de* $(0, \eta)$.

En effet pour obtenir le rang de la restriction à Σ de la 2-forme symplectique de $T^* G$ on considère la matrice des crochets de Poisson $\{u_j, u_{j'}\}_{|\Sigma}$. Or on a :

$$\{u_j, u_{j'}\}(0; 0, \eta) = \frac{1}{i} \sigma([X_j, X_{j'}])(0; 0, \eta) = B_\eta(X_j, X_{j'}). \tag{2.13}$$

Donc si $\eta \in \Omega$ la variété Σ est ω-feuilletée régulière près de $(0; 0, \eta)$. Comme P est invariant à gauche le groupe G agit sur Σ et donc Σ à la même propriété près de $(g; 0, \eta)$, $g \in G$. Le lemme est démontré.

De plus on voit que R_η, le radical de B_η, est l'espace tangent en $(0; 0, \eta)$ à la feuille canonique de Σ. On a donc si on note $\Gamma_{(g;\eta)}$ la feuille canonique passant par $(g; 0, \eta)$:

$$\Gamma_{(g;\eta)} = (g \exp R_\eta; 0, \eta) \subset \Sigma \subset T^* G. \tag{2.14}$$

On peut alors utiliser les résultats de [7] pour étudier P microlocalement près de $(0; 0, \eta)$.

LEMME (2.15). — *Soit* $\eta_0 \in \Omega$, $\zeta_0 \in R_\eta^*$. *Si* $\pi_{(\eta_0, \zeta_0)}(P)$ *est injectif* (*donc inversible*), P *est non microcaractéristique* (*au sens de* [7]) *au point* (ρ_0, ζ_0), $\rho_0 = (0; 0, \eta_0) \in \Sigma$, $\zeta_0 \in T_{\rho_0}^* \Gamma_{\rho_0}$.

En effet les valeurs propres de l'opérateur autoadjoint $\pi_{(\eta_0, \zeta_0)}(P)$ écrit en (2.6) sont :

$$M_\alpha(\eta_0) + A_{\eta_0}^2(\zeta_0), \qquad \alpha \in \mathbb{N}^{d'}, \tag{2.16}$$

où $M_\alpha(\eta_0) = b\,\eta_1 + \sum_{j=1}^{d'} (2\alpha_j + 1)\,\lambda_j(\eta_0)$, $\pm i \lambda_j(\eta_0)$ étant les valeurs propres non nulles de la matrice de B_{η_0} dans la base $X_1, \ldots, X_d$ et $A_{\eta_0}^2(\zeta)$ étant la restriction à $R_{\eta_0}^*$ de la forme quadratique définie par p_2 le symbole principal de P. Or la matrice fondamentale de P est B_η dans la base $X_1, \ldots, X_{d'}$ de $\mathscr{G}_1$ (ceci car on a diagonalisé le hessien de p_2). Donc les expressions (2.16) sont les invariants de l'opérateur différentiel P et le lemme est prouvé.

Enfin, si $\pi_{(\eta_0, \zeta_0)}(P)$ est injectif, on peut construire [7] une paramétrixe Q de P au sens suivant :

$$QP = I + R. \tag{2.17}$$

R étant un opérateur pseudodifférentiel de $\mathscr{K}^0(G, \Sigma)$ (une des classes introduites dans [3]) à support disjoint de (ρ_0, ζ_0), $\rho_0 = (0; 0, \eta_0)$; la notion de support d'un opérateur de $\mathscr{K}^0$ est définie dans [6] et [7].

