ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN E. LANNES

# Sur l'invariant de Kervaire des variétés fermées stablement parallélisées

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 14, nº 2 (1981), p. 183-197
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1981_4_14_2_183_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*
4e série, t. 14, 1981, p. 183 à 197.

# SUR L'INVARIANT DE KERVAIRE DES VARIÉTÉS FERMÉES STABLEMENT PARALLÉLISÉES

PAR JEAN E. LANNES [1]

## 0. Introduction

0.1. ÉNONCÉ DU RÉSULTAT DE W. BROWDER. — Soit $M^{2n}$ $(n>0)$ une variété fermée munie d'une parallélisation stable $t$. La donnée de $t$ permet de définir une application $q: H^n(M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ telle que l'on a pour tous $x$, $y$ de $H^n(M; \mathbb{Z}/2)$ :

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + \langle x \cup y, [M] \rangle.$$

En d'autres termes $q$ est une forme quadratique, appelée forme quadratique de Kervaire, associée à la forme bilinéaire non dégénérée :

$$H^n(M; \mathbb{Z}/2) \times H^n(M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2, \qquad (x, y) \longmapsto \langle x \cup y, [M] \rangle.$$

On montre (*voir* par exemple la proposition 0.2.2) que la classe de $q$ dans le groupe de Witt quadratique $WQ(\mathbb{Z}/2)$ ne dépend que de la classe de $(M, t)$ dans le groupe de cobordisme stablement parallélisé $\Omega_{2n}^{fr}$. Or le groupe $WQ(\mathbb{Z}/2)$ ne contient qu'un seul élément non trivial, l'unique isomorphisme de $WQ(\mathbb{Z}/2)$ sur $\mathbb{Z}/2$ est appelé l'invariant de Arf (parce qu'il coïncide avec l'invariant de Arf défini plus généralement pour tout corps de caractéristique 2 [3]); l'invariant de Arf de $q$ est appelé l'invariant de Kervaire de la variété stablement parallélisée M.

On pose $\pi_{2n}^S = \varinjlim_p \pi_{2n+p} S^p$, l'isomorphisme de Pontryagin : $\pi_{2n}^S \simeq \Omega_{2n}^{fr}$ permet de voir l'invariant de Kervaire comme un homomorphisme : $\pi_{2n}^S \to \mathbb{Z}/2$. L'objet de ce papier est de démontrer le théorème suivant dû à W. Browder [4] que l'on peut considérer comme une définition homotopique de l'invariant de Kervaire.

THÉORÈME 0.1.1. — *Soient, $n$ un entier positif,* A *l'algèbre de Steenrod modulo* 2, *et* $\chi: A \to A$ *la conjugaison canonique. Il existe une relation dans* A :

$$Sq^{n+1}(\chi Sq^{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} Sq^i a_i = 0,$$

[1] Supported in part by NSF grant MCS 77-18723 (02).

*où les $a_i$ sont des éléments de* A *de degré respectifs* $2n+2-i$, *telle que l'opération cohomologique secondaire stable* $\Phi$ *associée à cette relation possède la propriété suivante :*

*Soient* $f: S^{2n+p} \to S^p (p>0)$ *une application pointée et* $\varkappa$ *l'invariant de Kervaire de l'élément de* $\pi_{2n}^S$ *représenté par f; soient* X *l'espace* $S^p \cup_f D^{2n+1+p}$ *et* $\alpha$, [X] *les générateurs de* $H^p(X; \mathbb{Z}/2)$ *et* $H_{2n+1+p}(X; \mathbb{Z}/2)$ *respectivement. Alors :*

$$\varkappa = \langle \Phi\, \alpha, [X] \rangle.$$

Grâce aux travaux d'Adams ([1], [2]), ce théorème a le corollaire suivant, toujours dû à W. Browder [4].

Corollaire 0.1.2. — *L'invariant de Kervaire :* $\pi_{2n}^S \to \mathbb{Z}/2$ *est nul si* $n+1$ *n'est pas une puissance de* 2. *En outre si* $n+1=2^k$, *il est non nul si et seulement si, dans la suite spectrale d'Adams modulo* 2 *pour* $\pi_*^S$, *l'élément* $h_k^2$ *du terme* $E_2$ *persiste à l'infini.*

0.2. Ingrédients de la preuve. — Notre démonstration du théorème 0.1.1 est fondée sur le lemme et la proposition ci-dessous.

0.2.1. *Un lemme algébrique.*

Lemme 0.2.1. — *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{Z}/2$ *de dimension fini, muni d'une forme quadratique* $q$ *non dégénérée,* I *un sous-espace vectoriel de* E *tel que* $I=I^{\perp}$, *et* $u$ *un élément de* E *tel que* $q(x)=u.x$ *pour tout* $x$ *de* I *(on note . la forme bilinéaire associée à* $q$*). Alors l'invariant de* Arf *de* $q$ *est* $q(u)$.

0.2.2. *Où l'on reconstitue géométriquement la situation du lemme précédent.*

Proposition 0.2.2. — *Soient* $M^{2n} (n>0)$ *une variété fermée munie d'une parallélisation stable* $t$ *et* $q$ *la forme quadratique de Kervaire définie sur* $H^n(M; \mathbb{Z}/2)$; *soit* N *une variété compacte (pas nécessairement orientée) dont* M *est le bord. Alors, pour tout* $y$ *de* $H^n(N; \mathbb{Z}/2)$ *on a la formule :*

$$q(i^* y) = \langle v_{n+1}^t \cup y, [N] \rangle,$$

*où* $v_{n+1}^t$ *désigne, dans* $H^{n+1}(N, M; \mathbb{Z}/2)$, *la classe de Wu relative définie grâce à* $t$, *et où* $i$ *désigne l'inclusion de* M *dans* N.

Or l'image de $v_{n+1}^t$ dans $H^{n+1}(N; \mathbb{Z}/2)$ est nulle (ce que l'on peut déduire de la nullité de la classe de Wu absolue $v_{n+1}(N)$ ou de la formule ci-dessus), soit $u$ une classe de $H^n(M; \mathbb{Z}/2)$ telle que $v_{n+1}^t = \partial u$. La formule de la proposition ci-dessus devient :

$$q(i^* y) = \langle u \cup i^* y, [M] \rangle.$$

D'autre part le sous-espace vectoriel Im $i^*$ de $H^n(M; \mathbb{Z}/2)$ est son propre orthogonal. On a bien reconstitué la situation du lemme 0.2.1, l'invariant de Kervaire de $(M, t)$ est $q(u)$.

