ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

M. DAMLAKHI
B. HELFFER

**Analyticité et itères d'un système de champs non elliptique**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 13, nº 4 (1980), p. 397-403
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_4_397_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4[e] série, t. 13, 1980, p. 397 à 403.

# ANALYTICITÉ ET ITÈRES D'UN SYSTÈME DE CHAMPS NON ELLIPTIQUE

PAR M. DAMLAKHI ET B. HELFFER

## 1. Introduction et notations

Il est bien connu qu'on peut caractériser les fonctions analytiques réelles dans un ouvert $\Omega$ par le contrôle pour tout entier $k$, sur tout compact de $\Omega$, en $L^{k+1}.k!$ des normes $L^2$ de leurs dérivées $k$-ième. On se pose ici la question de savoir si on a des résultats analogues en remplaçant les dérivées $k$-ièmes par des polynômes homogènes, non commutatifs, d'ordre $k$ de champs de vecteurs analytiques. Plus précisément, soient $X_1, \ldots, X_p$ des champs de vecteurs réels à coefficients analytiques définis dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. On note

$$(1.1)\qquad X^\alpha = X_{\alpha_1}.X_{\alpha_2}\ldots X_{\alpha_l} \quad \text{avec} \quad \alpha_j \in \{1, \ldots, p\}, |\alpha| = l \quad \text{et} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l).$$

Lorsque $p$ est égal à $n$ et que les champs $X_i$ sont linéairement indépendants en tout point de $\Omega$, on dit que le système des champs $X_i$ est elliptique. Dans [11], E. Nelson a donné la caractérisation suivante des fonctions analytiques :

THÉORÈME 1.1. — *Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *un système de champs elliptique et soit u une fonction de classe* $C^\infty$ *sur* $\Omega$, *telle que, pour tout compact* K *de* $\Omega$, *il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que l'on ait, pour tout* $\alpha$,

$$(1.2)\qquad \|X^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1} |\alpha| !$$

*alors u est analytique dans* $\Omega$.

Ce théorème généralisait le cas classique où l'on prend $X_i = \partial/\partial x_i$.

Dans [4] (*cf.* également [2]), Damlakhi démontrait le théorème plus fin suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *un système de champs elliptique et soit u une fonction de classe* $C^\infty$ *sur* $\Omega$, *telle que, pour tout compact* K *de* $\Omega$, *il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que l'on ait, pour* $i = 1, \ldots, n$ *et tout* $k$

$$(1.3)\qquad \|X_i^k u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{k+1} k !,$$

*alors u est analytique dans* $\Omega$.

Lorsque les $X_i$ sont les champs $\partial_{x_i}$, le théorème est dû à F. Browder [3]. Dans le cadre des algèbres de Lie, un théorème du même type que le théorème (1.2) est démontré par R. Goodman [7], pour caractériser les vecteurs analytiques d'une représentation unitaire. Nous reviendrons sur cette question dans la remarque (2.6).

L'objet de cet article est d'aborder le problème des itérés pour un système de champs non elliptique. On peut en effet se poser naturellement la question de savoir si le théorème (1.1) est vrai pour un système de champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ qui vérifient la condition de Hörmander, i. e. $(\mathrm{C.\,H.})_r$ les champs $X_i$, ainsi que leurs crochets d'ordre inférieur ou égal à $r$ engendrent, en chaque point $x$, l'espace tangent $T_x\,\Omega$.

Les résultats démontrés ici fournissent une réponse positive dans le cas particulier où les champs $X_i$ engendrent une algèbre de Lie nilpotente stratifiée de rang $r$, i. e. admettant la décomposition

$$\mathcal{G}=\mathcal{G}_1\oplus\ldots\oplus\mathcal{G}_r, \tag{1.4}$$

avec

$$[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_j]=\mathcal{G}_{j+1} \quad \text{pour} \quad 1\leqq j<r,$$
$$[\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_r]=0.$$

Autrement dit $\mathcal{G}$ est gradué et $\mathcal{G}_1$ engendre $\mathcal{G}$. Une telle définition a été introduite par G. B. Folland [13].

Le théorème principal est le suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Soient* $X_1, \ldots, X_p$ *des champs de vecteurs réels à coefficients analytiques dans* $\Omega$ *vérifiant* $(\mathrm{C.\,H.})_r$ *et qui engendrent une algèbre stratifiée de rang* $r$. *Soit* $u$ *une fonction* $C^\infty$ *sur* $\Omega$ *telle que l'on ait, pour tout* $\alpha$,

$$\|X^\alpha u\|_{L^2(K)}\leqq C_K^{|\alpha|+1}\,|\alpha|\,! \tag{1.5}$$

*Alors* $u$ *est analytique dans* $\Omega$.

Le théorème s'applique par exemple dans les cas suivants :

*Exemple* 1. — Dans $\mathbb{R}^2$,

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2=x\,\frac{\partial}{\partial y}$$

(dans ce cas, C. Goulaouic nous a indiqué qu'il existait une démonstration plus directe utilisant l'inégalité de Hardy).

*Exemple* 2. — Dans $\mathbb{R}^3$,

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2=x\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}.$$

*Exemple* 3. — Dans $\mathbb{R}^2$,

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2=x^2\,\frac{\partial}{\partial y}.$$

La démonstration du théorème (1.3) est basée sur le théorème (1.2) et sur le corollaire (2.3). La même démonstration permet d'obtenir une nouvelle caractérisation des vecteurs analytiques d'une représentation unitaire d'un groupe de Lie stratifié (*cf.* th. 2.7). Elle permet également d'étudier le problème des itérés dans des classes de Gevrey (*cf.* th. 2.9). Au paragraphe 3, on donne une application à un système de champs dérivé du $\overline{\partial}$.

Nous remercions le référé à qui nous devons cette démonstration de la proposition 2.1 (que nous n'avions que dans le cas $\mathcal{G}$ stratifiée).

## 2. Démonstration du théorème 1.3

Pour pouvoir appliquer le théorème (1.2), il nous faut démontrer pour les crochets d'ordre $j$ ($j \leqq r$) une égalité du type (1.3). Remarquons tout d'abord que, si l'on développe brutalement $[X_i, X_j]^k$ sous la forme $(X_i X_j - X_j X_i)^k$; on déduit de (1.5) une estimation de la forme

$$\| [X_i, X_j]^k u \| \leqq C^{k+1} (2k)!$$

qui est tout à fait insuffisante. La clef de la démonstration est donc de trouver par exemple une expression de : $[X_i, X_j]^k$ par un polynôme des $X_i$, mais permettant de meilleures estimations.

On a d'abord la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe et* $\mathcal{G}$ *son algèbre de Lie; soient* $X_1, \ldots, X_p$ *des générateurs de* $\mathcal{G}$. *Alors les* $e^{tX_i}$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, p$, *engendrent* G.

*Démonstration.* — Si $f = t^m X + O(t^{m+1})$, $g = t^n Y + O(t^{n+1})$ sont des fonctions analytiques à valeur dans $\mathcal{G}$, on a, d'après la formule de Campbell-Hausdorff (*cf.* [8]) :

$$e^f e^g e^{-f} e^{-g} = e^h \qquad \text{avec} \quad h = t^{m+n} [X, Y] + O(t^{m+n+1}).$$

Itérant ce résultat, on voit que, pour toute suite $i_1, \ldots, i_l$ de $[1, \ldots, p]$, il existe des indices $i(1), \ldots, i(N)$, des fonctions analytiques $F_1(t), \ldots, F_N(t)$ et en exposant entier $k$ tels que

$$\prod_j e^{F_j(t) X_{i(j)}} = \exp(t^k [X_{i_1}, [\ldots [X_{i_{l-1}}, X_{i_l}] \ldots] + O(t^{k+1}).$$

Dans ce résultat, on peut supposer $k$ impair. Remplaçant $t$ par $t^{1/k}$, on voit qu'il existe une fonction $C^1$ de la forme $\prod \exp F_j(t^{1/k}) X_{i(j)}$ tangente à :

$$t \to \exp t [X_{i_1}, [\ldots [X_{i_{l-1}}, X_{i_l}] \ldots].$$

Or les $[X_{i_1} [\ldots [X_{i_{l-1}}, X_{i_l}] \ldots]$ engendrent $\mathcal{G}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et il résulte alors du théorème des fonctions implicites que le sous-groupe engendré par les $e^{tX_i}$, $t \in \mathbb{R}$; $i = 1, \ldots, p$, contient un voisinage de l'élément neutre, donc est G entier puisque G est connexe. La proposition est ainsi démontrée.