On va montrer que R est régularisant dans un voisinage quasi conique de l'orbite $O_{(\eta_0, \zeta_0)}$ ce qui prouvera le point (ii) du théorème (2.7). Par définition du support, on a dans un voisinage de ρ_0 :

$$\chi(\xi)\, r \in S^{-\infty},$$

si χ est une fonction sur $\mathscr{G}_1^*$ (que l'on identifie à $T_e T^* G/T_e \Sigma$), constante sur les orbites $O_{(\eta,\zeta)}$ c'est-à-dire vérifiant :

$$\chi(\xi)=\chi(\xi') \qquad \text{si} \quad \langle \xi, R_\eta \rangle = \langle \xi', R_\eta \rangle$$

et à support dans un voisinage de $O_{(\eta_0,\zeta_0)}$. On choisit un tel χ valant 1 près de $O_{(\eta_0,\zeta_0)}$. Donc maintenant si $\chi_1(x, y, \xi, \eta)$ a son support dans un voisinage quasi conique assez restreint de $O_{(\eta_0,\zeta_0)}$, on peut écrire :

$$\chi_1(x, y, \xi, \eta)=\chi(\xi)\chi_1(x, y, \xi, \eta).$$

On en déduit $\chi_1 r \in S^{-\infty}$.

Remarque (2.18). — Si $\eta \notin \Omega$ on n'a pas un résultat aussi précis. Pourtant il résulte de [4] que si $\pi_{(\eta_0,\zeta)}(P)$ est injectif pour tout $\zeta \in R_{\eta_0}^*$ alors P est hypoelliptique dans un voisinage conique de $(0, \eta_0)$.

3. Le résultat de propagation des singularités

Dans ce paragraphe on suppose que B_η dégénère en tout point de $\mathscr{G}_2^* \backslash 0$ soit :

$$d''>0. \tag{3.1}$$

On donne d'abord quelques définitions en vue d'énoncer le théorème correspondant au résultat principal de [7].

Définition (3.2). — Soit $\eta \in \Omega$, $\zeta \in R_\eta^*$. Soit u une distribution sur G. On dit que $(g; \eta, \zeta) \notin WF'(u)$ si et seulement si u est $\mathscr{C}^\infty$ [au sens de (1.5)] dans un voisinage quasi conique [au sens de (1.2)] de $g \times O_{(\eta,\zeta)}$.

Définition (3.3). — On dit que la représentation $\pi_{\eta,\zeta}$ est non caractéristique pour P si $\pi_{(\eta,\zeta)}(P)$ est inversible dans $\mathscr{S}_{\pi(\eta,\zeta)}$.

Ces définitions sont justifiées par le théorème (2.7).

Soit $\eta \in \Omega$. La variété G est feuilletée par des d''-plans affines $g \exp R_\eta$, $g \in G$ [remarque (1.10)]. D'autre part p_2 le symbole principal de P induit par restriction une forme quadratique définie positive sur R_η^*. On a donc ainsi une métrique euclidienne A_η^2 définie par P sur les feuilles $g \exp R_\eta$.

Définition (3.4). — Soit $\pi_{(\eta,\zeta)}$ $\eta \in \Omega$, une représentation caractéristique pour P. On appelle bicaractéristique de P pour $\pi_{(\eta,\zeta)}$ passant par $g \in G$ et on note $b(g; \eta, \zeta)$:

— le d''-plan affine $g \exp(R_\eta)$ si $\zeta=0$;

— la droite de $g \exp(R_\eta)$ géodésique de codirection ζ pour la métrique $A_\eta^2(\zeta)$ si $\zeta \neq 0$.

Les bicaractéristiques $b(g; \eta, \zeta)$, $\zeta \neq 0$ sont donc les projections sur G des microbicaractéristiques définies dans [7] :

On déduit immédiatement du théorème (2.16) de [7].

THÉORÈME (3.5). — *Soit* $\eta \in \Omega$ $\zeta \in R_\eta^* \setminus \{0\}$ *tel que* dim Ker $\pi_{(\eta,\zeta)}(P) = 1$. *Soit* X *ouvert de* G, $u \in \mathscr{D}'(X)$ *tel que* $Pu \in \mathscr{C}^\infty(X)$. *Si* $(g; \eta, \zeta) \in WF'(u)$ *alors la composante connexe de* $(X \cap b(g, \eta, \zeta)) \times (\eta, \zeta)$ *contenant* $(g; \eta, \zeta)$ *est aussi dans* $WF'(u)$.

