ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PHILIPPE BOUGEROL

# Théorème central limite local sur certains groupes de Lie

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 14, nº 4 (1981), p. 403-432

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_4_403_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4e série, t. 14, 1981, *p.* 403 *à* 432.

# THÉORÈME CENTRAL LIMITE LOCAL SUR CERTAINS GROUPES DE LIE

PAR PHILIPPE BOUGEROL

Si $\mu$ est une mesure de probabilité sur un groupe localement compact G, de $n$-ième puissance de convolution $\mu^n$, nous voulons estimer $\mu^n(C)$ lorsque C est un compact de G et $n$ tend vers l'infini. Plus précisément nous cherchons à déterminer une suite de réels $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ et une mesure de Radon non nulle $m_\mu$ sur G telles que la suite de mesures $a_n \mu^n$, $n \in \mathbf{N}$, converge vaguement vers $m_\mu$ lorsque $n$ tend vers l'infini, c'est-à-dire que pour toute fonction $f$ continue à support compact sur G :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \int_G f\, d\mu^n = \int_G f\, dm_\mu.$$

Nous appellerons théorème central limite local, ou pour abréger théorème local, un résultat de ce type ([1], [4], [5], [12]).

Lorsque par exemple G est compact et $\mu$ est une probabilité sur G dont le support n'est pas contenu dans une classe latérale d'un sous-groupe fermé distingué propre de G, $\mu$ satisfait à un théorème local puisque la suite $\mu^n$, $n \in \mathbf{N}$, converge vers la mesure de Haar normalisée de G [12].

Rappelons d'abord comment se traite le cas classique où G est égal à $\mathbf{R}$ [5]. On considère une probabilité $\mu$ sur $\mathbf{R}$ telle que $\int x^2\, d\mu(x) = \sigma^2$ et $\int x\, d\mu(x) = 0$. Si $\hat{\mathbf{R}}$ est l'ensemble des caractères $\{e_\lambda(x) = e^{i\lambda x}, \lambda \in \mathbf{R}\}$ et $F\mu(\lambda) = \int e_\lambda(x)\, d\mu(x)$, pour toute fonction continue à support compact $f$ sur G telle que $Ff(\lambda) = \int e_\lambda(x) f(x)\, dx$ est $d\lambda$ intégrable, la formule d'inversion de Fourier nous donne :

$$\int_{\mathbf{R}} f\, d\mu^n = (\mu^n \star \check{f})(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\mathbf{R}}} F\mu(\lambda)^n\, Ff(-\lambda)\, d\lambda,$$

si $\check{f}(x) = f(-x)$ pour tout réel $x$. La démonstration du théorème local se décompose en deux étapes.

*Étape* 1 : Si pour simplifier on suppose que $\mu$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, pour $\varepsilon>0$, $\operatorname{Sup}\{|\mathrm{F}\mu(\lambda)|, |\lambda|>\varepsilon\}$ est strictement inférieur à un (lemme de Riemann-Lebesgue) et :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_{\mathbf{R}} f\,d\mu^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\int_{|\lambda|<\varepsilon}\mathrm{F}\mu(\lambda)^n\,\mathrm{F}f(-\lambda)\,d\lambda. \tag{1}$$

*Étape* 2 : Au voisinage de l'origine ($\lambda=0$), $\mathrm{F}\mu(\lambda)=1-(\sigma^2\lambda^2/2)+o(\lambda^2)$ et après le changement de variable $\lambda\to\lambda/\sqrt{n}$, en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\int_{\mathbf{R}} f\,d\mu^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|\lambda|<\varepsilon\sqrt{n}}\mathrm{F}\mu\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^n\mathrm{F}f\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)d\lambda \tag{2}$$

$$=[2\pi\sigma^2]^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que $\sqrt{n}\,\mu^n$, $n\in\mathbf{N}$, converge vaguement vers $dx/\sigma\sqrt{2\pi}$.

Nous allons montrer qu'essentiellement ce type de démonstration s'étend à certains groupes localement compacts G possédant un sous-groupe compact K tel que (G, K) soit un couple de Guelfand, comme par exemple les groupes compacts, les groupes de Lie semi-simples connexes de centre fini et certaines extensions compactes de groupes nilpotents. Notons que contrairement à [4] nous ne ferons aucune hypothèse d'invariance de la probabilité considérée sous l'action de K.

L'égalité (1) montre que si $\mathrm{G}=\mathbf{R}$ et si $\mu$ est centrée le théorème local ne dépend que de la transformée de Fourier de $\mu$ au voisinage de l'origine dans $\hat{\mathbf{R}}$ [ceci n'est plus vrai lorsque $\mu$ n'est pas centrée car alors pour tout compact C de $\mathbf{R}$, $\mu^n(\mathrm{C})$ décroît exponentiellement vite vers zéro]. Lorsque G n'est pas commutatif une partie $\hat{\mathrm{G}}_r$, appelée dual réduit, de l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G « remplace » $\hat{\mathbf{R}}$. Au paragraphe I nous définissons, par analogie avec le cas où G égal $\mathbf{R}$, une « origine » dans $\hat{\mathrm{G}}_r$ et montrons comment la formule de Plancherel sphérique permet de ramener la démonstration du théorème local pour certaines probabilités $\mu$ sur G (pas nécessairement invariantes sous l'action de K) à l'étude d'opérateurs $\mathrm{T}_\mu$ où T est un élément de $\hat{\mathrm{G}}_r$ dans un voisinage de cette origine. C'est ce qui correspond à l'étape 1 lorsque $\mathrm{G}=\mathbf{R}$.

Nous appliquons ensuite ces résultats à deux classes de groupes pour y montrer le théorème local par un raisonnement s'apparentant à celui de l'étape 2 lorsque G est égal à $\mathbf{R}$.

Au paragraphe II nous étudions en détail le cas des groupes de Lie semi-simples connexes de centre fini. Le résultat principal est le théorème 2.3.1 dont un cas particulier est le théorème local suivant :

« Soit $d$ le rang (réel) du groupe semi-simple G et $p$ le nombre de racines positives indivisibles associées à ce groupe. Si $\mu$ est une probabilité irréductible sur G possédant une densité tendant assez vite vers 0 à l'infini et $\sigma(\mu)$ est le rayon spectral de l'opérateur associé à $\mu$ dans la représentation régulière de G, alors la suite $\{n^{(2p+d)/2}\mu^n, n \in \mathbb{N}\}$ converge vaguement vers une mesure de Radon non nulle lorsque $n$ tend vers l'infini. »

Nous précisons aussi des résultats de [3] concernant les fonctions de concentration. L'étude de $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{R})$ permet de cerner le rôle des différentes hypothèses introduites sur $\mu$. Nous terminons ce paragraphe en démontrant que si $G = KAN$ est une décomposition d'Iwasawa du groupe semi-simple G, les projections de $\mu^n$ sur K, A et N satisfont aussi à un théorème local. Nous utilisons pour cela la même technique que précédemment et un résultat de Raugi [15].

Dans le troisième paragraphe nous étudions certains groupes moyennables à croissance polynomiale du type $G = N \times_\sigma K$ où K est un groupe compact opérant sur le groupe nilpotent N de telle sorte que (G, K) soit un couple de Guelfand (en l'occurence les groupes MN associés à un groupe semi-simple de rang un). Un exemple de tel groupe est le groupe diamant, produit semi-direct du groupe de Heisenberg de dimension trois et du groupe SO(2). On démontre que si $\mu$ est une probabilité centrée étalée sur G possédant un moment d'ordre deux et si le degré de croissance de G est égal à $d$ alors (théorème local 3.4) la suite $\{n^{d/2}\mu^n, n \in \mathbb{N}\}$ converge vaguement vers une mesure de Haar non nulle.

On peut traiter de la même façon tous les produits semi-directs $A \times_\sigma K$ où A est un groupe abélien à génération compacte et retrouver simplement certains résultats de [1].

## I. — Généralités sur les couples de Guelfand.

1.1. NOTATIONS. — Soit G un groupe localement compact à base dénombrable, (l. c. d.), $C_c(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G et $C_c^+(G)$ le cône des fonctions positives ou nulles. Si $m$ est une mesure de Haar à gauche sur G et $L^2(G)$ l'espace des classes de fonctions sur G de carré $m$-intégrable, notons $\{L_g, g \in G\}$ la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$ définie par, si $f \in L^2(G)$, $x \in G$, $L_g f(x) = f(g^{-1}x)$. Si $\mu$ est une probabilité sur G nous notons $\sigma(\mu)$ le rayon spectral de l'opérateur $L_\mu = \int L_g \, d\mu(g)$.

On dit que la probabilité $\mu$ sur G est :

— *adaptée*, si Supp $\mu$ n'est pas contenu dans un sous-groupe propre fermé de G;

— *apériodique*, si $\mu$ est adaptée et si Supp $\mu$ n'est pas contenu dans une classe latérale d'un sous-groupe fermé propre distingué de G;

— *irréductible*, si le semi-groupe fermé engendré par Supp $\mu$ est égal à G;

— *étalée*, si $\mu$ possède une puissance de convolution qui n'est pas étrangère à la mesure de Haar $m$;

— *très étalée*, si $\mu$ possède une puissance de convolution $\mu^n$ dont la partie singulière $\nu$ par rapport à $m$ vérifie : $\sigma(\nu) < \sigma(\mu)^n$.

Rappelons que si G est moyennable (resp. non moyennable) $\sigma(\mu)$ est égal à un (resp. strictement inférieur à un) pour toute probabilité $\mu$ sur G adaptée [6]. Il est clair que sur les groupes moyennables les notions étalées et très étalées coïncident, mais nous verrons par un exemple que ce n'est pas toujours le cas si G n'est pas moyennable. Remarquons que si G est connexe toute probabilité étalée est apériodique.

Nous utiliserons plusieurs fois le lemme suivant de Guivarc'h [11] :

LEMME 1.1.1. — *Si* H *est un sous-groupe fermé moyennable d'un groupe localement compact* G, *pour toute probabilité* $\mu$ *sur* G, *la norme de* $L_\mu$ *est égale à la norme de l'opérateur associé à* $\mu$ *dans la représentation quasi régulière de* G *dans* $L^2(G/H)$.

1.2. COUPLES DE GUELFAND.

(1.2.1) Rappelons les résultats de la théorie des couples de Guelfand dont nous aurons besoin ([7], [19]). Si K est un sous-groupe compact d'un groupe unimodulaire G, l. c. d., on dit que (G, K) est un couple de Guelfand si l'algèbre $L^1(G;K)$ des fonctions $f$ intégrables sur G bi-invariantes par K [i. e. $f(kgk')=f(g); k, k' \in K, g \in G$] est commutative. Par exemple si G est compact, et K = G, ou si G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G ou si G est de la forme $A \times_\sigma K$ où A est abélien, (G, K) est un couple de Guelfand. Si $\hat{G}$ est l'ensemble des (classes de) représentations unitaires irréductibles de G, (G, K) est un couple de Guelfand si et seulement si :

« Pour toute représentation T de $\hat{G}$, opérant sur l'espace de Hilbert $H_T$, $K_T = \{ v \in H_T, T_k v = v, \forall k \in K \}$ est de dimension 1 ou 0. »

(1.2.2) Supposons alors que (G, K) soit un couple de Guelfand et notons $\hat{Z}$ le sous-ensemble de $\hat{G}$ formé des représentations T pour lesquelles $K_T$ est de dimension 1. Si $m_K$ est la mesure de Haar normalisée de K, $T_{m_K} = \int_K T_k \, dm_K(k)$ est un projecteur orthogonal sur $K_T$. Choisissons un vecteur unitaire $u_T$ de $K_T$ et posons :

$$\varphi_T(g) = \langle T_g u_T, u_T \rangle, \qquad g \in G.$$

On obtient ainsi l'ensemble des fonctions sphériques définies positives sur G prenant la valeur 1 en l'élément neutre.

Si $\hat{G}_r$ est le dual réduit de G, que l'on peut caractériser comme le sous-ensemble de $\hat{G}$ formé des représentations T vérifiant $\| T_\nu \| \leqq \| L_\nu \|$ pour toute mesure bornée $\nu$ sur G, posons $\hat{Z}_r = \hat{G}_r \cap \hat{Z}$. On sait qu'il existe une topologie sur $\hat{G}$, appelée topologie de Fell, pour laquelle $\hat{G}_r$ est fermé. $G_r$ est un sous-ensemble ouvert dans $\hat{G}_r$, localement compact métrisable pour la topologie induite. Nous n'aurons besoin que du résultat suivant : une suite $T_n$, $n \in \mathbf{N}$, de $\hat{Z}_r$ converge vers T dans $\hat{Z}_r$ si et seulement si $\varphi_{T_n}$ converge vers $\varphi_T$ uniformément sur les parties compactes de G.

(1.2.3) Si $f$ est un élément de $L^1(G;K)$ considérons l'application $Ff : \hat{Z}_r \to \mathbf{C}$ définie par $Ff(T) = \int_G \varphi_T(g) f(g) \, dm(g)$. On a si $f, f' \in L^1(G;K)$ et $T \in \hat{Z}_r$ :

— $F(f \star f')(T) = Ff(T) \, Ff'(T)$;

— $| Ff(T) | = \| T_f u_T \| = \| T_f \|$;

— $Ff(T)$ est une fonction continue sur $\hat{Z}_r$ qui tend vers 0 quand T tend vers l'infini (lemme de Riemann Lebesgue).

La formule de Plancherel pour la transformée de Fourier sphérique F s'énonce ainsi :

« *Il existe une unique mesure de Radon* $\gamma$ *sur* $\hat{Z}_r$ *telle que, si f est une fonction continue de* $L^1(G;K)$ *dont la transformée* $Ff$ *est* $d\gamma$ *intégrable :*

$$f(e)=\int_{\hat{Z}_r} Ff(T)\,d\gamma(T).$$

*De plus* F *se prolonge en une isométrie de* $L^2(G;K)$ *sur* $L^2(\hat{Z}_r, \gamma)$. »

(1.2.4) Rappelons enfin que si G est moyennable $\hat{G}$ est égal à $\hat{G}_r$ mais que si G n'est pas moyennable la représentation triviale de G (définie par $T_x\, v=v, \forall x\in G$) est un élément de $\hat{G}$ qui n'est pas dans $\hat{G}_r$ [9].