On suppose de nouveau maintenant que $\mathscr{G}$ est stratifiée. Soit $\delta_t (t>0)$ la famille de dilatations définie sur $\mathscr{G}$ par

$$\delta_t(X)=t^j X \quad \text{si} \quad X\in\mathscr{G}_j \quad \text{et} \quad t>0. \tag{2.1}$$

On lui associe, *via* l'exponentielle, une famille d'automorphismes de G. $X_1, \ldots, X_p$ est la base de $\mathscr{G}_1$ et pour tout multi-indice $I=(i_1, \ldots, i_l)$ de $[1, \ldots, p]^l$, on notera pour alléger

$$X_I=[X_{i_1}[\ldots[X_{i_{l-1}}, X_{i_l}]\ldots].$$

La proposition admet le corollaire suivant :

Corollaire 2.2. — *Pour tout* I, *tel que* $|I|\leqq r$, *il existe* N *tel que, pour tout t dans* $\mathbb{R}$, *on ait :*

$$e^{t^{|I|}X_I}=g_1(t)\ldots g_N(t), \tag{2.2}$$

*avec*

$$g_j(t)=e^{tY_j} \text{ et } Y_j \text{ appartenant à } \mathbb{R}\, X_i \text{ pour un } i\in[1, \ldots, p]. \tag{2.3}$$

D'après la proposition, pour $t=1$, on a

$$e^{X_I}=e^{Y_1}\ldots e^{Y_N}. \tag{2.4}$$

On applique $\delta_t$ à (2.4) pour $t>0$ et on obtient :

$$\delta_t(e^{X_I})=e^{t^{|I|}X_I}=\delta_t(e^{Y_1}\ldots e^{Y_N})=e^{tY_1}\ldots e^{tY_N}$$

et donc (2.2) pour $t\geqq 0$.

Chaque membre de (2.2) dépendant analytiquement de $t$, on en déduit (2.2) pour tout $t$.

Corollaire 2.3. — *Pour tout* I *tel que* $|I|\leqq r$, *il existe* N *et* $Y_1, \ldots, Y_N$ *vérifiant* (2.3) *tels que, pour tout k, on ait, dans l'algèbre enveloppante* $\mathscr{U}(\mathscr{G})$ :

$$\frac{X_I^k}{k\,!}=\sum_{k_1+\ldots+k_N=|I|k}\frac{Y_1^{k_1}\ldots Y_N^{k_N}}{k_1\,!\ldots k_N\,!} \tag{2.5}$$

Il suffit en effet d'identifier dans (2.2) les développements en série en $t$.

*Remarque* 2.4. — *L'identité* (2.5) *passe bien entendu aux représentations de* $\mathscr{U}(\mathscr{G})$.

*C'est ce qu'on utilisera dans la suite, en considérant les éléments* $X_i$ *de* $\mathscr{G}_1$ *comme des champs de vecteurs dans* $\Omega$.

*Démonstration du théorème* 1.3. — Soit $u$ vérifiant (1.5). Compte tenu de $(C.H.)_r$ et du théorème (1.2), il suffit de montrer l'existence, pour tout compact K et tout multi-indice I de longueur inférieure ou égale à $r$, d'une constante $C_{I,K}$ telle que, pour tout $k\in N$, on ait

$$\|X_I^k u\|_{L^2(K)}\leqq C_{I,K}^{k+1}\, k\,! \tag{2.6}$$

On pose dans (2.3) :

$$Y_i = \lambda_i X_{j(i)} \qquad \text{pour} \quad i=1, \ldots, N \text{ et avec } j(i) \in [1, \ldots, p].$$

D'après (2.5), on a

$$\frac{X_I^k u}{k!} = \sum_{k_1+\ldots+k_N=|I|k} \frac{\lambda_1^{k_1} X_{j(1)}^{k_1} \ldots \lambda_N^{k_N} X_{j(N)}^{k_N} u}{k_1! \ldots k_N!}. \tag{2.7}$$

D'après (1.5), on déduit de (2.7), la majoration

$$\frac{\| X_I^k u \|}{k!} \leqq C_K^{|I|k+1} \sum_{k_1+\ldots+k_N=|I|k} \frac{(|I|k)!\,|\lambda_1|^{k_1} \ldots |\lambda_N|^{k_N}}{k_1! \ldots k_N!},$$

D'où

$$\frac{\| X_I^k u \|}{k!} = C_K^{|I|k+1} (|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_N|)^{|I|k}. \tag{2.8}$$

Prenant

$$C_{I,K} = \sup(C_K, C_K^{|I|} (|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_N|)^{|I|}),$$

on déduit (2.6) de (2.8). Le théorème (1.3) est ainsi démontré.

*Remarque* 2.5. — *Dans le cas ou* $r=2$, *on peut démontrer le théorème* (1.3), *en utilisant à la place de* (2.5), *la formule*

$$(\operatorname{ad} X)^k Y^k = k!\,[X, Y]^k \tag{2.9}$$

*où on a posé pour* A *dans* $\mathscr{U}(\mathscr{G})$.$(\operatorname{ad} X) A = [X, A]$.

*Remarque* 2.6. — *Vecteurs analytiques d'une représentation unitaire d'un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie stratifiée.*

On renvoie à [7] pour les définitions. On peut démontrer exactement comme le théorème 1.3 et compte tenu d'un théorème de R. Goodman [7] le théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — *Soit* $\pi$ *une représentation unitaire d'un groupe connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie stratifiée* $\mathscr{G}$ *engendrée par* $X_1, \ldots, X_p$.

*Alors u est un vecteur analytique pour* $\pi$ *si et seulement si u est un vecteur* $C^\infty$ *qui vérifie, pour une constante* C *convenable*

$$\| \pi(X^\alpha) u \|_{\mathscr{H}_\pi} \leqq C^{|\alpha|+1} |\alpha|!$$

*où* $\mathscr{H}_\pi$ *désigne l'espace de la représentation.*

*Remarque* 2.8. — *Itérés Gevrey.*

Il est montré dans [2] que le théorème (1.2) est encore vrai dans les classes de Gevrey $G^s$. Le théorème suivant se démontre comme le théorème (1.3) :

THÉORÈME 2.9. — *Sous les hypothèses du théorème* (1.3), *soit u une fonction* $C^\infty$ *sur* $\Omega$ *telle que, pour tout compact* K *de* $\Omega$, *il existe une constante* $C_K$ *strictement positive, telle que l'on ait, pour tout* $\alpha$,

$$\|X^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1} (|\alpha|!)^s \qquad (\textit{avec } s \geqq 1) \tag{2.10}$$

*alors u est dans* $G^{1+(s-1)r}(\Omega)$.

En calquant la démonstration du théorème (1.2) de G. Métivier [10], il est possible de démontrer que, si le système de champs $X_i$ n'est pas elliptique en un point $x_0$, on peut construire, pour tout $s>1$, pour tout $s'<2s-1$, une fonction $C^\infty$ $u$ vérifiant (2.10) et qui n'est pas dans $G^{s'}$. Le théorème (2.9) est donc optimal pour $r=2$.

## 3. Application

Sur une variété analytique réelle M de dimension $2n-1$, on considère $(2n-1)$ champs indépendants $X_1, \ldots, X_{2n-2}$, T à coefficients analytiques, avec la propriété que la matrice $C_{jk}(x)$, $x=(x_1, \ldots, x_{2n-1})$ donnée par

$$[X_j, X_k] = C_{jk}(x)\, T \quad (\text{mod } \{X_j\}) \tag{3.1}$$

satisfait à

$$\det (C_{jk}(x)) \neq 0 \tag{3.2}$$

près d'un point $x_0$ dans M.

Ces hypothèses sont celles prises par D. S. Tartakoff dans [12]. On va déduire du théorème 1.3, le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $X_1, \ldots, X_{2n-2}$ *des champs sur* M *vérifiant* (3.1) *et* (3.2) *et u une fonction* $C^\infty$ *dans un voisinage* $\Omega$ *de* $x_0$ *dans* M *vérifiant : pour tout compact* K *de* $\Omega$, *il existe une constante* $C_K>0$ *telle que l'on ait, pour tout* $\alpha$ :

$$\|X^\alpha u\|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1} |\alpha|! \quad (^1), \tag{3.3}$$

*alors u est analytique dans* $\Omega$.

*Démonstration.* — On observe que l'inégalité (3.3) est stable par un changement de coordonnées analytiques réelles. Rappelons le lemme suivant démontré par exemple dans [5] (lemme 2.6).

LEMME 3.2. — *Soit* $(X_1, \ldots, X_p)$ *un système de p champs analytiques définis sur un ouvert* $\Omega$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et u une fonction* $C^\infty$ *sur* $\Omega$ *vérifiant* (3.3). *Soit* $(Y_1, \ldots, Y_q)$ *un système de q champs définis par*

$$Y_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ji} X_i, \qquad j=1, \ldots, q,$$

(1) On suppose qu'on a choisi une densité partout différente de 0 pour définir $L^2$. Mais les hypothèses ne dépendent pas de ce choix.

*avec $a_{i,j}$ analytique dans $\Omega$. Alors on a :*
*pour tout compact* K *de* $\Omega$, *il existe une constante* $C_K > 0$ *telle que l'on ait, pour tout* $\alpha$,

$$\| Y^\alpha u \|_{L^2(K)} \leqq C_K^{|\alpha|+1} |\alpha| ! \tag{3.4}$$

Il résulte du théorème classique de Darboux (comme cela a été observé par A. Dynin [6] et utilisé par D. S. Tartakoff [12]), qu'il existe localement des coordonnées analytiques $(x, y, t)$ et des champs $Y_j$ tels que l'on ait dans ces coordonnées

$$Y_j = \sum_{i=1}^{2n-2} a_{ji} X_i, \qquad j = 1, \ldots, 2n-2 \quad \text{avec} \quad a_{ji} \text{ analytique,} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} Y_j = \dfrac{\partial}{\partial y_j} - x_j \dfrac{\partial}{\partial t} & \text{pour } j = 1, \ldots, n-1, \\ Y_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j} & \text{pour } j = n, \ldots, 2n-2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Compte tenu du lemme, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où les champs $Y_j$ vérifient (3.6). Dans ce cas, on peut appliquer le théorème 1.3.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. S. BAOUENDI et G. MÉTIVIER, *Caractérisation de l'analyticité et itérés d'opérateurs hypoelliptiques de type principal* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1979-1980, exposé n° 12).

[2] P. BOLLEY, J. CAMUS et C. MATTERA, *Analyticité microlocale et itérés d'opérateurs* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1978-1979, exposé n° 13).

[3] F. BROWDER, *Real Analytic Functions on Product Spaces and Separate Analyticity* (*Canadian J. Math.*, vol. 13, 1961, p. 650-656).

[4] M. DAMLAKHI, *Analyticité et itérés d'opérateurs pseudo-différentiels* (*J. Math. Pures et Appl.*, vol. 58, 1979, p. 63-74).

[5] M. DERRIDJ et C. ZUILY, *Sur la régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander* (*J. Math. Pures et Appl.*, vol. 52, 1973, p. 309-336).

[6] A. DYNIN, *Pseudodifferential Operators on Heisenberg Groups*, Éditions du C.I.M.E., 1977.

[7] R. GOODMAN, *Analytic and Entire Vectors for Representations of Lie Groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 143, 1969, p. 55-76).

[8] G. HOCHSCHILD, *The Structure of Lie Groups*, Holden day Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1965.

[9] L. HORMANDER, *Hypoelliptic Second Order Differential Equations* (*Acta Math.*, vol. 119, 1967, p. 147-171).

[10] G. MÉTIVIER, *Propriété des itérés et ellipticité* (*Comm. in P.D.E.*, t. 3, 1978, p. 827).

[11] E. NELSON, *Analytic Vectors* (*Ann. of Maths*, vol. 70, n° 3, 1959, p. 572-615).

[12] D. S. TARTAKOFF, *The Local Real Analyticity of Solutions to and -Neumann Problem* (*Reprint et Proc. of the Nat. Acad. of Sciences*, vol. 75, n° 7, 1978, p. 3027-3028).

[13] G. B. FOLLAND, *Subelliptic Estimates and Function Spaces on Nilpotent Lie Groups* (*Ankiv för Mat.*, vol. 13, n° 2, 1975, p. 161-207).


(Manuscrit reçu le 15 février 1980
révisé le 5 mars 1980.)

M. DAMLAKHI, Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques, 91405 Orsay.

B. HELFFER, Université de Nantes,
Département de Mathématiques, 44072 Nantes.