0.3. Plan. — Le plan du papier est le suivant. Dans le paragraphe 1 on met en place le problème et on introduit quelques notations, dans le paragraphe 2 on rappelle la définition de W. Browder de la forme quadratique de Kervaire et dans le paragraphe 3 on rassemble les propriétés des classes de Wu utilisées en 4 et 6.2. Le paragraphe 4 contient la démonstration, assez détaillée, du théorème 0.1.1; on indique brièvement dans le paragraphe 5 comment le corollaire 0.1.2 en découle. Le paragraphe 6 est consacré à la démonstration du lemme 0.2.1 et de la proposition 0.2.2. Dans l'appendice A on rappelle pour fixer les notations et la terminologie la construction des opérations cohomologiques fonctionnelles et de certaines opérations cohomologiques secondaires. Enfin, l'appendice B donne une interprétation « géométrique » de la forme quadratique de Kervaire.

## 1. Mise en place du problème, notations

Soit $M^{2n}$ une sous-variété compacte sans bord de $\mathbb{R}^{2n+p}(p>0)$ dont le fibré normal dans $\mathbb{R}^{2n+p}$, noté $\nu_M$, est trivialisé; c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $t:\nu_M \to \varepsilon$, $\varepsilon$ désignant le fibré trivial de dimension $p$ sur le point. Ce morphisme détermine une parallélisation stable de M qui est également notée $t$.

On note $T\xi$ l'espace de Thom d'un fibré vectoriel $\xi$ et plus généralement T le foncteur « espace de Thom ». Soit $P_M: S^{2n+p} \to T\nu_M$ l'application de Thom (ici $S^{2n+p}$ apparaît comme le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^{2n+p}$), on note $f$ la composition suivante :

$$S^{2n+p} \xrightarrow{P_M} T\nu_M \xrightarrow{Tt} T\varepsilon = S^p.$$

Soit X l'espace $S^p \cup_f D^{2n+1+p}$. L'action de A (l'algèbre de Steenrod modulo 2) sur $H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ est triviale puisque tout élément de A de degré $2n+1$ est décomposable. Toute opération cohomologique secondaire stable du type de celle considérée en 0.1.1 est donc définie sur $H^p(X; \mathbb{Z}/2)$ et à valeurs dans $H^{2n+1+p}(X; \mathbb{Z}/2)$. Le problème est de relier l'invariant de Kervaire de $(M, t)$ à l'action d'une telle opération.

La cohomologie (et implicitement l'homologie) utilisée dans les paragraphes 2, 3, 4, 5, est exclusivement à coefficients $\mathbb{Z}/2$; elle y est simplement désignée par le symbole $H^*$.

On supposera enfin que l'entier $p$ est assez grand pour assurer tous les phénomènes de stabilité dont nous aurons besoin; $p>2n+1$ devrait suffire.

## 2. La définition de W. Browder de la forme quadratique de Kervaire

Soient $x$ un élément de $H^n M$ et $x': M_+ \to K(\mathbb{Z}/2, n)$ une application pointée qui représente $x$($M_+$ est la réunion disjointe de M et d'un point base). On note $\varphi_x$ la composition suivante :

$$S^{2n+p} \xrightarrow{P_M} T\nu_M \xrightarrow{\Delta} T\nu_M \wedge M_+ \xrightarrow{Tt \wedge x'} T\varepsilon \wedge K(\mathbb{Z}/2, n) = S^p K(\mathbb{Z}/2, n)$$

où $\Delta$ désigne l'application « diagonale », $\Delta$ correspond au niveau des espaces de Thom au morphisme de fibrés : $\nu_M \to \nu_M \times M$, produit de l'identité et de la projection. Soit $S^p \iota$ dans $H^{n+p}(S^p K(\mathbb{Z}/2, n))$ la suspension de la classe canonique $\iota$ de $K(\mathbb{Z}/2, n)$, alors l'opération cohomologique fonctionnelle (*voir* appendice A) $S q_{\varphi_x}^{n+1}(S^p \iota)$ est définie modulo 0 [puisque toutes les opérations cohomologiques de type $(\mathbb{Z}/2, n, \mathbb{Z}/2, 2n)$ sont stables l'homomorphisme $\varphi_x^* : H^{2n+p}(S^p K(\mathbb{Z}/2, n)) \to H^{2n+p} S^{2n+p}$ est nul]; W. Browder [4] définit la forme quadratique de Kervaire en posant :

$$q(x) = \langle S q_{\varphi_x}^{n+1}(S^p \iota), [S^{2n+p}] \rangle .$$

On donne dans l'appendice B une interprétation « géométrique » de cette forme quadratique.

## 3. Classes de Wu

3.1. Soient A l'algèbre de Steenrod modulo 2 et $\chi : A \to A$ la conjugaison canonique. Soit $k$ un entier, on a par définition :

(3.1.1)
$$\sum_{i+j=k} S q^i (\chi S q^j) = \begin{cases} S q^0 & \text{si } k=0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, \end{cases}$$

(3.1.2)
$$\sum_{i+j=k} (\chi S q^i)(S q^j) = \begin{cases} S q^0 & \text{si } k=0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

3.2. Soient $\xi$ un fibré vectoriel de base B et C un sous-espace de B. On note génériquement $\Theta$ les isomorphismes de Thom :

$$H^* B \to H^* T\xi, \qquad H^*(B, C) \to H^*(T\xi, T(\xi|_C)).$$

Soit $U_\xi$ la classe de Thom de $T\xi$, on définit les classes de Wu de $\xi$ par la formule :

$$v_k(\xi) = \Theta^{-1}((\chi S q^k) U_\xi) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

3.3. Soit $x$ un élément de $H^*(B, C)$, la relation (3.1.1) implique :

(3.3.1)
$$\sum_{i+j=k} S q^i \Theta(v_j(\xi) \cup x) = \Theta(S q^k x).$$

En particulier s'il existe un élément $\hat{v}_k$ de $H^k(B, C)$ qui donne $v_k(\xi)$ dans $H^k B$ on a :

(3.3.2)
$$\sum_{i=1}^{k} S q^i \Theta(v_{k-i}(\xi) \cup \hat{v}_k) = 0$$

puisque $v_k(\xi) \cup \hat{v}_k = \hat{v}_k \cup \hat{v}_k = S q^k \hat{v}_k$.

*Remarque.* — Soient $N^r$ une variété compacte à bord et $x$ un élément de $H^{r-k}(N, \partial N)$, la formule (3.3.1) a pour conséquence la formule de Wu :

$$\langle S q^k x, [N] \rangle = \langle v_k(N) \cup y, [N] \rangle ,$$

où $v_k(N)$ désigne la $k$-ième classe de Wu du fibré normal stable absolu de N. On trouve souvent dans la littérature une définition des classes de Wu telle que $v_k(N)$ soit plutôt la $k$-ième classe de Wu du fibré tangent de N.

3.4. Enfin si $y$ est un élément de $H^*(B, C)$, la relation (3.1.2) implique :

$$\sum_{i+j=k} (\chi \, S q^i) \Theta (S q^j y) = \Theta (v_k(\xi) \cup y). \tag{3.4}$$

Cette égalité montre que si le degré de $y$ est strictement inférieur à $k$ alors $\Theta(v_k(\xi) \cup y)$ appartient à $I(A) H^*(T\xi, T(\xi|_C))$, $I(A)$ désignant l'idéal d'augmentation de A.

## 4. Démonstration du théorème 0.1.1

4.1. Soient $B = BO(p)$ un classifiant pour les fibrés vectoriels de dimension $p$ et $\gamma$ le fibré universel sur B; on suppose que B est un CW-complexe pointé et que la restriction de $\gamma$ au point base est identifiée à $\varepsilon$, le fibré trivial de dimension $p$ sur le point.

D'après Thom [11], si $p$ est assez grand, l'homomorphisme :

$$\pi_{2n+p} S^p = \pi_{2n+p} T\varepsilon \to \pi_{2n+p} T\gamma$$

est nul. La sous-variété M de $\mathbb{R}^{2n+p}$ est donc le bord d'une sous-variété compacte N de $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^{2n+p}$ dont l'intersection avec $0 \times \mathbb{R}^{2n+p}$ est réduite à M et transverse. Le fibré normal $\nu_N$ de N dans $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^{2n+p}$ prolonge $\nu_M$ et l'application de Thom associée à N, $P_N : D^{2n+1+p} \to T\nu_N$ fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
S^{2n+p} \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_M"] & D^{2n+1+p} \arrow[d, "p_N"] \\
T\nu_M \arrow[r, hook] & T\nu_N
\end{tikzcd}$$

Le point suivant va nous donner les moyens d'expliciter le fait que $v_{n+1}(\nu_N) = 0$.

4.2. Soit $\pi : \overline{B} \to B$ la fibration induite de la fibration des chemins sur $K(\mathbb{Z}/2, n+1) : EK(\mathbb{Z}/2, n+1) \to K(\mathbb{Z}/2, n+1)$, par une application pointée : $B \to K(\mathbb{Z}/2, n+1)$ représentant $v_{n+1}(\gamma)$; la fibre de $\pi$, $\Omega K(\mathbb{Z}/2, n+1)$, est une espace du type $K(\mathbb{Z}/2, n)$ que l'on note K. On pose $\overline{\gamma} = \pi^* \gamma$ et $\overline{\varepsilon} = \overline{\gamma}|_K$, $\overline{\varepsilon}$ est le fibré trivial de dimension $p$ sur K.

4.3. Quelques diagrammes commutatifs. — Choisissons une classification de $\nu_N$ qui fasse commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \nu_N \arrow[rr, "c"] \arrow[dd, dash] & & \gamma \arrow[dd, dash] \\
& & & \\
& N \arrow[rr, "b"] & & B \\
\nu_M \arrow[uuur, hook] \arrow[rr, "t"] \arrow[d, dash] & & \varepsilon \arrow[uuur, hook] \arrow[d, dash] & \\
M \arrow[uur, hook] \arrow[rr] & & \star \arrow[uur, hook] &
\end{tikzcd}$$

On observera que les classes caractéristiques relatives de N peuvent être définies à l'aide de l'application de paires $b:(\mathrm{N},\mathrm{M}) \to (\mathrm{B},\star)$.

Puisque $v_{n+1}(\nu_{\mathrm{N}})=0$ il existe une application $\overline{b}:\mathrm{N} \to \overline{\mathrm{B}}$ telle que $\pi \circ \overline{b}=b$. La restriction de $\overline{b}$ à M induit une application $s:\mathrm{M} \to \mathrm{K}$; on note $\overline{c}$ (resp. $\overline{t}$) le morphisme : $\nu_{\mathrm{N}} \to \overline{\gamma}$ (resp. $\nu_{\mathrm{M}} \to \overline{\varepsilon}$) déterminé par $\overline{b}$ et $c$ (resp. par $s$ et $t$). Le diagramme ci-dessus se « relève » donc en le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \nu_{\mathrm{N}} \arrow[rr, "\overline{c}"] \arrow[dd] & & \overline{\gamma} \arrow[dd] \\
\nu_{\mathrm{M}} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\overline{t}"] \arrow[dd] & & \overline{\varepsilon} \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & \\
 & \mathrm{N} \arrow[rr, "\overline{b}"] & & \overline{\mathrm{B}} \\
\mathrm{M} \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "s"'] & & \mathrm{K} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

On pose $u=s^*\iota$; puisque la transgression de $v_{n+1}(\gamma)$ est la classe canonique $\iota$ de K, l'image, par le connectant $\partial:\mathrm{H}^n(\mathrm{M}) \to \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{N},\mathrm{M})$, de $u$ est $v_{n+1}^t$.

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}^{2n+p} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\mathrm{M}}"] & \mathrm{S}^p \arrow[dd, equal] \\
\mathrm{T}\,\nu_{\mathrm{M}} \arrow[d, "\mathrm{T}\,\overline{t}"] & \\
\mathrm{T}\,\overline{\varepsilon} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{T}\,\varepsilon \arrow[d, hook] \\
\mathrm{T}\,\overline{\gamma} \arrow[r] & \mathrm{T}\,\gamma
\end{tikzcd}$$

L'espace X est par définition la cofibre de $f$, nous notons respectivement $\mathrm{T}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$ et $\mathrm{T}(\gamma,\overline{\gamma})$ les cofibres des applications : $\mathrm{T}\,\overline{\varepsilon} \to \mathrm{T}\,\varepsilon$ et $\mathrm{T}\,\overline{\gamma} \to \mathrm{T}\,\gamma$; soient $\varphi:\mathrm{X} \to \mathrm{T}(\varepsilon,\overline{\varepsilon})$ et $d:\mathrm{T}(\varepsilon,\overline{\varepsilon}) \to \mathrm{T}(\gamma,\overline{\gamma})$ les applications entre cofibres induites par le diagramme ci-dessus.

D'autre part l'application composée :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}^{2n+p+1} \arrow[r, "p_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{T}\,\nu_{\mathrm{N}} \arrow[r, "\mathrm{T}\,\overline{c}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{T}\,c"'] & \mathrm{T}\,\overline{\gamma} \arrow[r] & \mathrm{T}\,\gamma
\end{tikzcd}$$

et l'inclusion $\mathrm{S}^p=\mathrm{T}\,\varepsilon \to \mathrm{T}\,\gamma$ se recollent en une application $\psi:\mathrm{X} \to \mathrm{T}\,\gamma$.

Par construction, le diagramme ci-dessous est homotopiquement commutatif :

(4.3.1)
$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}\gamma \arrow[d, "j"] \\ \mathrm{X} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathrm{T}(\gamma,\bar{\gamma}) \\ & \mathrm{T}(\varepsilon,\bar{\varepsilon}) \arrow[u, "d"'] \end{tikzcd}$$

($j$ désigne l'application naturelle) et le suivant est commutatif :

(4.3.2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\partial"] & & \mathrm{T}(\varepsilon,\bar{\varepsilon}) \arrow[d, "\partial"] \\ & & \mathrm{S}^1 \mathrm{T}\bar{\varepsilon} = \mathrm{S}^{p+1}\mathrm{K}_+ \arrow[d] \\ \mathrm{S}^{2n+1+p} \arrow[rr, "\mathrm{S}^1\varphi_u"] & & \mathrm{S}^{p+1}\mathrm{K} \end{tikzcd}$$

[$\varphi_u$ désigne, comme dans le paragraphe 2, la composition :

$$\mathrm{S}^{2n+p} \xrightarrow{\mathrm{P_M}} \mathrm{T}\nu_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{T}\nu_{\mathrm{M}} \wedge \mathrm{M}_+ \xrightarrow{\mathrm{T}t \wedge s} \mathrm{T}\varepsilon \wedge \mathrm{K} = \mathrm{S}^p \mathrm{K};$$

les applications notées $\partial$ sont obtenues en « écrasant en un point » dans X et $\mathrm{T}(\varepsilon,\bar{\varepsilon})$ respectivement $\mathrm{S}^p$ et $\mathrm{T}\varepsilon$]. Il est clair que l'application $\mathrm{T}(\varepsilon,\bar{\varepsilon}) \to \mathrm{S}^{p+1}\mathrm{K}$ de ce diagramme est une équivalence d'homotopie.

4.4. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 0.1.1. — Soit $\varkappa$ l'invariant de Kervaire de $(\mathrm{M}, t)$, d'après le lemme 0.2.1 et la proposition 0.2.2 nous avons :

$$\varkappa = q(u) = \langle \mathrm{S}q_{\varphi_u}^{n+1}(\mathrm{S}^p\iota), [\mathrm{S}^{2n+p}] \rangle$$

soit encore :

$$\varkappa = \langle \mathrm{S}q_{S^1\varphi_u}^{n+1}(\mathrm{S}^{p+1}\iota), [\mathrm{S}^{2n+1+p}] \rangle.$$

En utilisant (4.3.2) il vient :

$$\varkappa = \langle \mathrm{S}q_{\varphi}^{n+1}(\Theta\,\partial\iota), [\mathrm{X}] \rangle.$$

Rappelons que $\Theta$ désigne génériquement l'isomorphisme de Thom; $\partial$ est le connectant : $\mathrm{H}^n\mathrm{K} \to \mathrm{H}^{n+1}(\bigstar, \mathrm{K})$ (soit $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ une application, alors $\mathrm{H}^*(\mathrm{Z}, \mathrm{Y})$ désigne la cohomologie de la cofibre de $g$).

L'image par la composition :

$$\mathrm{H}^{n+1}\,\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2,\,n+1)\simeq \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2,\,n+1),\mathrm{EK}(\mathbb{Z}/2,\,n+1))\to \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{B},\,\bar{\mathrm{B}})$$

de la classe canonique de K ($\mathbb{Z}/2$, $n+1$) est notée $\hat{v}_{n+1}$ ; $\hat{v}_{n+1}$ donne $v_{n+1}$ dans $\mathrm{H}^{n+1}$ B et $\partial\iota$ dans $\mathrm{H}^{n+1}(\star,\,\mathrm{K})$.

Nous avons d'une part :

$$d^*\,\Theta\,(\hat{v}_{n+1}\,v_{n+1-i})=\begin{cases}\Theta\,\partial\iota & \text{si}\quad i=n+1,\\ 0 & \text{si}\quad i\neq n+1\end{cases}$$

et d'autre part d'après (3.3.2) :

$$\sum_{i=1}^{n+1}\mathrm{S}\,q^i\,\Theta\,(\hat{v}_{n+1}\,v_{n+1-i})=0$$

donc :

$$\varkappa=\langle(\mathrm{S}\,q^1,\,\mathrm{S}\,q^2,\,\ldots,\,\mathrm{S}\,q^{n+1})_{d\circ\varphi}(\Theta\,(\hat{v}_{n+1}\,v_n),\,\Theta\,(\hat{v}_{n+1}\,v_{n-1})\,\ldots,\,\Theta\,\hat{v}_{n+1}),\,[\mathrm{X}]\rangle.$$

Puisque $d\circ\varphi=j\circ\psi$ (diagramme 4.3.1) et que $j^*\,\Theta\,(\hat{v}_{n+1}\,v_{n+1-i})=\Theta\,(v_{n+1}\,v_{n+1-i})$ nous sommes amenés à considérer l'opération fonctionnelle :

$$(\mathrm{S}\,q^1,\,\mathrm{S}\,q^2,\,\ldots,\,\mathrm{S}\,q^{n+1})_{\psi}(\Theta\,(v_{n+1}\,v_n),\,\Theta\,(v_{n+1}\,v_{n-1}),\,\ldots,\,\Theta\,v_{n+1}).$$

Cette opération est définie modulo 0 si la forme linéaire

$$\psi^*:\mathrm{H}^{2n+1+p}\,\mathrm{T}\,\gamma\to\mathrm{H}^{2n+1+p}\,\mathrm{X}=\mathbb{Z}/2$$

est nulle (l'opération est triviale sinon !). On peut choisir N pour qu'il en soit ainsi, voici pourquoi (comparer [10], p. 104-105). Soient N′ une sous-variété compacte sans bord de $]0,\,\infty[\times\mathbb{R}^{2n+p}$ disjointe de N et $\psi':\mathrm{S}^{2n+1+p}\to\mathrm{T}\,\gamma$ l'application de Thom-Pontryagin associée à N′; si l'on remplace N par la réunion disjointe de N et N′ alors $\psi^*$ est remplacée par $\psi^*+\psi'^*$, $\psi'^*$ désignant la forme linéaire : $\mathrm{H}^{2n+1+p}\,\mathrm{T}\,\gamma\to\mathrm{H}^{2n+1+p}\,\mathrm{S}^{2n+1+p}=\mathbb{Z}/2$. Comme l'action de A sur $\mathrm{H}^*\,\mathrm{X}$ et $\mathrm{H}^*\,\mathrm{S}^{2n+1+p}$ est triviale, $\psi^*$ et $\psi'^*$ se factorisent par $\tilde{\psi}^*$, $\tilde{\psi}'^*:(\mathrm{H}^{2n+1+p}\,\mathrm{T}\,\gamma)/(\mathrm{I}\,(\mathrm{A})\,\mathrm{H}^*\,\mathrm{T}\,\gamma)^{2n+1+p}\to\mathbb{Z}/2$. Or, puisque $\mathrm{T}\,\gamma$ se comporte comme un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane en dimensions inférieures à $2\,p-1$ (*voir* ci-après), $\tilde{\psi}'^*$ est arbitraire.

Nous supposons désormais que l'homomorphisme :

$$\psi^*:\quad\mathrm{H}^{2n+1+p}\,\mathrm{T}\,\gamma\to\mathrm{H}^{2n+1+p}\,\mathrm{X}$$

est nul, dans ce cas il vient :

$$\varkappa=\langle(\mathrm{S}\,q^1,\,\mathrm{S}\,q^2,\,\ldots,\,\mathrm{S}\,q^{n+1})_{\psi}(\Theta\,(v_{n+1}\,v_n),\,\Theta\,(v_{n+1}\,v_{n-1}),\,\ldots,\,\Theta\,v_{n+1}),\,[\mathrm{X}]\rangle.$$

On sait [11] qu'il existe un produit (fini) $\mathrm{L}=\prod_{j\in\mathrm{J}}\mathrm{K}\,(\mathbb{Z}/2,\,p_j)$ d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane et une application $h:\mathrm{T}\,\gamma\to\mathrm{K}\,(\mathbb{Z}/2,\,p)\times\mathrm{L}$ tels que :

– la composition : $\mathrm{T}\,\gamma\to\mathrm{K}\,(\mathbb{Z}/2,\,p)\times\mathrm{L}\to\mathrm{K}\,(\mathbb{Z}/2,\,p)$ représente la classe de Thom de $\mathrm{T}\,\gamma$;

– $h^* : \mathrm{H}^m(\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2, p) \times \mathrm{L}) \to \mathrm{H}^m \mathrm{T}\gamma$ est un isomorphisme pour $m < 2p$;

– $p_j > p$ pour tout $j$ dans J.

Soit $\alpha' : \mathrm{X} \to \mathrm{K}(\mathbb{Z}/2, p)$ une application qui représente le générateur $\alpha$ de $\mathrm{H}^p \mathrm{X}$, alors le diagramme suivant, où $k$ désigne l'inclusion de $\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2, p)$ dans $\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2, p) \times \mathrm{L}$, est homotopiquement commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{T}\gamma \arrow[d, "h"] \\
\mathrm{X} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & \mathrm{K}(\mathbb{Z}/2, p) \times \mathrm{L} \\
 & \mathrm{K}(\mathbb{Z}/2, p) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Revenons au calcul de l'invariant de Kervaire :

$$\varkappa = \langle (\mathrm{S}q^1, \mathrm{S}q^2, \ldots, \mathrm{S}q^{n+1})_{h \circ \psi} ((h^*)^{-1} \Theta (v_{n+1} v_n), \\ (h^*)^{-1} \Theta (v_{n+1} v_{n-1}), \ldots, (h^*)^{-1} \Theta v_{n+1}), [\mathrm{X}] \rangle,$$

$$\varkappa = \langle (\mathrm{S}q^1, \mathrm{S}q^2, \ldots, \mathrm{S}q^{n+1})_{\alpha'} (k^* (h^*)^{-1} \Theta (v_{n+1} v_n), \\ k^* (h^*)^{-1} \Theta (v_{n+1} v_{n-1}), \ldots, k^* (h^*)^{-1} \Theta v_{n+1}), [\mathrm{X}] \rangle.$$

Soient $a_i$, $i$ de 1 à $n+1$, les éléments de A tels que $k^* (h^*)^{-1} \Theta (v_{n+1} v_{n+1-i}) = a_i \iota_p$ [$\iota_p$ est la classe canonique de $\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2, p)$]; ces éléments vérifient la relation $\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{S}q^i a_i = 0$ et la définition de $v_{n+1}$ entraîne $a_{n+1} = \chi \mathrm{S}q^{n+1}$. Soit enfin $\Phi$ l'opération cohomologique secondaire stable associée à la relation ci-dessus, alors, d'après la définition des opérations secondaires que nous donnons en A.2, ou si l'on préfère d'après la « deuxième formule de Peterson-Stein » [7], nous obtenons :

$$\varkappa = \langle \Phi \alpha, [\mathrm{X}] \rangle.$$

C.Q.F.D.

4.5. Remarque. – Soient U la classe de Thom de $\mathrm{H}^* \mathrm{MO}$ et $\Lambda : \mathrm{H}^* \mathrm{MO} \to \mathrm{A}$ une application A-linéaire telle que $\Lambda(\mathrm{U}) = \mathrm{S}q^0$, alors d'après ce qui précède on peut préciser l'énoncé du théorème 0.1.1 en prenant $a_i = \Lambda(\Theta(v_{n+1} v_{n+1-i}))$.

D'autre part on déduit facilement des formules (3.3.1) et (3.4) que les classes $\Theta(v_{n+1} v_{n+1-i})$ appartiennent au sous-A-module P de $\mathrm{H}^* \mathrm{MO}$ engendré sur A par les $\Theta v_j^2$, $j$ décrivant $\mathbb{N}$; puisque le nombre caractéristique $v_j^2$ [V] d'une variété V de dimension $2j$ est égal à sa caractéristique d'Euler-Poincaré modulo 2, $\Theta v_j^2$ n'appartient pas à $\mathrm{I}(\mathrm{A}) \mathrm{H}^* \mathrm{MO}$, ceci implique que les $\Theta v_j^2$ font partie d'une A-base de $\mathrm{H}^* \mathrm{MO}$ et en particulier qu'ils forment une A-base de P. La première coordonnée dans cette base de $\Theta v_{n+1} v_{n+1-i}$ est un choix « canonique » de $a_i$.

## 5. Le corollaire 0.1.2

Dans ce paragraphe nous suivons à nouveau [4]; les références utilisées sont [1], [2] et [5], exposés 13, 14, 15, 16.

L'homomorphisme $\lambda_\Phi : \pi^S_{2n} \to \mathbb{Z}/2$ déterminé par l'opération secondaire $\Phi$ ne dépend que de l'élément :

$$Sq^{n+1} \otimes_A \chi\, Sq^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} Sq^i \otimes_A a_i$$

du noyau de l'homomorphisme canonique $I(A) \otimes_A I(A) \to I(A)$, ce noyau s'identifie à $\mathrm{Tor}_2^A(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$.

Le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}_A^s(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ est le dual-gradué du $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel $\mathrm{Tor}_s^A(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$; $\mathrm{Tor}_1^A(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ est le quotient $I(A)/I(A)^2$ de $I(A)$ par le sous-espace des éléments décomposables et les classes dans ce quotient des éléments $Sq^{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, forment une base; on note $\{h_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ la base duale de $\mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$. On sait enfin que les produits $h_k h_l$, $0 \leqq l \leqq k$, $k \neq l+1$, forment une base de $\mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$.

On a :

$$\langle h_k h_l,\ Sq^{n+1} \otimes_A \chi\, Sq^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} Sq^i \otimes_A a_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } 2^k = 2^l = n+1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

[$\langle h_k, \chi\, Sq^{2^k} \rangle = 1$ parce que $\chi\, Sq^{2^k}$ est congru à $Sq^{2^k}$ modulo $I(A)^2$] ce qui montre que l'homomorphisme $\lambda_\Phi$ est nul si $n+1$ n'est pas une puissance de 2 et que, si $n+1=2^k$, il est non nul si et seulement si $h_k^2$ persiste à l'infini dans la suite spectrale d'Adams modulo 2 pour $\pi^S_*$.

## 6. Démonstration du lemme 0.2.1 et de la proposition 0.2.2

6.1. DÉMONSTRATION DU LEMME 0.2.1. — Observons d'abord que tout espace vectoriel E sur $\mathbb{Z}/2$ de dimension fini, muni d'une forme quadratique $q$ non dégénérée est « neutre au sens bilinéaire » c'est-à-dire possède un sous-espace vectoriel I tel que $I = I^\perp$. La restriction de $q$ à I est une forme linéaire qui se prolonge en une forme linéaire $\lambda$ sur E. Comme la forme bilinéaire associée à $q$ est non dégénérée il existe bien un élément $u$ de E tel que $\lambda(x) = u.x$.

Notons $E_0$ l'espace vectoriel $(\mathbb{Z}/2)^2$ muni de la forme quadratique non dégénérée : $(x_1, x_2) \longmapsto x_1^2 + x_1 x_2 + x_2$, comme cette forme est anisotrope $E_0$ représente un élément non trivial du groupe de Witt quadratique $WQ(\mathbb{Z}/2)$.

Nous allons montrer que la classe de Witt de E est nulle si $q(u)=0$ et est celle de $E_0$ si $q(u)=1$. Autrement dit nous allons simultanément calculer $WQ(\mathbb{Z}/2)$ et démontrer le lemme 0.2.1.

*Premier cas* : $q(I)=0$. — Dans ce cas E est neutre, $u$ appartient à I et nous avons bien $q(u)=0$.

*Deuxième cas* : $q(I) \neq 0$. — La restriction de $q$ à I est une forme linéaire non nulle, soient J son noyau et $u'$ un élément de I tel que $q(u')=1$. Puisque $u.u'=1$, $u$ et $u'$ sont indépendants et la restriction de la forme bilinéaire au sous-espace vectoriel F engendré par $u$ et $u'$ est non dégénérée. Décomposons E en la somme orthogonale $F \oplus F^{\perp}$; $F^{\perp}$ est neutre puisque J est un sous-espace vectoriel de $F^{\perp}$ tel que $q(J)=0$ qui est son propre orthogonal (dans $F^{\perp}$). Donc la classe de Witt de E est celle de F. Si $q(u)=0$, F est neutre et si $q(u)=1$, F est isomorphe à $E_0$.

6.2. Démonstration de la proposition 0.2.2. — On peut supposer $H^{2n+1}N=0$. Soit $g$ la composition suivante :

$$S^{2n+p} \xrightarrow{P_M} T\nu_M \xrightarrow{\Delta} T\nu_M \wedge M_+ \xrightarrow{Tt \wedge i} T\varepsilon \wedge N_+ = S^p N_+,$$

alors $q(i^* y) = \langle Sq_g^{n+1}(S^p y), [S^{2n+p}] \rangle$.

Plaçons-nous dans une situation légèrement plus générale. Notons $r$ la dimension de N (il ne sert à rien de supposer $r$ impair). Soit $k$ un entier, $1 \leqq k \leqq r$, et $y$ un élément de $H^{r-k}N$, nous allons démontrer la formule :

$$\langle Sq_g^k(S^p y), [S^{r-1+p}] \rangle = \langle v_k^t \cup y, [N] \rangle$$

qui généralise la formule de Wu habituelle (*voir* la remarque de 3.3). En effet si $y$ provient d'une classe $z$ de $H^{r-k}(N, M)$ le second membre est égal à $\langle v_k(N) \cup z, [N] \rangle$ et le premier à $\langle Sq^k z, [N] \rangle$ (dans ce cas $Sq_i^k y$ est définie et vaut $\partial^{-1} Sq^k z$).

Notons $\Delta$ les deux applications « diagonales » :

$$T\nu_M \to T\nu_M \wedge M_+, \qquad T\nu_N/T\nu_M \to (T\nu_N/T\nu_M) \wedge N_+$$

et $\partial$ les « connectants géométriques » :

$$T\nu_N/T\nu_M \to S^1 T\nu_M, \qquad T\gamma/T\varepsilon \to S^1 T\varepsilon.$$

Les deux compositions :

$$T\nu_N/T\nu_M \xrightarrow{\Delta} (T\nu_N/T\nu_M) \wedge N_+ \xrightarrow{\partial \wedge \mathrm{id}} (S^1 T\nu_M) \wedge N_+ = S^1(T\nu_M \wedge N_+)$$

et :

$$T\nu_N/T\nu_M \xrightarrow{\partial} S^1 T\nu_M \xrightarrow{S^1\Delta} S^1(T\nu_M \wedge M_+) \xrightarrow{S^1(\mathrm{id} \wedge i)} S^1(T\nu_M \wedge N_+)$$

sont homotopes, on en déduit que l'application $S^1 g : S^{r+p} \to S^{p+1}N_+$ est homotope à la composition :

$$S^{r+p} \xrightarrow{P_N/P_M} T\nu_N/T\nu_M \xrightarrow{\Delta} (T\nu_N/T\nu_M) \wedge N_+$$
$$\xrightarrow{Tc \wedge \mathrm{id}} (T\gamma/T\varepsilon) \wedge N_+ \xrightarrow{\partial \wedge \mathrm{id}} (S^1 T\varepsilon) \wedge N_+ = S^{p+1} N_+.$$

Notons $g'$ la composée des trois premières applications de la composition ci-dessus, alors :

$$\langle Sq_g^k(S^p y), [S^{r-1+p}] \rangle = \langle Sq_{S^1 g}^k(S^{p+1} y), [S^{r+p}] \rangle = \langle g'^* Sq_{(\partial \wedge \mathrm{id})}^k(S^{p+1} y), [S^{r+p}] \rangle.$$

Calculons l'opération secondaire $Sq_{(\partial \wedge \mathrm{id})}^k(S^{p+1} y)$. Pour cela considérons la cofibration suivante :

$$(T\gamma/T\varepsilon) \wedge N_+ \xrightarrow{\partial \wedge \mathrm{id}} S^1(T\varepsilon \wedge N_+) \to S^1(T\gamma \wedge N_+).$$

La classe $S^{p+1}\,y$ se relève en $S^1\,\Theta(1\times y)$ dans $H^{r-k+p+1}(S^1(T\gamma\wedge N_+))$ ($T\gamma\wedge N_+$ est l'espace de Thom du fibré $\gamma\times N$ de base $B\times N$). D'autre part d'après (3.3.1) :

$$S\,q^k\,\Theta(1\times y)=\sum_{i=0}^{k-1} S\,q^i\,\Theta(v_{k-i}\times y).$$

L'opération secondaire $S\,q^k_{(\partial\wedge\mathrm{id})}(S^{p+1}\,y)$ est donc représentée par :

$$\Theta(\tilde{v}_k\times y)+\sum_{i=1}^{k-1} S\,q^i\,\Theta(\tilde{v}_{k-i}\times y),$$

$\tilde{v}_j$ ($j>0$) désignant l'image de $v_j$ par l'isomorphisme $H^j B\simeq H^j(B,\star)$. Il en résulte :

$$g'^*\,S\,q^k_{(\partial\wedge\mathrm{id})}(S^{p+1}\,y)=g'^*\,\Theta(\tilde{v}_k\times y)$$

et l'on a bien $\langle g'^*\,\Theta(\tilde{v}_k\times y),\,[S^{r+p}]\rangle=\langle v^t_k\cup y,\,[N]\rangle$.

## APPENDICE A

### Opérations cohomologiques fonctionnelles et opérations cohomologiques secondaires

Afin de fixer les notations et la terminologie, nous rappelons dans cet appendice la construction des opérations cohomologiques fonctionnelles et de certaines opérations cohomologiques secondaires. Les opérations secondaires que nous considérons sont associées aux relations entre opérations primaires, leur indétermination est plus grande que celles des opérations secondaires définies par Adams [2]. La référence que nous employons à ce sujet est [9].

A.1. Opérations cohomologiques fonctionnelles. — Soient X, Y deux espaces et $f: X\to Y$ une application. Soit $u_i$, $i$ de 1 à $r$, un élément de $H^{p_i}(Y;G_i)$; soit $\theta_i$, $i$ de 1 à $r$, une opération cohomologique de type $(G_i, p_i; G, p)$. On suppose :

(*a*) $f^*\,u_i=0$ pour tout $i$;

(*b*) $\sum_{i=1}^{r}\theta_i\,u_i=0$.

Soit $C_f$ la cofibre de $f$. D'après (*a*) il existe $\hat{u}_i$ dans $H^{p_i}(C_f;G_i)$ qui s'applique sur $u_i$ dans $H^{p_i}(Y;G_i)$ et d'après (*b*) il existe $v$ dans $H^{p-1}(X;G)$ telle que $\partial v=\sum_{i=1}^{r}\theta_i\,\hat{u}_i$; $v$ est défini modulo les images des homomorphismes suivants :

$$f^*:\quad H^{p-1}(Y;G)\to H^{p-1}(X;G),$$
$$^1\theta_i:\quad H^{p_i-1}(X;G_i)\to H^{p-1}(X;G)$$

${}^1\theta_i$ désignant la suspension de $\theta_i$. La classe de $v$ dans le quotient correspondant de $H^{p-1}(X; G)$ est notée :

$$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)_f (u_1, u_2, \ldots, u_r).$$

L'application $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)_f$ est appelée opération cohomologique fonctionnelle.

La fonctorialité des opérations fonctionnelles s'énonce comme suit. Soit :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

un diagramme homotopiquement commutatif, alors :

$$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)_{f'} (h^* u_1, h^* u_2, \ldots, h^* u_r) \equiv g^* (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)_f (u_1, u_2, \ldots, u_r)$$

(« l'indétermination » du premier membre contient celle du second).

A.2. Opérations cohomologiques secondaires. — Soient maintenant $\theta'_i$, $i$ de 1 à $r$, des opérations cohomologiques de type $(\pi, n; G_i, p_i)$ telles que :

$(b')$ $\sum_{i=1}^{r} \theta_i \theta'_i = 0.$

Soit $u$ un élément de $H^n(X; \pi)$ tel que :

$(a')$ $\theta'_i u = 0$ pour tout $i$.

On peut considérer $u$ comme une classe d'homotopie d'application : $X \to K(\pi, n)$. Soit $\iota$ la classe canonique de $K(\pi, n)$, on pose :

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r; \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_r)(u) = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)_u (\theta'_1 \iota, \theta'_2 \iota, \ldots, \theta'_r \iota);$$

$\Phi(u)$ est un élément du quotient de $H^{p-1}(X; G)$ par le sous-groupe engendré par les images des opérations ${}^1\theta_i$ et par les $\lambda(u)$, $\lambda$ décrivant l'ensemble des opérations primaires de type $(\pi, n; G, p-1)$. L'application $\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r; \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_r)$ est l'opération cohomologique secondaire associée à la relation $\sum_{i=1}^{r} \theta_i \theta'_i = 0$.

On suppose à présent que les opérations $\theta_i$, $\theta'_i$ sont stables et que X est un espace pointé. Soit $S^d : H^*(X; \ ) \to H^{*+d}(S^d X; \ )$ l'isomorphisme de suspension. Pour $d$ assez grand $(S^d)^{-1} \Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r; \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_r)(S^d u)$ est un élément du quotient du groupe $H^{p-1}(X; G)$ par le sous-groupe engendré par les images des $\theta_i$ et par les $\lambda(u)$, $\lambda$ décrivant l'ensemble des opérations stables de type $(\pi, G, p-1-n)$; cet élément est indépendant du choix de $d$. On construit ainsi une application, notée encore $\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r; \theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_r)$, définie sur $\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} \theta'_i$ et à valeurs dans ce quotient, cette application est l'opération cohomologique secondaire stable associée à la relation $\sum_{i=1}^{r} \theta_i \theta'_i = 0$.

## APPENDICE B

On donne dans cette appendice une interprétation (parmi d'autres, *voir* par exemple [8] et [6]) de la forme quadratique de Kervaire ([2]).

On reprend les notations des paragraphes 1 et 2. Soit $V^n$ une sous-variété fermée de M. Soit $\nu_V$ le fibré normal stable absolu de V, on appelle réduction de $\nu_V$ à la dimension $n$, la donnée d'un fibré vectoriel $\xi$ de dimension $n$ de base V et d'un isomorphisme stable de $\nu_V$ sur $\xi$. Dans notre cas la trivialisation stable $t$ de M détermine une telle réduction, notée $r$; ici le fibré $\xi$ est le fibré normal de V dans M.

On suppose en outre que V est le bord d'une variété compacte W. Soit $\nu_W$ le fibré normal stable absolu de W, $\nu_W$ prolonge $\nu_V$. L'unique obstruction à étendre $r$ en une réduction de $\nu_W$ à la dimension $n$ appartient à $H^{n+1}(W, V; \pi_n(O/O(n)))$ (coefficients tordus), on la note $c(r)$. Or le groupe $\pi_n(O/O(n))$ vaut $\mathbb{Z}$ si $n$ est pair et $\mathbb{Z}/2$ si $n$ est impair, on peut donc dans tous les cas considérer l'image, notée $\rho_2 c(r)$, de $c(r)$ dans $H^{n+1}(W, V; \mathbb{Z}/2)$.

PROPOSITION B. — *Soit $x$ l'élément de $H^n(M; \mathbb{Z}/2)$ représenté par V, alors on a :*

$$q(x) = \langle \rho_2 c(r), [W] \rangle.$$

*Démonstration.* — Soit $\theta_V : M_+ \to MO(n)$ l'application de Thom associée à V, on considère comme au paragraphe 2 la composition suivante, notée

$$\varphi_V : \quad S^{2n+p} \xrightarrow{P_M} T\nu_M \xrightarrow{\Delta} T\nu_M \wedge M_+ \xrightarrow{Tt \wedge \theta_V} T\varepsilon \wedge MO(n) = S^p MO(n).$$

Puisque $p$ est assez grand on peut supposer que W est une sous variété de $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^{2n+p}$ dont l'intersection avec $0 \times \mathbb{R}^{2n+p}$ est réduite à V et transverse. Dans ce cas, l'application de Thom-Pontryagin associée à W, $\psi_W : D^{2n+1+p} \to MO(n+p)$ fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S^{2n+p} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi_V"'] & D^{2n+1+p} \arrow[d, "\psi_W"] \\ S^p MO(n) \arrow[r] & MO(n+p) \end{tikzcd}$$

Soit $\psi_{W,V} : S^{2n+1+p} \to MO(n+p)/S^p MO(n)$ l'application induite entre cofibres, alors $S^1 \varphi_V$ est homotope à $\partial \circ \psi_{W,V}$, $\partial : MO(n+p)/S^p MO(n) \to S^{p+1} MO(n)$ désignant le connectant géométrique.

([2]) Comparer avec W. Browder, *Complete Intersections and the Kervaire Invariant* (à paraître).

L'homomorphisme $s$ : $H^*(BO(n+p); \mathbb{Z}/2) \to H^*(BO(n); \mathbb{Z}/2)$ est surjectif, il en résulte d'une part que les homomorphismes $\partial^*$ et $\varphi_V^*$, en cohomologie modulo 2, sont nuls et d'autre part que le groupe $H^*(BO(n+p), BO(p); \mathbb{Z}/2)$ s'identifie au noyau de $s$; on note $\hat{w}_{n+1}$ la classe de $H^*(BO(n+p), BO(p); \mathbb{Z}/2)$ correspondant à $w_{n+1}$ par cette identification. Soit $U_n$ la classe de Thom de $MO(n)$, on a :

$$q(x) = \langle S q_{\varphi_V}^{n+1} (S^p U_n), [S^{2n+p}] \rangle = \langle S q_{S^1 \varphi_V}^{n+1} (S^{p+1} U_n), [S^{2n+p+1}] \rangle$$
$$= \langle \psi_{W,V}^* S q_{\partial}^{n+1} (S^{p+1} U_n), [S^{2n+p+1}] \rangle = \langle \psi_{W,V}^* \Theta \hat{w}_{n+1}, [S^{2n+p+1}] \rangle.$$

Cette dernière expression est bien égale à $\langle \rho_2 c(r), [W] \rangle$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J. F. Adams, *On the Structure and Applications of the Steenrod Algebra* (*Comment. Math. Helv.* vol. 32, 1958, p. 180-214).

[2] J. F. Adams, *On the Non-Existence of Elements of Hopf Invariant One* (*Ann. of Math.*, vol. 72, 1960, p. 20-104).

[3] C. Arf, *Untersuchungen über quadratische Formen in Körpen der Characteristik* 2 (*J. Reine Angew. Math.*, vol. 183, 1941, p. 148-167).

[4] W. Browder, *The Kervaire Invariant of Framed Manifolds and Its Generalization* (*Ann. of Math.*, vol. 90, 1969, p. 157-186).

[5] H. Cartan, *Séminaire E.N.S.*, 1959/1958.

[6] J. Lannes, Cours Peccot, 1978 (à paraître).

[7] F. P. Peterson et N. Stein, *Secondary Cohomology Operations: Two Formulas*, (*Amer. J. Math.*, vol. 81, 1959, p. 231-305).

[8] C. Rourke et D. Sullivan *On the Kervaire Obstruction* (*Ann. of Math.*, vol. 94, 1971, p. 397-413).

[9] E. Spanier, *Secondary Operations on Mapping and Cohomology* (*Ann. of Math.*, vol. 75, 1962, p. 260-282).

[10] R. Stong, *Notes on Cobordism Theories*, Princeton, 1968.

[11] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 28, 1954, p. 17-86).


(Manuscrit reçu le 12 mars 1980,
révisé le 21 octobre 1980.)

J. Lannes,
Université de Nancy-I,
U.E.R. Sciences Mathématiques,
C.O. 140,
54037 Nancy Cedex.