Remarque (3.6). — Il serait intéressant de pouvoir se débarasser des deux hypothèses $\zeta \neq 0$ et dim Ker $\pi_{(\eta,\zeta)}(P) = 1$. C'est possible dans un cas (*voir* § 4) mais cela semble techniquement difficile en général.

4. Un exemple : $G = H_{2d'+1} \times \mathbb{R}^{d''}$

On suppose dans ce paragraphe que :

$$\dim \mathscr{G}_2 = 1. \tag{4.1}$$

Alors l'hypothèse (H_c) est trivialement vérifiée. On peut noter $\mathscr{R}$ (indépendant de η) la sous-algèbre de $\mathscr{G}_1$ telle que le centre de $\mathscr{G}$ soit $\mathscr{R} \oplus \mathscr{G}_2$. Il est facile de voir que tout supplémentaire de $\mathscr{R}$ dans $\mathscr{G}$ est isomorphe à un groupe d'Heisenberg.

Il y a deux cas particuliers. Si $d'' = 0$, G est un groupe d'Heisenberg et il existe des solutions de $Pu = 0$ à support réduit à un point si P n'est pas hypoelliptique (comme pour l'opérateur de Lewy). Si $d' = 0$, G est commutatif, P est à coefficients constant, c'est l'opérateur de Schrödinger (si $b \neq 0$) ou un laplacien partiel si $b = 0$. On renvoie à Hörmander [12] et à J. Sjöstrand [18] pour les résultats de propagation des singularités bien connus dans ces deux cas et on suppose donc que d' et d'' sont nuls.

On peut énoncer, en notant B_g l'ensemble des bicaractéristiques $b_{(g;\eta,\zeta)}$, $\pi_{(\eta,\zeta)}$ étant caractéristique pour P.

THÉORÈME (4.2). — *Soit* X *un ouvert de* G *vérifiant* (4.1), $u \in \mathscr{D}'(X)$ $Pu \in \mathscr{C}^\infty(X)$. *Si* $g \in SS\, u$ (*support singulier*) *alors il existe au moins un* $b \in B_g$ *tel que la composante connexe de* $X \cap b$ *contenant* g *soit contenue dans* $SS\, u$.

Cela résulte immédiatement du théorème microlocal plus précis qui s'énonce exactement comme le théorème (3.5) mais sans supposer $\zeta \neq 0$ ni que Ker $\pi_{(\eta_0,\zeta_0)}(P)$ est de dimension 1. En effet comme $\dim \mathscr{G}_2 = 1$ on n'a pas de problème pour diagonaliser $\pi_{(\eta,\zeta)}(P)$ (P étant homogène) de manière $\mathscr{C}^\infty$ en η. Et la méthode de réduction (*voir* [7]) ramène l'étude de P à celle d'un système diagonal de symbole :

$$(M_\alpha(\eta) + A_\eta^2(\zeta))\, \mathrm{Id}_\nu,$$

α étant l'un des multiindices tel que $M_\alpha(\eta_0) + A_{\eta_0}^2(\zeta_0) = 0$ et ν étant le nombre de ces multiindices. On peut alors appliquer la version microlocale quasi homogène du théorème de propagation pour Schrödinger [7] et le résultat de [18] pour le Laplacien partiel.

5. Un autre exemple

Soit :

$$P = -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + \frac{1}{i}\, b\, Y_1,$$

où $[X_i, X_j] = Y_k$ i, j, k étant une permutation circulaire de 1,2,3. P est donc invariant à gauche sur le groupe libre nilpotent de rang 2 à 3 générateurs.

