ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Sur la décomposition d'un domaine borné symétrique en produit continu de domaines bornés symétriques irréductibles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 14, nº 4 (1981), p. 453-463

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_4_453_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 14, 1981, p. 453 à 463.

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UN DOMAINE BORNÉ SYMÉTRIQUE EN PRODUIT CONTINU DE DOMAINES BORNÉS SYMÉTRIQUES IRRÉDUCTIBLES

PAR JEAN-PIERRE VIGUÉ

1. Introduction

L'étude du groupe G (D) des automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace vectoriel complexe de dimension finie a été faite par Henri Cartan [2] qui a montré en particulier que G (D) est muni, d'une manière naturelle, d'une structure de groupe de Lie réel. Ce résultat a permis à Élie Cartan [1] de donner une classification complète des domaines bornés symétriques de $\mathbb{C}^n$. La première étape de cette classification consiste à montrer que tout domaine borné symétrique d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est isomorphe à un produit fini de domaines bornés symétriques irréductibles et, ensuite, E. Cartan donne une classification des domaines bornés symétriques irréductibles.

Depuis quelques temps, on a beaucoup étudié le groupe G (D) des automorphismes analytiques d'un domaine borné D d'un espace de Banach complexe E (*voir* [4], [5], [8] à [12]). En particulier, dans [8], j'ai montré que, si D est un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe E, le groupe G (D) est muni, de manière naturelle, d'une structure de groupe de Lie réel. Dans l'espoir de classifier un jour les domaines bornés symétriques dans les espaces de Banach, il est nécessaire de chercher d'abord leur décomposition en produit de domaines bornés symétriques irréductibles et, comme je l'ai montré dans [10], il est raisonnable de chercher une décomposition en « produit continu » de domaines bornés symétriques irréductibles.

Dans cet article, je donnerai deux définitions possibles de la notion de domaine borné symétrique irréductible. La première définition consiste à dire qu'un domaine borné symétrique D est irréductible s'il n'existe pas de décomposition de D en produit continu non trivial de domaines bornés symétriques. On sait d'autre part d'après [4] et [9] qu'à tout domaine borné symétrique D, est associé un système triple de Jordan (E, Z). Dans la deuxième définition, je dirai qu'un domaine borné symétrique D est fortement irréductible si les seuls idéaux de Jordan du système triple de Jordan (E, Z) associé sont $\{0\}$ et E. Je vérifierai alors que, si D est fortement irréductible, D est irréductible. De plus, si D est un domaine borné symétrique d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, ces deux définitions coïncident avec la définition classique. Un exemple qui montre assez bien les difficultés de cette question, prouve que ces deux notions ne coïncident pas toujours si l'espace de Banach E n'est pas de dimension finie.

Étant donné un domaine borné symétrique D, je montrerai alors l'existence d'un espace topologique S, d'un espace de Banach $\mathscr{E}$ au-dessus de S, d'une famille $(D_s)_{s\in S}$ de domaines bornés symétriques irréductibles contenus dans $\mathscr{E}_s$, d'un domaine borné symétrique $\Delta \subset \Gamma(S, \mathscr{E})$ produit continu des D_s, et d'un isomorphisme φ de E sur un sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(S, \mathscr{E})$ tel que $\varphi(D) = \Delta \cap \varphi(E)$. Ce résultat donne une espèce de réalisation de D comme produit continu des D_s.

Signalons aussi qu'un théorème de classification a été obtenu par W. Kaup [5] dans le cas particulier des domaines bornés symétriques d'un espace de Hilbert complexe.

2. Définitions et rappels

Rappelons qu'un espace de Banach $\mathscr{E}$ au-dessus de S est défini par la donnée de deux espaces topologiques $\mathscr{E}$ et S, de deux applications continues $p : \mathscr{E} \to S$ et $q : \mathscr{E} \to \mathbb{R}^+$, et d'une structure d'espace de Banach complexe sur chaque fibre $\mathscr{E}_s = p^{-1}(s)$, avec $q_s = q|_{\mathscr{E}_s}$ comme norme, vérifiant certaines propriétés (*voir* [10]). Pour toute section continue $f : S \to \mathscr{E}$, on définit une norme :

$$\| f \| = \sup_{s\in S} q(f(s)),$$

et on note $\Gamma(S, \mathscr{E})$ l'espace de Banach des sections continues de norme finie.

On dit [10] qu'un domaine borné D de $\Gamma(S, \mathscr{E})$ est produit continu des traces $(D_s)_{s\in S}$ de D sur chacun des $\mathscr{E}_s$ si D est le plus grand ouvert contenu dans :

$$\{ f \in \Gamma(S, \mathscr{E}) \mid f(s) \in D_s, \ \forall\ s \in S \}.$$

Rappelons que, d'après [8], tout domaine borné symétrique D admet une réalisation comme un domaine borné cerclé étoilé, et que cette réalisation est unique, à un isomorphisme linéaire près. Compte tenu du théorème 4.3.4 de [10], j'adopterai la définition suivante d'un domaine borné symétrique irréductible.

DÉFINITION 2.1. — Soit D un domaine borné symétrique, réalisé comme un domaine borné cerclé étoilé. Je dirai que D est réductible s'il existe un espace de Banach $\mathscr{E}$ au-dessus d'un espace topologique compact ([1]) S, l'ensemble $\{s \in S \mid \mathscr{E}_s \neq \{0\}\}$ ayant au moins deux

([1]) Pour des raisons techniques, je modifie un peu la définition de [10], en supposant de plus que S est compact.

éléments, et un isomorphisme linéaire T de E sur $\Gamma(S, \mathscr{E})$ tels que le domaine T (D) soit produit continu des domaines $T(D)_s \subset \mathscr{E}_s$, et que T (D) vérifie la propriété suivante :

(P) tout automorphisme analytique φ de T (D) suffisamment proche de la transformation identique provient d'une famille $(\varphi_s)_{s \in S}$ d'automorphismes analytiques de $T(D)_s$.

Dans le cas contraire, D est dit irréductible.

Des conditions suffisantes pour que (P) soit vérifiée sont données dans [10]. Remarquons d'autre part que, comme, d'après [8], la symétrie s_a par rapport à un point a de D appartient toujours à un groupe à un paramètre réel d'automorphismes analytiques de D, chacun des domaines $T(D)_s$ est symétrique.

Je vais maintenant définir la notion de domaine borné symétrique fortement irréductible. Rappelons d'abord que, si D est un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe E, il lui est associé un système triple de Jordan (E, Z). Un système triple de Jordan (E, Z) est constitué par la donnée d'un espace de Banach complexe E et d'une application trilinéaire continue :

$$Z: \quad E^3 \to E,$$

$\mathbb{C}$-linéaire symétrique en les deux dernières variables, $\mathbb{C}$-antilinéaire en la première variable, vérifiant certaines propriétés (*voir* [4] et [9]).

DÉFINITION 2.2. — Soit (E, Z) un système triple de Jordan. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est un idéal de Jordan de (E, Z) (ou plus simplement un idéal de E) si, $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $\forall a \in F$, on a :

$$Z(a, x, y) \in F \qquad \text{et} \qquad Z(x, a, y) \in F.$$

Les résultats suivants sont tout-à-fait élémentaires :

PROPOSITION 2.3 :

(i) *si* F *est un idéal de Jordan de* (E, Z), *l'adhérence* $\overline{F}$ *de* F *est un idéal de* E;

(ii) *si* F_1 *et* F_2 *sont deux idéaux de* E, $F_1 \cap F_2$ *est un idéal de* E;

(iii) *si* $\varphi : (E, Z) \to (E', Z')$ *est un morphisme de système triple de Jordan, et si* F' *est un idéal de* E', $\varphi^{-1}(F')$ *est un idéal de* E.

PROPOSITION 2.4. — *Si* (E, Z) *est un système triple de Jordan, et si* F *est un idéal de Jordan fermé de* (E, Z), *l'application* Z *passe au quotient et définit un système triple de Jordan* $(E/F, Z_{E/F})$. *Si on suppose de plus que* (E, Z) *est le système triple de Jordan associé à un domaine borné cerclé homogène* D, *la variété symétrique associée à* $(E/F, Z_{E/F})$ *est un domaine borné* Δ, *et* Δ *est l'image de* D *par la projection naturelle* $E \xrightarrow{p} E/F$.

Démonstration. — Il est clair que $(E/F, Z_{E/F})$ vérifie les conditions de [4], et est un système triple de Jordan. On vérifie alors que la projection $p(D)$ du domaine D est un domaine borné symétrique de E/F, et que le système triple de Jordan associé est bien $(E/F, Z_{E/F})$.

On définit alors la notion d'idéal maximal de (E, Z). Rappelons [6] que $a \in E$ est un tripotent si $-Z(a, a, a) = a$, et que ce tripotent est dit régulier si :

$$x \to -Z(a, a, x),$$

est un isomorphisme linéaire de E. On remarque alors la :

PROPOSITION 2.5. — *Soit* (E, Z) *un système triple de Jordan. Tout idéal de Jordan maximal de* (E, Z) *est fermé ou dense. Si on suppose de plus que* (E, Z) *admet un tripotent régulier, tout idéal maximal de* (E, Z) *est fermé.*

Je peux maintenant définir la notion de domaine borné symétrique fortement irréductible.

DÉFINITION 2.6. — Soit D un domaine borné symétrique d'un espace de Banach complexe E. Je dirai que D est fortement irréductible si les seuls idéaux de Jordan du système triple de Jordan associé (E, Z) sont $\{0\}$ et E.

DÉFINITION 2.7. — Soit D un domaine borné cerclé homogène, et soit (E, Z) le système triple de Jordan associé. Je dirai qu'un idéal de Jordan fermé F de E est irréductible (resp. fortement irréductible) si le domaine borné cerclé homogène Δ associé à $(E/F, Z_{E/F})$ est irréductible (resp. fortement irréductible).

Remarquons que dire qu'un idéal fermé F de E est fortement irréductible est équivalent à dire que F est maximal.

Cette terminologie est justifiée par la :

PROPOSITION 2.9. — *Soit* $D \subset E$ *un domaine borné cerclé homogène fortement irréductible. Alors* D *est irréductible.*

Démonstration. — En effet, si D est réductible, il existe un espace de Banach $\mathscr{E}$ au-dessus de S, avec $\mathscr{E}_s \neq 0$ pour au moins deux points s_1 et s_2 de S, et un isomorphisme linéaire $T : E \xrightarrow{\sim} \Gamma(S, \mathscr{E})$ tels que T (D) soit produit continu de $(T(D)_s)_{s \in S}$. On vérifie facilement que :

$$F_{s_1} = \{ f \in \Gamma(S, \mathscr{E}) \mid f(s_1) = 0 \},$$

est un idéal de Jordan de E, distinct de $\{0\}$ et de E.

Ainsi, D n'est pas fortement irréductible.

La réciproque est fausse, comme nous le verrons plus loin.

3. Énoncé et démonstration des théorèmes principaux

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer les théorèmes suivants.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* D *un domaine borné cerclé homogène d'un espace de Banach complexe* E. *Alors il existe un espace topologique complètement régulier* S, *un espace de Banach* $\mathscr{E}$ *au-dessus de* S *et un isomorphisme linéaire* φ *de E sur un sous-espace vectoriel fermé de* $\Gamma(S, \mathscr{E})$ *tels que :*

(i) *pour tout* $s \in S$, $[\varphi(E)](s) = \mathscr{E}_s$;

(ii) *l'application qui, à* $s \in S$, *associe le sous-espace vectoriel de* $\varphi(E)$ *des éléments nuls au point* s, *est une bijection de* S *sur l'ensemble des idéaux de Jordan irréductibles de* E;

(iii) *pour tout* $s \in S$, $D_s = [\varphi(D)](s)$ *est un domaine borné cerclé homogène irréductible de* $\mathscr{E}_s$; *il existe un domaine borné cerclé homogène* Δ *produit continu des* D_s, *et* $\varphi(D) = \Delta \cap \varphi(E)$.

THÉORÈME 3.2. — *Avec les notations du théorème précédent, soit* S_m *l'ensemble des points s de* S *tels que* D_s *soit fortement irréductible, et considérons l'espace de Banach* $\mathscr{E}|_{S_m} \to S_m$. *Alors il existe un sous-espace vectoriel fermé* K *de* E *tel que l'application* ψ, *induite par* φ, *de* E *dans* $\Gamma(S_m, \mathscr{E}|_{S_m})$ *ait pour noyau* K *et pour image un sous-espace vectoriel fermé de* $\Gamma(S_m, \mathscr{E}|_{S_m})$. *De plus, si* $s_1, \ldots, s_n$ *sont n points distincts de* S_m, *l'application :*

$$E \to \mathscr{E}_{s_1} \times \ldots \times \mathscr{E}_{s_n},$$
$$a \to ([\psi(a)](s_1), \ldots, [\psi(a)](s_n)),$$

est surjective.

Ainsi, le théorème 3.1 fournit une espèce de décomposition de D en produit continu de domaines bornés symétriques irréductibles alors que le théorème 3.2 donne une décomposition en produit continu de domaines fortement irréductibles. Remarquons aussi que, dans le théorème 3.1, l'application φ est injective mais que l'image $\varphi(E)$ de φ est, en général, beaucoup plus petite que $\Gamma(S, \mathscr{E})$. Au contraire, dans le théorème 3.2, l'image de ψ est beaucoup plus grosse, mais ψ n'est pas injective, en général.

On peut peut-être obtenir un résultat plus satisfaisant à condition de bien choisir une partie T de S, et de se limiter à l'espace de Banach $\mathscr{E}|_T$ au-dessus de T. Ainsi, dans de nombreux exemples, on obtient de bons résultats en considérant la partie S_0 de S suivante :

Un idéal de Jordan irréductible I appartient à S_0 si et seulement si il existe une décomposition de D en produit continu $\mathscr{F} \to U$ et un point u_0 de U tel que I soit égal à l'ensemble :

$$\{f \in \Gamma(U, \mathscr{F}) \mid f(u_0) = 0\}$$

(c'est-à-dire que I apparaît effectivement dans une décomposition de D en produit continu). Malheureusement, je ne sais pas démontrer dans le cas général que S_0 a de bonnes propriétés (je ne sais même pas si S_0 est non vide).

Les théorèmes 3.1 et 3.2 seront des conséquences d'une suite de propositions que nous allons maintenant démontrer.

Soit donc D un domaine borné cerclé homogène d'un espace de Banach complexe E, et soit (E, Z) le système triple de Jordan associé. Soit S l'ensemble des idéaux irréductibles de (E, Z), et soit S_m le sous-ensemble des idéaux de Jordan fermés maximaux. Pour tout $s \in S$, nous noterons I_s l'idéal de Jordan correspondant. Soit $\mathscr{E}_s = E/I_s$ l'espace de Banach-quotient, muni de la norme-quotient de la norme de E, que nous noterons q_s. Soit D_s le domaine borné cerclé homogène de $\mathscr{E}_s$, image de D par la projection φ_s de E sur $\mathscr{E}_s$. On munit S de la topologie la moins fine rendant continue, pour tout $a \in E$, l'application :

$$S \to \mathbb{R}^+,$$
$$s \to q_s(\varphi_s(a)).$$

On a alors la :

PROPOSITION 3.3. — *L'espace topologique* S *est complètement régulier.*

Démonstration. — Montrons d'abord que S est séparé. Soient s_1 et s_2 deux points distincts de S, et soient I_{s_1} et I_{s_2} les idéaux correspondants. Comme ces idéaux sont distincts, il existe un élément a de E qui appartient à l'un et qui n'appartient pas à l'autre. L'application :

$$s \to q_s(\varphi_s(a)),$$

qui est continue sur S, est nulle en l'un de ces points et non nulle en l'autre. Ainsi, S est séparé.

Montrons maintenant que S est complètement régulier. Soit $s_1 \in S$, et soit F un fermé de S ne contenant pas s_1. Par définition de la topologie de S, F est une intersection quelconque d'une réunion finie de fermés élémentaires (F_i), où F_i est tel qu'il existe une fonction continue f_i sur S, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et un fermé A_i de $\mathbb{R}$ tel que $F_i = f_i^{-1}(A_i)$. On peut donc trouver un nombre fini de fermés élémentaires $F_1, \ldots, F_n$, tels que $F \subset F_1 \cup \ldots \cup F_n$ et que $s_1 \notin F_1 \cup \ldots \cup F_n$. A partir des f_i, la construction d'une fonction continue $g : S \to [0, 1]$ telle que $g(s_1) = 0$ et que $g(F_1 \cup \ldots \cup F_n) = 1$ est facile et laissée au lecteur.

Considérons maintenant l'ensemble $\mathscr{E} = \coprod \mathscr{E}_s$, réunion disjointe des $(\mathscr{E}_s)_{s \in S}$. On munit $\mathscr{E}$ de la topologie la plus fine pendant continue l'application p_0 :

$$E \times S \to \mathscr{E},$$
$$(a, s) \mapsto (\varphi_s(a)) \in \mathscr{E}_s \subset \mathscr{E}.$$

Soit $p : \mathscr{E} \to S$ l'application qui envoie $\mathscr{E}_s$ sur s.

Soit $q : \mathscr{E} \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par $q|_{\mathscr{E}_s} = q_s$.

On a alors la :

PROPOSITION 3.4 :

(i) *pour tout* $s \in S$, *la topologie induite par* $\mathscr{E}$ *sur* $\mathscr{E}_s$ *est égale à la topologie-quotient de* $\mathscr{E}_s = E/I_s$;

(ii) *l'application* $p : \mathscr{E} \to S$ *est continue;*

(iii) *l'application* $q : \mathscr{E} \to \mathbb{R}^+$ *est continue;*

(iv) *les applications :*

$$\mathscr{E} \times_S \mathscr{E} \to \mathscr{E} \quad \text{et} \quad \mathbb{C} \times \mathscr{E} \to \mathscr{E},$$
$$(x, y) \mapsto x + y \qquad (\lambda, x) \mapsto \lambda . x,$$

sont continues;

(v) *Pour tout* $a \in E$, *l'application :*

$$S \to \mathscr{E},$$
$$s \mapsto \varphi_s(a),$$

est une section continue bornée de $\mathscr{E} \xrightarrow{p} S$. *En particulier, ceci entraîne que, pour tout* $s \in S$, *l'application d'évaluation :*

$$\Gamma(S, \mathscr{E}) \to \mathscr{E}_s,$$
$$f \mapsto f(s),$$

est surjective.

Ainsi ($\mathscr{E}$, S, p, q) *est un espace de Banach au-dessus de* S *au sens de* [10].

Démonstration. — (i) et (v) sont évidents.

(ii) D'après la définition de la topologie de $\mathscr{E}$, pour qu'une application f de $\mathscr{E}$ dans un espace topologique A soit continue, il faut et il suffit que $f \circ p_0$ soit continue. Or;

$$p \circ p_0(s) = s,$$

ce qui prouve que $p \circ p_0$ est continue, et p est continue.

(iii) De même, pour montrer que q est continue, il suffit de vérifier que l'application :

$$\mathrm{E} \times \mathrm{S} \to \mathbb{R}^+,$$
$$(x, s) \mapsto q_s(x),$$

est continue. Supposons que (x, s) converge vers (x_0, s_0).

On a :

$$|q_s(x) - q_{s_0}(x_0)| \leqq |q_s(x) - q_s(x_0)| + |q_s(x_0) - q_{s_0}(x_0)| \leqq \|x - x_0\| + |q_s(x_0) - q_{s_0}(x_0)|.$$

Or $\|x - x_0\| \to 0$, et, par définition de la topologie de S, $q_s(x_0) \to q_{s_0}(x_0)$ quand $s \to s_0$. Le résultat est démontré.

(iv) Considérons l'application continue :

$$(\mathrm{E} \times \mathrm{S}) \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{E} \times \mathrm{S}) \to \mathrm{E} \times \mathrm{S},$$
$$(x, s) \times (y, s) \mapsto (x + y, s).$$

On vérifie facilement que, par passage au quotient, l'application :

$$\mathscr{E} \times_{\mathrm{S}} \mathscr{E} \to \mathscr{E},$$
$$(x, y) \mapsto x + y,$$

est aussi continue. Une démonstration analogue marche aussi pour la multiplication par un scalaire.

Proposition 3.5. — *Soit* $\Delta \subset \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})$ *le domaine borné produit continu des* $(\mathrm{D}_s)_{s \in \mathrm{S}}$. *Alors* Δ *est un domaine borné cerclé homogène.*

Démonstration. — On vérifie facilement que l'application Z définit, par passage au quotient, une application trilinéaire continue (d'espaces de Banach au-dessus de S) :

$$\mathrm{Z}_1 : \quad \mathscr{E} \times_{\mathrm{S}} \mathscr{E} \times_{\mathrm{S}} \mathscr{E} \to \mathscr{E}.$$

On en déduit une application trilinéaire continue :

$$\mathrm{Z}_2 : \quad \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E})^3 \to \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{E}).$$

Ceci définit un système triple de Jordan, et la variété homogène cerclée associée n'est autre que Δ.

Nous avons besoin de la :

PROPOSITION 3.6. — *Soit* (E, Z) *le système triple de Jordan associé à un domaine borné cerclé homogène* $D \subset E$. *Pour tout vecteur* a *de* E *non nul, il existe un idéal de Jordan irréductible qui ne contient pas* a.

Démonstration. — Considérons l'ensemble $\mathscr{U}$ des idéaux de Jordan I qui ne contiennent pas a et tels que :

$$\| a \|_{E/I} = \| a \|.$$

On montre facilement que $\mathscr{U}$ est ordonné inductif. D'après le lemme de Zorn, $\mathscr{U}$ admet un élément maximal I_0. Montrons que I_0, qui est fermé, est irréductible. Si E/I_0 était réductible, il existerait un espace de Banach $\mathscr{E}$ au-dessus d'un espace topologique compact S, $\mathscr{E}_s \neq 0$ pour au moins deux points de S, et quitte à modifier la norme q de $\mathscr{E}$, un isomorphisme isométrique $\theta : E/I_0 \simeq \Gamma(S, \mathscr{E})$. Comme S est compact, on trouverait un point s_0 de S tel que :

$$\| [\theta(a)](s_0) \|_{\mathscr{E}_{s_0}} = \| a \|.$$

Alors $\theta^{-1}(\{ f \in \Gamma(S, \mathscr{E}) \mid f(s_0) = 0 \})$ serait un idéal de $\mathscr{U}$ plus grand que I_0.

C.Q.F.D.

L'application, définie dans le théorème 3.1, est donc injective. Comme D est homogène, on a : $\varphi(D) = \Delta \cap \varphi(E)$. Ceci entraîne que φ^{-1} est continue et que φ est un isomorphisme de E sur un sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(S, \mathscr{E})$. Le théorème 3.1 est démontré.

On montre par le même raisonnement que ψ est un isomorphisme de E/K sur un sous-espace vectoriel fermé de $\Gamma(S_m, \mathscr{E}|_{S_m})$. Pour achever la démonstration du théorème 3.2, il nous reste à montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.7. — *Soient* $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ $(n+1)$ *points distincts de* S_m. *L'application :*

$$I_{s_1} \cap \ldots \cap I_{s_n} \xrightarrow{\theta} \mathscr{E}_{s_0},$$
$$a \mapsto [\psi(a)](s_0),$$

est surjective.

Démonstration. — Comme l'application $\varphi_{s_0} : E \to \mathscr{E}_{s_0}$ est surjective, l'image de θ est un idéal de $\mathscr{E}_{s_0}$, et comme $\mathscr{E}_{s_0}$ est fortement irréductible, il est égal à $\{0\}$ ou à $\mathscr{E}_{s_0}$. Il suffit donc de montrer que $\theta(I_{s_1} \cap \ldots \cap I_{s_n}) \neq \{0\}$.

Faisons la démonstration par récurrence sur n. Pour $n=1$, comme I_{s_1} n'est pas contenu dans I_{s_0}, l'image de I_{s_1} dans $\mathscr{E}_{s_0}$ n'est pas nulle, et est donc égale à $\mathscr{E}_{s_0}$.

Supposons la propriété démontrée à l'ordre $(n-1)$. Montrons-la à l'ordre n. Soit $\xi \in \mathscr{E}_{s_0}$ $(\xi \neq 0)$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut trouver $a \in I_{s_1} \cap \ldots \cap I_{s_{n-1}}$ tel que $[\psi(a)](s_0) = \xi$. De même, on peut trouver $b \in I_{s_n}$ tel que $[\psi(b)](s_0) = \xi$. Alors :

$$Z(a, b, b) \in I_{s_1} \cap \ldots \cap I_{s_n},$$

et on a : $[\psi(Z(a, b, b))](s_0) = Z(\xi, \xi, \xi)$ qui est non nul d'après le lemme 3.4.15 de [8]. Ainsi, $(\varphi[I_{s_1} \cap \ldots \cap I_{s_n}])(s_0)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et la proposition est démontrée.

4. Le cas de $\mathscr{L}(E, F)$.

Soient E et F deux espaces de Hilbert complexes, et soit $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace de Banach des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme habituelle. On sait d'après Harris [3] que la boule-unité ouverte B de $\mathscr{L}(E, F)$ est un domaine borné cerclé homogène et que l'application Z associée vaut :

$$Z(x, y, y) = -yx^* y,$$

où x^* désigne l'adjoint de x.

Nous avons le :

THÉORÈME 4.1. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert de dimension infinie. Le sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(E, F)$ *formé des opérateurs compacts est un idéal de Jordan de* $\mathscr{L}(E, F)$. *Ainsi, la boule-unité ouverte* B *de* $\mathscr{L}(E, F)$ *n'est pas fortement irréductible.*

Cependant, nous avons la :

PROPOSITION 4.2. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert. Tout idéal de Jordan de* $\mathscr{L}(E, F)$ *non réduit à* $\{0\}$ *contient toutes les applications linéaires de rang fini.*

Idée de la démonstration. — Soit I un idéal de Jordan non réduit à $\{0\}$. Soit $u \in I$ tel que $u^* \neq 0$. Si v est une application linéaire de rang 1, $vu^* v \in I$, et si on choisit bien v, on trouve qu'il existe une application linéaire de rang 1 qui appartient à I. Par une technique analogue, on montre facilement que toute application linéaire de rang 1 appartient à I. Par addition, toute application linéaire de rang fini appartient à I, et la proposition est démontrée.

On déduit de cette proposition le :

THÉORÈME 4.3. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert. La boule-unité ouverte* B *de* $\mathscr{L}(E, F)$ *est un domaine borné symétrique irréductible.*

Démonstration. — Supposons que B ne soit pas irréductible. Alors, il existe un espace de Banach $\mathscr{E} \to S$ ($\mathscr{E}_s \neq 0$ pour au moins deux points de S) et un isomorphisme linéaire $\varphi : \mathscr{L}(E, F) \to \Gamma(S, \mathscr{E})$ tel que $\varphi(B)$ soit produit continu des $(\varphi(B))_{s \in S}$. Pour tout point s de S, l'idéal de Jordan :

$$I_s = \{f \in \Gamma(S, \mathscr{E}) \mid f(s) = 0\},$$

n'est pas réduit à $\{0\}$, et d'après la proposition 4.2, contient l'image par φ de toutes les applications linéaires de rang fini. Alors, pour toute application linéaire a de rang fini, pour tout $s \in S$, on a :

$$[\varphi(a)](s) = 0.$$

Contradiction.

En particulier, on déduit des résultats précédents qu'il existe des domaines bornés symétriques irréductibles et non fortement irréductibles. Cependant, on montre facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 4.4. — *Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert complexes, et supposons que l'un des deux soit de dimension finie. Alors la boule-unité ouverte* B *de* $\mathscr{L}(E, F)$ *est un domaine borné cerclé homogène fortement irréductible.*

REMARQUE 4.5. — L'exemple de la boule-unité ouverte B de $\mathscr{L}(E, F)$, où E et F sont deux espaces de Hilbert de dimension infinie montre que, dans le théorème 3.2, on ne peut pas espérer que l'application ψ soit injective.

5. Le cas de la dimension finie

THÉORÈME 5.1. — *Soit* D *un domaine borné cerclé homogène d'un espace vectoriel complexe de dimension finie. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) D *est irréductible;*

(ii) D *est fortement irréductible.*

Soit D un domaine borné cerclé homogène de $\mathbb{C}^n$. Le théorème 5.1 nous dit que $S_m = S$, et d'après le théorème 3.2, S est fini. Ainsi donc, les théorèmes 3.1 et 3.2 fournissent la décomposition de $D \subset \mathbb{C}^n$ en un produit fini de domaines bornés cerclés homogènes irréductibles.

Soit donc D un domaine borné cerclé homogène de $\mathbb{C}^n$. Pour montrer le théorème 5.1, nous avons besoin de quelques considérations sur les tripotents du système triple de Jordan $(\mathbb{C}^n, Z)$ associé. Si e est un tripotent de Z, d'après [7] et [6], il existe une décomposition directe de :

$$\mathbb{C}^n = E_0 \oplus E_{1/2} \oplus E_1,$$

où E_i est le sous-espace propre correspondant à la valeur propre i de :

$$x \to -Z(e, e, x).$$

Un tripotent est donc régulier si $E_0 = \{0\}$. Par récurrence sur la dimension n de l'espace, on montre facilement [11] le :

LEMME 5.2. — *Soit* e *un tripotent de* $(\mathbb{C}^n, Z)$. *Alors il existe un tripotent* f *tel que* $Z(e, f, .) = 0$ *et que* $(e+f)$ *soit un tripotent régulier de* $(\mathbb{C}^n, Z)$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 5.1. Soit I un idéal de Jordan de $(\mathbb{C}^n, Z)$ distinct de $\{0\}$ et de $\mathbb{C}^n$. Il nous faut montrer que D est réductible et, pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un idéal de Jordan J supplémentaire de I.

$(I, Z|_I)$ est un système triple de Jordan et, d'après le lemme 5.2, il existe un tripotent régulier e dans I. Bien sûr, e est un tripotent dans $(\mathbb{C}^n, Z)$, et $\mathbb{C}^n$ admet une décomposition directe :

$$\mathbb{C}^n = E_0 \oplus E_{1/2} \oplus E_1$$

(relative au tripotent e). Comme e est un tripotent régulier de $(I, Z|_I)$, $E_0 \cap I = \{0\}$, et comme I est un idéal, $Z(e, e, \mathbb{C}^n) \subset I$, ce qui prouve que $E_{1/2} \oplus E_1$ est contenu dans I. Ainsi donc, E_0 est un supplémentaire de I dans $\mathbb{C}^n$. On sait déjà que E_0 est stable par Z, montrons que E_0 est un idéal de Jordan de $(\mathbb{C}^n, Z)$.

Soit $x \in E_0$. On a $Z(e, e, x) = 0$. On sait que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$, où a_i est un tripotent de E_0 (*voir* [7] et [9]). Par suite $Z(e, e, a_i) = 0$, pour tout $i = 1, \ldots, p$. Soit maintenant f un autre tripotent de I. D'après [7], on a : $Z(f, a_i, a_i) = 0$, ce qui entraîne :

$$Z(f, f, a_i) = 0,$$
$$Z(f, a_i, .) = 0,$$
$$Z(a_i, f, .) = 0.$$

Par combinaison linéaire, on a :

$$Z(f, x, .) = 0 \quad \text{et} \quad Z(x, f, .) = 0.$$