1.3. ORIGINE DANS LE DUAL RÉDUIT. — Considérons un couple de Guelfand (G, K). Dans le dual $\hat{\mathbf{R}}$ de $\mathbf{R}$ (égal au dual réduit) l'origine peut être caractérisée comme le seul point où la transformée de Fourier d'une probabilité étalée est égale à un [c'est-à-dire à $\sigma(\mu)$] et pour tout $\varepsilon>0$, $\sup\{|F\mu(\lambda)|^n, \lambda>\varepsilon\}$ tend vers 0 exponentiellement vite quand $n$ tend vers l'infini. Par analogie nous poserons :

DÉFINITION 1.3.1. — *On dit qu'une représentation* $T^0$ *de* $\hat{G}_r$ *est une origine de* $\hat{G}_r$ *si pour toute probabilité* $\mu$ *apériodique irréductible très étalée sur* G,

(*a*) *le rayon spectral de* $T^0_\mu$ *est égal à* $\sigma(\mu)$;

(*b*) *pour tout voisinage* V *de* $T^0$ *dans* $\hat{G}_r$ (*muni de la topologie de Fell*) *il existe un réel* $\rho$, $0<\rho<1$, *tel que pour tout entier n assez grand :*

$$\|T_{\mu^n}\|\leqq\rho^n\,\sigma(\mu)^n,\qquad T\in\hat{G}_r,\quad T\notin V.$$

*Remarque.* — En prenant $\mu$ bi-invariante par K on voit que $T^0$ doit appartenir à $\hat{Z}_r$ et, cet espace étant séparé, que l'origine est unique lorsqu'elle existe.

Admettons pour l'instant le lemme suivant que nous démontrerons en (2.2.2).

LEMME 1.3.2. — *Soit* $\mu$ *une probabilité irréductible apériodique étalée sur un groupe* G, l. c. d. *Pour toute fonction f de* $C_c^+(G)$ *non nulle en l'élément neutre, il existe un entier r et un réel* $\alpha$, $\alpha>0$, *tels que* $\mu^r$ *majore* $\alpha f.m$ (*où* $f.m$ *est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Haar m*). *Si de plus* $\mu$ *est très étalée et* G *connexe on peut supposer que* $\sigma(\mu^r-\alpha f.m)$ *est strictement inférieur à* $\sigma(\mu)^r$.

*Remarque.* — On déduit de la première partie du lemme que $\sigma(\mu)$ est non nul.

PROPOSITION 1.3.3. — *Si* (G, K) *est un couple de Guelfand et si* G *est un groupe moyennable ou un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini,* $\hat{G}_r$ *possède une origine* (*égale à la représentation triviale dans le premier cas*).

*Démonstration.* — Considérons une fonction $f$ de $C_c^+(G)$, bi-invariante par K, non nulle en l'élément neutre et d'intégrale égale à un. D'après le lemme précédent il existe un entier $r$, un réel $\alpha>0$ et une mesure bornée $\beta$ positive tels que $\mu^r=\alpha f.m+\beta$ et $\sigma(\beta)<\sigma(\mu)^r$ (cette dernière condition est évidente sur les groupes moyennables). Si $t$ est un réel de ]0, 1[ tel que pour tout $n$ assez grand $\| L_{\beta^n} \| \leqq t^n \| L_{\mu^{rn}} \|$, pour toute représentation T de $\hat{G}_r$ n'appartenant pas à $\hat{Z}_r$ :

$$\| T_{\mu^{rn}} \| \leqq \| T_{\beta^n} \| \leqq \| L_{\beta^n} \| \leqq t^n \| L_{\mu^{rn}} \|.$$

On en déduit facilement qu'il suffit de vérifier la condition ($b$) de la définition 1.3.1 pour les représentations de $\hat{Z}_r$.

Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, le corollaire 2.2.6 montrera donc que la représentation induite par la représentation triviale de MAN est l'origine de $\hat{G}_r$.

Supposons que G est moyennable. La représentation triviale $T^0$ de G vérifie la condition ($a$) de la définition 1.3.1. Pour montrer le ($b$) considérons la fonction $g = f \star \mu \star f$. C'est une densité de probabilité bi-invariante par K et il existe un réel $\lambda$, $0 < \lambda \leqq 1$ et une probabilité $\nu$ tels que $\mu^{3r} = \lambda\, g.m + (1-\lambda)\, \nu$. Pour toute représentation T de $\hat{Z}$ on a :

$$\| T_{\mu^{3r}} \| \leqq \lambda \| T_{g.m} \| + (1-\lambda) \| T_\nu \| \leqq \lambda \, | F g(T) | + (1-\lambda).$$

Il suffit de montrer que pour tout voisinage V de $T^0$ dans $\hat{Z}$ :

$$\operatorname*{Sup}_{T \notin V} | F g(T) | < 1.$$

Si ce n'est pas le cas, à cause du lemme de Riemann Lebesgue (1.2.3) il existe un élément T de $\hat{Z}$, différent de $T^0$ pour lequel $| F g(T) | = 1$. Alors, pour tout entier $n$ :

$$\left| \int_G \varphi_T(x)\, g^{*n}(x)\, dm(x) \right| = | F g(T) |^n = 1.$$

Puisque $\varphi_T$ est une fonction continue dont le module est inférieur ou égal à un et que la réunion des supports de $g^{*n}$ est dense dans G ceci entraîne que $\varphi_T$ est identiquement égale à un, ce qui n'est possible que si T est la représentation triviale.

1.4. Théorème local. Étape 1. — Comme nous l'avons dit dans l'introduction nous voulons montrer que grâce à la transformée de Fourier sphérique, le théorème local est déterminé par le comportement à l'origine des opérateurs $T_\mu$. C'est exactement ce que nous dit la proposition suivante malgré son aspect technique. Elle nous indique aussi comment traiter les fonctions de concentration ([2], [3]) au ($a$). Comme nous l'avons déjà noté l'affirmation précédente n'est vraie sur **R** que lorsqu'on cherche un théorème local avec $a_n$ croissant polynomialement vite (i. e. pour les probabilités centrées), c'est ce qui explique la condition $\lim\limits_{n \to \infty} a_n / a_{n+1} = \sigma(\mu)$.

Aux paragraphes suivants nous utiliserons cette proposition pour montrer le théorème local sur les groupes semi-simples et sur certaines extensions compactes de groupes nilpotents.

Nous notons $M_b(G)$ l'ensemble des mesures bornées sur G et si $\nu \in M_b(G)$, $\check{\nu}$ est la mesure définie par $\int f\, d\check{\nu} = \int \check{f}\, d\nu$ où $\check{f}(x) = f(x^{-1})$.

PROPOSITION 1.4.1. — *Soit* (G, K) *un couple de Guelfand tel que* $\hat{G}_r$ *possède une origine* $T^0$, $\mu$ *une probabilité apériodique très étalée irréductible sur* G *et* $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ *une suite de réels positifs telle que* $\lim_{n \to +\infty} a_n/a_{n+1} = \sigma(\mu)$.

(*a*) *Supposons qu'il existe un voisinage* V *de* $T^0$ *dans* $\hat{Z}_r$ *et une fonction* $g$ *de* $C_c^+(G)$, *bi-invariante par* K, *non nulle en* $e$, *dont la transformée* $F\,g(T)$, $T \in \hat{Z}_r$, *soit* $d\gamma$ *intégrable vérifiant :*

(1) « *Il existe un réel* $\alpha > 0$ *tel que pour tout entier* $n$ *et toutes mesures bornées* $\nu_1$ *et* $\nu_2$ *sur* G :

$$\left| a_n \int_V \langle T_{\nu_1} T_{\mu^n} T_{\nu_2} u_T, T_g u_T \rangle \, d\gamma(T) \right| \leq \alpha \| L_{\nu_1} \| . \| L_{\nu_2} \|. \text{ »}$$

*Alors pour tout compact* C *de* G *il existe un réel* $c > 0$ *tel que :*

« *Pour tout entier* $n$, *toutes mesures bornées* $\nu_1$ *et* $\nu_2$ *sur* G :

$$| a_n (\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(C) | \leq c \| L_{\nu_1} \| . \| L_{\nu_2} \|. \text{ »}$$

(*b*) *Si de plus* G *est connexe ou moyennable et* $m_\mu$ *est une mesure de Radon sur* G *vérifiant* $m_\mu \star \mu = \sigma(\mu)\, m_\mu$, *si il existe un voisinage* V *et une fonction* $g$ *comme au-dessus tels que* (1) *est vrai et :*

(2) « *Pour toutes mesures bornées* $\nu_1$ *et* $\nu_2$ *sur* G :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \int_V \langle T_{\nu_1} T_{\mu^n} T_{\nu_2} u_T, \quad T_g u_T \rangle \, d\gamma(T) = m_\mu(\check{\nu}_1 \star g \star \check{\nu}_2). \text{ »}$$

*Alors la suite de mesures* $a_n \mu^n$, $n \in \mathbf{N}$, *converge vaguement vers* $m_\mu$.

*Démonstration.* — (*a*) Supposons que (1) est vérifié. La fonction indicatrice du compact C étant majorée par une combinaison linéaire de translatées de la fonction $g$, le (*a*) sera établi si on montre qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\left| a_n \int_G g(x) \, d(\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(x) \right| \leq c \| L_{\nu_1} \| . \| L_{\nu_2} \|; \qquad n \in \mathbf{N}, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbf{M}_b(G).$$

La fonction $f_n = m_K \star \check{g} \star \nu_1 \star \mu^n \star \nu_2 \star m_K$ est continue intégrable, bi-invariante par K et sa transformée de Fourier $F f_n$ vérifie, si $T \in \hat{Z}_r$ :

$$| F f_n(T) | = | \langle T_{\nu_1} T_{\mu^n} T_{\nu_2} u_T, T_g u_T \rangle | \leq \| T_{\nu_1} \| . \| T_{\nu_2} \| . \| T_g \| \leq \| L_{\nu_1} \| . \| L_{\nu_2} \| . | F g(T) |$$

(*voir* 1.2.3). Elle est en particulier $d\gamma$ intégrable et par la formule de Plancherel :

$$\int_G g(x) \, d(\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(x) = f_n(e) = \int_{\hat{Z}_r} F f_n(T) \, d\gamma(T).$$

Cette expression est majorée par :

$$\left|\int_V \langle T_{\nu_1} T_{\mu^n} T_{\nu_2} u_T, T_g u_T\rangle\, d\gamma(T)\right| + \operatorname*{Sup}_{T\notin V} \| T_{\mu^n}\| . \| L_{\nu_1}\| . \| L_{\nu_2}\| \int_{V^c} |F g(T)|\, d\gamma(T),$$

d'où, grâce à (1), si $c_1 = \operatorname{Sup}\left(\alpha, \int |F g(T)|\, d\gamma(T)\right)$ :

$$\left| a_n \int_G g(x)\, d(\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(x)\right| \leqq c_1 \| L_{\nu_1}\| . \| L_{\nu_2}\| \left\{ 1 + a_n \operatorname*{Sup}_{T\notin V} \| T_{\mu^n}\| \right\}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/a_{n+1} = \sigma(\mu)$ et d'après le (*b*) de la définition de l'origine 1.3.1, $a_n \operatorname*{Sup}\limits_{T\notin V} \| T_{\mu^n}\|$ est borné et on obtient l'inégalité voulue.

(*b*) Remarquons d'abord que si $\varphi \in C_c(G)$ et $\nu_1, \nu_2 \in M_b(G)$ :

$$\int_G \varphi(x)\, d(\mu^n \star \nu_1 \star \check{g}.m \star \nu_2)(x) = (\mu^n \star \nu_1 \star \check{g}.m \star \nu_2 \star \check{\varphi})(e)$$

$$= (m_K \star \check{g}.m \star \nu_2 \star \check{\varphi} \star \mu^n \star \nu_1 \star m_K)(e) = \int_{\hat{Z}_r} \langle T_{\nu_2} T_{\check{\varphi}} T_{\mu^n} T_{\nu_1} u_T, T_g u_T\rangle\, d\gamma(T),$$

d'où en utilisant (2) et les mêmes majorations qu'au-dessus :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \int_G \varphi(x)\, d(\mu^n \star \nu_1 \star \check{g}.m \star \nu_2)(x) = m_\mu(\varphi \star \check{\nu}_2 \star g \star \check{\nu}_1). \tag{3}$$

D'après le lemme 1.3.2 appliqué à la fonction $\check{g}$ il existe un multiple non nul $f$ de $\check{g}$, un entier $r$ et une mesure bornée $\beta$ tels que $\mu^r = f.m + \beta$ et $\sigma(\beta) < \sigma(\mu)^r$. Pour tout entier $p$ :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \int \varphi\, d\mu^n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+pr} \int \varphi\, d\mu^{n+pr}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a_{n+pr} \int \varphi\, d(\mu^n \star (\mu^{pr} - \beta^p)) + \lim_{n\to+\infty} a_{n+pr} \int \varphi\, d(\mu^n \star \beta^p).$$

Le premier terme de cette somme se calcule facilement. En effet $\mu^{pr} - \beta^p$ est une somme finie de mesures de la forme $\nu_1 \star f.m \star \nu_2$ proportionnelles à $\nu_1 \star \check{g}.m \star \nu_2$ donc à l'aide de (3) et du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+pr}(1/a_n) = \sigma(\mu)^{-pr}$ on obtient qu'il est égal à :

$$\sigma(\mu)^{-pr} m_\mu(\varphi \star (\check{\mu}^{pr} - \check{\beta}^p)) = \sigma(\mu)^{-pr} [m_\mu(\varphi \star \check{\mu}^{pr}) - m_\mu(\varphi \star \check{\beta}^p)],$$

soit, puisque $m_\mu \star \mu = \sigma(\mu)\, m_\mu$, à :

$$\int \varphi\, dm_\mu - \sigma(\mu)^{-pr} m_\mu(\varphi \star \check{\beta}^p).$$

On a donc :

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|a_n\int\varphi\,d\mu^n-\int\varphi\,dm_\mu\right|\leqq\sigma(\mu)^{-pr}\,m_\mu(\varphi\star\check{\beta}^p)+\varlimsup a_{n+pr}\int\varphi\,d(\mu^n\star\beta^p).$$

Si $\nu$ est une mesure bornée positive telle que $g\star\nu$ majore $\varphi$ on a :

$$m_\mu(\varphi\star\check{\beta}^p)\leqq m_\mu(g\star\nu\star\check{\beta}^p)\leqq\varlimsup_{n\to+\infty}\ a_n\int(g\star\nu\star\check{\beta}^p)\,d\mu^n,$$

il existe donc, d'après $(a)$ une constante $c$ indépendante de $p$ vérifiant :

$$\left|\sigma(\mu)^{-pr}\,m_\mu(\varphi\star\check{\beta}^p)+\varlimsup a_{n+pr}\int\varphi\,d(\mu^n\star\beta^p)\right|\leqq c\,\sigma(\mu)^{-pr}\,\|L_{\beta^p}\|$$

et :

$$\varlimsup\left|a_n\int\varphi\,d\mu^n-\int\varphi\,dm_\mu\right|\leqq c\,\sigma(\mu)^{-pr}\,\|L_{\beta^p}\|.$$

Cette relation étant vraie pour tout $p$ et le rayon spectral de l'opérateur $L_\beta$ étant strictement inférieur à $\sigma(\mu)^r$ ceci montre que $a_n\int\varphi\,d\mu^n$ tend vers $\int\varphi\,dm_\mu$.

## II. – Théorème local sur les groupes semi-simples.

### 2.1. Notations

(2.1.1) Dans cette partie G désignera toujours un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact (*voir* [12] pour le cas compact) dont on fixe une décomposition d'Iwasawa $G=KAN$. Rappelons les notations et les résultats exposés dans [19]. Si $\mathfrak{a}$ est l'algèbre de Lie de A et si l'élément $g$ de G s'écrit $g=kan$, $k\in K$, $a\in A$, $n\in N$, on désigne par $K(g)$ l'élément $k$ et par $H(g)$ l'élément de $\mathfrak{a}$ dont l'image par l'application exponentielle est égale à $a$. On a donc $g\in K(g)\{\exp H(a)\}N$. On note $\rho$ la demi-somme des racines positives comptées avec leur multiplicité.

Si M est le centralisateur de A dans K on note B l'espace homogène $K/M$. Nous identifions les fonctions sur B à des fonctions sur K invariantes à droite par M. En particulier si $dk$ (ou $m_K$) est la mesure de Haar normalisée sur K nous noterons $L^2(B)$ l'espace des classes de fonctions sur K invariantes à droite par M, de carré $m_K$ intégrable muni du produit scalaire :

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_K\varphi(k)\overline{\psi(k)}\,dk;\qquad \varphi,\psi\in L^2(B).$$

Si $\lambda$ est un élément du dual (réel) $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$, soit $\chi_\lambda$ le caractère de MAN défini par $\chi_\lambda(\mathrm{man})=e^{i\lambda H(a)}$. Une réalisation de la représentation unitaire de G, $T^\lambda=\mathrm{Ind}_{MAN}^{G}\chi_\lambda$, induite à G par $\chi_\lambda$ est la suivante :

Pour tout $g$ de G, $T_g^\lambda$ est l'opérateur sur $L^2(B)$ défini par :

$$T_g^\lambda\varphi(k)=e^{-(i\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}\,\varphi(K(g^{-1}k));\qquad k\in K,\quad \varphi\in L^2(B).$$

Si $f$ est une fonction continue à support compact sur G, en utilisant le fait qu'avec les notations habituelles la mesure de Haar $dm$ vérifie :

$$dm(g)=e^{2\rho\{\mathrm{H}(a)\}}\,dk\,da\,dn,$$

on a, pour tout $k_0$ de K :

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_f^\lambda\,\varphi(k_0)&=\int_{\mathrm{G}} e^{-(i\lambda+\rho)\mathrm{H}(g^{-1}k_0)}\,\varphi(\mathrm{K}(g^{-1}k_0)f(g)\,dm(g)\\&=\int_{\mathrm{G}} e^{-(i\lambda+\rho)\mathrm{H}(g)}\,\varphi(\mathrm{K}(g))f(k_0g^{-1})\,dm(g)\\&=\int_{\mathrm{G}}\left\{\int_{\mathrm{A}\times\mathrm{N}} e^{-(i\lambda-\rho)\mathrm{H}(a)}f(k_0n^{-1}a^{-1}k^{-1})\,da\,dn\right\}\varphi(k)\,dk.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathrm{T}_f^\lambda$ est un opérateur compact dont la norme, majorée par :

$$\int_{\mathrm{K}\times\mathrm{K}}\left|\int_{\mathrm{A}\times\mathrm{N}} e^{-(i\lambda-\rho)\mathrm{H}(a)}f(k_0n^{-1}a^{-1}k^{-1})\,da\,dn\right|^2 dk\,dk_0,$$

tend vers zéro quand $\lambda$ tend vers l'infini (par le lemme de Riemann Lebesgue classique). Par densité ces propriétés restent vraies pour toute fonction $f$ de $\mathrm{L}^1(\mathrm{G})$.

(2.1.2) Avec les notations de 1.2, (G, K) est un couple de Guelfand et $\hat{\mathrm{Z}}_r=\{\mathrm{T}^\lambda,\lambda\in\mathfrak{a}^*\}$. Les vecteurs de $\mathrm{L}^2(\mathrm{B})$ fixes sous l'action de $\mathrm{T}_k^\lambda$, $k\in\mathrm{K}$, sont les fonctions constantes. En particulier, on peut prendre $u_{\mathrm{T}^\lambda}\equiv 1$ et si on note $\varphi_\lambda$ la fonction $\varphi_{\mathrm{T}^\lambda}$ de 1.2.2 :

$$\varphi_\lambda(g)=\langle \mathrm{T}_g^\lambda 1,1\rangle=\int_{\mathrm{K}} e^{(i\lambda-\rho)\mathrm{H}(gk)}\,dk;\qquad g\in\mathrm{G}.$$

Fixons une norme $\|\ \|$ sur $\mathfrak{a}$ (et par dualité sur $\mathfrak{a}^*$). Si $\mu$ est une probabilité sur G, elle possède un moment d'ordre deux au sens de [11] si et seulement si :

$$\int_{\mathrm{G}}\operatorname*{Sup}_{k\in\mathrm{K}}\|\mathrm{H}(gk)\|^2\,d\mu(g)\quad\text{est fini.}$$

2.2. Étude des opérateurs $\mathrm{T}_\mu^\lambda$. — Nous allons d'une part montrer que $\mathrm{T}^0$ (c'est-à-dire $\mathrm{T}^\lambda$ avec $\lambda$ égal à l'élément nul de $\mathfrak{a}^*$) est l'origine de $\hat{\mathrm{G}}_r$, d'autre part étudier $\mathrm{T}_\mu^\lambda$ pour $\lambda$ proche de zéro. Nous verrons que le nombre qui remplace la transformée de Fourier d'une probabilité sur $\mathbf{R}$ en un point de $\hat{\mathbf{R}}$ est la valeur propre de plus grand module de $\mathrm{T}_\mu^\lambda$, au moins pour $\lambda$ petit.

Commençons par établir les propriétés de $\mathrm{T}_\mu^0$.

Proposition 2.2.1. — *Soit* $\mu$ *une probabilité irréductible très étalée sur* G, *alors :*

(*a*) *le rayon spectral de l'opérateur* $\mathrm{T}_\mu^0$ *est égal à* $\sigma(\mu)$;

(*b*) *l'opérateur* $\sigma(\mu)^{-1}\,\mathrm{T}_\mu^0$ *est quasi compact;*

(*c*) *les points du spectre de* $\mathrm{T}_\mu^0$ *différents de* $\sigma(\mu)$ *sont contenus dans une boule de* $\mathbb{C}$ *de centre* 0 *et de rayon strictement inférieur à* $\sigma(\mu)$;

($d$) $\sigma(\mu)$ *est un pôle d'ordre un de la résolvante de* $T^0_\mu$, *le noyau de* $T^0_\mu - \sigma(\mu)$ Id *est de dimension un et contient une fonction strictement positive p.p.;*

($e$) $\sigma(\mu)$ *est la seule valeur propre de* $T^0_\mu$ *admettant un vecteur propre positif.*

*Démonstration.* — Remarquons que $T^0_\mu$ est l'opérateur associé à $\mu$ dans la représentation quasi régulière de G sur G/MAN. Puisque MAN est moyennable le ($a$) résulte du lemme 1.1.1. En utilisant le fait que $\mu$ est très étalée on voit qu'il existe un entier $r$, une fonction $f$ de $L^1(G)$ et une mesure bornée $\beta$ telles que :

$$\mu^r = f.m + \beta \qquad \text{et} \qquad \| T^0_\beta \| = \| L_\beta \| < \sigma(\mu)^r.$$

D'où :

$$\left\| \left[ \frac{1}{\sigma(\mu)} T^0_\mu \right]^r - \frac{1}{\sigma(\mu)^r} T^0_f \right\| \leqq \frac{1}{\sigma(\mu)^r} \| T^0_\beta \| < 1.$$

L'opérateur $T^0_f$ étant compact ceci montre le ($b$) puisque par définition un opérateur A est quasi compact si il existe un entier $n$ et un opérateur compact B tels que $\| A^n - B \| < 1$.

Si $\varphi$ est une fonction positive de $L^2(B)$, $T^0_\mu \varphi$ est aussi positive. L'opérateur $T^0_\mu$ est donc positif et on peut lui appliquer les résultats exposés par exemple dans [16]. Vérifions d'abord que pour tout entier $p$ non nul, $(T^0_\mu)^p$ est irréductible au sens de [16] c'est-à-dire que si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions positives de $L^2(B)$ non nulles, il existe un entier $n$ tel que $\langle (T^0_\mu)^{np} \varphi, \psi \rangle$ soit non nul. Supposons le contraire, alors $\langle T^0_g \varphi, \psi \rangle$ doit être nul sur l'adhérence de la réunion des supports de $\mu^{pn}$, $n \in \mathbf{N}$, c'est-à-dire partout puisque $\mu^p$ est irréductible (*voir* la démonstration 2.2.2). En particulier le produit de convolution sur K des fonctions $\varphi$ et $\psi$ est nul, ce qui est impossible si ces fonctions sont non nulles (on peut aussi utiliser l'irréductibilité de la représentation $T^0$). L'opérateur $\sigma(\mu)^{-1} T^0_\mu$ étant quasi compact le lemme 2, VII.8 de [8] montre qu'il existe un réel $\rho$, $0 < \rho < 1$, tel que la partie de son spectre qui n'est pas dans la boule de centre 0 et de rayon $\rho$ est finie et constituée de pôles de la résolvante. Cet opérateur et ses puissances étant irréductibles la proposition est une conséquence immédiate de ([16], V théorème 5.2 et son corollaire).

(2.2.2) *Démonstration du lemme* 1.3.2. — Reprenons les notations de ce lemme (en particulier G est un groupe l. c. d. quelconque). Montrons d'abord que pour tout entier $p$ non nul, $\mu^p$ est irréductible. Soit S l'adhérence de $\bigcup_{n>0} \operatorname{Supp} \mu^{np}$; pour tout $g$ de S, $g^{-1}$ est adhérent à $\bigcup_{n>0} \operatorname{Supp} \mu^n$ car $\mu$ est irréductible d'où $g^{-p}$ est dans S et $g^{-1} = g^{p-1} g^{-p}$ est aussi dans S. L'ensemble S est donc un sous-groupe fermé de G portant la probabilité apériodique $\mu^p$ (*cf.* [2]). Il doit être égal à G.

Il existe un entier $r$ et une fonction $g$ de $C^+_c(G)$ non nulle telle que $\mu^r$ majore $g.m$. Si $s$ est un entier tel que le support de $\mu^s$ rencontre $\{x \in G, g(x^{-1}) \neq 0\}$, la fonction $h = \mu^s \star g$ est continue non nulle en $e$ et $\mu^{r+s}$ majore $h.m$. Soit $p = r+s$ et $V_n = \{x \in G, (\mu^{pn} \star h)(x) \neq 0\}$. Puisque $\mu^{p(n+1)} \star h$ majore $\mu^{pn} \star h \star h$, la suite d'ouverts $V_n$ est croissante. Sa réunion est égale à G car pour tout $x$ de G, si le support de $\mu^{pn}$ rencontre $\{y \in G, h(y^{-1}x) \neq 0\}$, $x$

appartient à $V_n$. Il existe donc un entier $q$ tel que $\operatorname{Supp} f \subset V_q$. Si $a = \inf\{(\mu^{qn} \star h)(x), x \in \operatorname{Supp} f\}$ et $b = \operatorname{Sup}\{f(x), x \in G\}$ on obtient :

$$\mu^{(q+1)n} \geqq (\mu^{qn} \star h).m \geqq \frac{a}{b} f.m,$$

c'est-à-dire la première partie du lemme.

Supposons maintenant que $\mu$ est de plus très étalée et G connexe non moyennable (le résultat est trivial dans le cas moyennable). D'après [9], G possède un sous-groupe distingué fermé moyennable H tel que G/H soit un groupe de Lie semi-simple connexe de centre trivial. En utilisant le lemme 1.1.1 et les images des mesures $\mu^n$ et $\mu^n - \alpha f.m$ sur G/H on est ramené à montrer la deuxième partie du lemme lorsque G est semi-simple connexe de centre fini. Puisque $\mu$ est très étalée il existe un entier $r$, une fonction $l$ de $L^1(G)$ et une mesure positive $\nu$ tels que $\mu^r = l.m + \nu$ et $\sigma(\nu) < \sigma(\mu)^r$. En appliquant la première partie du lemme à $\mu^r$ il existe un entier $p$, $\alpha > 0$ et $\beta_1 \in M_b^+(G)$ tels que $\mu^{rp} = 2\alpha f.m + \beta_1$. Montrons que si $\beta = \alpha f.m + \beta_1$, $\sigma(\beta) < \sigma(\mu)^{rp}$ ce qui établira le lemme. Soit $\beta = h.m + \gamma$ la décomposition de Lebesgue de $\beta$ en partie absolument continue et étrangère par rapport à $m$. Si $\sigma(\mu)^{rp}$ est égal à $\sigma(\beta)$, $\beta$ est une mesure bornée positive irréductible très étalée [car puisque $\nu^p$ majore $\gamma$, $\sigma(\gamma) \leqq \sigma(\nu^p) < \sigma(\mu)^{rp} \leqq \sigma(\beta)$]. D'après la proposition précédente il existe donc une fonction $\varphi$ de $L^2(\beta)$ strictement positive p. p. telle que :

$$T^0_\beta \varphi = \sigma(\beta)\varphi = \sigma(\mu)^{rp}\varphi.$$

Alors $T^0_{\mu^{rp}}\varphi$ majore $\sigma(\mu)^{rp}\varphi$ et puisqu'il existe une fonction $\psi$ strictement positive telle que $T^0_\mu \psi = \sigma(\mu)\psi$, $T^0_{\mu^{rp}}\varphi = \sigma(\mu)^{rp}\varphi$. Ceci entraîne que $T^0_{f.m}\varphi$ est nul ce qui est absurde puisque $\varphi$ est strictement positive.

*Remarque.* — On déduit immédiatement de ce lemme que si $\mu$ est une probabilité apériodique étalée sur un groupe compact la norme de la variation totale de $\mu^n - m$ tend vers zéro exponentiellement vite.

COROLLAIRE 2.2.3. — *Si* $\mu$ *est une probabilité irréductible très étalée sur le groupe semi-simple* G, *il existe un réel* $\delta$, $0 < \delta < \sigma(\mu)$, *tel que pour tout* $\lambda$ *de* $\mathfrak{a}^*$ *assez proche de zéro :*

(*a*) *le spectre de l'opérateur* $T^\lambda_\mu$ *possède un unique élément* $s(\lambda)$ *de plus grand module,* $s(\lambda)$ *est une valeur propre associée à un sous-espace propre de dimension un;*

(*b*) *si* $E(\lambda)$ *est le projecteur associé à* $s(\lambda)$, $T^\lambda_\mu E(\lambda) = E(\lambda) T^\lambda_\mu = s(\lambda) E(\lambda)$ *et le rayon spectral de* $Q_\lambda = T^\lambda_\mu - s(\lambda) E(\lambda)$ *est inférieur à* $\delta$;

(*c*) $E(\lambda)$, $s(\lambda)$ *et* $Q_\lambda$ *dépendent continument de* $\lambda$.

*Démonstration.* — Puisque l'application qui à $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ associe $T^\lambda_\mu$ est continue pour la topologie de la norme, ceci est une conséquence de la proposition précédente et de la théorie des perturbations (*voir* par exemple [8]).

PROPOSITION 2.2.4. — *Si* $\mu$ *est une probabilité irréductible très étalée sur* G, *pour tout* $\lambda$ *de* $\mathfrak{a}^*$ *non nul, le rayon spectral de l'opérateur* $T^\lambda_\mu$ *est strictement inférieur à* $\sigma(\mu)$.

*Démonstration.* — En remplaçant au besoin $\mu$ par une de ses puissances de convolution on peut supposer que $\mu$ n'est pas étrangère à la mesure de Haar $m$. Si le rayon spectral de $T_\mu^\lambda$ est égal à $\sigma(\mu)$, puisque pour toute mesure positive $\nu$, bornée, $\| T_\nu^\lambda \| \leqq \| T_\nu^0 \| \leqq \| L_\nu \|$ l'opérateur $\sigma(\mu)^{-1} T_\mu^\lambda$ est quasi compact. En particulier il existe un complexe $\theta$ de module un et un élément $\varphi$ de $L^2(B)$ tel que $T_\mu^\lambda \varphi = \theta \sigma(\mu) \varphi$. Ceci entraîne que :

$$\sigma(\mu) | \varphi | \leqq | T_\mu^\lambda \varphi | \leqq T_\mu^0 | \varphi |,$$

d'où (*voir* démonstration 2.2.2) $T_\mu^0 | \varphi | = \sigma(\mu) | \varphi |$. Donc d'une part $\varphi(k)$ est non nul pour presque tout $k$ de K (proposition 2.2.1), d'autre part pour presque tout $k_0$ de K il existe un nombre complexe $\alpha(k_0)$ de module un tel que :

$$e^{-i\lambda\{H(x^{-1}k_0)\}} \varphi(K(x^{-1}k_0)) = \alpha(k_0) | \varphi(K(x^{-1}k_0)) |, \quad \mu \text{ p. p.}$$

Cette propriété est vraie sur un ensemble de $m$ mesure non nulle et par invariance de $m$ :

$$m\{ g \in G,\ e^{-i\lambda\{H(g)\}} \varphi(K(g)) = \alpha(k_0) | \varphi(K(g)) | \} \neq 0,$$

ce qui n'est possible que si $\lambda$ est nul car $m$ est équivalente à $dk\, da\, dn$.

Dans l'énoncé suivant nous utilisons les notations introduites au corollaire 2.2.3.

COROLLAIRE 2.2.5. — *Soit* $\mu$ *une probabilité très étalée irréductible sur* G. *Pour tout voisinage* V *assez petit de* 0 *dans* $\mathfrak{a}^*$, $\operatorname{Sup}_{\lambda \notin V} \sigma(\mu)^{-n} \| T_{\mu^n}^\lambda \|$ *et* $\operatorname{Sup}_{\lambda \in V} \sigma(\mu)^{-n} \| Q_\lambda^n \|$ *tendent vers zéro exponentiellement vite quand* $n$ *tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Examinons d'abord les opérateurs $T_{\mu^n}^\lambda$. A cause de l'analogue du lemme de Riemann Lebesgue que nous avons rappelé en 2.1.1, il suffit de montrer que si C est un compact de $\mathfrak{a}^*$ ne contenant pas 0, il existe un réel $\alpha$, $0<\alpha<1$, tel que pour tout entier $n$ assez grand et tout $\lambda$ de C, $\sigma(\mu)^{-n} \| T_{\mu^n}^\lambda \|$ soit inférieur à $\alpha^n$. D'après le corollaire 2.2.3, $(T_\mu^0)^n = s(0)^n E(0) + Q_0^n$ où $s(0) = \sigma(\mu)$ et $Q_0$ est de rayon spectral strictement inférieur à $\sigma(\mu)$. On en déduit que $b = \operatorname{Sup}_{n \in \mathbf{N}} \sigma(\mu)^{-n} \| (T_\mu^0)^n \|$ est fini.

Fixons un réel $a$, $0<a<1$. Pour tout $\lambda_0$ non nul la proposition précédente montre qu'il existe un entier $n$ tel que $\sigma(\mu)^{-n} \| T_{\mu^n}^{\lambda_0} \|$ est inférieur à $a/b$. Par continuité de $T_{\mu^n}^\lambda$ on peut trouver un voisinage $V(\lambda_0)$ de $\lambda_0$ sur lequel $\sigma(\mu)^{-n} \| T_{\mu^n}^\lambda \|$ reste inférieur à $a/b$ et alors, pour tout entier $p$ :

$$\sigma(\mu)^{-(n+p)} \| (T_\mu^\lambda)^{n+p} \| \leqq \frac{a}{b} \sigma(\mu)^{-p} \| T_{\mu^p}^\lambda \| \leqq \frac{a}{b} \sigma(\mu)^{-p} \| T_{\mu^p}^0 \| \leqq a.$$

Par compacité de C il existe donc un entier $n_0$ tel que, pour tout $\lambda$ de C :

$$\sigma(\mu)^{-n_0} \| (T_\mu^\lambda)^{n_0} \| \leqq a < 1$$

et on conclut alors facilement.

La majoration des opérateurs $Q_\lambda^n$ se fait d'une façon analogue en utilisant l'inégalité :

$$\sigma(\mu)^{-p} \| Q_\lambda^p \| \leqq \sigma(\mu)^{-p} \| T_{\mu^p}^\lambda - s(\lambda)^p E(\lambda) \| \leqq b + \| E(\lambda) \|.$$

La topologie sur $\hat{Z}_r$ s'identifiant à la topologie naturelle sur $\mathfrak{a}^*$ il est clair d'après ce corollaire que :

COROLLAIRE 2.2.6. — *L'origine de* $\hat{G}_r$ *est* $T^0$.

Pour étudier l'application $s$ définie au voisinage de 0 dans $\mathfrak{a}^*$ au corollaire 2.2.3 nous supposerons que $\mu$ possède un moment d'ordre deux (*voir* 2.1.2). Nous montrerons en 2.4 que contrairement à ce qui se passe par exemple sur **R**, cette hypothèse n'est pas toujours nécessaire.

PROPOSITION 2.2.7. — *Si* $\mu$ *est une probabilité très étalée irréductible sur* G *possédant un moment d'ordre deux, l'application* $s$ *est deux fois différentiable en zéro. Sa différentielle en ce point est nulle et sa différentielle seconde* $d^2 s(0)$ *est telle que* $-d^2 s(0)$ *définit une forme bilinéaire définie positive.*

*Démonstration.* — Il n'est pas difficile de voir que si $\mu$ possède un moment d'ordre 2, l'application qui à $\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, associe $T^\lambda_\mu$ est de classe $C^2$ (pour la norme d'opérateurs). La construction de $E(\lambda)$, $Q_\lambda$, $s(\lambda)$ (*voir* corollaire 2.2.3) par la théorie des perturbations montre que ces quantités dépendent de façon $C^2$ de $\lambda$, pour $\lambda$ assez petit.

Pour tout élément $w$ du groupe de Weyl et pour tout $\lambda$ de $\mathfrak{a}^*$ les représentations $T^\lambda$ et $T^{w\lambda}$ sont équivalentes [19]. Il existe donc un opérateur inversible A tel que $T^{w\lambda}_\mu = A T^\lambda_\mu A^{-1}$ et pour tous $\lambda$ assez petits $s(w\lambda) = s(\lambda)$, ce qui entraîne que $ds(0)$ est nul. Pour montrer que $-d^2 s(0)$ définit une forme bilinéaire définie positive, fixons un élément non nul $\lambda$ de $\mathfrak{a}^*$ et démontrons que la fonction $\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ définie au voisinage de 0 par $\xi(t) = s(t\lambda)$ a une dérivée seconde en zéro strictement négative. Soient $\varphi$ et $\varphi'$ deux fonctions de $L^2(B)$ vérifiant :

$$E(0)\varphi = \varphi, \qquad E(0)^* \varphi' = \varphi' \qquad \text{et} \qquad \langle \varphi, \varphi' \rangle = 1,$$

et notons, si $n \in \mathbf{N}$, $h_n(t) = \langle Q^n_{t\lambda} \varphi, \varphi' \rangle$. De la relation :

$$Q^n_{t\lambda} = [\mathrm{Id} - E(t\lambda)]\, Q^n_{t\lambda}\, [\mathrm{Id} - E(t\lambda)]$$

et du fait que $E(t\lambda)$ est une fonction $C^2$ de $t$ on déduit qu'il existe un réel $c$ tel que pour tout entier $n$ et $t$ assez petit :

$$|h_n(t)| = |\langle Q^n_{t\lambda}(\mathrm{Id} - E(t\lambda))\varphi, (\mathrm{Id} - E(t\lambda))^* \varphi' \rangle| \leqq c \| Q^n_{t\lambda} \| t^2$$

et par le corollaire 2.2.5, il existe $c' > 0$ tel que $\sigma(\mu)^{-n} |h_n(t)| \leqq c' t^2$ pour tout $n$. En particulier $\sigma(\mu)^{-n} h''_n(0)$ est borné en $n$.

Puisque $\xi(0) = \sigma(\mu)$ et $\xi'(0) = 0$ :

$$(1) \quad \frac{d^2}{dt^2} \{ \sigma(\mu)^{-n} \langle T^{t\lambda}_{\mu^n} \varphi, \varphi' \rangle \} (0)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \{ \sigma(\mu)^{-n} \xi(t)^n \langle E(t\lambda)\varphi, \varphi' \rangle + \sigma(\mu)^{-n} h_n(t) \} (0)$$

$$= n\sigma(\mu)^{-1} \xi''(0) + \frac{d^2}{dt^2} \langle E(t\lambda)\varphi, \varphi' \rangle (0) + \sigma(\mu)^{-n} h''_n(0).$$

La fonction $f_n(t)=\sigma(\mu)^{-n}\langle T_{\mu^n}^{t\lambda}\varphi, \varphi'\rangle$ est de type positif (car $\varphi$ et $\varphi'$ sont positives) et vérifie $f_n(0)=1$. C'est donc la transformée de Fourier d'une variable aléatoire $X_n$ définie sur un espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. D'après le corollaire 2.2.5, pour tout $t$ non nul, $f_n(t)$ tend vers zéro quand $n$ tend vers l'infini. Si $E(X_n)$ est l'espérance de $X_n$ on en déduit que $P(|X_n-E(X_n)|<x)$ tend vers zéro pour tout $x>0$ quand $n$ tend vers l'infini. En appliquant l'inégalité de Bienaymé Tchebitchev ceci entraîne que $-f_n''(0)=E(X_n^2)$ tend vers l'infini ce qui n'est possible que si $\xi''(0)$ est strictement négatif à cause de (1).

2.3. THÉORÈME LOCAL. — Rappelons d'abord la formule de Plancherel « sphérique » sur un groupe de Lie semi simple G connexe de centre fini non compact [19]. Soit $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ le système de racines (restreintes) positives associé à la décomposition d'Iwasawa $G=KAN$, écrit de telle sorte que pour un entier $p$, $\{\lambda_i, 1\leqq i\leqq p\}$ soit l'ensemble des racines indivisibles [c'est-à-dire que $(1/2)\lambda_i$ est une racine si et seulement si $i>p$]. Notons $m_{\lambda_i}$, $1\leqq i\leqq r$, la multiplicité de la racine $\lambda_i$ et B la fonction Béta. Pour toute forme linéaire complexe $\nu$ sur $\mathfrak{a}$ on pose :

$$I(\nu)=\left\{\prod_{i=1}^{p} B\left(\frac{m_{\lambda_i}}{2}, \frac{\langle \nu, \lambda_i\rangle}{\langle \lambda_i, \lambda_i\rangle}\right)\right\}\left\{\prod_{i=p+1}^{r} B\left(\frac{m_{\lambda_i}}{2}, \frac{m_{\lambda_{i/2}}}{4}+\frac{\langle \nu, \lambda_i\rangle}{\langle \lambda_i, \lambda_i\rangle}\right)\right\}$$

et $c(\nu)=I(i\nu)\{I(\rho)\}^{-1}$. Alors il existe une mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur $\mathfrak{a}^*$ vérifiant :

« Si $f$ est une fonction continue sur G de $L^1(G; K)$ telle que

$$Ff(\lambda)=\int_G \varphi_\lambda(g)f(g)\,dm(g)$$

est $|c(\lambda)|^{-2}d\lambda$ intégrable :

$$f(e)=\int_{\mathfrak{a}^*} Ff(\lambda)\,|c(\lambda)|^{-2}d\lambda. \text{ »}$$

Autrement dit si on identifie $\hat{Z}_r$ à $\mathfrak{a}^*$ la mesure $d\gamma$ introduite en 1.2.3 est égale à $|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda$.

Si $\mu$ est une probabilité irréductible très étalée sur G, soient $\varphi_0$ et $\varphi_1$ deux fonctions positives de $L^2(B)$ vérifiant :

$$T_\mu^0\varphi_0=\sigma(\mu)\varphi_0, \qquad (T_\mu^0)^*\varphi_1=\sigma(\mu)\varphi_1 \qquad \text{et} \qquad \langle \varphi_0, \varphi_1\rangle=1.$$

Nous noterons $m_\mu$ la mesure de Radon sur G admettant par rapport à la mesure de Haar $m$ la densité continue bornée strictement positive $f_\mu$ définie par :

$$f_\mu(g)=\int_K e^{-\rho\{H(gk)\}}\varphi_0(K(gk))\,\varphi_1(k)\,dk=\langle T_{g^{-1}}^0\varphi_0, \varphi_1\rangle, \quad \text{si } g\in G.$$

THÉORÈME 2.3.1. — *Soit* G *un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact,* $G=KAN$ *une décomposition d'Iwasawa de* G, *$d$ la dimension de $\mathfrak{a}$ et $p$ le nombre de racines positives indivisibles. Si $\mu$ est une probabilité très étalée irréductible sur* G *possédant un moment d'ordre deux;*

(*a*) (*Fonctions de concentration*). *Si* C *est un compact de* G *il existe une constante* $c$ *telle que pour toutes mesures bornées positives* $\nu_1$ *et* $\nu_2$ *sur* G *et tout entier* $n$ :

$$(\nu_1 \star \mu^n \star \nu_2)(C) \leqq cn^{-(2p+d)/2}\, \sigma(\mu)^n \,\| L_{\nu_1} \| . \| L_{\nu_2} \|.$$

(*b*) (*Théorème central limite local*). *Il existe une constante* $k$ (*déterminée dans la démonstration*) *telle que pour toute fonction* $f$ *continue à support compact sur* G, *la suite* $\sigma(\mu)^{-n} n^{(2p+d)/2} \int_G f\, d\mu^n$ *tend vers* $k \int f\, dm_\mu$ *quand* $n$ *tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que pour toute fonction $f$ de $C_c^+(G)$ :

$$\int_G f\, d(m_\mu \star \mu) = \int (f \star \check{\mu})\, dm_\mu = \langle \varphi_0, T_f^0 T_\mu^0 \varphi_1 \rangle = \sigma(\mu) \langle \varphi_0, T_f^0 \varphi_1 \rangle = \sigma(\mu) \int_G f\, dm_\mu,$$

d'où $m_\mu \star \mu = \sigma(\mu) m_\mu$ [de même $\mu \star m_\mu = \sigma(\mu) m_\mu$] et les hypothèses de la proposition 1.4.1 sont satisfaites. Au voisinage de 0 dans $\mathfrak{a}^*$, par la proposition 2.2.7 et le lemme 2 de [4], il existe un réel $c_G > 0$ tel que :

$$(1) \qquad s(0)^{-1} s(\lambda) = 1 + \frac{1}{2\sigma(\mu)} \langle d^2 s(0) \lambda, \lambda \rangle + o(\| \lambda \|^2),$$

$$(2) \qquad |c(\lambda)|^{-2} = c_G \prod_{i=1}^{p} |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2 + o\left( \prod_{i=1}^{p} |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2 \right).$$

En particulier il existe $\varepsilon > 0$, $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que si $\| \lambda \| \leqq \varepsilon$ :

$$(3) \qquad |s(0)^{-1} s(\lambda)| \leqq e^{-r_1 \| \lambda \|^2},$$

$$(4) \qquad |c(\lambda)|^{-2} \leqq r_2 \| \lambda \|^{2p}.$$

Choisissons $\varepsilon$ assez petit pour que la décomposition $T^\lambda = s(\lambda) E(\lambda) + Q_\lambda$ (corollaire 2.2.3) ait un sens sur $V = \{ \lambda \in \mathfrak{a}^*, \| \lambda \| \leqq \varepsilon \}$. D'après la proposition 1.4.1 il suffit pour établir le théorème d'étudier :

$$a_n \int_V \langle T_{\nu_1}^\lambda T_{\mu^n}^\lambda T_{\nu_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda, \qquad \text{si} \quad a_n = \sigma(\mu)^{-n} n^{(2p+d)/2},$$

où $g$ est une fonction de $C_c^+(G) \cap L^1(G; K)$ telle que F$g$ soit une fonction de $\lambda$, $|c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda$ intégrable et $\nu_1$, $\nu_2$ deux mesures positives bornées. Cette expression est égale à :

$$a_n \int_V s(\lambda)^n \langle T_{\nu_1}^\lambda E(\lambda) T_{\nu_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda + a_n \int_V \langle T_{\nu_1}^\lambda Q_\lambda^n T_{\nu_2}^\lambda 1, T_g^\lambda 1 \rangle |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda.$$

Le second terme est majoré par :

$$\| L_{\nu_1} \| . \| L_{\nu_2} \| a_n \int_V \| Q_\lambda^n \| . | Fg(\lambda) | . | c(\lambda) |^{-2}\, d\lambda$$

donc tend vers zéro uniformément en $\nu_1$ et $\nu_2$ quand $n$ tend vers l'infini par le corollaire 2.2.5. Utilisant (3) et (4) il est alors clair que l'on a bien la condition (1) de la proposition 1.4.1 ce qui montre le $a$.

D'autre part, avec le changement de variable $\lambda \to \lambda/\sqrt{n}$;

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \int_V \langle T^\lambda_{\nu_1} T^\lambda_{\mu^n} T^\lambda_{\nu_2} 1, T^\lambda_g 1 \rangle \, |c(\lambda)|^{-2} d\lambda$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{\sigma(\mu)^n} \int_{\|\lambda\| \leqq \varepsilon\sqrt{n}} s\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^n \left\langle T^{\lambda/\sqrt{n}}_{\nu_1} E\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) T^{\lambda/\sqrt{n}}_{\nu_2} 1, T^{\lambda/\sqrt{n}}_g 1 \right\rangle \left| c\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\right|^{-2} d\lambda,$$

or d'après (1) et (2), $\sigma(\mu)^{-n}\ s(\lambda/\sqrt{n})^n$ tend vers $\exp\{1/2\sigma(\mu)\langle d^2 s(0)\lambda, \lambda\rangle\}$ et $n^p |c(\lambda/\sqrt{n})|^{-2}$ tend vers $c_G \prod_{i=1}^{P} |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2$ quand $n$ tend vers l'infini. Utilisant les inégalités (3) et (4) pour appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient que la limite précédente est égale à :

$$k \langle T^0_{\nu_1} E(0) T^0_{\nu_2} 1, T^0_g 1 \rangle,$$

où :
$$k = c_G \int_{a^*} \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma(\mu)} \langle d^2 s(0)\lambda, \lambda \rangle \right\} \prod_{i=1}^{P} |\langle \lambda, \lambda_i \rangle|^2 d\lambda.$$

Puisque pour tout $\varphi$ de $L^2(B)$, $E(0)\varphi = \langle \varphi, \varphi_1 \rangle \varphi_0$ et $T^0_{m_K} \varphi = \langle \varphi, 1 \rangle 1$ :

$$m_\mu(\check{\nu}_1 \star g \star \check{\nu}_2) = \langle \varphi_0, T^0_{\check{\nu}_1} T^0_g T^0_{\check{\nu}_2} \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_0, T^0_{\check{\nu}_1} T^0_g T^0_{m_K} T^0_{\check{\nu}_2} \varphi_1 \rangle$$
$$= \langle \overline{T^0_{\check{\nu}_2} \varphi_1, 1} \rangle \langle \varphi_0, T^0_{\check{\nu}_1} T^0_g 1 \rangle = \langle \langle T^0_{\nu_2} 1, \varphi_1 \rangle \varphi_0, T^0_{\check{\nu}_1} T^0_g 1 \rangle$$
$$= \langle T^0_{\nu_1} E(0) T^0_{\nu_2} 1, T^0_g 1 \rangle.$$

Le (2) de la proposition 1.3.1 est donc vérifié et le théorème est montré.

Nous avons démontré dans [3] que si $\mu$ est une probabilité étalée sur un groupe connexe non compact G, l. c. d., pour tout compact C de G, il existe une constante $a$, $a>0$, telle que :

$$\sup_{x, y \in G} \mu^n(x C y) \leqq a n^{-1/2}.$$

Lorsque G n'est pas moyennable, cette quantité décroît exponentiellement et il est plus intéressant de majorer $\sup_{x, y \in G} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n(x C y)$. De même l'analogue de la théorie du renouvellement consiste en l'étude des limites vagues du noyau $\Gamma(x, .) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(\mu)^{-n} (\varepsilon_x \star \mu^n)(.)$ défini sur les boréliens de G quand $x$ tend vers l'infini. On a :

COROLLAIRE 2.3.2. — *Soit $\mu$ une probabilité irréductible très étalée possédant un moment d'ordre deux sur un groupe G connexe, l. c. d., non moyennable. Alors, pour tout compact C de G il existe une constante $a>0$ telle que pour tout entier $n$ :*

$$(1) \qquad \sup_{x, y \in G} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n(x C y) \leqq a n^{-3/2}$$

*et le noyau $\Gamma(x, .)$ tend vaguement vers zéro quand $x$ tend vers l'infini dans G.*

*Démonstration.* — Utilisons le même argument qu'en (2.2.2). Le groupe G possède un quotient par un sous-groupe moyennable H tel que G/H soit un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact. La projection $\nu$ de $\mu$ sur G/H vérifie les hypothèses du théorème 2.3.1 et $\sigma(\nu)=\sigma(\mu)$. Il suffit de montrer le corollaire pour $\nu$ et c'est alors une conséquence immédiate du théorème.

*Remarque.* — Nous verrons que l'inégalité (1) n'est plus vraie si on suppose seulement que $\mu$ est étalée.

2.4. Étude de SL (2, **R**). — Sur **R** l'hypothèse de moment d'ordre deux est nécessaire pour avoir le théorème local (avec $a_n=\sqrt{n}$). L'exemple des probabilités bi-invariantes par un sous-groupe compact maximal traité dans [4], montre qu'il n'est pas de même sur les groupes semi-simples. Dans ce paragraphe nous établissons que le théorème 2.3.1 reste vrai si G = SL (2, **R**) même si $\mu$ n'a pas de moment alors que les conditions « très étalée » et « irréductibles » sont indispensables.

Proposition 2.4.1. — *Si* G = SL (2, **R**) *les conclusions du théorème* 2.3.1 *sont vraies dès que* $\mu$ *est très étalée irréductible* (*donc sans hypothèse du moment*).

*Démonstration.* — Nous utilisons l'existence d'un prolongement analytique uniformément borné de la série de représentations $\{T^\lambda, \lambda\in\mathfrak{a}^*\}$, [17] : si on identifie $\mathfrak{a}^*$ à l'ensemble des réels de **C** il existe un voisinage V de 0 dans **C**, un espace de Hilbert H et pour tout $z$ de V une représentation continue $R^z$ de G dans H vérifiant :

(*a*) pour tout $g$ de G, l'application qui à $z\in V$ associe $R^z_g$ est analytique;

(*b*) $\sup_{g\in G}\|R^z_g\|$ est borné sur V;

(*c*) si $z$ est réel les représentations $R^z$ et $T^z$ sont unitairement équivalentes.

La famille d'opérateurs $R^z_\mu$, $z\in V$, est alors analytique et a les mêmes propriétés spectrales que $T^z_\mu$ lorsque $z$ est réel. On en déduit que l'application $s$ définie au corollaire 2.2.3 est analytique près de zéro. Nous avons déjà vu que $s(\lambda)=s(-\lambda)$ (car il existe un élément du groupe de Weyl opérant par symétrie) et puisque pour tout $\varphi$ de $L^2(B)$, $T^{-\lambda}_\mu\overline{\varphi}=\overline{T^\lambda_\mu\varphi}$, $\overline{s(\lambda)}=s(-\lambda)$ si $\lambda$ est proche de zéro. Il existe donc un réel non nul $\alpha$ et un entier $r$ tels que, au voisinage de 0 :

$$(1)\qquad s(\lambda)=s(0)-\alpha\lambda^{2r}+o(\lambda^{2r}).$$

D'après la proposition 2.2.4 $\alpha$ doit être positif. A l'aide de cette estimation on peut reprendre la démonstration du théorème 2.3.1 et l'on obtient que $\sigma(\mu)^{-n}n^{3/2r}\mu^n$ converge vaguement vers une mesure de Radon non nulle. Mais ceci n'est possible que si $r$ est égal à un car sinon la série $\sum_{n\geqq 0}\sigma(\mu)^{-n}\mu^n$ n'est pas une mesure de Radon ce qui contredit un résultat de [11]. Donc $r=1$ et (1) fournit l'estimation nécessaire à la démonstration du théorème 2.3.1.

*Remarque.* — Il est clair que cette proposition est vraie sur tous les groupes de rang un dont la série principale sphérique $T^\lambda$ admet un prolongement analytique uniformément borné.

Pour montrer que l'hypothèse d'irréductibilité est indispensable pour obtenir un théorème local il suffit de considérer l'exemple d'une probabilité $\mu$ sur SL $(2, \mathbf{R})$ portée par $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R}),\ \{a \geqq 2,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0\}\right\}$ car si C est un compact de G, pour $n$ assez grand $\mu^n$ (C) est nul. Donc pour toute suite $a_n$, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \mu^n$ tend vaguement vers zéro.

Le résultat suivant montre l'importance de la condition très étalée puisque sous cette hypothèse, sur SL $(2, \mathbf{R})$, le théorème local dit que $\sigma(\mu)^{-n} n^{3/2} \mu^n$ converge vaguement. Puisque, d'après [11], pour toute probabilité $\mu$ sur SL $(2, \mathbf{R})$, $\sum_{n \geqq 0} \sigma(\mu)^{-n} \mu^n(\mathrm{C})$ est fini si C est compact, la condition $r>1$ est maximale. Par contre on peut se demander si il n'existe pas des probabilités à support compact vérifiant la proposition.

PROPOSITION 2.4.2. — *Pour tout réel* $r$, $r>1$, *il existe une probabilité* $\mu$ *irréductible non étrangère à la mesure de Haar sur* SL $(2, \mathbf{R})$, *un compact* C *et un réel* $k>0$ *tels que pour tout entier* $n$ :

$$\sigma(\mu)^{-n} \mu^n(\mathrm{C}) \geqq k n^{-r}.$$

*Démonstration.* — Considérons la représentation A de SL $(2, \mathbf{R})$ à valeurs dans $L^2(\mathbf{R})$ donnée par, si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$, $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$ :

$$A_g \varphi(t) = |-bt+d|^{-1} \varphi\left(\frac{at-c}{-bt+d}\right).$$

C'est une représentation unitaire de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ équivalente à $T^0$ $\left(\text{correspondant à la réalisation sur } \overline{\mathrm{N}} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix},\ n \in \mathbf{R}\right\}\right)$ [19]. Dans cette équivalence à la fonction identiquement égale à 1 de $L^2(\mathrm{B})$ correspond la fonction $\xi(t) = \{\pi(1+t^2)\}^{-1/2}$ de $L^2(\mathbf{R})$. Si $m_{\mathrm{K}}$ est la mesure de Haar sur $\mathrm{K} = \mathrm{SO}(2)$ normalisée, $A_{m_{\mathrm{K}}}$ est donc la projection orthogonale sur le sous-espace de $L^2(\mathbf{R})$ engendré par $\xi$ et si $f$ est une fonction de $L^1(\mathrm{G}; \mathrm{K})$ :

$$A_f \varphi = \mathrm{F}f(0) \langle \varphi, \xi \rangle \xi, \qquad \varphi \in L^2(\mathbf{R}).$$

Fixons une fonction $f$ strictement positive de $L^1(\mathrm{G}; \mathrm{K})$ d'intégrale égale à un. Soit $\nu$ la probabilité sur SL $(2, \mathbf{R})$ portée par $\overline{\mathrm{N}}$ vérifiant, pour une fonction $h$ de $L^1(\mathbf{R})$, positive d'intégrale 1 :

$$\nu\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix},\ a<n<b\right\} = \int_a^b h(x)\,dx; \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

• Nous allons voir que pour $f$ et $h$ bien choisis, $\mu = 1/2(f.m+\nu)$ (où $m$ est la mesure de Haar fixée) vérifie la conclusion de la proposition.

Notons $*$ le produit de convolution sur $\mathbf{R}$ et $\hat{}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$ prolongeant l'application qui à $\varphi$ de $L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$ associe :

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{itx} \varphi(x)\, dx.$$

On a, si $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$;

$$A_\nu \varphi(t) = \int_G A_g \varphi(t)\, d\nu(g) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(t-x) h(x)\, dx = (\varphi * h)(t).$$

Le rayon spectral de l'opérateur $A_\nu$ est donc égal à un.

Supposons que $\sigma(\mu)$ est strictement supérieur à $1/2$, c'est-à-dire que $\mu$ est très étalée. La représentation A de SL $(2, \mathbf{R})$ étant équivalente à $T^0$, la proposition 2.2.1 montre qu'il existe un vecteur $\psi$ de $L^2(\mathbf{R})$ non nul tel que $A_\mu \psi = \sigma(\mu) \psi$. Si on note $\sigma$ le réel $\sigma(\mu)$ on a :

$$\sigma\psi = \frac{1}{2}(A_f \psi + A_\nu \psi) = \frac{1}{2}(Ff(0) \langle \psi, \xi \rangle \xi + \psi * h)$$

et en prenant les transformées de Fourier :

$$2\sigma\hat{\psi} = (2\pi)^{-1} Ff(0) \langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle \hat{\xi} + \hat{\psi}\hat{h}$$

et :

$$\hat{\psi} = \{2\pi(2\sigma - \hat{h})\}^{-1} Ff(0) \langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle \hat{\xi},$$

en particulier $\langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle$ est non nul et :

$$\langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle = \langle \hat{\psi}, \hat{\xi} \rangle (2\pi)^{-1} Ff(0) \langle (2\sigma - \hat{h})^{-1} \hat{\xi}, \hat{\xi} \rangle,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2\pi}{Ff(0)} = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\xi}(t)|^2}{2\sigma - \hat{h}(t)}\, dt.$$

Pour $r > 1$, choisissons comme densité $h$ celle dont la transformée de Fourier est donnée par $\hat{h}(t) = \exp(-|t|^{1/r})$. Puisque $\hat{\xi}(t)$ est de l'ordre de $-\operatorname{Log}|t|$ à l'origine et que $\sigma$ est supérieur à $1/2$ on obtient :

$$(1) \qquad \frac{2\pi}{Ff(0)} \leqq \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\xi}(t)|^2}{1 - \hat{h}(t)}\, dt < +\infty.$$

Quand $f$ parcourt l'ensemble des fonctions positives de $L^1(G; K)$ d'intégrale 1, $Ff(0)$ prend toutes les valeurs de $]0, 1[$. On peut donc trouver une fonction $f$ de ce type pour laquelle l'inégalité (1) n'est pas vérifiée et alors $\sigma(\mu)$ est égal à $1/2$. La probabilité $\mu$ est irréductible, non singulière à la mesure de Haar et vu le choix de $h$, pour tout compact C de G tel que

$C \cap \overline{N}$ est d'intérieur non vide dans $\overline{N}$, il existe un réel $k>0$ pour lequel pour tout entier $n$ :

$$\sigma(\mu)^{-n}\,\mu^n(C) \geqq \sigma(\mu)^{-n}\,\frac{\nu^n(C\cap\overline{N})}{2^n} \geqq \nu^n(C\cap\overline{N}) \geqq kn^{-r}.$$

2.5. ÉTUDE DES PROJECTIONS DE $\mu^n$ SUR K, A ET N. — Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini non compact, $G=KAN$ une décomposition d'Iwasawa. Si $\mu$ est une probabilité sur G irréductible possédant une densité à support compact nous voulons montrer que les projections de $\mu^n$ sur K, A et N satisfont à un théorème local. En d'autres termes si $Z_n$, $n\in\mathbf{N}$, est un produit de $n$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mu$ sur G, s'écrivant dans la décomposition d'Iwasawa $Z_n=K_n A_n N_n$ nous voulons estimer, en un certain sens, les lois de $K_n$, $A_n$ et $N_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

Raugi a montré dans [15] que le couple $(K_n, N_n)$ converge en loi vers une probabilité sur $K\times N$ de la forme $\lambda_1\otimes\lambda_2$. Donc si $\mu_1^n$ est la projection de $\mu^n$ sur K, $\mu_2^n$ la projection de $\mu^n$ sur N, $\mu_3^n$ la projection de $\mu^n$ sur $K\times N$, $\mu_1^n$ tend vaguement vers $\lambda_1$, $\mu_2^n$ vers $\lambda_2$, et $\mu_3^n$ vers $\lambda_1\otimes\lambda_2$. C'est un théorème local pour les projections de $\mu^n$ sur K, N et $K\times N$.

Il reste à étudier la projection de $\mu^n$ sur KA, car K étant compact on obtiendra en même temps un théorème local pour la projection sur A. Raugi [15] montre qu'essentiellement, du point de vue du théorème central limite et de la loi des grands nombres, $\operatorname{Log} A_n = H(Z_n)$ se comporte comme la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur $\mathfrak{a}$ décentrées. La proposition suivante montre qu'il en est de même du point de vue du théorème local.

Notons $\nu_n$, $n\in\mathbf{N}$, la projection de $\mu^n$ sur KA définie par, si D est un borélien de KA, $\nu_n(D)=\mu^n(DN)$. Soit $\varphi_0$ l'unique élément de $L^2(B)$ positif de norme un vérifiant $T_\mu^0\,\varphi_0=\sigma(\mu)\,\varphi_0$ (*cf.* proposition 2.2.1), $m_1$ la mesure sur K admettant la densité $\varphi_0$ par rapport à la mesure de Haar et $m_2$ la mesure sur A ayant pour densité la fonction $l(a)=e^{\rho\{H(a)\}}$, $a\in A$, par rapport à la mesure de Haar de A.

PROPOSITION 2.5.1. — *Soit* $\mu$ *une probabilité irréductible possédant une densité à support compact sur le groupe semi-simple* G *et* $d$ *le rang de* G (*i.e.* $\dim A = d$). *Il existe une constante* $k$ *non nulle telle que la suite de mesures* $\sigma(\mu)^{-n}\,n^{d/2}\,\nu_n$, $n\in\mathbf{N}$, *sur* $KA\simeq K\times A$ *converge vaguement vers* $k(m_1\otimes m_2)$.

*Démonstration.* — A. Pour tout $\lambda$ de $\mathfrak{a}^*$ considérons la représentation $V^\lambda$ de G dans $C(K)$, espace de Banach des fonctions continues sur K muni de la norme uniforme, définie par :

$$V_g^\lambda\,\varphi(k)=e^{-(i\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}\,\varphi(K(g^{-1}k));\qquad g\in G,\quad k\in K,\quad \varphi\in C(K).$$

Puisque la probabilité $\mu$ possède une densité à support compact, $V_\mu^\lambda=\int_G V_g^\lambda\,d\mu(g)$ définit un opérateur compact sur $C(K)$ dépendant continument de $\lambda$. Il est clair que $V_\mu^0$ est un opérateur positif irréductible au sens de [16] et on montre comme au corollaire 2.2.3 qu'il existe un réel $\delta>0$ tel que pour tout $\lambda$ assez petit :

$$V_\mu^\lambda = t(\lambda)\,F(\lambda)+P_\lambda,$$

où $t(\lambda)$ est l'unique élément du spectre de $V_\mu^\lambda$ de module supérieur à $\delta$, $F(\lambda)$ est la projection sur le sous-espace de dimension un associé à $t(\lambda)$ [elle vérifie $V_\mu^\lambda F(\lambda)=F(\lambda)V_\mu^\lambda = t(\lambda)\,F(\lambda)$] et $P_\lambda$ est un opérateur de rayon spectral inférieur à $\delta$.

Pour tout $m$ de M soit $\tau_m : C(K)\to C(K)$ l'application définie par $(\tau_m\varphi)(k)=\varphi(km)$, $k\in K$. Puisque M normalise N et centralise A il est clair que $V_\mu^\lambda\tau_m=\tau_m V_\mu^\lambda$. En particulier, si $\varphi$ est l'unique vecteur propre, à une constante près, de l'opérateur $V_\mu^\lambda$ associé à $t(\lambda)$ (pour $\lambda$ assez petit) on a :

$$V_\mu^\lambda(\tau_m\varphi)=\tau_m(V_\mu^\lambda\varphi)=t(\lambda)(\tau_m\varphi); \qquad m\in M,$$

et par unicité $\tau_m\varphi=\varphi$ c'est-à-dire que $\varphi$ est dans $L^2(B)$. On en déduit que le vecteur propre positif associé à $t(0)$ est un vecteur propre positif de $T_\mu^0$ donc (proposition 2.2.1) que $t(0)=\sigma(\mu)$ et que pour tout $\lambda$ assez petit $t(\lambda)$ est égal à $s(\lambda)$ (*cf.* corollaire 2.2.3). D'autre part on montre comme dans le corollaire 2.2.5 que pour tout $\varepsilon>0$, $\sup\{\sigma(\mu)^{-n}\|V_{\mu^n}^\lambda\|, |\lambda|>\varepsilon\}$ et $\sup\{\sigma(\mu)^{-n}\|P_\lambda^n\|, |\lambda|<\varepsilon\}$ tendent vers zéro exponentiellement vite quand $n$ tend vers l'infini.

B. Si $\beta$ est une fonction de $C_c(\mathfrak{a})$ et $\lambda$ un élément de $\mathfrak{a}^*$ soit :

$$\hat\beta(\lambda)=\int_{\mathfrak{a}} e^{(i\lambda+\rho)(x)}\,\beta(x)\,dx,$$

où $dx$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}$. D'après la formule d'inversion classique, pour tout $x$ de $\mathfrak{a}$ :

$$e^{\rho(x)}\,\beta(x)=(2\pi)^{-d}\int_{\mathfrak{a}^*} e^{-i\lambda(x)}\,\hat\beta(\lambda)\,d\lambda.$$

Si $\varphi$ est une fonction de $C(K)$ considérons la fonction $f$ sur KA définie par $f(ka)=\varphi(k)\,\beta(H(a))$, $k\in K$, $a\in A$ et la fonction $\tilde f$ sur G définie par $\tilde f(kan)=f(ka)$, $k\in K$, $a\in A$, $n\in N$.

Pour des commodités d'écriture étudions la suite $\nu'_n$ des projections de $\check\mu^n$ (image de $\mu^n$ par l'application qui à $g\in G$ associe $g^{-1}$). A l'aide du théorème de Fubini, on a, si $e$ est l'élément neutre de K :

$$\begin{aligned}\int_{KA} f\,d\nu'_n &= \int_G \tilde f(g)\,d\check\mu^n(g)=\int_G \varphi(K(g))\,\beta(H(g))\,d\check\mu^n(g)\\ &= \int_G \varphi(K(g^{-1}))\,\beta(H(g^{-1}))\,d\mu^n(g)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_G \varphi(K(g^{-1}))\left\{\int_{\mathfrak{a}^*} e^{-\rho\{H(g^{-1})\}}\,e^{-i\lambda\{H(g^{-1})\}}\,\hat\beta(\lambda)\,d\lambda\right\}d\mu^n(g)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathfrak{a}^*}(V_{\mu^n}^\lambda\varphi)(e)\,\hat\beta(\lambda)\,d\lambda.\end{aligned}$$

Utilisant alors les résultats de A comme dans la démonstration du théorème 2.3.1 on obtient, pour $\varepsilon$ assez petit :

$$\lim_{n\to+\infty} (2\pi)^d n^{d/2} \sigma(\mu)^{-n} \int_{KA} f\, d\nu'_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sigma(\mu)^{-n} n^{d/2} \int_{\{\lambda\in\mathfrak{a}^*, |\lambda|<\varepsilon\}} s(\lambda)(F(\lambda)\varphi)(e)\,\hat{\beta}(\lambda)\,d\lambda$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int_{|\lambda|\leq\varepsilon\sqrt{n}} \left[ s(0)^{-1} s\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \left(F\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\varphi\right)(e)\,\hat{\beta}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) d\lambda$$

$$= (F(0)\varphi)(e)\,\hat{\beta}(0) \int_{\mathfrak{a}^*} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma(\mu)} \langle d^2 s(0)\lambda,\lambda\rangle\right\} d\lambda.$$

Si $\varphi_1$ est un élément non nul de $L^2(B)$ tel que $(T^0_\mu)^*\varphi_1=\sigma(\mu)\varphi_1$ et $\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle=1$, la mesure $w$ sur K admettant la densité $\varphi_1$ par rapport à la mesure de Haar vérifie $(V^0_\mu)^* w=\sigma(\mu) w$, d'où :

$$(F(0)\varphi)(e)=\varphi_0(e)\int_K \varphi(k)\,dw(k).$$

En échangeant le rôle de $\mu$ et de $\check{\mu}$ on a donc prouvé que $\sigma(\mu)^{-n} n^{d/2} \int f\,d\mu^n$ tend vers $k\int f\,d(m_1\otimes m_2)$ si :

$$k=\varphi_1(e)(2\pi)^{-d}\int_{\mathfrak{a}^*} \exp\left\{\frac{1}{2\sigma(\mu)} \langle d^2 s(0)\lambda,\lambda\rangle\right\} d\lambda.$$

Un argument de densité permet de conclure.

*Remarque* 1. — Il est clair que la proposition est vraie dès que $\mu$ est une probabilité irréductible très étalée telle que $V^\lambda_\mu$ définit, si $\lambda\in\mathfrak{a}^*$, un opérateur compact sur C(K). Ceci est en particulier vérifié par toutes les probabilités adaptées sur G, bi-invariantes par K.

*Remarque* 2. — Si $Z_n$, $n\in\mathbf{N}$, est le produit de $n$ matrices aléatoires de $Sl(2,\mathbf{R})$ indépendantes de loi $\mu$ et $x$ un vecteur de $\mathbf{R}^2$, la proposition permet d'estimer la loi de $Z_n x$.

## III. — Théorème local sur une classe de groupes moyennables.

(3.1) Dans cette partie nous appliquons les résultats du paragraphe I pour montrer le théorème local sur la classe C de groupes extensions compactes de groupe nilpotent, donc moyennables, définie ainsi :

A un groupe semi-simple H connexe de centre fini et à une décomposition d'Iwasawa H=KAN de H associons le groupe MN où M est le centralisateur de A dans K.

C *est la classe des groupes* MN *ainsi obtenus lorsque* H *est un groupe de rang un et* N *n'est pas abélien.*

Notons que N est nilpotent, M compact et que MN est isomorphe à un produit semi direct $N \times_\sigma M$. Le cas où N est abélien se traite de façon analogue mais plus simplement (*voir* remarque 3). Donnons un exemple de groupe de la classe C. Si $H=SU(n,1)$, M est isomorphe à $U(n-1)$ et N au groupe d'Heisenberg de dimension $2(n-1)+1$ donc MN s'identifie à l'ensemble $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{R} \times U(n-1)$ muni du produit :

$$(z,t,k)(z',t',k')=(z+kz',t+t'+\operatorname{Im}\langle kz',z\rangle,kk'),$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbf{C}^{n-1}$.

La raison du choix de ces groupes est que (MN, M) est un couple de Guelfand. Rappelons en effet les résultats de Korànyi [13] : si $H=KAN$ est un groupe de rang un du type considéré au-dessus, le système de racines positives est de la forme $\{\alpha, 2\alpha\}$ car on suppose que N n'est pas abélien. Notons $\mathfrak{h}_1$ le sous-espace propre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H associé à $\alpha$, $p$ sa dimension et $\mathfrak{h}_2$ le sous-espace associé à $2\alpha$, $q$ sa dimension. L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N est égale à $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ et $[\mathfrak{h}_1,\mathfrak{h}_1]=\mathfrak{h}_2$. Pour simplifier les notations nous munissons $\mathfrak{n}$ du produit scalaire défini à partir de l'involution de Cartan $\theta$ et de la forme de de Killing B par, si $b=[4(p+4q)]^{-1/2}$ :

$$\langle X_1+Y_1,X_2+Y_2\rangle=-\sqrt{b}\,B(X_1,\theta X_2)-B(Y_1,\theta Y_2) \qquad (X_1,X_2\in\mathfrak{h}_1,\ Y_1,Y_2\in\mathfrak{h}_2).$$

Le groupe M est connexe et opère par isométries sur $\mathfrak{n}$ à l'aide de la représentation adjointe. Il laisse stable $\mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}_2$ et opère transitivement sur la sphère unité de $\mathfrak{h}_1$.

Si $ds$ est la mesure de Haar normalisée sur $S=SO(\mathfrak{h}_2)$, groupe des isométries linéaires de $\mathfrak{h}_2$ de déterminant un, fixons un vecteur U de $\mathfrak{h}_2$ et posons :

$$j^{(q)}(Y)=\int_S e^{i\langle U,sY\rangle}\,ds, \qquad Y\in\mathfrak{h}_2.$$

En particulier, si $q=1$, $j^{(q)}(Y)=e^{iY}$. Soit $\alpha=p/2-1$ et $L_n^\alpha$ le polynôme de Laguerre d'indice $\alpha$ de degré $n$. Pour tout $\lambda$ de $\mathbf{R}$ posons :

$$\varphi_{\lambda,n}(m\exp(X+Y))=\frac{1}{L_n^\alpha(0)}j^{(q)}(\lambda\,Y)\,e^{-1/2|\lambda|.\|X\|^2}\,L_n^\alpha(|\lambda|.\|X\|^2),$$

si $m\in M$, $X\in\mathfrak{h}_1$, $Y\in\mathfrak{h}_2$.

(3.2) Alors $\varphi_{\lambda,n}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}$, sont des fonctions sphériques de type positif sur le couple de Guelfand (MN, M). Si $d\gamma$ est la mesure sur $\mathbf{R}\times\mathbf{N}$ produit de la mesure sur $\mathbf{R}$ de densité $|\lambda|^{q+\alpha}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ et de la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ il existe une mesure de Haar $m$ sur $G=MN$ telle que si $f$ est une fonction sur G continue intégrable bi-invariante par M dont la transformée $Ff(\lambda,n)=\int\varphi_{\lambda,n}(g)f(g)\,dm(g)$ est $d\gamma$ intégrable :

$$f(e)=\int_{\mathbf{R}\times\mathbf{N}} Ff(\lambda,n)\,d\gamma(\lambda,n) \quad (cf.[13]).$$

Notons $T^{\lambda, n}$ la représentation de $\hat{G}$ associée à $\varphi_{\lambda, n}$. Remarquons que $T^{\lambda, n} = T^{-\lambda, n}$ si $q$ est différent de un et que, pour tout entier $n$, $T^{0, n}$ est la représentation triviale de G. Afin d'appliquer les résultats du paragraphe I déterminons les voisinages de l'origine dans $\hat{G}_r$ (égal ici à $\hat{G}$) ou, ce qui nous suffit vu la formule de Plancherel, la trace de ces voisinages sur le sous-ensemble de $\hat{G}$ formé des représentations $T^{\lambda, n}$.

PROPOSITION 3.1. — *Si* $V_\varepsilon = \{ T^{\lambda, n} \in \hat{G}, |\lambda|(n+1) < \varepsilon \}$, *la famille* $\{ V_\varepsilon, \varepsilon > 0 \}$ *est une base de voisinages de la représentation triviale de* MN *sur l'ensemble des représentations* $T^{\lambda, n}$, $(\lambda, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}$, *muni de la topologie induite par celle de* $\hat{G}$.

*Démonstration.* — Cette topologie est métrisable et une suite de représentations de la forme $T^{\lambda, n}$ converge vers l'une d'elles si et seulement si les fonctions $\varphi_{\lambda, n}$ correspondantes convergent uniformément sur tout compact.

(*a*) Montrons que $V_\varepsilon$ est un voisinage de la représentation triviale si $\varepsilon > 0$. Si ce n'est pas le cas il existe une suite $(\lambda_p, n_p)_{p \in \mathbf{N}}$ de $\mathbf{R} \times \mathbf{N}$ telle que pour tout $p$, $|\lambda_p|(n_p+1) \geqq \varepsilon$ et telle que $\varphi_{\lambda_p, n_p}$ tend vers un uniformément sur les compacts quand $p$ tend vers l'infini. En écrivant cette condition sur $\exp \mathfrak{h}_2$ on voit que $\lambda_p$ doit tendre vers 0 (donc $n_p$ tend vers l'infini). Soit $w > 0$, d'après le théorème 7.6.5 de [18] il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que si $0 \leqq x \leqq w$ et $n \geqq B$ :

$$n^{(1/4)-(\alpha/2)} | x^{(\alpha/2)+(1/4)} e^{-x/2} L_n^\alpha(x) | \leqq A,$$

d'où, puisque $L_n^\alpha(0)$ est équivalent à $n^\alpha / \Gamma(\alpha+1)$ quand $n$ tend vers l'infini :

Il existe A′ tel que si $X \in \mathfrak{h}_1$, $|\lambda_p| . \| X \|^2 \leqq w$ et $n_p \geqq B$ :

$$\begin{aligned} |\varphi_{\lambda_p, n_p}(\exp X)| &\leqq | \{ L_{n_p}^\alpha(0) \}^{-1} e^{-|\lambda_p|(\|X\|^2/2)} L_{n_p}^\alpha(|\lambda_p| . \|X\|^2) | \\ &\leqq A' \{ n_p |\lambda_p| . \|X\|^2 \}^{-((\alpha/2)+(1/4))} \leqq A' \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \|X\|^2 \right\}^{-((\alpha/2)+(1/4))} \end{aligned}$$

Choisissons alors X assez grand pour que le dernier terme de cette inégalité soit inférieur à 1/2. Pour $p$ assez grand cette inégalité est vérifiée et $\varphi_{\lambda_p, n_p}(\exp X)$ ne peut pas tendre vers un.

(*b*) Montrons que les voisinages $V_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, forment une base. Vérifions d'abord l'inégalité suivante, (que nous emploierons aussi plus tard) :

(1) $\forall \alpha > 0, \exists a > 0, \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0$ tels que si $n \in \mathbf{N}$ et $0 \leqq x \leqq a(n+1)^{-1}$,

$$1 - c_1 x(n+1) \leqq e^{-x/2} L_n^\alpha(x) \{ L_n^\alpha(0) \}^{-1} \leqq 1 - c_2 x(n+1).$$

Si $n$ est non nul les racines du polynôme $L_n^\alpha$ sont positives et distinctes (théorème 3.3.1 de [18]) donc si $x(n)$ est la plus petite d'entre elles, la fonction $h(x) = e^{-x/2} L_n^\alpha(x) \{ L_n^\alpha(0) \}^{-1}$ est convexe sur $[0, x(n)]$ et vérifie :

$$1 + x h'(0) \leqq h(x) \leqq 1 - \frac{x}{x(n)}.$$

Puisque $h'(0)=-(1/2)-(n/(\alpha+1))$ et que (théorème 6.31.3 de [18]) il existe deux constantes $k_1>0$ et $k_2>0$ telles que :

$$k_1(n+1)^{-1}\leqq x(n)\leqq k_2(n+1)^{-1},$$

on obtient immédiatement (1), le cas $n=0$ étant évident.

Pour montrer que $\{V_\varepsilon, \varepsilon>0\}$ forme une base de voisinages il suffit de montrer que si $(\lambda_p, n_p)\in V_{1/p}$, $\varphi_{\lambda_p, n_p}$ tend vers un uniformément sur tout compact quand $p$ tend vers l'infini. Remarquons d'abord que $\lambda_p$ tend vers 0 donc que $j^{(q)}(\lambda_p Y)$ tend vers un uniformément sur les compacts de $\mathfrak{h}_2$. D'autre part si $X\in\mathfrak{h}_1$ et $\|X\|\leqq A$, pour $p$ assez grand :

$$|\lambda_p|.\|X\|^2\leqq a(n_p+1)^{-1}$$

et d'après (1) :

$$|e^{-|\lambda_p|(\|X\|^2/2)}\{L^\alpha_{n_p}(0)\}^{-1}L^\alpha_{n_p}(|\lambda_p|.\|X\|^2)-1|\leqq c_1|\lambda_p|.\|X\|^2(n_p+1)\leqq\frac{c_1}{p}A.$$

Cette expression tend vers 0 et $\varphi_{\lambda_p, n_p}$ produit de deux fonctions tendant vers 1 uniformément sur les compacts à la même propriété.

Notons $\sigma$ l'application de $G=MN$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\sigma(mn)=\|X\|^2+\|Y\|$ si $m\in M$, $n=\exp(X+Y), X\in\mathfrak{h}_1, Y\in\mathfrak{h}_2$. Dire qu'une probabilité $\mu$ sur G possède un *moment d'ordre* 2, [11], équivaut ici à dire que $\int_G \sigma(g)\,d\mu(g)$ est fini.

LEMME 3.2. — *Soit* $G=MN$ *un groupe de la classe* C. *Si* $\mu$ *est une probabilité apériodique sur* G *possédant un moment d'ordre* 2, *il existe une fonction* $\beta$ *de* $L^1(G; M)$ *continue non nulle en l'élément neutre de* G *vérifiant : si* $\nu_1$ *et* $\nu_2$ *sont des mesures bornées sur* G, *pour tous* $(\lambda, n)$ *de* $\mathbf{R}\times\mathbf{N}$, $F(\nu_1\star\mu^r\star\nu_2)(\lambda/r, n)$ *tend vers* $\nu_1(G)\,\nu_2(G)\,F\,\beta(\lambda, n)$ *lorsque* $r$ *tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Pour tout entier $r$ considérons l'automorphisme $\delta_r$ de MN défini par :

$$\delta_r(\exp(X+Y)\,m)=\exp\left(\frac{X}{\sqrt{r}}+\frac{Y}{r}\right)m,\qquad \text{si}\quad X\in\mathfrak{h}_1,\quad Y\in\mathfrak{h}_2,\quad m\in M.$$

Identifions MN au produit semi direct $N\times_\sigma M$. Puisque M opère de façon transitive sur la sphère unité de $\mathfrak{h}_1$ on peut appliquer le théorème central limite 5.9 de [15] :

Si $m_M$ est la mesure de Haar normalisée de M il existe un semi-groupe de convolution $\{\beta_t, t>0\}$ de probabilités sur N possèdant une densité $C^\infty$ tel que la suite $\delta_r(\mu^r)$ des images de $\mu^r$, $r\in\mathbf{N}$, par $\delta_r$ converge vaguement vers $\beta_1\otimes m_M$.

Pour tout entier $p$, $\delta_{pr}(\mu^{pr})$ converge à la fois vers $\beta_1\otimes m_M$ et vers $\delta_p((\beta_1\otimes m_M)^{*p})$ donc la densité $\beta$ de $\beta_1\otimes m_M$ est bi-invariante par M.

Puisque $\delta_r(\nu_i)$, $i=1$ ou 2, converge vaguement vers la mesure sur $N\times_\sigma M$, $\varepsilon_0\otimes\bar{\nu}_i$ (où $\bar{\nu}_i$ est la projection de $\nu_i$ sur M) on en déduit que la suite $\delta_r(\nu_1\star\mu^r\star\nu_2)=\delta_r(\nu_1)\star\delta_r(\mu^r)\star\delta_r(\nu_2)$ tend vers $\nu_1(G)\,\nu_2(G)(\beta_1\otimes m_M)$, d'où, si $(\lambda, n)\in\mathbf{R}\times\mathbf{N}$ :

$$\lim_{r\to+\infty} F(\delta_r(\nu_1\star\mu^r\star\nu_2))(\lambda, n)=\nu_1(G)\,\nu_2(G)\,F\,\beta(\lambda, n).$$

Or si $\nu$ est une mesure bornée sur G, en utilisant l'expression explicite de $\varphi_{\lambda,n}$ on voit immédiatement que $F(\delta_r(\nu))(\lambda, n) = F\,\nu(\lambda/r, n)$, ce qui montre le lemme.

LEMME 3.3. — *Si* $G = MN$ *est un groupe de la classe* C, *toute probabilité étalée sur* G *est irréductible.*

*Démonstration.* — Soit S le semi-groupe engendré par une probabilité étalée sur G. Il contient un ouvert U. Montrons que le semi-groupe ouvert $T = US$, contenu dans S, est égal à G. Si $N_2 = \exp \mathfrak{h}_2$, $N_2$ est un sous-groupe distingué fermé de G et $G/N_2$ est égal à $\mathbf{R}^p \times_\sigma M$ où M est un groupe compact connexe opérant de façon transitive sur la sphère unité de $\mathbf{R}^p$. Soit $\pi$ la projection de G sur $G/N_2$. La projection de $\pi(T)$ sur M est un semi-groupe ouvert du groupe compact et connexe M donc est égal à M. En particulier il existe un ouvert V de $\mathbf{R}^p$ tel que $V \times \{e\}$ soit contenu dans $\pi(T)$.

Fixons un élément $x$ de V et $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda x$ soit dans V si $|\lambda - 1| < \varepsilon$. Si $(t,k)$ et $(t', k^{-1})$ sont deux éléments de $\pi(T)$ tels que $k(x) = -x$, pour tous $m$, $n \in \mathbf{N}$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ vérifiant $|\lambda - 1| < \varepsilon$ et $|\mu - 1| < \varepsilon$ :

$$(t,k)(\lambda x, e)^n (t', k^{-1})(\mu x, e)^n = (t + k(t') + (m\mu - n\lambda)\, x, e),$$

est dans $\pi(T)$. Ceci entraîne que $(t + k(t') + \alpha x, e)$ appartient à $\pi(T)$ pour tout réel $\alpha$. En faisant parcourir à $x$ une base de $\mathbf{R}^p$ contenue dans V on voit que $\mathbf{R}^p \times \{e\}$ est contenu dans $\pi(T)$. En particulier il existe un voisinage symétrique W de 0 dans $\mathfrak{h}_1$ et un élément Y de $\mathfrak{h}_2$ tels que $\exp(W + Y)$ soit contenu dans T.

Si $X_1, X_2 \in W$ et $n \in \mathbf{N}$ :

$$[\exp(X_1 + Y)^n\ [\exp(X_2 + Y)]^n\ [\exp(-X_1 + Y)]^n [\exp(-X_2 + Y)]^n = \exp(n^2 [X_1, X_2] + 4n\,Y),$$

est un élément de T. Puisque $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_1] = \mathfrak{h}_2$, $\{[X_1, X_2];\ X_1 \in W,\ X_2 \in W\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathfrak{h}_2$ et ceci montre que $\exp \mathfrak{h}_2$ est contenu dans T qui est donc un voisinage de l'élément neutre. On conclut par connexité.

Montrons alors le théorème local et la majoration des fonctions de concentration suivants ($\beta$ désigne la fonction introduite au lemme 3.2 et $m$ la mesure de Haar fixée dans la formule de Plancherel).

THÉORÈME 3.4. — *Soit* $G = MN$ *un groupe de la classe* C *et* $\mu$ *une probabilité étalée sur* G.

(*a*) *Pour tout compact* B *de* G *il existe un réel* $c > 0$ *tel que :*

$$\operatorname*{Sup}_{x, y \in G} \mu^r(x\,B\,y) \leq c\,r^{-(p+2q)/2} \quad \textit{pour tout entier } r.$$

(*b*) *Si de plus* $\mu$ *possède un moment d'ordre* 2, *la suite de mesures* $r^{(p+2q)/2}\,\mu^r$, $r \in \mathbf{N}$, *converge vaguement vers* $\beta(0)\,m$ *quand* $r$ *tend vers l'infini.*

*Démonstration.* — Le groupe G est moyennable [donc $\sigma(\mu) = 1$] et connexe donc $\mu$ est très étalée apériodique. D'après le lemme 3.3 elle est aussi irréductible et nous pouvons appliquer la proposition 1.4.1. D'après celle-ci il suffit d'étudier, si $g$ est une fonction de $C_c^+(G)$ bi-invariante par M d'intégrale 1, non nulle en $e$, si $\nu_1$ et $\nu_2$ sont des probabilités sur G, $a_r = r^{(p+2q)/2}$ et :

$$W_\varepsilon = \{ (\lambda, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}, |\lambda| (n+1) < \varepsilon \},$$

$$a_r \int_{W_\varepsilon} F(\check{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n)\, d\gamma(\lambda, n),$$

pour un $\varepsilon > 0$ (*voir* proposition 3.1).

Posons $A = \operatorname{Sup} \{ \| X \|; X \in \mathfrak{n}, g(\exp X) \neq 0 \}$. Par l'inégalité (1) de la démonstration de la proposition 3.1 si $\varepsilon = a/A^2$ et si $(\lambda, n) \in W_\varepsilon$ pour tout $x$ du support de $g$ :

$$|\varphi_{\lambda, n}(x)| \leqq |\{ L_n^\alpha(0) \}^{-1} e^{-|\lambda| . \| X \|^2/2} L_n^\alpha(|\lambda| . \| X \|^2)| \leqq 1 - c_2 |\lambda| (n+1) \| X \|^2,$$

si $x = m \exp(X+Y)$, $m \in M$, $X \in \mathfrak{h}_1$, $Y \in \mathfrak{h}_2$.

Ayant supposé que $g$ est d'intégrale un, il existe $c_3 > 0$ tel que sur $W_\varepsilon$ :

$$|F g(\lambda, n)| \leqq 1 - c_3 |\lambda| (n+1).$$

On sait (lemme 1.3.2) qu'il existe un entier $s$, une probabilité $\nu$ et un réel $t$, $0 < t \leqq 1$ vérifiant $\mu^s = tg . m + (1-t)\nu$. Par le même type de majoration que celles utilisées dans la démonstration de la proposition 1.4.1 on en déduit que si $(\lambda, n) \in W_\varepsilon$, pour tous entiers $i$ et $j$ :

$$\begin{aligned} |F(\check{g} \star \nu_1 \star \mu^{js+i} \star \nu_2)(\lambda, n)| &\leqq \{ t |F g(\lambda, n)| + (1-t) \}^j \\ &\leqq \{ 1 - tc_3 |\lambda| (n+1) \}^j \leqq \exp\{ -jtc_3 |\lambda| (n+1) \}, \end{aligned}$$

d'où l'existence d'un réel $d > 0$ vérifiant, si $r > s$ et $(\lambda, n) \in W_\varepsilon$ :

$$(\star) \qquad |F(\check{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n)| \leqq \exp\{ -dr |\lambda| (n+1) \}$$

et :

$$\left| a_r \int_{W_\varepsilon} F(\check{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n)\, d\gamma(\lambda, n) \right| \leqq r^{(p+2q)/2} \sum_{n \geqq 0} \int_{\mathbf{R}} \exp\{ -dr |\lambda| (n+1) \} |\lambda|^{q+\alpha} d\lambda,$$

est uniformément borné en $r$, $\nu_1$ et $\nu_2$ car $\alpha = (p/2) - 1$. Le (1) de la proposition 1.4.1 est donc vérifié ce qui prouve le $a$.

De même si $\mu$ a un moment d'ordre deux, puisque :

$$a_r \int_{W_\varepsilon} F(\check{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)(\lambda, n)\, d\gamma(\lambda, n) = \int_{W_{r\varepsilon}} F(\check{g} \star \nu_1 \star \mu^r \star \nu_2)\left( \frac{\lambda}{r}, n \right) d\gamma(\lambda, n),$$

le lemme 3.2 et la relation $(\star)$ (qui permet d'appliquer le théorème de Lebesgue) montrent que cette quantité tend vers $\int F \beta(\lambda, n)\, d\gamma(\lambda, n) = \beta(0)$ car $g . m$, $\nu_1$ et $\nu_2$ sont des probabilités. Si ce sont des mesures bornées arbitraires on trouve comme limite, par linéarité :

$$\beta(0)\, \nu_1(G)\, \nu_2(G) \int g(x)\, dm(x) = \beta(0)\, m(\check{\nu}_1 \star g \star \check{\nu}_2),$$

ce qui montre le (2) de la proposition 1.4.1 et établit le théorème.

*Remarque* 1. — Le nombre $(p+2q)/2$ est la moitié du degré de croissance du groupe à croissance polynomiale G [10].

*Remarque* 2. — Si $\lambda$ est une probabilité sur N invariante sous l'action de M on obtient le théorème local pour $\lambda$ en appliquant le théorème précédent à la probabilité $\lambda \otimes m_{\mathrm{M}}$ sur $\mathrm{MN} \simeq \mathrm{N} \times_{\sigma} \mathrm{M}$. Après avoir rédigé cet article j'ai appris que A. Hulanicki avait montré le théorème local, de façon indépendante, pour les probabilités sur le groupe de Heisenberg de dimension 3 invariantes sous l'action de SO(2).

*Remarque* 3. — Par la même méthode on peut traiter le cas où G est de la forme $\mathrm{A} \times_{\sigma} \mathrm{K}$ où K est un groupe compact opérant sur le groupe abélien à génération compacte A. En effet (G, K) est alors un couple de Guelfand et les fonctions sur G bi-invariantes par K s'identifiant aux fonctions sur A invariantes sous l'action de K, les propriétés de la transformée de Fourier usuelle permettent de déterminer facilement la formule de Plancherel sphérique et d'obtenir les inégalités nécessaires à la démonstration des propriétés (1) et (2) de la proposition 1.4.1. On retrouve ainsi, plus simplement, les résultats de [1].

On peut aussi démontrer facilement que le théorème 3.4 reste vrai pour les groupes $\mathrm{H}_n \times_{\sigma} \mathrm{SO}(2)^n$, où $\mathrm{H}_n$ est le groupe d'Heisenberg de dimension $2n+1$. Si on l'identifie à $\mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ l'action de $\mathrm{SO}(2)^n$ est donnée par :

$$\sigma(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})(\mathrm{Z}_1, \ldots \mathrm{Z}_n, t) = (e^{i\theta_1} \mathrm{Z}_1, \ldots, e^{i\theta_n} \mathrm{Z}_n, t).$$

Les fonctions sphériques sont alors indexées par $\mathbf{R} \times \mathbf{N}^n$ et font intervenir des produits de polynômes de Laguerre.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] P. Baldi, P. Bougerol et P. Crepel, *Théorème central limite local sur les extensions compactes de* $\mathbf{R}^d$ (*Ann. I.H.P.*, Sect. B, vol. 14, n° 1, 1978, p. 99-112).

[2] P. Bougerol, *Fonctions de concentration sur certains groupes localement compacts* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, vol. 45, 1978, p. 135-157).

[3] P. Bougerol, *Une majoration universelle des fonctions de concentration sur les groupes localement compacts non compacts* (*Lecture Notes in Math.*, n° 706, 1979, p. 36-40, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.)

[4] P. Bougerol, *Comportement asymptotique des puissances de convolution d'une probabilité sur un espace symétrique* (*Astérisque*, vol. 74, 1980, p. 29-45, Soc. Math. Fr.).

[5] L. Breiman, *Probability*, Addison Wesley, Reading, 1968.

[6] Y. Derriennic et Y. Guivarc'h, *Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 277, série A, 1973, 613-615.)

[7] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, t. 6, Gauthier Villars, Paris, 1975.

[8] N. Dunford et J. T. Schwarz, *Linear Operators*, part. I, Interscience, New York, 1953.

[9] F. P. Greenleaf, *Invariant Means on Topological Groups*, Van Nostrand, New York, 1969.

[10] Y. Guivarc'h, *Croissance polynomiale et période des fonctions harmonique* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 101, 1973, p. 333-375).

[11] Y. Guivarc'h, *Loi des grands nombres et rayon spectral d'une marche aléatoire sur un groupe de Lie* (*Astérisque*, vol. 74, 1980, p. 47-98, Soc. Math. Fr.).

[12] Y. Kawada et K. Ito, *On the Probability Distribution on a Compact Group* (*Proc. Phys. Soc.*, vol. 22, 1940, p. 977-999).

[13] A. Koranyi, *Some Applications of Guelfand Pairs in classical Analysis* (*Lecture in Harmonic Analysis and Group Representations* C.I.M.E., 1980).

[14] A. Raugi, *Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, Mémoire 54, 1977, 127 p.).

[15] A. Raugi, *Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide par un groupe compact* (*Lecture Notes in Math.*, n° 706, 1979, p. 257-324, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York).

[16] H. H. Schaefer, *Banach Lattices and Positive Operators*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

[17] E. M. Stein, *Analytic Continuation of group Representations* (*Adv. in Math.*, vol. 4, 1970, p. 172-207).

[18] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 28, 1939.

[19] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

(Manuscrit reçu le 21 janvier 1981,
accepté le 13 mai 1981.)

Ph. Bougerol
U.E.R. de Mathématiques,
Université Paris-7,
2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.