La matrice de B_η est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \eta_3 & -\eta_2 \\ -\eta_3 & 0 & \eta_1 \\ \eta_2 & -\eta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc G vérifie H_c et on a $d' = d'' = 1$. Les valeurs propres non nulles de B_η sont $\pm i|\eta|$ et R_η est engendré par :

$$\eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3.$$

On est donc amené à considérer les quantités :

$$M_\alpha(\eta) + A_\eta^2(\zeta) = (2\alpha+1)|\eta| + b\eta_1 + \zeta^2, \qquad \alpha \in \mathbb{N}.$$

Si $|b| \geqq 1$, P n'est pas hypoelliptique. On conjecture qu'il y a propagation des singularités le long des droites $g \exp(R_\eta)$ mais il y a en général des points où l'on ne peut pas appliquer le résultat du paragraphe 3. Ce sont les points où il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que :

$$M_\alpha(\eta) = (2\alpha+1)|\eta| + b\eta_1 = 0.$$

En effet, il faut alors étudier un opérateur sur $\mathbb{R}^4$ à caractéristiques doubles, à variété caractéristique involutive mais dont le symbole sous-principal s'annule non identiquement sur la variété caractéristique. On ne peut donc appliquer les théorèmes de [6] et [7]. On remarque toutefois que le symbole sous-principal est constant sur les feuilles canoniques et qu'on peut espérer utiliser les techniques de R. Lascar [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS, Exposé n° 19 au *Séminaire Goulaouic-Schwartz*, École Polytechnique, 1976-1977.

[2] R. BEALS, Exposé aux *Journées E.D.P.* de Saint-Jean de Monts, juin 1977.

[3] L. BOUTET DE MONVEL, *Hypoelliptic Operators with Double Characteristics and Related Pseudodifferential Operators* (*C.P.A.M.* vol. 27, 1974, p. 385-639).

[4] L. BOUTET DE MONVEL, A. GRIGIS et B. HELFFER, *Paramétrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples* (*Astérisque*, vol. 34-35, 1976, p. 93-121).

[5] A. GRIGIS, *Hypoellipticité et paramétrixes pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles* (*Astérisque*, vol. 34-35, 1976, p. 183-205).

[6] A. GRIGIS, *Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles* (*Comm. in P.D.E.*, vol. 4, n° 11, 1979, p. 1233-1262).

[7] A. GRIGIS, *Propagation des singularités le long de courbes microbicaractéristiques pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles* (*Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 15, 4e série, 1982, p. 147-160).

[8] B. HELFFER, *Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples, perte de 3/2 dérivées* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 51-52, 1977, p. 13-61).

[9] B. HELFFER, *Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur des groupes de Lie nilpotents*, Publications du C.I.M.E., 1977.

[10] B. Helffer et J. Nourrigat, *Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence* 3, (*Comm. P.D.E.*, vol. 3, n° 8, 1978, p. 643-743).

[11] B. Helffer et J. Nourrigat, *Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie Nilpotent gradué* (*Comm. P.D.E.*, vol. 4, n° 8, 1979, p. 899-958).

[12] L. Hörmander, *On the Existence and the Regularity of Solutions of Linear Pseudodifferential Equations* (*Enseignement Mathématique*, vol. XVII, 1971, p. 99-163).

[13] A. A. Kirillov, *Unitary Representations of Nilpotent Lie Groups* (*Uspehi Mat. Nauk.*, vol. 17, 1962, p. 57-110 et *Russian Math. Surveys*, vol. 17, 1962, p. 53-104).

[14] R. Lascar, *Propagation des singularités et hypoellipticité pour des opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles* (*Comm. P.D.E.*, vol. 3, n° 3, 1978, p. 201-247).

[15] G. Métivier, *Hypoellipticité analytique sur des groupes nilpotents de rang* 2 (*Duke Math. J.*, vol. 47, n° 1, 1980, 195-221).

[16] C. Rockland, *Hypoellipticity on the Heisenberg group Representation theoretic criteria* (*Trans. A.M.S.*, vol. 240, n° 517, 1978, p. 1-52).

[17] L. P. Rothschild et E. M. Stein, *Hypoelliptic Differential Operators and Nilpotent Groups* (*Acta Mathematica*, vol. 137, 1976, p. 248-315).

[18] J. Sjöstrand, *Propagation of Singularities for Operators with Multiple Involutive Characteristics* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, vol. 26-1, 1976, p. 141-155).

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1981,
accepté le 19 septembre 1981.)

A. Grigis,
École Polytechnique,
Centre de Mathématiques,
Laboratoire associé au C.N.R.S., n° 169,
plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex.