ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL GÉRARDIN
PHILIP KUTZKO

Facteurs locaux pour GL(2)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 13, nº 3 (1980), p. 349-384
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_3_349_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4^e^ série, t. 13, 1980, p. 349 à 384.

FACTEURS LOCAUX POUR GL (2)

PAR PAUL GÉRARDIN et PHILIP KUTZKO

On dispose actuellement de plusieurs méthodes pour construire les représentations supercuspidales du groupe GL (2) sur un corps local $\mathfrak{p}$-adique k :

(*a*) d'une part, à l'aide de la représentation de Weil relative à l'algèbre de quaternions sur k ([7], § 1 et 4), ce qui ramène à la construction des représentations irréductibles du groupe multiplicatif de l'algèbre de quaternions;

(*b*) d'autre part, par induction à partir d'un sous-groupe ouvert de GL (2), compact modulo le centre $k^\times$ ([5], [8], [11]);

(*c*) enfin, la représentation de Weil relative à une extension quadratique séparable E de k fournit en se décomposant des représentations supercuspicales de GL (2) paramétrées par les caractères réguliers du groupe $E^\times$ ([7], § 1 et 4).

On s'intéresse donc au dictionnaire entre ces réalisations. L'objet de cet article est le calcul des facteurs locaux des représentations obtenues par la seconde méthode; le facteur L vaut 1 pour les représentations supercuspidales, et le facteur ε s'obtient à partir d'une formule que donnent Jacquet et Langlands ([7], th. 2.18), à savoir l'équation fonctionnelle de Tate ([2] *a*, 3.2.3 (E)). Nous donnons alors la correspondance cherchée pour les extensions quadratiques qui ne sont pas sauvagement ramifiées; le cas général est traité dans [8]'.

Le plan est le suivant. Les deux premiers paragraphes rappellent la définition des facteurs ε relatifs au groupe de Weil du corps k et au groupe GL (2). On y trouvera des résultats épars dans la littérature ([7], [2], [6]), ou que P. Cartier exposa au premier semestre 1977 au séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes de l'Université Paris-VII. Ensuite, le paragraphe 3 traite le cas des représentations supercuspidales relatives à l'extension quadratique non ramifiée de k (toutes les extensions considérées sont supposées contenues dans une extension algébriquement close fixée); le paragraphe 4 s'occupe du cas ramifié mais modéré. Au paragraphe 5, nous rappelons la construction des autres représentations supercuspidales suivant la méthode d'induction [8] : le groupe de la droite affine sur le corps de base et sa représentation non dégénérée jouent un rôle essentiel, comme on le sait par le modèle de Kirillov [7], et notre exposition met systématiquement en valeur ce point de vue, en s'efforçant de limiter tout arbitraire dans les choix des paramètres. Le calcul des facteurs ε est alors effectué au paragraphe 6.

Les méthodes données sont assez générales pour devoir fonctionner également dans le cas des algèbres simples centrales de dimension quelconque n^2. Ceci vient d'être vérifié pour les représentations supercuspidales relatives aux caractères réguliers de l'extension non ramifiée de degré n [5]'. Pour les algèbres de quaternions, on peut également faire les calculs directement.

1. Facteurs locaux des groupes de Weil

1.1. Soit k un corps local non archimédien; on note $\mathcal{O}$ l'anneau de ses entiers, $\mathfrak{p}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, q l'ordre du corps résiduel $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}^\times$ le groupe des unités, noyau de l'application val de valuation

$$1 \to \mathcal{O}^\times \to k^\times \overset{\text{val}}{\to} \mathbf{Z} \to 0;$$

on écrit $\mu = \mu_k = q^{-\text{val}}$ pour la valeur absolue normalisée.

1.2. La donnée d'un caractère non trivial ψ du groupe additif de k définit un isomorphisme entre ce groupe et son dual de Pontrjagin, par l'accouplement

$$(x, y) \mapsto \psi(xy);$$

la mesure de Haar sur k qui est autoduale pour ce bicaractère est caractérisée par

$$\int_{\mathcal{O}} d_\psi x = q^{-\operatorname{ord}\psi/2};$$

où ord ψ, l'*ordre* de ψ, est le plus grand entier n pour lequel la restriction de ψ au groupe $\mathfrak{p}^{-n}$ est triviale.

1.3. Appelons ici *caractères* de $k^\times$ les représentations continues de degré 1 du groupe $k^\times$; on dit qu'un caractère χ de $k^\times$ est *non ramifié* si sa restriction au groupe des unités est triviale; il se factorise donc à travers l'application val; dans le cas contraire, on dit que le caractère est *ramifié*; le *conducteur* $a(\chi)$ du caractère est 0 s'il est non ramifié, et, sinon le plus petit entier m tel que la restriction $\chi \mid 1+\mathfrak{p}^m$ soit triviale. Pour $a(\chi)=1$, on dit que χ est modérément ramifié.

Pour tout entier n, on note n' la partie entière de $n/2$ et $n''=(n+1)'$. Pour un caractère χ dont le conducteur est au moins 2, l'application

$$x \mapsto \chi(1+x),$$

est un caractère du sous-groupe de k formé des x de val $x \geqq a(\chi)''$; si l'on s'est donné en plus un caractère non trivial ψ du groupe additif de k, alors il y a un élément $\chi_\psi \in k^\times$, de valuation $-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi$, unique modulo le sous-groupe $1+\mathfrak{p}^{a(\chi)'}$, tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x), \qquad \text{val}\, x \geqq a(\chi)''.$$

1.4. Les caractères non ramifiés de $k^\times$ s'écrivent μ^s, où $s \in \mathbf{C}/(2\pi i/\operatorname{Log} q)\,\mathbf{Z}$; ils possèdent donc naturellement une structure analytique complexe; les caractères de $\mathcal{O}^\times$ groupe compact, formant un groupe discret, l'ensemble des caractères de $k^\times$ peut donc être naturellement muni d'une structure analytique. On définit une fonction méromorphe L sur l'ensemble $\mathscr{A}_1(k)$ des caractères de $k^\times$ en posant

$$\mathrm{L}(\chi)=1 \qquad \text{si} \quad \chi \text{ est ramifié};$$
$$\mathrm{L}(\chi)=(1-q^{-s})^{-1} \qquad \text{pour} \quad \chi=\mu^s.$$

Il y a alors, pour chaque caractère non trivial ψ du groupe additif de k, et pour chaque caractère χ de $k^\times$, un nombre $\varepsilon(\chi, \psi)\in \mathbf{C}^\times$, tel que, pour toute fonction f sur k qui est localement constante à support compact, on ait la relation suivante ([1], chap. VII, 2), où les intégrales sont prises en prolongement analytique

$$\frac{\displaystyle\int_{k^\times} f_\psi(x)\chi(x)^{-1}\,d_\psi x}{\mathrm{L}(\chi^{-1}\mu)}=\varepsilon(\chi, \psi)\frac{\displaystyle\int_{k^\times} f(x)\chi(x)\mu(x)^{-1}\,d_\psi x}{\mathrm{L}(\chi)}$$

avec

$$f_\psi(x)=\int_k f(y)\psi(xy)\,d_\psi y.$$

Plus explicitement, on a les formules suivantes :

$$\varepsilon(\chi, \psi)=q^{-(s-1/2)\operatorname{ord}\psi} \qquad \text{pour} \quad \chi=\mu^s,$$
$$\varepsilon(\chi, \psi)=\int_{k^\times}\chi(x)^{-1}\psi(x)\,d_\psi x \qquad \text{pour} \quad \chi \text{ ramifié},$$

cette seconde formule s'obtenant en prenant pour f la fonction caractéristique d'un sous-groupe $1+\mathfrak{p}^m$ avec $m\geqq a(\chi)$; elle s'écrit aussi

$$\varepsilon(\chi, \psi)=\int_{\operatorname{val}x=-\operatorname{ord}\psi-a(\chi)}\chi(x)^{-1}\psi(x)\,d_\psi x=q^{\operatorname{ord}\psi/2}\sum_{\mathcal{O}^\times/(1+\mathfrak{p}^{a(\chi)})}(\chi^{-1}\psi)(\pi^{-\operatorname{ord}\psi-a(\chi)}x),$$

en notant π un élément premier de k; lorsque $a(\chi)$ est >1, choisissons un élément χ_ψ de $k^\times$ tel que

$$\chi(1+x)=\psi(\chi_\psi x), \qquad \operatorname{val}x\geqq a(\chi)'';$$

alors, par sommation sur les classes modulo $1+\mathfrak{p}^{a(\chi)''}$ on a la formule

$$\varepsilon(\chi, \psi)=\mu(\chi_\psi)^{1/2}\chi(\chi_\psi)^{-1}\psi(\chi_\psi)\hat{\int}_{\mathfrak{p}^{a(\chi)'}/\mathfrak{p}^{a(\chi)''}}\chi(1+x)^{-1}\psi(\chi_\psi x) \qquad \text{pour} \quad a(\chi)>1,$$

en notant $\displaystyle\hat{\int}_{\mathrm{A}}$ pour un groupe commutatif fini A, l'expression $(\operatorname{Card}\mathrm{A})^{-1/2}\displaystyle\sum_{\mathrm{A}}$.

On notera $G(\chi, \psi\chi_\psi)$ le dernier facteur de l'expression précédente : c'est 1 si $a(\chi)$ est pair >0, et si $a(\chi)$ est impair >1, c'est la somme de Gauss $G(Q)$ associée au caractère quadratique non dégénérée

$$Q: \quad x \in \mathfrak{p}^{a(\chi)'}/\mathfrak{p}^{a(\chi)''} \mapsto \chi(1+x)^{-1}\psi(\chi_\psi x),$$

défini sur un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps résiduel $\mathbf{F}_q$; lorsque q est pair, le nombre $G(Q)$ est une racine huitième de l'unité, vérifiant :

$$G(Q)^2 = q(c) \text{ où } c \text{ est donné par } \chi(1+x^2) = \chi(1+cs) \text{ sur } x \in \mathfrak{p}^{a(\chi)'},$$
$$G(Q)^4 = (-1)^r \qquad \text{si} \quad q = 2^r;$$

lorsque q est impair, il y a un unique $\chi_\psi \in k^\times/(1+\mathfrak{p}^{a(\chi)''})$ tel que $Q(x) = \chi(1+x^2/2)$ sur $\mathfrak{p}^{a(\chi)'}$, et dans ce cas

$$G(Q)^2 = (-1)^{(q-1)/2}$$

(pour ces formules, classiques, *voir* par exemple [5], I.1.1).

D'autre part, pour un caractère χ' de $k^\times$ de conducteur au plus $a(\chi)'$, où χ est un caractère de conducteur $a(\chi)>1$, on a

$$\varepsilon(\chi\chi', \psi) = \chi'(\chi_\psi)^{-1}\varepsilon(\chi, \psi), \qquad a(\chi') \leqq a(\chi)' \geqq 1,$$

comme on le voit facilement.

Remarquons enfin que si $a(\chi)$ est >1, et ψ prolonge le caractère $x \mapsto \chi(1+x)$ de $\mathfrak{p}^{a(\chi)''}$, alors on peut prendre $\chi_\psi = 1$ et que dans ce cas

$$\varepsilon(\chi, \psi) = \psi(1)\, G(\chi, \psi)$$

avec la convention précédente $G(\chi, \psi) = 1$ pour $a(\chi)$ pair.

1.5. Soit $W = W_k$ le groupe de Weil du corps local k ([12], App. 2); son quotient par l'adhérence du sous-groupe engendré par les commutateurs s'identifie canoniquement au groupe multiplicatif $k^\times$; soit $\tau = \tau_k : W \to k^\times$ la surjection correspondante. Pour chaque extension séparable finie E de k, le groupe de Weil W_E est naturellement plongé dans W, et, si l'extension E/k est galoisienne, le groupe W est extension du groupe de Galois de E/k par W_E, la classe du 2-cocycle de cette extension étant la classe fondamentale de $H^2(\mathrm{Gal}(E/k), E^\times)$ ([1], chap. VI).

1.6. Appelons *admissible* toute représentation de dimension finie sur $\mathbf{C}$ et continue du groupe W dont les opérateurs sont diagonalisables; notons $\mathscr{A}(k)$ l'ensemble des classes de représentations admissibles de W, $\mathscr{A}_n(k)$ celles de degré n et $\mathscr{A}_n^0(k)$ celles de degré n qui sont irréductibles. A chaque $\chi \in \mathscr{A}_1(k)$, c'est-à-dire à chaque caractère de $k^\times$ (1.4), on associe l'application $\omega \mapsto \omega\chi^{-1}$, qui conserve le degré et l'irréductibilité; on peut donc munir $\mathscr{A}(k)$

d'une structure analytique sur **C**; on définit alors une fonction analytique $\mathrm{L}=\mathrm{L}_k$ sur $\mathscr{A}(k)$ par les formules suivantes :

$$(a)\qquad \mathrm{L}(\omega)=\mathrm{L}(\chi)\quad \text{pour}\quad \omega\in\mathscr{A}_1(k),\quad \omega=\chi_{\mathrm{W}}\quad \text{où}\quad \chi_{\mathrm{W}}=\chi\circ\tau;$$

$$(b)\qquad \mathrm{L}(\omega_1\oplus\omega_2)=\mathrm{L}(\omega_1)\,\mathrm{L}(\omega_2);$$

$$(c)\qquad \mathrm{L}(\theta_{\mathrm{W}})=\mathrm{L}_{\mathrm{E}}(\theta)\quad \text{où}\quad \theta_{\mathrm{W}}=\mathrm{Ind}_{\mathrm{W}_{\mathrm{E}}}^{\mathrm{W}}\theta,\qquad \theta\in\mathscr{A}(\mathrm{E}).$$

1.7. Le théorème suivant est du à R. P. Langlands, et une démonstration par voie globale a été donnée par P. Deligne ([2], *b*)).

THÉORÈME. — *Étant donné un caractère non trivial du groupe additif de* k, *soit* ψ, *il y a une unique façon d'associer à chaque extension séparable finie* E *de* k *un nombre* $\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi)$ *et à chaque représentation* $\omega\in\mathscr{A}(k)$ *un nombre* $\varepsilon(\omega,\psi)=\varepsilon_k(\omega,\psi)$ *de façon à avoir les propriétés suivantes :*

$$(a)\qquad \varepsilon(\omega,\psi)=\varepsilon(\chi,\psi)\quad \textit{pour}\quad \omega\in\mathscr{A}_1(k),\quad \omega=\chi\circ\tau;$$

$$(b)\qquad \varepsilon(\omega_1\oplus\omega_2,\psi)=\varepsilon(\omega_1,\psi)\,\varepsilon(\omega_2,\psi);$$

$$(c)\qquad \varepsilon(\theta_{\mathrm{W}},\psi)=\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi)^{\dim\theta}\,\varepsilon_{\mathrm{E}}(\theta,\psi_{\mathrm{E}/k})\quad \textit{pour}\quad \theta\in\mathscr{A}(\mathrm{E}),$$

en notant $\psi_{\mathrm{E}/k}=\psi\circ\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}/k}$.

En prenant E/k quadratique séparable et en faisant $\theta=1$ dans (c), on en déduit que dans ce cas

$$\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi)=\frac{\varepsilon(1,\psi)}{\varepsilon(1,\psi_{\mathrm{E}/k})}\varepsilon(\hat{\sigma},\psi)$$

où, $\hat{\sigma}$ désigne le caractère non trivial de $k^\times$ égal à 1 sur l'image $\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\,\mathrm{E}^\times$ de la norme; comme le conducteur de $\hat{\sigma}$, qui est celui de l'extension E/k, est égal à l'exposant différental $d_{\mathrm{E}/k}$, et que $\operatorname{ord}\psi_{\mathrm{E}/k}=d_{\mathrm{E}/k}+e_{\mathrm{E}/k}\operatorname{ord}\psi$, où $e_{\mathrm{E}/k}$ est l'indice de ramification de E/k, on a donc le résultat suivant.

COROLLAIRE. — *Pour une extension quadratique séparable* E *de* k, *le nombre* $\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi)$ *est égal à la partie unitaire de* $\varepsilon(\hat{\sigma},\psi)$; *de plus, son carré vaut* $\hat{\sigma}(-1)$.

La dernière assertion vient de ce que, pour un caractère χ de k^x, on a la formule

$$\varepsilon(\chi\mu^{1/2},\chi)\,\varepsilon(\chi^{-1}\mu^{1/2},\psi)=\chi(-1);$$

obtenue en appliquant deux fois l'équation fonctionnelle, et en remarquant que la fonction $(f_\psi)_\psi$ est $x\mapsto f(-x)$.

Remarque. — Avec des intégrales prises en valeur principale, on a

$$0=\int_k\psi(x)\,d_\psi x=\int_{x\in\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\mathrm{E}^\times}\psi(x)\,d_\psi x+\int_{x\notin\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\mathrm{E}^\times}\psi(x)\,d_\psi x$$

$$\int_k\hat{\sigma}(x)\,\psi(x)\,d_\psi x=\int_{x\in\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\mathrm{E}^\times}\psi(x)\,d_\psi x-\int_{x\notin\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\mathrm{E}^\times}\psi(x)\,d_\psi x=2\int_{\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\mathrm{E}^\times}\psi(x)\,d_\psi x$$

il en résulte donc, par le corollaire précédent, la formule (*cf.* [7], p. 6) :

$$\lambda_{E/k}(\psi)=\int_{E^\times}\psi(N_{E/k}\,x)\,d_{\psi_{E/k}}\,x.$$

On donnera en paragraphes 3.3 et 3.4 une autre formule pour $\lambda_{E/k}(\psi)$ à l'aide d'un caractère du groupe $k^\times$.

2. Facteurs locaux des algèbres simples déployées centrales de rang 4

2.1. Soit A une algèbre simple déployée centrale de rang 4 sur le corps k. Elle est donc isomorphe à l'algèbre $M_2(k)$ des matrices d'ordre 2 à coefficients dans k, l'isomorphisme étant déterminé à un automorphisme intérieur près. On note $\mathrm{Tr}_{A/k}$ et $N_{A/k}$ la trace et la norme réduites sur A. Pour un caractère non trivial ψ du groupe additif de k, le bicaractère

$$x,\ y\in A\mapsto\psi_{A/k}(xy)\qquad \text{où}\qquad \psi_{A/k}=\psi\circ\mathrm{Tr}_{A/k},$$

identifie A à son dual de Pontrjagin, et la mesure de Haar correspondante est notée $d_{A,\psi}$; elle donne à un ordre maximal de A la masse $q^{-2\,\mathrm{ord}\,\psi}$.

Pour un caractère χ de $k^\times$, on note $\chi_{A/k}$ la représentation de degré 1 du groupe multiplicatif $A^\times$ de A donnée par

$$\chi_{A/k}=\chi\circ N_{A/k}\,;$$

on obtient de cette façon toutes les représentations (continues) de degré 1 du groupe $A^\times$; en particulier, le module μ sur $k^\times$ donne la représentation

$$\mu_{A/k}=\mu\circ N_{A/k}=q^{-\mathrm{val}\,N_{A/k}}.$$

2.2. On note $\mathscr{A}(A)$ l'ensemble des classes de représentations admissibles irréductibles du groupe $A^\times$ ([7], p. 23). A chaque $\alpha\in\mathscr{A}(A)$, on sait associer un facteur eulérien $L(\alpha)$, fonction analytique sur $\mathscr{A}(A)$, dont la structure analytique provient de $s\mapsto\alpha\otimes\mu_{A/k}^s$, et un facteur $\varepsilon(\alpha,\psi)$ dès qu'on s'est donné un caractère non trivial ψ du groupe additif de k; ils sont caractérisés par l'équation fonctionnelle suivante ([2], *a*, 3.2.3(3)), pour toute fonction f de Schwartz-Bruhat sur A, la convergence des intégrales étant obtenue par prolongement analytique

$$\frac{\displaystyle\int_{A^\times}f_\psi(x)\,\alpha(x)^{-1}\,\mu_{A/k}(x)^{-1/2}\,d_{A,\psi}\,x}{L(\alpha^\vee\otimes\mu_{A/k})}=\varepsilon(\alpha,\psi)\frac{\displaystyle\int_{A^\times}f(x)\,\alpha(x)\,\mu_{A/k}(x)^{-3/2}\,d_{A,\psi}\,x}{L(\alpha)}$$

où $\alpha^\vee$ désigne la représentation de $A^\times$ contragrédiente de α, et f_ψ la transformée de Fourier de f relativement au bicaractère $\psi_{A/k}(xy)$.

2.3. Si la représentation α est supercuspidale ([2], *a*, 3.2.3(B)), le facteur $L(\alpha)$ vaut 1; si, de plus, la représentation α est induite par une représentation, $\varkappa$, de dimension finie, d'un sous-groupe ouvert K de $A^\times$ compact modulo le centre $k^\times$ de $A^\times$, alors $\varkappa$ intervient avec multiplicité 1 dans α, ce qui donne

$$\int_K f_\psi(x)\varkappa(x)^{-1}\mu_{A/k}(x)^{-1/2}d_{A,\psi}z=\varepsilon(\alpha,\psi)\int_K f(x)\alpha(x)\mu_{A/k}(x)^{-3/2}d_{A,\psi}x;$$

en prenant dans cette formule pour fonction f la fonction caractéristique de $1+\mathfrak{p}^n\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_A$ étant un ordre maximal de A, et n est pris assez grand pour que $\varkappa$ soit trivial sur $1+\mathfrak{p}^n\mathcal{O}_A$, on obtient l'expression suivante, où on note $\psi_{A/k}=\psi\circ\mathrm{Tr}_{A/k}$, la convergence se faisant par valeur principale et prolongement analytique

$$\varepsilon(\alpha,\psi)=\int_K\psi_{A/k}(x)\varkappa(x)^{-1}\mu_{A/k}(x)^{-1/2}d_{A,\psi}x.$$

2.4. Pour les représentations supercuspidales, on a le théorème suivant, dû à H. Jacquet et R. P. Langlands ([7], cor. 2.19, p. 79) :

THÉORÈME. — *Soient α_1 et α_2 deux représentations admissibles irréductibles supercuspicales du groupe $A^\times$, dont la restriction au centre coïncident. Alors, elles sont équivalentes si et seulement si, pour tout caractère χ de $k^\times$, on a l'égalité*

$$\varepsilon(\alpha_1\otimes\chi_{A/k},\psi)=\varepsilon(\alpha_2\otimes\chi_{A/k},\psi).$$

2.5. Soit $\mathscr{A}^0(A)$ l'ensemble des représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $A^\times$. Langlands prédit l'existence d'une bijection

$$\omega\in\mathscr{A}_2^0(k)\mapsto\omega_A\in\mathscr{A}^0(A),$$

satisfaisant aux relations suivantes ([2], *a*, 3.2.3) :

(*a*) soit $(\det)\omega$ le caractère de $k^\times$ que définit la représentation de degré 1 $\det\omega$ de W; la première relation est

$$(\det)\omega=\omega_A\,|\,k^\times\quad\text{(restriction de }\omega_A\text{ au centre)};$$

(*b*) pour tout caractère χ de $k^\times$, on a

$$(\omega\otimes\chi_W)_A=\omega_A\otimes\chi_{A/k};$$

(*c*) pour les représentations contragrédientes, on a la correspondance

$$(\omega^\vee)_A=(\omega_A)^\vee;$$

(*d*) les facteurs locaux se correspondent

$$L(\omega)=L(\omega_A)=1,\qquad\varepsilon(\omega,\psi)=\varepsilon(\omega_A,\psi);$$

(*e*) le conducteur d'Artin $a(\omega)$ de ω est le conducteur de la représentation ω_A (au sens de [2], *a*, 2.2.7).

Cette bijection est déterminée par les conditions (*a*), (*b*), (*d*).

2.6. Les représentations admissibles irréductibles de degré 2 du groupe de Weil W de k sont classées par leur image dans le groupe projectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$; cette image $g(\omega)$ est un groupe fini non cyclique, donc de l'un des 5 types suivants :

(a) diédral d'ordre $2n$, $n>2$;

(b) diédral d'ordre 4;

(c) tétraédral : groupe alterné $\mathfrak{A}_4$;

(d) octaédral : groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$;

(e) icosaédral : groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

Les deux premiers groupes sont imprimitifs, le premier d'une seule façon, le deuxième de trois manières; les trois autres types sont primitifs; le dernier ne se présente pas, puisqu'il produirait alors une extension galoisienne du corps local k dont le groupe de Galois serait $\mathfrak{A}_5$, groupe simple.

2.7. Pour chaque extension quadratique séparable E de k, on note $\sigma^{\mathrm{E}}=\sigma_k^{\mathrm{E}}$ l'élément non trivial de son groupe de Galois sur k, et $\widehat{\sigma^{\mathrm{E}}}$ le caractère, d'ordre 2, de $k^\times$ dont le noyau est $\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\,\mathrm{E}^\times$. Le groupe des caractères de $k^\times$ opérant sur $\mathscr{A}(k)$ comme indiqué en 1.6, il conserve le groupe fini $g(\omega)$. Les points fixes de cette action sur $\mathscr{A}_2^0(k)$ sont donnés par le résultat suivant [8] :

PROPOSITION. — *Pour qu'une représentation $\omega\in\mathscr{A}_2^0(k)$ soit fixée par un caractère non trivial χ de $k^\times$, il faut et il suffit qu'elle soit de type diédral D_{2n}. Pour $n>2$, alors $\chi=\sigma^{\mathrm{E}}$, où E est l'extension quadratique de k que définit*, via ω, *l'unique sous-groupe d'indice 2 de D_{2n}, et il y a exactement deux caractères θ et θ' de $\mathrm{E}^\times$, $\theta'=\theta^{\sigma^{\mathrm{E}}}$, tels que ω soit la représentation de* W *induite par la représentation de degré 1 correspondante de W_{E}. Pour $n=2$, alors χ est l'un quelconque des trois caractères de $k^\times$ que définissent*, via ω, *les trois sous-groupes d'indice 2 de D_4 : $\sigma^{\mathrm{E}_1}, \sigma^{\mathrm{E}_2}, \sigma^{\mathrm{E}_3}$; pour chaque i, il y a exactement deux caractères θ_i de θ_i' de $\mathrm{E}_i^\times$, $\theta_i'=\theta_i^{\sigma^{\mathrm{E}_i}}$, tels que ω soit la représentation de* W *induite par la représentation de degré* 1 *de W_{E} correspondant à ce caractère; de plus, la composée des extensions E_i est une extension biquadratique* K *de k, le caractère $\widehat{(\theta_i)}_{\mathrm{K}/\mathrm{E}_i}$ de $\mathrm{K}^\times$ ne dépend pas de i, et $\theta_i'=\theta_i\,\widehat{\sigma_{\mathrm{E}_i}^{\mathrm{K}}}$ pour tout i.*

Inversement, toute représentation de type diédral dans $\mathscr{A}_2^0(k)$ est de la forme précédente.

Enfin, en caractéristique résiduelle impaire, toute représentation de $\mathscr{A}_2^0(k)$ est de type diédral; en caractéristique résiduelle 2, *il y a des représentations de $\mathscr{A}_2^0(k)$ qui sont primitives.*

2.8. Pour les représentations de type diédral, la bijection de Langlands (2.5) a été démontrée par H. Jacquet et R. P. Langlands ([7], th. 4.6, p. 144, et th. 4.7, p. 150) au moyen de la représentation de Weil. Elle associe donc à chaque caractère régulier θ du groupe multiplicatif $\mathrm{E}^\times$ d'une extension quadratique séparable E de k, une classe de représentations θ_{A} admissibles irréductibles supercuspidales du groupe $\mathrm{A}^\times$, de façon que l'on ait les relations suivantes :

$$(\theta^\sigma)_{\mathrm{A}}=\theta_{\mathrm{A}}, \qquad \sigma=\sigma^{\mathrm{E}} \quad \text{(action du groupe de Galois);}$$

$$\theta_{\mathrm{A}}\,|\,k^\times=\hat{\sigma}.\theta\,|\,k^\times \quad \text{(restriction au centre);}$$

$$\theta_A \otimes \chi_{A/k} = (\theta . \chi_{E/k})_A \quad \text{(action des caractères de } k^\times\text{);}$$

$$(\theta_A)^\vee = (\theta^{-1})_A \quad \text{(contragrédiente);}$$

$$\varepsilon(\theta_A, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi)\, \varepsilon(\theta, \psi_{E/k)} \quad \text{(facteur local);}$$

$$a(\theta_A) = d_{E/k} + f_{E/k}\, a(\theta) \quad \text{(conducteur),}$$

où $d_{E/k}$ désigne le conducteur de l'extension E/k, $f_{E/k}$ le degré modulaire (degré du corps résiduel de E sur le corps résiduel de k).

L'ensemble de ces classes de représentations s'appelle la *série supercuspidale relative à l'extension* E; l'ensemble des séries supercuspidales relatives aux différentes extensions quadratiques séparables de k s'appelle la *série de type diédral*. Pour les représentations supercuspidales, J.-P. Labesse et R. P. Langlands ont prouvé l'analogue de la proposition de 2.7, l'action des caractères de $k^\times$ sur $\mathscr{A}^0$ (A) étant donnés par $\alpha \mapsto \alpha \otimes \chi_{A/k}^{-1}$ ([9], § 5). La formulation ci-dessous est due à P. Cartier.

PROPOSITION. — *Pour qu'une classe $\alpha \in \mathscr{A}^0$ (A) soit fixée par un caractère non trivial de $k^\times$, il faut et il suffit qu'elle soit de type diédral; si χ est unique, alors $\chi = \sigma^E$, pour une extension quadratique séparable E de k et $\alpha = \theta_A$, où θ est un caractère régulier de $E^\times$, déterminé à conjugaison près par σ^E; s'il y a plus d'un caractère χ tel, alors il y en a exactement trois possibles : σ^{E_1} ou σ^{E_2} ou σ^{E_3} où E_1, E_2, E_3 sont les trois extensions quadratiques de k contenues dans une extension biquadratique K de k que détermine α, et $\alpha = (\theta_i)_A$ pour tout i, où θ_i vérifie $\theta_i/(\theta_i)^{\sigma^{E_i}} = \widehat{\sigma^K_{E_i}}$; de plus, les trois caractères $(\theta_i)_{K/E_i}$ sont égaux.*

Inversement, la donnée d'une extension biquadratique de k détermine la représentation $\sigma \in \mathscr{A}^0$ (A) à l'action près par les caractères de $k^\times$.

3. Série supercuspidale non ramifiée

3.1. Soit E l'extension quadratique non ramifiée de k. Prenons pour A l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E sur le corps k; notons σ la conjugaison de E sur k; alors, A est somme directe des deux sous-espaces vectoriels E et E σ de dimension 2 sur k; les éléments de E σ ont leur trace réduite nulle.

Pour un caractère non trivial ψ du groupe additif de k, le caractère $\psi_{E/k} = \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/k}$ a même ordre que ψ, et la mesure autoduale sur E associée $d_{\psi_{E/k}} = d_{E,\psi}$ donne à l'anneau $\mathcal{O}_E$ des entiers de E la masse $q^{-\mathrm{ord}\,\psi}$.

Le groupe $A^\times$ permute les réseaux de l'espace vectoriel E sur k; en identifiant deux réseaux homothétiques, et en disant que deux classes de réseaux sont liées si elles ont des représentants R et R′ avec $R \subset R'$ et R d'indice q dans R′, on obtient *l'arbre* du groupe $A^\times$; il est muni d'une action de $A^\times$, en fait de $A^\times/k^\times$, transitive sur ses sommets; cet arbre est marqué du sommet que définit le réseau $\mathcal{O}_E$, formé des réseaux $\mathfrak{p}_E^m$, en notant $\mathfrak{p}_E$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_E$: ce sommet est l'unique point fixe du groupe $E^\times$ opérant sur l'arbre; soit A_E le sous-groupe d'isotropie de ce sommet dans $A^\times$, compact modulo le centre $k^\times$, et le quotient $A_E/k^\times$ est un sous-groupe compact maximal spécial du groupe projectif $A^\times/k^\times$.

3.2. Pour chaque caractère θ de $E^{\times}$, on dispose de son conducteur $a(\theta)$ (1.3), et du conducteur du caractère θ/θ^{σ}, appelé *conducteur relatif* de θ, et noté $a_{E/k}(\theta)$; comme $(\theta/\theta^{\sigma})(x)=\theta(x/x^{\sigma})$, on a $a_{E/k}(\theta)\leqq a(\theta)$. On dira que θ est *primordial* (*relativement au corps* k), s'il est régulier et si $a(\theta)=a_{E/k}(\theta)$.

L'action du groupe des caractères de $k^{\times}$ sur les caractères de $E^{\times}$:

$$\chi : \quad \theta \mapsto \theta . \chi_{E/k}^{-1}, \qquad \chi_{E/k}=\chi \circ N_{E/k},$$

ne modifie pas le conducteur relatif; par le théorème 90 de Hilbert ([10], p. 158), l'orbite d'un caractère θ de $E^{\times}$ sous $\mathscr{A}_1(k)$ est donc formée des caractères θ' de $E^{\times}$ tels que $\theta'/\theta'^{\sigma}=\theta/\theta^{\sigma}$. Comme le caractère θ/θ^{σ} est trivial sur $k^{\times}$, il définit un caractère du noyau de la norme $N_{E/k}$; or, l'extension E/k n'étant pas ramifiée, l'application $x\mapsto x/x^{\sigma}$ est compatible avec la filtration définie par la valuation, et il y a donc un caractère θ_0 de E dont le conducteur est celui de θ/θ^{σ} et tel que $\theta(x/x^{\sigma})=\theta_0(x/x^{\sigma})$; ainsi, dans toute orbite sous l'action des caractères de $k^{\times}$ dans l'ensemble des caractères réguliers de $E^{\times}$, il y a des caractères primordiaux.

3.3. Donnons un lemme sur les caractères de $k^{\times}$; la notation $\hat{\int}$ a été introduite en 1.4.

Lemme. — *Soit χ un caractère de $k^{\times}$, dont le conducteur $a(\chi)$ est au moins égal à* 2. *Alors* E *étant l'extension quadratique non ramifiée de k, et σ la conjugaison de E/k, on a, pour $a(\chi)\geqq 2m>1$:*

$$\hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}} \chi(1-{}^{\sigma}xx)^{-1}=(-1)^{a(\chi)}.$$

Preuve. — On commence par vérifier que l'expression du lemme a bien un sens : pour $x\in\mathfrak{p}_E^m$ et $y\in\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}$, on a $xy\in\mathfrak{p}_E^{a(\chi)}$ et donc

$$N_{E/k}(x+y)={}^{\sigma}xx+\mathrm{Tr}_{E/k}({}^{\sigma}xy)+{}^{\sigma}yy\in {}^{\sigma}xx+\mathfrak{p}^{a(\chi)},$$

ce qui montre que l'application $x\in\mathfrak{p}_E^m\mapsto\chi(1-{}^{\sigma}xx)^{-1}$ est constante sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}$. Ensuite on voit que la formule est satisfaite lorsque $a(\chi)-m=m$, i. e., $a(\chi)=2m$; puis, pour $a(\chi)-m=m+1$, elle se ramène à vérifier que, pour le corps fini $\mathbf{F}_q$ muni d'un caractère non trivial τ de son groupe additif, on a, la barre désignant la conjugation de $\mathbf{F}_{q^2}$ sur $\mathbf{F}_q$:

$$\hat{\int}_{\mathbf{F}_{q^2}} \tau(x\bar{x})=-1,$$

ce qui est dû à la surjectivité de la norme et à ce que son noyau est d'ordre $q+1$:

$$\int_{\mathbf{F}_{q^2}} \tau(x\bar{x})=q^{-1}[1+(\sum_{\mathbf{F}_q}\tau(y))(q+1)]=q^{-1}(1+(-1)(q+1))=-1.$$

Si maintenant $a(\chi)$ est $>2m+1$, on décompose la somme sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}$ en utilisant le fait que la restriction de χ au sous-groupe

$1+\mathfrak{p}^{2(a(\chi)-m-1)}$ est triviale, et la restriction au sous-groupe $1+\mathfrak{p}^{a(\chi)-1}$ est triviale sur $1+\mathfrak{p}^{a(\chi)}$:

$$\hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}} \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1} = \hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1} \hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}} \chi(1+{}^\sigma xy+{}^\sigma yx);$$

le second terme est nul quand le caractère

$$y\in \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m} \mapsto \chi(1+{}^\sigma xy+{}^\sigma yx)$$

n'est pas trivial, c'est-à-dire lorsque $\operatorname{Tr}_{E/k} x\, \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1} \not\subset \mathfrak{p}^{a(\chi)}$, ce qui équivaut à $x\notin \mathfrak{p}_E^{m+1}$; on a ainsi montré que pour $a(\chi)\geqq 2m+2$, on a

$$\hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}} \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1} = \hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^{m+1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1},$$

ce qui, par récurrence sur m, ramène à l'un des deux cas : $a(\chi)=2m$ ou $2m+1$.

Remarquons que si ψ est un caractère de k qui prolonge le caractère $x \mapsto \chi(1+x)$ de $\mathfrak{p}^{a(\chi)}$, alors :

$$(-1)^{a(\chi)}=\lambda_{E/k}(\psi).$$

3.4. Soit θ un caractère régulier de $E^\times$ dont le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ est pair, égal à $2m$. Posons $K_\theta \doteq E^\times(1+\mathfrak{p}_{E^\sigma}^m)$; c'est un sous-groupe ouvert de $A^\times$, compact modulo le centre $k^\times$. On définit alors une représentation $\varkappa_\theta$ de K_θ par

$$\varkappa_\theta | E^\times = \theta \qquad \text{et} \qquad \varkappa_\theta(1+x\,\sigma)=\chi_{A/k}(1+x\,\sigma) \qquad \text{pour} \quad x\in\mathfrak{p}_E^m,$$

où χ est un caractère de $k^\times$ tel que le caractère $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ soit primordial. Cette définition a bien un sens, puisque pour $x\in\mathfrak{p}_E^{2m}$ on a $\theta(x)=\chi_{E/k}(x)=\chi_{A/k}(x)$, et, d'autre part, parce que $\chi_{A/k}(1+x\,\sigma)=\chi(1-{}^\sigma xx)$, pour $x\in\mathfrak{p}_E^m$, ne dépend pas du choix du caractère χ qui rend θ primordial. On définit alors une représentation α_θ de $A^\times$ par

$$\alpha_\theta=\operatorname{Ind}_{K_\theta}^{A^\times} \varkappa_\theta.$$

Proposition. — *La représentation α_θ ainsi définie est admissible irréductible supercuspidale, son degré formel relativement à la mesure de Haar sur $A^\times/k^\times$ qui donne à $A_E/k^\times$ la masse 1 est $q^{a_{E/k}(\theta)-1}(q-1)$, et*

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=(-1)^{a(\theta)}\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — La première partie de l'énoncé est due à T. Shintani ([11], th. 4 et cor. 1). Le degré formel est donné par l'indice de K_θ dans A_E, produit de $[A_E : E^\times(1+\mathfrak{p}_E\,\sigma)]$ par

$[E^\times(1+\mathfrak{p}_E^\sigma) : E^\times(1+\mathfrak{p}_E^m\sigma)]$: c'est donc $q(q-1)(q^2)^{m-1}=q^{2m-1}(q-1)$. Pour la dernière partie, utilisons 2.3 :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=\int_{K_\theta} \psi_{A/k}(x)\,\varkappa_\theta(x)^{-1}\,\mu_{A/k}(x)^{-1/2}\,d_{A,\psi}\,x;$$

puis, la mesure de Haar vérifiant $d_{A,\psi}(u+v\sigma)=d_{E,\psi}\,u.d_{E,\psi}\,v$, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=\int_{E^\times} \psi_{E,k}(t)\,\theta(t)^{-1}\,\mu_E(t)^{1/2}\,d_{E,\psi}\,t \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1}\,d_{E,\psi}\,x\\ =\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})\,q^{a(\theta)+\operatorname{ord}\psi}\int_{\mathfrak{p}_E^m}\chi(1-{}^\sigma xx)^{-1}\,d_{E,\psi}\,x.\end{aligned}$$

Lorsque θ est primordial, on a $a(\theta)=2m$ et on peut prendre $\chi=1$, ce qui donne alors $\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$; lorsque θ n'est pas primordial, on a $a(\theta)=a(\chi_{E/k})=a(\chi)$, cette dernière égalité provenant de ce que E est non ramifié sur k ([10], V, § 2), et donc $a(\chi)>2m$, ce qui permet d'appliquer le lemme du 3 :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})\,\hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m}} \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1}=(-1)^{a(\chi)}\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}),$$

ce qui montre la relation cherchée.

3.5. Supposons maintenant le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ du caractère θ de $E^\times$ égal à 1. Posons alors $K_\theta=A_E$ (3.1), et $K_\theta^+=E^\times(1+\mathfrak{p}_E\,\sigma)$; le sous-groupe $k^\times(1+\mathfrak{p}_E)\cap K_\theta^+\subset K_\theta$ est distingué, et le groupe quotient est isomorphe au groupe $PGL_2(\mathbf{F}_q)$, puisque c'est le groupe projectif de la droite projective sur le corps résiduel de k que définit le corps résiduel de E. Notons S sa représentation de Steinberg, et aussi S la représentation de K_θ qu'elle définit : elle se réalise dans l'espace des fonctions complexes sur $E^\times$ invariantes par le sous-groupe $k^\times(1+\mathfrak{p}_E)$ et dont la somme des valeurs sur $E^\times/k^\times(1+\mathfrak{p}_E)$ est nulle, l'action du groupe K_θ sur cet espace se faisant par translations. D'autre part, soit $\varkappa_\theta^+$ la représentation de degré 1 du groupe K_θ^+ définie par

$$\varkappa_\theta^+\,|\,E^\times=\theta \qquad \text{et} \qquad \varkappa_\theta^+(1+x\sigma)=\chi_{A/k}(1+x\sigma) \qquad \text{pour} \quad x\in\mathfrak{p}_E,$$

où χ est un caractère de $k^\times$ tel que $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ soit primordial; cette représentation de $\varkappa_\theta^+$ ne dépend pas du choix de χ. Il y a alors une représentation irréductible $\varkappa_\theta$ de K_θ, unique à équivalence près, dont le produit tensoriel par S soit la représentation induite à K_θ par la représentation $\varkappa_\theta^+$ de K_θ^+ (il suffit de voir cette propriété sur le groupe $GL_2(\mathbf{F}_q)$ pour qui l'on dispose de la table des caractères; on peut également invoquer un résultat général de Deligne-Lusztig : [3], prop. 7.3). Soit $\theta_0=\theta\chi_{E/k}^{-1}$; alors $\varkappa_\theta=\varkappa_{\theta_0}\otimes\chi_{A/k}$, par construction même. Soit alors α_θ la représentation de $A^\times$ définie par

$$\alpha_\theta=\operatorname{Ind}_{K_\theta}^{A^\times}\varkappa_\theta.$$

PROPOSITION. — *La représentation α_θ ainsi définie est admissible irréductible supercuspidale et son degré formel relativement à la mesure de Haar sur $A^\times / k^\times$ qui donne à $A_E / k^\times$ la masse 1 est $q-1$; si, de plus, le caractère θ est primordial, alors :*

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = -\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — La première partie se démontre exactement comme pour le théorème 5, p. 168 de [5], en utilisant la cuspidalité de $\varkappa_\theta$; le degré formel en question est le degré $q-1$ de $\varkappa_\theta$; pour la dernière formule, on part de l'expression

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \int_{A_E} \psi_{A/k}(x)\,\varkappa_\theta(x)^{-1}\,\mu_{A/k}(x)^{-1/2}\,d_{A,\psi}\,x.$$

On utilise le fait que la restriction de $\varkappa_\theta$ à $1+\mathfrak{p}_E+\mathfrak{p}_E\,\sigma$ est triviale pour sommer tout d'abord sur ces classes où seul $\psi_{A/k}$ intervient

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = q^{\operatorname{ord}\psi}\,\theta(\pi)^{\operatorname{ord}\psi+1}\,q^{-1}\sum \psi_{A/k}(\pi^{-\operatorname{ord}\psi-1}x)\,\varkappa_\theta(x)^{-1},$$

où la somme porte sur les classes modulo $1+\mathfrak{p}_E+\mathfrak{p}_E\,\sigma$ du sous-groupe de $A^\times$ formé des automorphismes du réseau $\mathcal{O}_E$, c'est-à-dire sur un groupe $GL_2(\mathbf{F}_q)$. On est donc ramené à calculer des sommes du type

$$\sum_{GL_2(\mathbf{F}_q)} \tau(\operatorname{Tr} x)\,\vartheta(x)^{-1};$$

où τ est un caractère non trivial du groupe additif de $\mathbf{F}_q$ et ϑ est une représentation cuspidale irréductible du groupe $GL_2(\mathbf{F}_q)$; cet opérateur est scalaire, puisque c'est l'opérateur de convolution par une fonction centrale; pour le déterminer, il suffit d'en calculer la trace; comme la représentation $\vartheta\otimes S$ est induite par un caractère du groupe $\mathbf{F}_{q^2}^\times$, et que S a son caractère supporté par les éléments semi-simples, on a $\operatorname{Tr}\vartheta(x)=0$ pour les éléments x qui sont diagonalisables réguliers; la cuspidalité de ϑ signifie que pour tout sous-groupe horicyclique U de $GL_2(\mathbf{F}_q)$, on a $\sum_U \vartheta(u)=0$; comme la trace est constante égale à 2 sur U, on a donc, pour tout $a\in\mathbf{F}_q^\times$ le centre du groupe, la relation $\sum_U \tau(\operatorname{Tr} au)\,\vartheta(au)^{-1}=0$; or, il y a $q+1$ sous-groupes horicycliques, donc

$$\sum_{GL_2(\mathbf{F}_q)} \tau(\operatorname{Tr} x)\operatorname{Tr}\vartheta(x)^{-1} = -q\sum_{\mathbf{F}_q^\times}\tau(2a)\operatorname{Tr}\vartheta(a)^{-1} + \sum{}'\,\tau(\operatorname{Tr} x)\operatorname{Tr}\vartheta(x)^{-1},$$

où $\sum'$ désigne la somme sur les éléments semi-simples qui ne sont pas déployés; comme il y a $(1/2)\operatorname{Card}(GL_2(\mathbf{F}_q)/\operatorname{Card}(\mathbf{F}_{q^2}) = q(q-1)/2$ éléments conjugés à un élément semi-simple non déployé donné cette seconde somme va être $q(q-1)/2$ fois la somme sur les classes de conjugaison correspondantes; si donc $\vartheta\otimes S$ est induite par le caractère λ de $\mathbf{F}_{q^2}^\times$, on a $\operatorname{Tr}\vartheta(t) = -\lambda(t)-\lambda(\bar t)$ pour $t\in\mathbf{F}_{q^2}$, $t\notin\mathbf{F}_{q^2}$ et $\operatorname{Tr}\vartheta(a) = (q-1)\lambda(a)$ pour $a\in\mathbf{F}_q^\times$: la somme vaut alors :

$$\sum_{GL_2(\mathbf{F}_q)} \tau(\operatorname{Tr} x)\operatorname{Tr}\vartheta(x)^{-1} = -q(q-1)\sum_{\mathbf{F}_q^{\times 2}}\tau(t+\bar t)\,\lambda(t)^{-1}.$$

Ceci montre que l'on a

$$q^{-1}\sum\psi_{A/k}(\pi^{-\operatorname{ord}\psi-1}x)\varkappa_\theta(x)^{-1}=-\sum_{\mathfrak{O}_E^\times/(1+\mathfrak{p}_E)}\psi_{E/k}(\pi^{-\operatorname{ord}\psi-1}t)\,\theta(t)^{-1},$$

et donc que $\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=-\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$ par le 1.4.

3.6. Supposons enfin que le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ soit impair $a_{E/k}(\theta)=2m+1\geqq 3$; soit K_θ le sous-groupe de $A^\times$ défini par $K_\theta=E^\times(1+\mathfrak{p}_E^m\sigma)$, et posons $K_\theta^+=E^\times(1+\mathfrak{p}_E^{m+1}\sigma)$. On définit une représentation $\varkappa_\theta^+$ de degré 1 du groupe K_θ^+ par

$$\varkappa_\theta^+\mid E^\times=\theta \qquad \text{et} \qquad \varkappa_\theta^+(1+x\sigma)=\chi_{A/k}(1+x\sigma) \qquad \text{pour} \quad x\in\mathfrak{p}_E^{m+1},$$

où χ est un caractère de $k^\times$ tel que le caractère $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ soit primordial. On définit également une fonction centrale S_θ sur le groupe K_θ par

$$S_\theta(1+x\sigma)=0 \qquad \text{pour} \quad x\in\mathfrak{p}_E^m \quad \text{et} \quad x\notin\mathfrak{p}_E^{m+1},$$

$$S_\theta(t)=\begin{cases} -1 & \text{pour} \quad t\notin k^\times(1+\mathfrak{p}_E), \\ q & \text{pour} \quad t\in k^\times(1+\mathfrak{p}_E); \end{cases}$$

il y a alors une représentation irréductible $\varkappa_\theta$ du groupe K_θ, unique à équivalence près, dont le caractère tensorisé par S_θ est celui de la représentation qu'induit $\varkappa_\theta^+$; de plus, celui-ci est somme des représentations $\varkappa_{\theta'}$ de K_θ pour les q caractères $\theta'\neq\theta$ de $E^\times$ qui sont égaux à θ sur les $t\in k^\times(1+\mathfrak{p}_E)$ ([5], I, 1.3.7 et 1.3.11). La représentation $\varkappa_\theta$ de K_θ induit une représentation du groupe $A^\times$:

$$\alpha_\theta=\operatorname{Ind}_{K_\theta}^{A^\times}\varkappa_\theta.$$

PROPOSITION. — *La représentation α_θ ainsi définie est admissible irréductible supercuspidale et son degré formel relativement à la mesure de Haar sur $A^\times/k^\times$ qui donne à $A_E/k^\times$ la masse* 1 *est $q^{a_{E/k}(\theta)-1}(q-1)$; si, de plus, le caractère θ est primordial, alors :*

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=-\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — La première partie est due à T. Shintani ([11], th. 4 et cor. 2; *voir* aussi [5], th. 5, p. 168). Le degré formel est le produit de l'indice $[A_E : K_\theta]$ par le degré q de $\varkappa_\theta$, ce qui donne la formule voulue. Pair la dernière formule, on part de l'expression suivante (où $\mu_E=\mu_{E/k}$ est le module sur E) :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)&=\int_{K_\theta}\psi_{A/k}(x)\varkappa_\theta(x)^{-1}\mu_{A/k}(x)^{-1/2}d_{A,\psi}x\\ &=\int_{E^\times}\psi_{E/k}(t)\mu_E(t)^{1/2}\left(\int_{\mathfrak{p}_E^m}\varkappa_\theta(1+x\sigma)^{-1}d_{E,\psi}x\right)\varkappa_\theta(t)^{-1}d_{E,\psi}t\\ &=\int_{\mathfrak{p}_E^m}\varkappa_\theta(1+x\sigma)^{-1}d_{E,\psi}x\int_{E^\times}\psi_{E/k}(t)\mu_E(t)^{1/2}\varkappa_\theta(t)^{-1}d_{E,\psi}t.\end{aligned}$$

La seconde intégrale se décompose par rapport aux classes modulo $1+\mathfrak{p}_E^{m+1}$; utilisons pour cela un élément θ_ψ de E tel que

$$\theta(1+\mu)=\psi_{E/k}(\theta_\psi u) \qquad \text{pour} \quad u\in\mathfrak{p}_E^{m+1},$$

on a donc val $\theta_\psi=-a(\psi)-\operatorname{ord}\psi$ et

$$\int_{E^\times}\psi_{E/k}(t)\,\mu_E(t)^{1/2}\,\varkappa_\theta(t)^{-1}\,d_{E,\psi}\,t$$

$$=\sum_{E^\times/(1+\mathfrak{p}_E^{m+1})}\psi_{E/k}(t)\,\mu_E(t)^{3/2}\int_{\mathfrak{p}_E^{m+1}}\psi_{E/k}(tu)\,\psi_{E/k}(\theta_\psi u)^{-1}\,d_{E,\psi}\,u\,\varkappa_\theta(t)^{-1},$$

$$=\sum_{\theta_\psi(1+\mathfrak{p}_E^m)/1+\mathfrak{p}_E^{m+1})}\psi_{E/k}(t)\,\mu_E(t)^{3/2}\,\varkappa_\theta(t)\int_{\mathfrak{o}_E^{m+1}}d_{E,\psi}\,u$$

$$=\mu_E(\theta_\psi)^{1/2}\,\psi_{E/k}(\theta_\psi)\sum_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{m+1}}\psi_{E/k}(\theta_\psi u)\,\varkappa_\theta(1+u)^{-1}\,\varkappa_\theta(\theta_\psi)^{-1}.$$

Ceci montre que le facteur $\varepsilon(\alpha_\theta,\psi)$ est égal à l'expression

$$\mu_E(\theta_\psi)^{1/2}\,\psi_{E/k}(\theta_\psi)\int_{\mathfrak{p}_E^m}\varkappa_\theta(1+x\sigma)^{-1}\,d_{E,\psi}\,x\int_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{m+1}}\psi_{E/k}(\theta_\psi u)\,\theta(1+u)^{-1}\,\theta(\theta_\psi)^{-1}.$$

Sur cette formule, on voit que le nombre $\theta(\theta_\psi)\,\varepsilon(\alpha_\theta,\psi)$ est le même pour tous les caractères θ' de E qui coïncident avec θ sur $k^\times(1+\mathfrak{p}_E)$:

$$\varepsilon(\alpha_{\theta'},\psi)=(\theta/\theta')(\theta_\psi)\,\varepsilon(\alpha_\theta,\psi),$$

d'où

$$\sum_{\theta'\neq\theta}\varepsilon(\alpha_{\theta'},\psi)=-\varepsilon(\alpha_\theta,\psi).$$

D'autre part, la représentation $\sum_{\theta'\neq\theta}\varkappa_\theta$, de K_θ est induite par la représentation $\varkappa_\theta^+$ de K_θ^+, sous-groupe d'indice égal à q^2 dans K_θ, et donc

$$\sum_{\theta'\neq\theta}\varepsilon(\alpha_{\theta'},\psi)=q\int_{K_\theta^+}\psi_{A/k}(x)\,\varkappa_\theta^+(x)^{-1}\,\mu_{A/k}(x)^{-1/2}\,d_{A,\psi}\,x$$

$$=q\int_{E^\times}\psi_{E/k}(t)\,\theta(t)^{-1}\,\mu_{E/k}(t)^{1/2}\,d_{E,\psi}\,t\int_{\mathfrak{p}_E^{m+1}}d_{E,\psi}\,v$$

$$=q^{1-2m-2-\operatorname{ord}\psi+a(\theta)+\operatorname{ord}\psi}\int_{E^\times}\psi_{E/k}(t)\,\theta(t)^{-1}\,d_{E,\psi}\,t=\varepsilon(\theta,t_{E/k}).$$

En comparant avec la relation obtenue précédemment, on a bien la formule annoncée

$$\varepsilon(\alpha_\theta,\psi)=-\varepsilon(\theta,\psi_{E/k}).$$

3.7. On a donc déjà montré dans beaucoup de cas le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Pour chaque caractère régulier* θ *de* $E^\times$, *soit* α_θ *la représentation admissible irréductible supercuspidale du groupe* $A^\times$ *définie en* 3.4, 3.5, 3.6; *alors :*

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = (-1)^{a(\theta)}\, \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Preuve. — Il reste à vérifier cette formule pour les caractères réguliers de $E^\times$ qui ne sont pas primordiaux, et dont le conducteur relatif est impair. Soit $\theta\chi_{E/k}$ un tel caractère non primordial : $a(\theta) = a_{E/k}(\theta) = 2m+1$ et χ est un caractère de $k^\times$ avec $a(\theta\chi_{E/k}) = a(\chi) > a(\theta)$. Le facteur ε de α_θ est :

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \int_{E^\times} \psi_{E/k}(t)\, \mu_E(t)^{1/2} \int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi_{A/k}(1+x^\sigma)^{-1} \times \varkappa_\theta(1+x\sigma)^{-1}\, d_{E,\psi}\, x\, (\chi_{A/k}\varkappa_\theta)(t)^{-1}\, d_{E,\psi}\, t$$

comme on a $a(\chi) \geqq 2m+2$, l'intégrale intermédiaire s'écrit sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}$ en utilisant le fait que l'application $x \in \mathfrak{p}_E^m \mapsto \varkappa_\theta(1+x\sigma)$ est constante sur chacune de ces classes

$$\int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1-{}^\sigma x x)^{-1}\, \varkappa_\theta(1+x\sigma)^{-1}\, d_{E,\psi}\, x = \int_{\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} d_{E,\psi}\, x \sum_{\mathfrak{p}_E^{m+1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} \chi(1-{}^\sigma x x)^{-1}$$
$$= q^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi} \hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^{m+1}/\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}} \chi(1-{}^\sigma x x)^{-1} = (-1)^{a(\chi)}\, q^{-a(\chi)-\operatorname{ord}\psi}.$$

D'autre part, l'intégrale portant sur $E^\times$ se décompose suivant les classes modulo $1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-m-1}$, et donne, en utilisant un élément $\chi_\psi \in k^\times$ tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x) \qquad \text{pour} \quad \operatorname{val} x \geqq a(\chi)-1 \geqq a(\theta) :$$

$$\sum_{E^\times/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t)\, \mu_E(t)^{1/2}\, \varkappa_\theta(t)^{-1}\chi_{E/k}(t)^{-1} \times \int_{\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1}} \psi_{E/k}(tu)\, \psi_{E/k}(\chi_\psi u)^{-1}\, d_{E,\psi}\, u$$
$$= q^{-2a(\chi)+2-\operatorname{ord}\psi} \sum_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t)\, \mu_E(t)^{1/2}\, \chi_{E/k}(t)^{-1}\, \theta(t)^{-1}$$
$$= q \hat{\int}_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t)\, (\theta\chi_{E/k})(t)^{-1}$$

puisque μ_E restreint à $k^\times$ est μ^2; on est ainsi arrivé à l'expression

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = q^{-a(\chi)+1-\operatorname{ord}\psi}\, (-1)^{a(\chi)} \hat{\int}_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t)\, (\theta\chi_{E/k})^{-1}.$$

D'un autre côté, on a, par décomposition de l'intégrale qui donne $\varepsilon(\theta\chi_{E/k}, \psi_{E/k})$ (1.4);

$$\varepsilon(\theta\chi_{E/k}, \psi_{E/k}) = \int_{\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1}} d_{E,\psi} v \sum_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t)(\theta\chi_{E/k})(t)^{-1}$$

$$= q^{-a(\chi)+1-\operatorname{ord}\psi} \hat{\int}_{\chi_\psi(1+\mathfrak{p}_E)/(1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-1})} \psi_{E/k}(t)(\theta\chi_{E/k})^{-1},$$

ce qui donne

$$(-1)^{a(\chi)} \varepsilon(\theta\chi_{E/k}, \psi_{E/k}) = \varepsilon(\alpha_{\theta\chi_{E/k}}, \psi).$$

c'est bien la formule voulue, puisque $a(\theta\chi_{E/k}) = a(\chi_{E/k}) = a(\chi)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

3.8. On peut, écrire la formule du théorème sous la forme

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = (-1)^{\operatorname{ord}\psi} (-1)^{a(\theta)+\operatorname{ord}\psi} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}),$$

Le caractère de $k^\times$ que définit l'extension quadratique non ramifiée E de k est $(-1)^{\text{val}}$; par le corollaire de 1.7 et 1.4, on a donc ici

$$\lambda_{E/k}(\psi) = (-1)^{\operatorname{ord}\psi};$$

la formule ci-dessus prend donc la forme

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi)(-1)^{a(\theta)+\operatorname{ord}\psi} \varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Introduisant l'unique prolongement non ramifié $\tilde{\sigma}$ de $\hat{\sigma}$ à $E^\times$: $\tilde{\sigma} = (-1)^{\text{val}}$, on a $(-1)^{a(\theta)\operatorname{ord}\psi} \varepsilon(\theta\tilde{\sigma}, \psi_{E/k})$, et donc

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi) \varepsilon(\theta\tilde{\sigma}, \psi_{E/k}).$$

Remarquons que la connaissance du facteur $\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)$ détermine le conducteur de la représentation α_θ : c'est $2a(\theta)$.

Le théorème de 3.7 et celui de 2.4 montrent que l'on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour chaque caractère régulier* θ *du groupe* $E^\times$, *soit* α_θ *la représentation admissible irréductible supercuspidale du groupe* $A^\times$ *construite en* 3.4, 3.5, 3.6. *Alors, si* $\tilde{\sigma}$ *est le prolongement non ramifié du caractère de* $k^\times$ *que définit l'extension* E, *on a*

$$\alpha_\theta = (\tilde{\theta})_A \qquad \textit{avec} \quad \tilde{\theta} = \theta\tilde{\sigma}.$$

C'est le dictionnaire cherché dans le cas de la série supercuspidale non ramifiée.

4. Série supercuspidale modérément ramifiée

4.1. Soit E une extension quadratique séparable de k, dont la ramification est modérée; la caractéristique résiduelle du corps k est donc impaire, et il y a exactement deux telles extensions; le sous-groupe $1+\mathfrak{p}$ de $k^\times$ est alors formé de carrés, et le conducteur de l'extension E de k est égal à 1 : c'est aussi le conducteur du caractère $\hat{\sigma}$ de $k^\times$ que définit l'extension; on note σ la conjugaison de E sur k.

Soit A l'algèbre des endomorphismes de E considéré comme espace vectoriel sur k; l'espace vectoriel sous-jacent est somme directe de E et de E σ; les éléments de E σ sont de trace réduite nulle; pour un caractère non trivial ψ du groupe additif de k, le caractère $\psi_{E/k}=\psi\circ \mathrm{Tr}_{E/k}$ du groupe additif de E a pour ordre

$$\mathrm{ord}\ \psi_{E/k}=2\ \mathrm{ord}\ \psi+1.$$

Il en résulte que la mesure de Haar autoduale sur E qui lui correspond, soit $d_{E,\psi}$, donne à l'anneau $\mathcal{O}_E$ des entiers de E la mesure $q^{-\mathrm{ord}\,\psi-1/2}$. La mesure de Haar autoduale sur A qui correspond au bicaractère $\psi_{A/k}(xy)=\psi\circ \mathrm{Tr}_{A/k}(xy)$ est donnée par la formule suivante dans la décomposition $A=E+E\sigma$:

$$d_{A,\psi}(u+v\sigma)=d_{E,\psi}\,u\,d_{E,\psi}\,v.$$

L'action du groupe $A^\times$ sur les classes de réseaux de l'espace vectoriel E sur k est en fait une action du groupe projectif $A^\times/k^\times$; si $\mathfrak{p}_E$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_E$, les deux réseaux $\mathcal{O}_E$ et $\mathfrak{p}_E$ ne sont pas homothétiques, et le second est d'indice q dans le premier : ils définissent une arête de l'arbre de $A^\times$, arête conservée sous l'action de $E^\times$, et dont les extrémités sont permutées par l'action des éléments de $E^\times$ dont la valuation est impaire; on peut dire que le milieu de cette arête est l'unique point fixe de $E^\times$ opérant sur l'arbre; le sous-groupe d'isotropie correspondant dans le groupe projectif $A^\times/k^\times$ est un sous-groupe compact maximal non spécial.

4.2. Le noyau de l'application composée

$$E^\times \xrightarrow{\mathrm{val}} \mathbf{Z}\to \mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$$

est formé des éléments de valuation paire : c'est le sous-groupe $k^\times(1+\mathfrak{p}_E)$. On en déduit que le caractère $\hat{\sigma}$ de $k^\times$ que définit E admet exactement deux prolongements $\tilde{\sigma}'$ et $\tilde{\sigma}''$ modérément ramifiés, et ils se déduisent l'un de l'autre par le caractère $(-1)^{\mathrm{val}}$ de $E^\times$, qui est d'ordre 2. Comme le corps E contient un élément premier que la conjugaison σ envoie sur son opposé, chacun de ces prolongements $\tilde{\sigma}$ vérifie :

$$\tilde{\sigma}^2=(-1)^{\mathrm{val}}=(-1)^{((q-1)/2)\,\mathrm{val}}.$$

On en déduit :

(*a*) si -1 est un carré, alors $\tilde{\sigma}'$ et $\tilde{\sigma}''$ sont d'ordre 2, fixés par σ; ce sont les deux caractères d'ordre 2 de $E^\times$ relatifs à ses deux extensions quadratiques ramifiées;

(*b*) si -1 n'est pas un carré, alors $\tilde{\sigma}'$ et $\tilde{\sigma}''$ sont d'ordre 4, échangés par σ et complexes conjugués; chacun d'eux vérifie la relation (*cf.* prop. 2.7) :

$$\tilde{\sigma}^\sigma=(-1)^{\mathrm{val}}\,\tilde{\sigma}.$$

4.3. Appelons encore *régulier* tout caractère θ de $E^\times$ qui ne se factorise pas à travers la norme $N_{E/k}$ en un caractère de $k^\times$; ceci revient à dire $\theta \neq \theta^\sigma$. Le conducteur relatif $a_{E/k}(\theta)$ du caractère θ est le conducteur de θ/θ^σ; la relation suivante, pour $x \in \mathfrak{p}_E$:

$$(1-x)(1-{}^\sigma x)^{-1} = 1 + ({}^\sigma x - x)(1 + {}^\sigma x + ({}^\sigma x)^2 + \dots)$$

montre que $(\theta/\theta^\sigma)(1-x) = \theta(1 + ({}^\sigma x - x)(1 + {}^\sigma x + \dots))$; il en résulte que l'inégalité $a_{E/k}(\theta) > 1$ implique que le conducteur de θ/θ^σ est pair. Si, par contre, θ/θ^σ est trivial sur $1+\mathfrak{p}_E$, alors le caractère θ n'est régulier que si $\theta/\theta^\sigma = (-1)^{\mathrm{val}}$: en effet, l'action de σ sur $\mathcal{O}_E/\mathfrak{p}_E$ est triviale et donc θ/θ^σ est trivial sur $\mathcal{O}_E^\times$ dès qu'il l'est sur $1+\mathfrak{p}_E$. On a ainsi prouvé l'énoncé suivant :

LEMME. — *Lorsque l'extension quadratique* E *est modérément ramifiée sur k, les caractères réguliers de* $E^\times$, *ou bien ont leur conducteur relatif pair, ou bien ont leur conducteur relatif égal à* 1, *et, dans ce second cas, ils se déduisent de leur conjugué par* σ *par le produit par le caractère* $(-1)^{\mathrm{val}}$.

Pour $n \geqq 1$, on a les formules ([10], V, § 3) :

$$N_{E/k}(1+\mathfrak{p}_E^{2n-1}) = N_{E/k}(1+\mathfrak{p}_E^{2n}) = 1+\mathfrak{p}^n.$$

On en déduit que si un caractère χ de $k^\times$ a son conducteur $a(\chi) > 1$, alors le conducteur $a(\chi_{E/k})$ du relèvement $\chi_{E/k} = \chi \circ N_{E/k}$ de χ à $E^\times$ est $2a(\chi)-1$; pour $a(\chi)=1$, on a aussi $a(\chi_{E/k})=1$ sauf si $\chi = \hat{\sigma}$, le caractère d'ordre 2 de $k^\times$ que définit l'extension E, auquel cas $\chi_{E/k}$ est trivial.

Un caractère θ de $E^\times$ est appelé *primordial* s'il est régulier et si son conducteur est minimal parmi les conducteurs de tous les caractères $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ où χ parcourt les caractères de $k^\times$; d'après ce qui précède, ceci revient à dire que, ou bien le conducteur de θ est pair, ou bien qu'il est trivial sur $1+\mathfrak{p}_E$ et que $\theta^\sigma = (-1)^{\mathrm{val}}\,\theta$.

4.4. On dispose d'un lemme analogue à celui de 3.3.

LEMME. — *Soit* χ *un caractère de* $k^\times$; *alors,* E *étant une extension quadratique modérément ramifiée de k et* σ *la conjugaison de* E *sur k, on a, pour* $a(\chi) > m \geqq 1$:

$$\hat{\int}_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{2a(\chi)-m-1}} \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1} = \lambda_{E/k}(\psi),$$

où ψ *est un caractère du groupe additif de k tel que*

$$\chi(1+x) = \psi(x) \qquad \textit{pour} \quad \mathrm{val}\, x \geqq a(\chi)-1.$$

Preuve. — Pour tout entier r, on a $\mathrm{Tr}_{E/k}\,\mathfrak{p}_E^{2r} = \mathrm{Tr}_{E/k}\,\mathfrak{p}_E^{2r-1} = \mathfrak{p}^r$ ([10], V, § 3); la fonction $x \in \mathfrak{p}_E^m \to \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1}$ est donc constante sur les classes modulo $\mathfrak{p}_E^{a(\chi_{E/k})-m}$: pour $x \in \mathfrak{p}_E$, $y \in \mathfrak{p}_E^{a(\chi_{E/k})-m}$ on a ${}^\sigma yy$ et $\mathrm{Tr}_{E/k}\,{}^\sigma xy \in \mathfrak{p}^{a(\chi)}$, d'où :

$$\begin{aligned}\chi(1-{}^\sigma(x+y)(x+y))^{-1} &= \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1}\,\chi(1-{}^\sigma yy)^{-1}\,\chi(1-{}^\sigma xy - {}^\sigma yx)^{-1}\\ &= \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1}\,\chi(1-{}^\sigma yy)^{-1}\,\chi(\mathrm{Tr}_{E/k}\,{}^\sigma xy) = \chi(1-{}^\sigma xx)^{-1}.\end{aligned}$$

Ensuite, vérifions la formule pour $a(\chi)=m+1$: il faut voir que l'on a

$$\sum_{\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}/\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m+1}} \chi(1-{}^{\sigma}xx)^{-1}=q^{1/2}\,\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi);$$

or, le premier nombre est aussi la somme sur le même ensemble des $\psi({}^{\sigma}xx)$; choisissons un élément premier π_{E} de E de trace nulle, et soit π sa norme; écrivons $x=\pi_{\mathrm{E}}^{m}u$, u entier : $\psi({}^{\sigma}xx)=\psi(\pi^{m}\,{}^{\sigma}uu)=\psi(\pi^{m}v^{2})$, en notant v l'image de u dans le corps résiduel de E, qui est celui de k, et en remarquant que l'ordre de ψ étant $-(m+1)$, l'application $y\to\psi(\pi^{m}y)$ définit un caractère de $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ trivial sur $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}$ donc un caractère du groupe additif de ce corps résiduel. D'autre part, comme on l'a vu en 1.7 :

$$q^{1/2}\,\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi)=q^{-\operatorname{ord}\psi/2}\,\varepsilon(\hat{\sigma},\psi)=\sum_{(\mathcal{O}/\mathfrak{p})^{\times}}\hat{\sigma}(v)\,\psi(\pi^{m}v).$$

On est donc ramené à prouver que, pour un caractère non trivial du groupe additif du corps $\mathbf{F}_{q}$, on a la formule suivante, où figure le symbole de Legendre :

$$\sum_{\mathbf{F}_{q}}\tau(x^{2})=\sum_{\mathbf{F}_{q}^{\times}}\left(\frac{x}{q}\right)\tau(x),$$

et qui est facile à vérifier.

Il reste à voir que la formule de l'énoncé est encore vraie pour $a(\chi)>m+1$, à savoir que l'on a

$$\sum_{\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}/\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{2a(\chi)-m-1}}\chi(1-{}^{\sigma}xx)^{-1}=q^{a(\chi)-m-1/2}\,\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi).$$

Pour cela on somme sur les classes modulo $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{2a(\chi)-m-2}/\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{2a(\chi)-m-1}$, ce qui fait apparaître $\psi(\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}/k}\,xy)$ à sommer sur les y dans ce groupe, nul sauf si $x\in\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m+1}$, et ainsi la formule à prouver pour l'indice m se ramène à la formule pour l'indice $m+1$; ceci permet de revenir au cas $a(\chi)=m+1$, ce qu'on vient de traiter, et la formule est donc établie.

Remarque. — Ce lemme et celui de 3.3 peuvent se mettre sous la forme commune suivante, pour un caractère χ de $k^{\times}$ tel que $a(\chi_{\mathrm{E}/k})\geqq 2m\geqq 2$:

$$\hat{\int}_{\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}/\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{a(\chi_{\mathrm{E}/k})-m}}\chi(1-\mathrm{N}_{\mathrm{E}/k}\,x)^{-1}=\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi)$$

le caractère ψ étant défini comme dans le lemme 4.4.

4.5. Soit θ un caractère régulier du groupe $\mathrm{E}^{\times}$ dont le conducteur relatif est pair : $a_{\mathrm{E}/k}(\theta)=2m$. Soit $\mathrm{K}_{\theta}=\mathrm{E}^{\times}(1+\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}\sigma)$: c'est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{A}^{\times}$, compact modulo le centre $k^{\times}$. On en définit une représentation K_{θ} de degré 1 par

$$\varkappa_{\theta}\,|\,\mathrm{E}^{\times}=\theta\qquad\text{et}\qquad\varkappa_{\theta}(1+x\sigma)=\chi_{\mathrm{A}/k}(1+x\sigma)\qquad\text{pour}\quad x\in\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}.$$

où χ est un caractère de $k^{\times}$ tel que le caractère $\theta\chi_{\mathrm{E}/k}^{-1}$ soit primordial; cette définition ne dépend pas du choix de χ. On définit alors une représentation de $\mathrm{A}^{\times}$ induisant $\varkappa_{\theta}$:

$$\alpha_{\theta}=\mathrm{Ind}_{\mathrm{K}_{\theta}}^{\mathrm{A}^{\times}}\varkappa_{\theta}.$$

PROPOSITION. — *La représentation ainsi définie par un caractère régulier* θ *de* $E^\times$ *de conducteur relatif pair* α_0 *de* $A^\times$ *est admissible irréductible supercuspidale; son degré formel relativement à la mesure de Haar sur* $A^\times/k^\times$ *qui donne à* $A_E/k^\times$ *la masse* 1 *est* $q^{a_{E/k}(\theta)/2-1}(q-1)$, *et son facteur* ε *est donné par*

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \text{ quand } \theta \text{ est primordial}$$

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=\lambda_{E/k}(\psi_\theta)\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \text{ sinon,}$$

où ψ_θ *désigne un caractère du groupe additif de* k *qui vérifie*

$$\chi(1+x)=\psi_\theta(x) \qquad \textit{pour} \quad \operatorname{val} x \geqq a(\chi)-1,$$

le caractère χ *de* $k^\times$ *étant tel que le caractère* $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ *de* $E^\times$ *soit primordial.*

Preuve. — La première partie est démontrée par T. Shintani ([11], th. 4 et cor. 1); le degré formel est égal à l'indice de K_θ dans A_E : c'est donc le produit de $[A_E : E^\times(1+\mathfrak{p}_E\,\sigma)]$ par $[E^\times(1+\mathfrak{p}_E\,\sigma) : E^\times(1+\mathfrak{p}_E^m\,\sigma)]$, c'est-à-dire $(q-1)\,q^{m-1}$. Quant au facteur ε on a, par 2.3, l'expression

$$\begin{aligned}\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)&=\int_{K_\theta} \psi_{A/k}(x)\,\varkappa_\theta(x)^{-1}\,\mu A/k(x)^{-1/2}\,d_{A,\psi}\,x\\ &=\int_{E^\times} \psi_{E/k}(t)\,\mu_E(t)^{1/2}\,\theta(t)^{-1}\,d_{E,\psi}\,t\int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1-{}^\sigma yy)^{-1}\,d_{E,\psi}\,y\\ &=q^{(2m+2\operatorname{ord}\psi+1)/2}\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})\int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1-{}^\sigma yy)^{-1}\,d_{E,\psi}\,y;\end{aligned}$$

pour θ primordial, on a $a(\chi)\leqq m$ et donc $\chi(1-{}^\sigma yy)=1$ sur $\mathfrak{p}_E^m$; dans ce cas, on a donc

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=q^{-m-(2\operatorname{ord}\psi+1)/2}\,q^{(2m+2\operatorname{ord}\psi+1)/2}\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})=\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Quand θ n'est pas primordial, la mesure $q^{a(\chi)+\operatorname{ord}\psi}\,d_{E,\psi}\,y$ donne à $\mathcal{O}_E$ la masse $q^{a(\chi)-1/2}$: c'est donc la mesure autoduale par rapport à un caractère ψ_θ pris comme dans l'énoncé; le lemme de 4.4 appliqué ici donne

$$\widehat{\int}_{\mathfrak{p}_E^m/\mathfrak{p}_E^{2a(\chi)-m-1}} \chi(1-{}^\sigma yy)^{-1}=q^{a(\chi)+\operatorname{ord}\psi}\int_{\mathfrak{p}_E^m} \chi(1-{}^\sigma yy)^{-1}\,d_{E,\psi}\,y=\lambda_{E/k}(\psi_\theta),$$

et donc

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi)=\lambda_{E/k}(\psi_\theta)\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}) \text{ pour } \theta \text{ non primordial.}$$

Une autre démonstration de cette proposition sera donnée aux paragraphes 5 et 6.

4.6. On va montrer maintenant que le bon paramétrage des séries supercuspidales modérément ramifiées (2.8) s'obtient à partir des représentations que l'on vient de construire grâce à un décalage convenable, analogue à celui du cas non ramifié (3.8).

THÉORÈME. — *Pour chaque caractère régulier θ du groupe $E^\times$ dont le conducteur relatif est pair, il y a un unique prolongement $\tilde{\sigma}$ du caractère $\hat{\sigma}$ de $k^\times$ que définit l'extension* E, *qui soit trivial sur* $1+\mathfrak{p}_E$ *et tel que*

$$\alpha_\theta = (\tilde{\theta})_A \qquad \text{où} \quad \tilde{\theta} = \theta\tilde{\sigma}.$$

Preuve. — On va se placer dans les conditions d'application du théorème rappelé en 2.4. Comme $a(\tilde{\sigma})=1$, les deux caractères θ et $\tilde{\theta}$ de $E^\times$ ont même conducteur relatif, et sont donc tous deux réguliers; par construction, la restriction de la représentation α_θ au centre $k^\times$ est celle de θ à $k^\times$: c'est le produit de $\hat{\sigma}$ par $\tilde{\theta} \mid k^\times$. Voyons donc que pour tout caractère χ de $k^\times$ on a l'égalité

$$\varepsilon((\tilde{\theta})_A \otimes \chi_{A/k}, \psi) = \varepsilon(\alpha_\theta \otimes \chi_{A/k}, \psi).$$

Pour chaque caractère θ en question, fixons un élément θ_ψ de $E^\times$ pour lequel

$$\theta(1+t) = \psi_{E/k}(\theta_\psi t) \qquad \text{pour} \quad t \in \mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}.$$

Si $\tilde{\sigma}$ est un caractère de $E^\times$ trivial sur $1+\mathfrak{p}_E$, alors $\tilde{\sigma}(\theta_\psi) = \tilde{\sigma}((\theta\chi_{E/k})_\psi)$ pour θ et $\theta\chi_{E/k}$ primordiaux : en effet on a alors $a(\chi) \leqq a(\theta)/2$ et donc $a(\chi_{E/k}) < a(\theta)$, ce qui donne

$$\tilde{\sigma}((\theta\chi_{E/k})_\psi) = \tilde{\sigma}(\theta_\psi + \chi_{E/k,\psi}) = \tilde{\sigma}(\theta_\psi).$$

D'autre part, on sait que $\varepsilon(\theta_A, \psi) = \lambda_{E/k}(\lambda)\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$, donc (1.4) :

$$\varepsilon(\tilde{\theta}_A, \psi) = \lambda_{E/k}(\psi)\,\tilde{\sigma}(\theta_\psi)^{-1}\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k}).$$

Comme chaque membre de l'identité voulue ne dépend que de $\theta\chi_{E/k}$, on voit que, par le théorème de 4.5, il s'agit de trouver un prolongement $\tilde{\sigma}$ de $\hat{\sigma}$ à $E^\times$ qui soit trivial sur $1+\mathfrak{p}_E$ et tel que

$$\tilde{\sigma}(\theta_\psi) = \lambda_{E/k}(\psi) \text{ pour } \theta \text{ primordial},$$
$$\tilde{\sigma}(\theta_\psi) = \lambda_{E/k}(\psi)/\lambda_{E/k}(\psi_\theta) \text{ sinon}.$$

Lorsque θ n'est pas primordial et que $\theta\chi_{E/k}^{-1}$ l'est, on a

$$a(\chi_{E/k}) = 2\,a(\chi) - 1 = a(\theta) \qquad \text{et pour} \quad \operatorname{val} x \geqq a(\theta) - 1;$$
$$\theta(1+x) = \chi_{E/k}(1+x) = \chi(1+\operatorname{Tr}_{E/k} x) = \psi_{E/k}(\theta_\psi x) = \psi_\theta(\operatorname{Tr}_{E/k} x);$$

ceci montre qu'on peut prendre pour θ_ψ un élément $\chi_\psi \in k^\times$ tel que

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x) \qquad \text{dès que} \quad \operatorname{val} x \geqq a(\chi) - 1,$$

et pour caractère ψ_θ le caractère $\psi.\chi_\psi$; mais alors :

$$\lambda_{E/k}(\psi_\theta) = \hat{\sigma}(\chi_\psi)^{-1}\,\lambda_{E/k}(\psi),$$
$$\lambda_{E/k}(\psi)/\lambda_{E/k}(\psi_\theta) = \hat{\sigma}(\chi_\psi) = \tilde{\sigma}(\theta_\psi).$$

Il reste à voir la condition imposée à $\tilde{\sigma}$ lorsque le caractère θ de $E^\times$ est primordial; un élément $\theta_\psi \in E$ qui satisfait à $\theta(1+x)=\psi_{E/k}(\theta_\psi x)$ pour val $x \geqq a(\theta)-1$ a pour valuation $-a(\theta)-\mathrm{ord}\,\psi_{E/k}=-a(\theta)-2\,\mathrm{ord}\,\psi-1$, qui est un entier impair; or, pour un élément $x \in E^\times$ dont la valuation est impaire, on a, par 4.2 :

$$\tilde{\sigma}(x)^2=\hat{\sigma}(-1);$$

d'autre part, on a aussi (cor. de 1.7) :

$$\lambda_{E/k}(\psi)^2=\hat{\sigma}(-1);$$

avec ce qu'on a dit en 4.2, on voit que la formule suivante, pour un caractère primordial de conducteur pair

$$\tilde{\sigma}(\theta_\psi)=\lambda_{E/k}(\psi),$$

détermine le prolongement $\tilde{\sigma}$ de $\hat{\sigma}$ si on lui impose d'être trivial sur $1+\mathfrak{p}_E$.

4.7. Il reste le cas des caractères réguliers de $E^\times$ dont le conducteur relatif est égal à 1; dans cette hypothèse, notons F l'extension quadratique non ramifiée de k, et K l'extension composée E.F : c'est l'extension quadratique non ramifiée de E; elle définit le caractère $\widehat{\sigma_E^K}=(-1)^{\mathrm{val}}$ sur $E^\times$; on a vu en 4.3 qu'un caractère de $E^\times$ dont le conducteur relatif est égal à 1 vérifie $\theta^\sigma=\widehat{\sigma_E^K}\,\theta$; ceci montre que le relèvement à $K^\times$: $\theta_{K/E}=\theta\circ N_{K/E}$ de θ s'écrit de deux façons exactement comme relèvement d'un caractère de $F^\times$, à savoir $\varphi_{K/E}$ et $(\varphi^{\sigma^F})_{K/F}$, avec $\varphi^{\sigma^F}=\widehat{\sigma_E^K}\,\varphi$. Pour satisfaire à la correspondance de Langlands, on pose donc

$$\theta_A=\varphi_A.$$

On sait que les représentations construites aux numéros 3 et 4 constituent toutes les représentations supercuspidales de $A^\times$, à équivalence près, lorsque la caractéristique résiduelle est impaire.

5. Construction des autres représentations supercuspidales

5.1. On note désormais E une extension quadratique séparable ramifiée du corps k, et σ le conjugaison de E sur k. On sait que le conducteur $d=d_{E/k}$ de E sur k est donné par l'une des propriétés suivantes [10] :

- plus grand entier $n \geqq 0$ tel que σ opère trivialement sur $\mathcal{O}_E/\mathfrak{p}_E^n$;
- plus petit entier $n \geqq 0$ tel que $1+\mathfrak{p}^n$ soit formé de normes de E;
- plus grand entier $n \geqq 0$ tel que la trace de $\mathfrak{p}_E^{-n}$ soit dans $\mathcal{O}$;
- valuation du discriminant de $\mathcal{O}_E$ relativement à $\mathcal{O}$;
- conducteur du caractère $\hat{\sigma}$ d'ordre 2 de $k^\times$ qui a $N_{E/k}E^\times$ pour noyau;
- valuation de $\pi_E-{}^\sigma\pi_E$ pour tout élément premier π_E de E.

Si la ramification est sauvage, ce qui équivaut au fait que la caractéristique résiduelle est 2, le conducteur est aussi le plus grand entier $n>1$ tel que $1+\mathfrak{p}_E^{n-1}$ contienne le noyau de la norme.

On notera toujours $N_{E/k}$ et $T_{E/k}$ la norme et la trace de E sur k.

La formule $\pi_E - {}^\sigma\pi_E = T_{E/k}\,\pi_E - 2\,{}^\sigma\pi_E$ pour un élément premier π_E montre que l'on a :

(*a*) $d=2\text{ val } T_{E/k}\,\pi_E$ si $d \leqq 2 \text{ val } 2$;

(*b*) $d=2\text{ val } 2+1$ sinon, et alors $\mathfrak{p}_E^{-d+1}=(1/2)\,\mathcal{O}$.

Rappelons que pour tout entier n on note n' la partie entière de $n/2$ et $n''=n-n'$. On a alors :

$$T_{E/k}\,\mathfrak{p}_E^m = \mathfrak{p}^{(m+d)'} \text{ pour tout entier } m,$$

$$N_{E/k}(1+\mathfrak{p}_E^m) = 1+\mathfrak{p}^{(m+d)'} \text{ pour tout entier } m \geqq d.$$

5.2. Comme en 3.2 et 4.3, un caractère de $E^\times$ peut être régulier, ou primordial relativement au corps k, et il possède un conducteur et un conducteur relatif.

LEMME. — *Soit* θ *un caractère régulier de* $E^\times$. *Alors :*

(*a*) $a(\theta) \geqq d$;

(*b*) *si* $a(\theta)=d$ *alors* θ *est primordial et* $\theta/\theta^\sigma=(-1)^{\text{val}\,E}$;

(*c*) *si* $a(\theta)>d$ *alors* θ *est primordial si et seulement si* $a(\theta)-d$ *est impair, et, dans ce cas, on a*

$$a_{E/k}(\theta)=a(\theta)-d+1.$$

Preuve. — (*a*) vient de la première caractérisation du conducteur d;

(*b*) résulte de ce qui alors θ/θ^σ est trivial sur les unités de E;

(*c*) d'abord si $a(\theta)-d$ est impair, alors θ est primordial : en effet, si non il y a un caractère χ de $k^\times$, de conducteur $a(\chi)>d$, tel que $a(\theta\chi_{E/k})<a(\theta)$, et donc $a(\theta)=a(\chi_{E/k})=2\,a(\chi)-d$ a la même parité que d. Ensuite, si $a(\theta)-d$ est pair >0, la restriction de θ à $1+\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}$ donne un caractère de $\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}/\mathfrak{p}_E^{a(\theta)}$ fixé par σ qui se factorise à travers la trace : il y a donc un caractère χ de $k^\times$ tel que, pour $x\in\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}$, on ait

$$\theta(1+x)=\chi(1+T_{E/k}\,x)=\chi(N_{E/k}(1+x))$$

et ainsi $a(\theta\chi_{E/k}^{-1})$ est plus petit que $a(\theta)$, ce qui prouve que θ n'est pas primordial. Prouvons la formule $a_{E/k}(\theta)=a(\theta)-d+1$; on observe que, pour $x\in\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d}$, on a, sachant que $a(\theta)>d$:

$$(\theta/\theta^\sigma)(1+x)=\theta\left(\frac{1+x}{1+{}^\sigma x}\right)=\theta\left(1+\frac{x-{}^\sigma x}{1+{}^\sigma x}\right)=\theta(1+x-{}^\sigma x),$$

or, du fait de la parité de $a(\theta)-d+1$, on a

$$T_{E/k}\,\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}=T_{E/k}\,\mathfrak{p}_E^{a(\theta)};$$

il en résulte que θ ne peut être trivial sur les $1+x-{}^\sigma x$, $x\in\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d}$ puisque dans le cas contraire il se factoriserait à travers $T_{E/k}\,x$ et serait donc trivial pour $x\in\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-1}$, contredisant la définition de $a(\theta)$; ceci montre que θ/θ^σ n'est pas trivial sur $1+\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d}$ et comme il l'est sur $1+\mathfrak{p}_E^{a(\theta)-d+1}$, on a bien la formule annoncée.

5.3. La filtration de E par les puissances $\mathfrak{p}_E^n$, $n \in \mathbb{Z}$, de l'idéal premier définit une filtration $(\mathfrak{p}_A^m)$ sur l'algèbre A des endomorphismes de E, espace vectoriel sur k : par définition, un $u \in A$ est dans $\mathfrak{p}_A^m$ s'il décale de m la filtration sur E :

$$u \in \mathfrak{p}_A^m \iff u(\mathfrak{p}_E^n) \subset \mathfrak{p}_E^{m+n} \text{ pour tout } n$$

(en fait deux entiers de parité distincte suffisent). On écrit $\mathfrak{p}_A^1 = \mathfrak{p}_A$ et $p_A^0 = \mathcal{O}_A$; on a alors $\mathfrak{p}_A^{m+n} = \mathfrak{p}_A^m \mathfrak{p}_A^n$ pour tous entiers m, n; de plus $\mathcal{O}_A^\times$, le groupe des unités de $\mathcal{O}_A$, est un sous-groupe d'Iwahori de $A^\times$; pour chaque m, le groupe $E^\times$ et la conjugaison σ normalisent $\mathfrak{p}_A^m$.

Pour $m \geqq 1$, on pose

$$A^\times(m) = 1 + \mathfrak{p}_A^m;$$

c'est un sous-groupe distingué de $\mathcal{O}_A^\times$, les sous-groupes $E^\times A^\times(m)$ sont ouverts, compacts modulo le centre $k^\times$ de $A^\times$, et distingués dans le groupe $A_E = E^\times \mathcal{O}_A^\times$ fixateur de l'arête de l'arbre de $A^\times$ déterminée par E; on a aussi

$$E^\times \cap A^\times(m) = 1 + \mathfrak{p}_E^m.$$

Le groupe quotient $\mathfrak{p}_A^m / \mathfrak{p}_A^{m+1}$ est aussi un $\mathcal{O}_A$-module, qui en fait un espace vectoriel de dimension 2 sur le corps résiduel de E, égal à celui de k; si q est leur ordre commun, l'indice de $E^\times A^\times(m)$ dans A_E est $q^{m-1}(q-1)$. Remarquons aussi que $\sigma \in A^\times(m)$ pour $m < d$.

L'écriture de A comme somme directe $E + \sigma E$ permet de parler des *réseaux décomposables* de A : ce sont les sous-modules sur $\mathcal{O}_E$, ouverts et compacts, qui s'écrivent $\mathfrak{p}_E^m + \sigma \mathfrak{p}_E^n$ avec m, n entiers; dans l'arbre défini par le plan A sur E, ils correspondent aux sommets situés sur la géodésique définie par les droites E et σ E. Pour chaque entier m, on appelle $\mathfrak{p}_A^{m-}$ et $\mathfrak{p}_A^{m+}$ les deux réseaux décomposables extrêmes encadrant $\mathfrak{p}_A^m$:

$$\mathfrak{p}_A^{m-} \subset \mathfrak{p}_A^m \subset \mathfrak{p}_A^{m+};$$

autrement dit, $\mathfrak{p}_A^{m-}$ est la somme $\mathfrak{p}_E^m + \sigma \mathfrak{p}_E^m$ des traces de $\mathfrak{p}_A^m$ sur E et σ E, et $\mathfrak{p}_A^{m+}$ la somme des projections de $\mathfrak{p}_A^m$ sur E et σ.

LEMME. — *Les deux inclusions*

$$\mathfrak{p}_A^{m-} \subset \mathfrak{p}_A^m \subset \mathfrak{p}_A^{m+}$$

sont d'indice q^{d-1}.

Preuve. — La forme linéaire trace $T_{A/k}$ sur A définit une forme bilinéaire sur A : $x, y \mapsto T_{A/k}(xy)$; celle-ci permet de parler du réseau complémentaire d'un réseau donné; on voit que $\mathfrak{p}_A^m$ a pour réseau complémentaire p_A^{-m-1} et que le réseau décomposable $\mathfrak{p}_E^m + \sigma \mathfrak{p}_E^n$ a pour réseau complémentaire $\mathfrak{p}_E^{-m-d} + \sigma \mathfrak{p}_E^{-n-d}$; les deux inclusions de l'énoncé se renversent en inclusions sur les réseaux complémentaires, et donnent donc les réseaux décomposables extrêmes encadrant $\mathfrak{p}_A^{-m-1}$; en particulier

$$\mathfrak{p}_A^{(-m-1)+} = \mathfrak{p}_E^{-m-d} + \sigma \mathfrak{p}_E^{-m-d}$$

ce qui donne, par décalage de $2m+1$:

$$\mathfrak{p}_A^{m+} = \mathfrak{p}_E^{m-d+1} + \sigma\, \mathfrak{p}_E^{m-d+1}.$$

Ceci montre que $\mathfrak{p}_A^{m-}$ est d'indice $q^{2(d-1)}$ dans $\mathfrak{p}_A^{m+}$, et le lemme résulte des égalités

$$[\mathfrak{p}_A^m : \mathfrak{p}_A^{m-}] = [\mathfrak{p}_A^{(-m-1)+} : \mathfrak{p}_A^{-m-1}] = [\mathfrak{p}_A^{m+} : \mathfrak{p}_A^m] = [\mathfrak{p}_A^{m+} : \mathfrak{p}_A^{m-}]^{1/2}.$$

Ce lemme montre que dans l'arbre défini par le plan A sur E, le sommet défini par les réseaux $(\mathfrak{p}_A^m)$ est à la distance $d-1$ de la géodésique que définissent E et σ E.

Il résulte du lemme que, pour $m \geqq 1$, on a

$$A^\times(m) = 1 + \mathfrak{p}_E^m + \sigma\, \mathfrak{p}_E^m + (\sigma - 1)\, \mathfrak{p}_E^{m-d+1} = (1 + \mathfrak{p}_E^m)(1 + (\sigma - 1)\, \mathfrak{p}_E^{m-d+1});$$

c'est une décomposition avec unicité de l'écriture, en produit de deux groupes $1 + \mathfrak{p}_E^m = A^\times(m) \cap E^\times$, et $H(m) = 1 + (\sigma - 1)\, \mathfrak{p}_E^{m-d+1}$.

5.4. Soit H le fixateur dans $A^\times$ de la forme linéaire trace $T_{E/k}$ sur E : c'est donc le groupe affine de la droite de E formée des éléments de trace 1. Comme l'élément $u = 1 + x + \sigma y$ de A vérifie $T_{E/k}\, u(t) = T_{E/k}\, t$ pour tout $t \in E$ si et seulement si $x + y = 0$, on pose

$$h(x) = 1 + (\sigma - 1)\, x, \qquad x \in E,$$

de sorte que $h(x)\, t = (1 - T_{E/k}\, x)\, t + {}^\sigma x$ pour $T_{E/k}\, t = 1$; la « dérivée » $1 - T_{E/k}\, x$ de $h(x)$ est son déterminant, et H est donc formée des $h(x)$ pour $T_{E/k}\, x \neq 1$. En particulier $h(0) = 1$ et $h(1) = \sigma$.

On a les formules suivantes, pour $x, y \in E$:

$$h(x)\, h(y) = h(x + y - (T_{E/k}\, x)\, y),$$
$$h(x)\, h(y) = h(y + {}^\sigma y x - {}^\sigma x y)\, h(x) = h({}^\sigma y x - {}^\sigma x y)\, h(y)\, h(x)$$

et, pour

$$T_{E/k}\, x \neq 1, \qquad h(x)^{-1} = h(-(1 - T_{E/k}\, x)^{-1}\, x).$$

LEMME. — *On a la décomposition suivante, avec unicité de l'écriture*

$$A^\times = E^\times H.$$

Preuve. — La forme bilinéaire sur E définie par $t, u \mapsto T_{E/k}(t^\sigma u)$ donne à l'endomorphisme $x + \sigma y \in A$ l'adjoint ${}^\sigma x + \sigma y$; cet antiautomorphisme de A envoie H sur le fixateur H_1 de la droite k de E. Comme $E^\times$ est un espace homogène sous A, principal sous $E^\times$, on a $A^\times = E^\times H_1$, avec unicité de l'écriture; le lemme s'obtient alors par application de l'inverse de l'adjoint sur cette décomposition.

Le groupe $H(m)$ de 5.3 n'est autre que la trace de H sur $A^\times(m)$, et la décomposition $A^\times(m) = (1 + p_E^m)\, H(m)$ est celle induite par celle du lemme : $A^\times = E^\times H$.

Il résulte du lemme que l'application

$$h \in H \mapsto E^\times h\, E^\times$$

définit une projection sur les doubles classes

$$\mathrm{H}(m)\diagdown \mathrm{H}/\mathrm{H}(m) \to \mathrm{E}^{\times}\mathrm{A}^{\times}(m)\diagdown \mathrm{A}^{\times}/\mathrm{E}^{\times}\mathrm{A}^{\times}(m).$$

Le radical unipotent N de H est le groupe des translations de la droite affine de E formée des éléments de trace 1 : c'est donc le noyau du déterminant dans H, et l'application h définit un isomorphisme du groupe noyau de la trace sur N. C'est aussi le groupe des commutateurs de H.

Il est classique que le groupe H admette une unique classe de représentations lisses irréductibles de dimension >1; on appellera ces représentations les représentations non dégénérées de H : elles ne contiennent aucun vecteur fixé par N. On en a une réalisation dans l'espace des fonctions sur la droite affine des éléments de trace 1, localement constantes, à support compact et d'intégrale nulle pour n'importe quelle mesure invariante sous l'action de N, le groupe H opérant par

$$f(t) \mapsto f(h(x)^{-1}t) = f\left(\frac{t - {}^{\sigma}x}{1 - \mathrm{T}_{\mathrm{E}/k}\,x}\right).$$

Cette représentation est équivalente à ses tordues par les caractères du déterminant. On en a d'autres réalisations par induction d'un caractère non trivial quelconque de N.

Si π_{E} est un élément premier de E, alors $\pi_{\mathrm{E}} - {}^{\sigma}\pi_{\mathrm{E}}$ est une base du noyau de la trace, et donc $\mathrm{Ker}\ \mathrm{T}_{\mathrm{E}/k} \cap \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m-d}$ ne dépend que de m''; il en résulte que $\mathrm{N} \cap \mathrm{H}(m)$ ne dépend que de $(m+1)'' = m'+1$. On écrit donc $\mathrm{N} \cap \mathrm{H}(m) = \mathrm{N}(m')$.

La formule des commutateurs sur H montre que le groupe des commutateurs de $\mathrm{H}(m)$ est $\mathrm{N}(m)$. Pour qu'un caractère de $\mathrm{N}(m')$ se prolonge en une représentation de degré 1 de $\mathrm{H}(m)$, il faut et il suffit qu'il soit trivial sur $\mathrm{N}(m)$, et alors son fixateur dans H contient $\mathrm{H}(m)\mathrm{N}$. On dira qu'un caractère de $\mathrm{N}(m')$ est *non dégénérée* pour $\mathrm{H}(m)$ si son fixateur est $\mathrm{H}(m)\mathrm{N}$: modulo N, c'est donc $\det(\mathrm{H}(m)\mathrm{N}) = 1 + \mathfrak{p}^{m''}$; ceci revient à dire que son conducteur est $\mathrm{N}(m)$. On dira aussi qu'une représentation de degré 1 de $\mathrm{H}(m)$ est non dégénérée si sa restriction à $\mathrm{N}(m')$ est non dégénérée pour $\mathrm{H}(m)$; cette restriction la détermine à torsion près par un caractère du déterminant sur $\mathrm{H}(m)$. Comme $\mathrm{N}(m) = \mathrm{H}(2m) \cap \mathrm{N}$ et que $\mathrm{H}(m)/\mathrm{H}(2m)$ est commutatif, on en déduit que les représentations non dégénérées de $\mathrm{H}(m)$ de conducteur minimal $\mathrm{H}(2m)$ sont données par les caractères de $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m-d+1}$ dont le conducteur est $2m-d+1$, par la formule

$$h(x) \mapsto \eta(x), \qquad x \in \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m-d+1}.$$

PROPOSITION. — *La représentation de* H *induite par une représentation non dégénérée de* $\mathrm{H}(m)$ *est non dégénérée.*

Preuve. — (*a*) Soit ν un caractère de N dont le conducteur est $\mathrm{N}(m)$: sa restriction à $\mathrm{N}(m')$ est donc non dégénérée pour $\mathrm{H}(m)$; les relations de commutation montrent que si $n = h(x) \in \mathrm{N}$ et $k = h(y) \in \mathrm{H}$ alors $nkn^{-1}k^{-1} = h((\mathrm{T}_{\mathrm{E}/k}\,y)x)$, et donc que l'application

$$n \in \mathrm{N}, \quad k \in \mathrm{H}(m) \mapsto \nu(nkn^{-1}k^{-1})$$

est constante sur les classes $n\,\mathrm{N}(m')$, $k\,\mathrm{N}(m')$, et met en dualité les deux groupes commutatifs $\mathrm{N}/\mathrm{N}(m')$ et $\mathrm{H}(m)/\mathrm{N}(m')$. On note dn et dk des mesures de Haar sur ces groupes en dualité pour cet accouplement.

(*b*) Soit η une représentation non dégénérée de $\mathrm{H}(m)$; on appelle ν un prolongement en un caractère de N de la restriction de η à $\mathrm{N}(m')$. La proposition sera démontrée si l'on prouve que la représentation de H induite de $\mathrm{H}(m)$ par η est équivalente à la représentation de H induite de N par ν. Pour une fonction f dans l'espace de celle-ci, on pose

$$(\mathrm{A}f)(h)=\int_{\mathrm{H}(m)/\mathrm{N}(m')}\eta(k)\,f(k^{-1}h)\,dk,\qquad h\in\mathrm{H},$$

alors $\mathrm{A}f$ est dans l'espace de la représentation induite par η, et l'opérateur A entrelace les représentations. Pour une fonction g dans l'espace de la représentation induite par η, on pose

$$(\mathrm{B}g)(h)=\int_{\mathrm{N}/\mathrm{N}(m')}\overline{\nu(n)}\,g(nh)\,dn,\qquad h\in\mathrm{H},$$

alors $\mathrm{B}g$ est dans l'espace de la représentation induite par ν, et l'opérateur B entrelace les représentations. Le composé BA s'écrit :

$$(\mathrm{BA}f)(h)=\int_{\mathrm{N}/\mathrm{N}(m')}dn\int_{\mathrm{H}(m)/\mathrm{N}(m')}\nu(n)\,\eta(k)\,f(k^{-1}nh)\,dk;$$

comme $f(k^{-1}nh)=\nu(k^{-1}nk)\,f(k^{-1}h)$, c'est aussi

$$\int_{\mathrm{N}/\mathrm{N}(m')}dn\int_{\mathrm{H}(m)/\mathrm{N}(m')}\nu(nkn^{-1}k^{-1})\,\eta(k)\,f(k^{-1}h)\,dk,$$

et, par (*a*), la formule d'inversion dit que c'est la valeur à l'origine de la fonction $k\mapsto\eta(k)\,f(k^{-1}h)$, à savoir $f(h)$. De même, le composé AB s'écrit :

$$(\mathrm{AB}g)(h)=\int_{\mathrm{H}(m)/\mathrm{N}(m')}dk\int_{\mathrm{N}/\mathrm{N}(m')}\overline{\eta(k)}\,\overline{\nu(n)}\,g(nkh)\,dn$$

qui, par le changement de variable $n\mapsto knk^{-1}$ se met sous la forme

$$\int_{\mathrm{H}(m)/\mathrm{N}(m')}dk\int_{\mathrm{N}/\mathrm{N}(m')}\nu(nkn^{-1}k^{-1})\,\overline{\nu(n)}\,g(nh)\,dn$$

et, comme précédemment, ceci est la valeur à l'origine de $n\mapsto\overline{\nu(n)}\,g(nh)$ à savoir $g(h)$. On a bien montré que A et B sont des opérateurs d'entrelacement inverses l'un de l'autre, et la proposition est prouvée.

5.5. Pour $t\in\mathrm{E}^{\times}$ et $h=h(x)\in\mathrm{H}(m)$, on a la formule

$$th(x)=h(x')\,t'$$

avec $t'=t(1+\delta(t)x)$, $x'=x(1+\delta(t))(1+\delta(t)x)^{-1}$, $\delta(t)={}^{\sigma}tt^{-1}-1$. Lorsque t parcourt $\mathrm{E}^{\times}$ et x parcourt $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m-d+1}$, alors $\delta(t)x$ parcourt $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}$ et $x'-x\in\delta(t)x+\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{2m-d+1}$. On en déduit qu'une représentation non dégénérée de $\mathrm{H}(m)$ de conducteur $\mathrm{H}(2m)$:

$$h(x)\mapsto\eta(x),\qquad x\in\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m-d+1},$$

et un caractère θ de $\mathrm{E}^{\times}$ définissent par

$$th(x)\mapsto\theta(t)\eta(x)$$

une représentation de degré 1 de $\mathrm{E}^{\times}\mathrm{H}(m)$ si et seulement si on a

$$\theta(1+y)\eta(y)=1\qquad\text{pour}\quad y\in\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m},$$

et, dans ce cas, cette représentation est triviale sur $1+\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}\sigma$ puisque

$$1+\sigma y=h(y(1+y)^{-1})(1+y)\in h(y)(1+y)\mathrm{H}(2m).$$

De plus, si on a $m<d$, c'est-à-dire $m\geqq 2m-d+1$, alors η est trivial sur $\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{m}$ et on peut prendre $\theta=1$; si par contre on a $m\geqq d$, alors le conducteur de θ est celui de η, à savoir $2m-d+1$, et donc, par le lemme de 5.2, le caractère θ est primordial. Ceci donne le lemme suivant, où, par représentation *non dégénérée* de $\mathrm{E}^{\times}\mathrm{A}^{\times}(m)$ on entend représentation de degré 1 prolongeant une représentation non dégénérée de $\mathrm{H}(m)$.

LEMME. — *Pour qu'un caractère de* $\mathrm{E}^{\times}$ *se prolonge en une représentation non dégénérée de* $\mathrm{E}^{\times}\mathrm{H}(m)$, *il faut et il suffit que :*

(*a*) *si* $m<d$, *ce soit le relèvement d'un caractère de* $k^{\times}$, *et il y a alors* $q^{m-1}(q-1)$ *tels prolongements;*

(*b*) *si* $m\geqq d$, *ce soit le tordu d'un caractère primordial de* $\mathrm{E}^{\times}$ *de conducteur* $2m-d+1$, *et il y a alors* q^{d-1} *tels prolongements.*

Le résultat important est le suivant.

THÉORÈME. — *Soit* m *un entier* $\geqq 1$. *Alors, la représentation de* $\mathrm{A}^{\times}$ *induite par une représentation non dégénérée de* $\mathrm{E}^{\times}\mathrm{A}^{\times}(m)$ *est admissible irréductible supercuspidale, et son degré formel pour la mesure de Haar sur* $\mathrm{A}^{\times}/k^{\times}$ *qui donne à* $\mathrm{A}_{\mathrm{E}}/k^{\times}$ *la masse* 1 *est* $q^{m-1}(q-1)$.

Preuve. — Cette représentation induite se restreint à H en une représentation non dégénérée, par la proposition de 5.4 et la décomposition $\mathrm{A}^{\times}=\mathrm{E}^{\times}\mathrm{H}$: ceci donne l'irréductibilité; par construction les coefficients sont à support compact modulo le centre, ce qui prouve la première partie. Quant au degré formel pour la mesure indiquée, c'est l'indice du sous-groupe $\mathrm{E}^{\times}\mathrm{A}^{\times}(m)=\mathrm{E}^{\times}\mathrm{H}^{\times}(m)$ dans $\mathrm{A}_{\mathrm{E}}=\mathrm{E}^{\times}\mathcal{O}_{\mathrm{A}}^{\times}$, qui a été calculé en 5.3.

On sait que toutes les représentations supercuspidales ont été obtenues, et on connait les équivalences entre elles [8].

6. Calculs des facteurs locaux

6.1. On commence par donner un paramétrage des représentations obtenues en 5; rappelons que m est un entier $\geqq 1$, et que n'' est la partie entière de $(n+1)/2$.

LEMME. — *Les représentations non dégénérées de* $E^\times H(m)$ *sont les tordues par les caractères de* $k^\times$ *des représentations*

$$th(x) \mapsto \theta(t)\,\eta(x), \qquad t \in E^\times, \quad x \in \mathfrak{p}_E^{m-d+1},$$

où η *est un caractère de* $\mathfrak{p}_E^{m-d+1}$ *de conducteur* $2m-d+1$, *où,*

(a) *si* $m<d$, θ *a son conducteur* $\leqq m$ *et relève un caractère de* $k^\times$;

(b) *si* $m \geqq d$, θ *est un caractère primordial de conducteur* $2m-d+1$ *tel que* $\theta(1+t)\,\eta(t)=1$ *pour tout* $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$.

Preuve. — Étant donnée une représentation non dégénérée de $E^\times H(m)$, en la tordant éventuellement par un caractère du déterminant, on peut supposer qu'elle est de la forme

$$th(x) \mapsto \theta(t)\,\eta(x)$$

où η est comme dans l'énoncé, et θ et un caractère de $E^\times$ tel que (*voir* 5.5) : $\theta(1+t)\,\eta(t)=1$ pour $t \in \mathfrak{p}_E^m$.

Si on a $m<d$, alors $a(\theta) \leqq m < d$ montre que $\theta = \chi_{E/k}$ pour un caractère χ de $k^\times$, et inversement, est la tordue par χ de

$$th(x) \mapsto \eta'(x) = \eta(x)\,\chi(1-T_{E/k}\,x)^{-1} = \eta(x)\,\chi(1+T_{E/k}\,x),$$

ce qui prouve le lemme dans ce cas. Si par contre on a $m \geqq d$, le lemme sera démontré si l'on trouve un caractère χ de $k^\times$, de conducteur au plus m, tel que, pour $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, on ait

$$\theta(1+t)\,\eta(t) = \chi_{E/k}(1+t)\,\chi(1-T_{E/k}\,t),$$

puisqu'alors le tordu par χ^{-1} de $th(x) \mapsto \theta(t)\,\eta(x)$ satisfait aux conditions du lemme; comme $a(\chi) \leqq m$, on a $(T_{E/k}\,t)(N_{E/k}\,t)$ et $(T_{E/k}\,t)^2$ dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)}$ pour $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, et donc le second membre de l'identité voulue est $\chi(1+N_{E/k}\,t)$; c'est un caractère en $t \in \mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, tout comme le premier membre; or, tout caractère de $\mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$ trivial sur $\mathfrak{p}_E^m$ est du type $t \mapsto \chi(1+N_{E/k}\,t)$ pour un caractère χ de $k^\times$ de conducteur au plus m, puisque le groupe additif engendré par les normes de $\mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$ est $\mathfrak{p}^{m-d''+1}$; ceci prouve le lemme quand m est au moins d.

Dans le cas modéré ($d=1$), le caractère θ détermine alors η.

Pour $m<d$, on note π_η la représentation de $A^\times$ induite par la représentation non dégénérée $th(x) \mapsto \eta(x)$ de $E^\times H(m)$; en général, soit $\pi_{\theta,\eta}$ la représentation de $A^\times$ induite par la représentation $th(x) \mapsto \theta(t)\,\eta(x)$ de $E^\times H(m)$, où θ et η sont comme dans le lemme, et $\pi_{\theta,\eta} \otimes \chi_{A/k} = \pi_{\theta_{\chi_{E/k}},\eta,\chi}$.

6.2. Le facteur $\varepsilon(\pi, \psi)$ d'une représentation π construite au n° 5 par induction depuis le sous-groupe $E^\times H(m)$ d'une représentation non dégénérée $\varkappa$ est donné par la formule (2.3) :

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \int_{E^\times H(m)} \psi_{A/k}(x)\,\varkappa(x)^{-1}\,\mu_{A/k}(x)^{-1/2}\,d_{A,\psi}.$$

Sur $E^{\times} H(m)$, on observe que la mesure de Haar $d_{A,\psi}$ se lit en $\mu_E(t)\, d_{E,\psi}\, t\, d_{E,\psi}\, x$ dans le paramétrage $th(x)$, $t \in E^{\times}$, $x \in \mathfrak{p}_E^{m-d+1}$: en effet, cette mesure est invariante par translation multiplicative à droite par $H(m)$, et les formules du début de 5.5 montrent que la mesure $\mu_E(t)^{-1}\, d_{E,\psi}\, t\, d_{E,\psi}\, x$ est invariante par multiplication à droite par $t_0 \in E^{\times}$, elle est donc une mesure de Haar sur le groupe $E^{\times} H(m)$; il en résulte que son produit par $\mu_E(t)^2$ est la restriction à $E^{\times} H(m)$ d'une mesure de Haar sur A; il reste à calculer la masse de $A^{\times}(m) = (1+\mathfrak{p}_E^m) H(m)$ pour vérifier que c'est bien la restriction de $d_{A,\psi}$.

On peut donc écrire, si $d_\psi h = d_{E,\psi}\, x$ pour $h = h(x) \in H(m)$:

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \int_{E^{\times}} \psi_{E/k}(t)\, \theta(t)^{-1}\, \mu_E(t)^{1/2} \left(\int_{H(m)} \psi_{A/k}(t(h-1))\, \eta_H(h)^{-1}\, \chi_{A/k}(h)^{-1}\, d_\psi h \right) d_{E,\psi}\, t$$

pour $\pi = \pi_{\theta, \eta, \chi}$, en écrivant $\eta_H(h)$ pour $\eta(x)$ si $h = h(x) \in H(m)$.

Dans l'énoncé du théorème, on a noté, comme dans le paragraphe 1.4, $G(\chi, \psi\chi_\psi)$.

THÉORÈME. — *Le facteur* $\varepsilon(\pi, \psi)$ *de la représentation* $\pi = \pi_{\theta, \eta, \chi}$ *est donné par les formules suivantes :*

$$\varepsilon(\pi, \psi) = \mu_E(\pi_\psi)^{1/2}\, \psi_{E/k}(\pi_\psi)\, \theta(\pi_\psi)^{-1} \qquad si \quad a(\chi) \leqq m,$$
$$\varepsilon(\pi, \psi) = \mu_E(\pi_\psi)^{1/2}\, \psi_{E/k}(\pi_\psi)\, \theta(\pi_\psi)^{-1}\, G(\chi, \psi\chi_\psi)^2 \qquad si \quad a(\chi) > m,$$

où $\chi_\psi = 0$ *si* $a(\chi) \leqq 1$ *et sinon est un élément de* $k^{\times}$ *tel que*

$$\chi(1+x) = \psi(\chi_\psi x) \qquad pour \quad x \in \mathfrak{p}^{a(\chi)''},$$

$\pi_\psi = \chi_\psi + \eta_\psi$, η_ψ *étant un élément du* E *tel que*

$$\eta(h) = \psi_{A/k}(\eta_\psi(h-1)) \qquad pour \quad h \in H(m).$$

Preuve. — (*a*) On commence par sommer sur les classes $H(m)/N(m')$, sachant que $N(m')$ est le noyau du déterminant sur $H(m)$; on a les relations suivantes, pour $n \in N(m')$, $h \in H(m)$:

$$\psi_{A/k}(t(nh-1)) = \psi_{A/k}(t(h-1))\, \psi_{A/k}(t(n-1)),$$
$$\chi_{A/k}(nh) = \chi_{A/k}(h),$$
$$\eta_H(nh) = \eta_H(n)\, \eta_H(h);$$

on fait donc apparaître une somme portant sur les caractères de $N(m)$:

$$\int_{N(m')} \psi_{A/k}(t(n-1))\, \overline{\eta_H(n)}\, dn = \int_{N(m')} \psi_{A/k}((t-\eta_\psi)(n-1))\, dn$$

cette contribution sera non nulle seulement pour $t - \eta_\psi$ dans l'orthogonal des éléments de trace nulle dans $\mathfrak{p}_E^{m-d+1}$, relativement à $\psi_{E/k}$, c'est-à-dire dans $k + \mathfrak{p}_E^{-m-1}$ (on a pris ψ d'ordre 0, ce qui est loisible). On écrit alors $t = \eta_\psi + x + u$, $x \in k$, $u \in \mathfrak{p}_E^{-m-1}$, ce qui donne

$\psi_{E/k}(u(h-1))=1$ pour $h\in H(m)$, et donc la somme sur $H(m)$ se réduit à

$$\operatorname{mes}_\psi(N(m'))\int_{H(m)/N(m')}\psi_{A/k}(x(h-1))\,\chi_{A/k}(h)^{-1}\,d_\psi h;$$

mais $H(m)/N(m')$ est l'image $1+\mathfrak{p}^{m''}$ du déterminant sur $H(m)$, et donc ceci vaut

$$\operatorname{mes}_\psi N(m')\,q^{-d}\int_{\mathfrak{p}^{m''}}\psi(xy)\,\chi(1+y)^{-1}\,d_\psi y.$$

(*b*) Dans le cas $a(\chi)\leqq m$, on intègre le caractère $y\to\psi[(x-\chi_\psi)y]$ de $\mathfrak{p}^{m''}$: la contribution ne sera non nulle que pour $x\in\chi_\psi(1+\mathfrak{p}^{m'})$, ce qui donne

$$\varepsilon(\pi,\psi)=\operatorname{mes}_\psi H(m)\int\psi_{E/k}(t)\,\theta(t)^{-1}\,\mu_E(t)^{1/2}\,d_{E,\psi}\,t$$

où la somme porte sur les $t\in\pi_\psi(1+\mathfrak{p}^{m'})+\mathfrak{p}_E^{-m-1}$; mais $\pi_\psi\,\mathfrak{p}^{m'}\subset\mathfrak{p}_E^{-m-1}$ donc on somme en fait sur $\pi_\psi(1+\mathfrak{p}_E^m)$; or la fonction à intégrer est constante sur ce domaine vu que l'on a

$$\theta(1+v)=\eta(-v)\,\chi_{E/k}(1+v)=\psi_{E/k}[(\eta_\psi+\chi_\psi)v]$$

pour $v\in\mathfrak{p}_E^m$; ceci donne la formule voulue quand $a(\chi)\leqq m$.

(*c*) Supposons désormais $a(\chi)>m$; on a donc $a(\chi)\geqq 2m''$, et l'expression $\int_{\mathfrak{p}^{m''}}\psi(xy)\,\chi(1+y)^{-1}\,d_\psi y$ se calcule par sommation sur les classes modulo $\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}$, ce qui fait apparaître des sommes $\int_{\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}}\psi((x-\chi_\psi)z)\,d_\psi z$, et permet de se limiter aux $x\in\chi_\psi(1+\mathfrak{p}^{m''})$; écrivons $x=\chi_\psi(1+a)$, ce qui donne

$$\hat{\int}_{\mathfrak{p}^{m''}/\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}}\psi(xy)\,\chi(1+y)^{-1}=\psi(-\chi_\psi a)\,\chi(1+a)\hat{\int}_{\mathfrak{p}^{m''}/\mathfrak{p}^{a(\chi)-m''}}\psi(\chi_\psi)\,\chi(1+y)^{-1}$$

et la dernière somme n'est autre que $G(\chi,\psi\chi_\psi)$, avec la convention précédent l'énoncé du théorème. L'intégrale en t porte seulement sur les $t=\pi_\psi+\chi_\psi x+u$, $x\in\mathfrak{p}^{m''}$, $u\in\mathfrak{p}_E^{-m-1}$; pour ces t, on a

$$\psi_{E/k}(t)=\psi_{E/k}(\pi_\psi)\,\psi(2\chi_\psi x)\,\psi_{E/k}(u)$$
$$\theta(t)=\theta(\pi_\psi)\,\theta\left(1+\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x+\frac{u}{\pi_\psi}\right);$$

mais $\chi_\psi/\pi_\psi\in\mathcal{O}_E^\times$, et le produit de $\chi_\psi/\pi_\psi\,x$ par u/π_ψ a sa valuation au moins égale à $2m''+2a(\chi)-m-1$, à la fois supérieur à $a(\chi)$ et $2a(\chi)-d$, donc certainement $\geqq a(\theta)$; ceci permet d'écrire :

$$\theta\left(1+\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x+\frac{u}{\pi_\psi}\right)=\theta\left(1+\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)\theta\left(1+\frac{u}{\pi_\psi}\right);$$

comme la valuation de u/π_ψ est au moins $a(\theta)''$, ce dernier terme vaut $\psi_{E/k}((\theta_\psi/\pi_\psi)u)$, où θ_ψ est l'élément suivant de E^x :

$$\theta_\psi=\eta_\psi+\chi_\psi+\chi_\psi c_{E,\chi}=\pi_\psi+\chi_\psi c_{E,\chi},$$

en notant $c_{E,\chi}$ un élément de E de valuation $a(\chi)-d$ tel que

$$\chi(1+N_{E/k}x)=\chi(1+T_{E/k}c_{E,\chi}x) \qquad \text{pour} \quad x\in \mathfrak{p}_E^{a(\chi)-d'}\cap \mathfrak{p}_E.$$

Comme

$$\frac{\theta_\psi}{\pi_\psi}=1+\frac{\chi_\psi c_{E,\chi}}{\pi_\psi}\in 1+\mathfrak{p}_E^{a(\chi)-d},$$

on a

$$\psi_{E/k}\left(\frac{\theta_\psi}{\pi_\psi}u\right)=\psi_{E/k}(u).$$

Ceci montre qu'il n'y a pas en fait à sommer sur $u\in\mathfrak{p}_E^{-m-1}$: la fonction à intégrer n'en dépend pas. Il ne reste finalement comme sommation que la suivante, le terme $\mu_E(\pi_\psi)^{1/2}\psi_{E/k}(\pi_\psi)\theta(\pi_\psi)^{-1}$ se mettant devant :

$$\int_{\mathfrak{p}^{m''}}\psi(\chi_\psi x)\chi(1+x)\theta\left(1+\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)^{-1}d_\psi x.$$

On observe alors que sur $\mathfrak{p}^{m''}$ on a

$$\theta\left(1+\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)=\chi(1+x)^2;$$

en effet, vu que $2m''\geqq m-d''+1$, on a une contribution en η :

$$\begin{aligned}\theta\left(1+\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)&=\eta\left(-\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)\chi_{E/k}\left(1+\chi_\psi\pi_\psi x\right)\\&=\psi_{E/k}\left(\frac{\eta_\psi\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)\chi_{E/k}\left((1+x)\left(1-\frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\frac{x}{1+x}\right)\right)\\&=\chi(1+x)^2\psi_{E/k}\left(\frac{\eta_\psi\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)\chi_{E/k}\left(1-\frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\frac{x}{1+x}\right),\end{aligned}$$

mais la norme de $(\eta_\psi/\chi_\psi)(x/(1+x))$ est dans $\mathfrak{p}^{2a(\chi)-2m-1+2m''}$ contenu dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)}$, et sa trace est dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)-m+d''-1+m''}$ contenu dans $\mathfrak{p}^{a(\chi)''}$, donc

$$\chi_{E/k}\left(1-\frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\frac{x}{1+x}\right)=\psi_{E/k}\left(\chi_\psi\frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\frac{x}{1+x}\right),$$

et

$$\theta\left(1+\frac{\chi_\psi}{\pi_\psi}x\right)=\chi(1+x)^2\psi_{E/k}\left(\frac{\chi_\psi\eta_\psi}{\pi_\psi}\frac{x^2}{1+x}\right);$$

le dernier facteur vaut $\psi(\chi_\psi(x^2/1+x)\,T_{E/k}(\eta_\psi/\pi_\psi))$: c'est 1 puisqu'il s'agit de la valeur de ψ sur un élément de valuation au moins

$$-a(\chi)+2m''+a(\chi)-m+d''-1=2m''-m-1+d''\geqq 0.$$

Le terme qui reste à sommer se réduit donc à

$$\int_{\mathfrak{p}^{m''}} \psi(\chi_\psi x)\,\chi(1+x)^{-1}\,d_\psi x$$

qui fournit le facteur $G(\chi, \psi\chi_\psi)$, et prouve la formule de l'énoncé.

COROLLAIRE. — *Avec les mêmes notations, on a :*
(*a*) $\varepsilon(\pi_\eta, \psi)=q^{m+1/2+\operatorname{ord}\psi}\,\eta_H(\sigma)$;
(*b*) $\varepsilon(\pi_{\theta,\eta}, \psi)=G(\theta, \psi_{E/k}\eta_\psi)\,\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$ *pour* $m\geqq d$;
(*c*) *pour* $a(\chi)\geqq 2m+1$,

$$\varepsilon(\pi, \psi)=\varepsilon(\chi, \psi)\,\varepsilon(\chi^{-1}\theta, \psi).$$

Preuve. — (*a*) Dans ce cas, on a $\chi=\theta=1$, et $\pi_\psi=\eta_\psi$, donc de valuation $-2m-1-2\operatorname{ord}\psi$, et $\psi_{E/k}(\eta_\psi)=\eta(-1)$. $2\in\mathfrak{p}_E^{d-1}$; on se trouve dans le cas $m<d$, on a $2\in\mathfrak{p}_E^{2m-d+1}$ et donc $\eta(2)=1$, ce qui donne $\eta(-1)=\eta(1)=\eta_H(\sigma)$.

(*b*) On a ici $\chi=1$ encore, et $a(\theta)=2m-d+1$, $m\geqq d$; comme $\theta(1+t)=\psi_{E/k}(\eta_\psi t)$ pour $t\in\mathfrak{p}_E^{m-d''+1}$, la formule résulte alors de celle donnant $\varepsilon(\theta, \psi_{E/k})$ (1.4).

(*c*) Pour $a(\chi)\geqq 2m+1$, on a

$$\mu_E(\pi_\psi)=\mu_E(\chi_\psi)\,\mu_E(1+\chi_\psi^{-1}\eta_\psi)=\mu(\chi_\psi)^2,$$

et donc, sachant que

$$\varepsilon(\chi, \psi)=\mu(\chi_\psi)^{1/2}\,\psi\,\chi(\chi_\psi)^{-1}\,G(\chi, \psi\chi_\psi),$$

on a

$$\varepsilon(\pi, \psi)=\varepsilon(\chi, \psi)\,\mu(\chi_\psi)^{1/2}\,\psi(\chi_\psi+T_{E/k}\eta_\psi)\,\chi(\chi_\psi)\,\theta(\pi_\psi)^{-1}\,G(\chi, \psi\chi_\psi);$$

écrivons $\theta=\theta_0\,\chi_{E/k}$; on a $\theta_0=1$ pour $m<d$, et

$$\theta_0(1+t)=\psi(t\,T_{E/k}\,\eta_\psi)\qquad\text{pour}\quad t\in\mathfrak{p}^{m-d''+1}\quad\text{si}\quad m\geqq d;$$

on fait apparaître systématiquement $\chi_\psi+T_{E/k}\,\eta_\psi$; grâce à $a(\chi)>2m$, on a

$$\begin{aligned}\chi(\chi_\psi)\,\theta(\pi_\psi)^{-1}&=\chi(\chi_\psi)^{-1}\,\chi_{E/k}\left(1+\frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\right)^{-1}\theta_0(\pi_\psi)^{-1}\\&=\chi(\chi_\psi)^{-1}\,\chi\left(1+T_{E/k}\frac{\eta_\psi}{\chi_\psi}\right)^{-1}\theta_0(\chi_\psi)^{-1}=\chi(\chi_\psi+T_{E/k}\,\eta_\psi)^{-1}\,\theta_0(\chi_\psi+T_{E/k}\,\eta_\psi)^{-1}\\&=(\chi\theta_0)(\chi_\psi+T_{E/k}\,\eta_\psi)^{-1};\end{aligned}$$

enfin $G(\chi, \psi\chi_\psi)=G(\chi\theta_0, \psi\chi_\psi)$, et donc on a fait apparaître $\varepsilon(\chi\theta_0, \psi)$ dans $\varepsilon(\pi, \psi)$, ce qui donne la formule du corollaire, puisque $\chi\theta_0=\chi^{-1}\theta$ sur k^x.

On vérifie aussi que les formules du théorème correspondent bien à celles qu'on a obtenues lorsque l'extension quadratique est modérément ramifiée. Dans ce cas, on a $d=1$, et le caractère η de $\mathrm{N}(m')$ est déterminé par θ si $\chi=1$. Pour θ primordial, il faut voir que

$$\varepsilon(\theta, \psi_{\mathrm{E}/k}) = \mu_{\mathrm{E}}(\pi_\psi)^{1/2}\, \psi_{\mathrm{E}/k}(\pi_\psi)\, \theta(\pi_\psi)^{-1};$$

mais alors $\pi_\psi \in \theta_\psi(1+\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^m)$ si $a(\theta)=2m$, et donc on peut remplacer π_ψ par θ_ψ dans le second membre. Lorsque θ n'est plus primordial mais que $\theta\chi_{\mathrm{E}/k}^{-1}$ l'est, on a $a(\theta)=2a(\chi)-1$, et comme

$$\theta(1+t) = \psi_{\mathrm{E}/k}(\pi_\psi\, t) \qquad \text{pour} \quad t \in \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{a(\chi)} = \mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{a(\theta)''},$$

on a

$$\varepsilon(\theta, \psi_{\mathrm{E}/k}) = \mu_{\mathrm{E}}(\pi_\psi)^{1/2}\, \psi_{\mathrm{E}/k}(\pi_\psi)\, \theta(\pi_\psi)^{-1}\, \mathrm{G}(\theta, \psi_{\mathrm{E}/k}\, \pi_\psi)$$

avec

$$\mathrm{G}(\theta, \psi_{\mathrm{E}/k}\, \pi_\psi) = \hat{\int}_{\mathfrak{p}_{\mathrm{E}}^{a(\chi)-1}/\mathfrak{p}^{a(\chi)}} \theta(1+t)^{-1}\, \psi_{\mathrm{E}/k}(\pi_\psi\, t);$$

comme $a(\chi)-1 \geqq a(\theta\chi_{\mathrm{E}/k})'' = m$, on a

$$\theta(1+t)^{-1}\, \psi_{\mathrm{E}/k}(\pi_\psi\, t) = \chi_{\mathrm{E}/k}(1+t)^{-1}\, \psi_{\mathrm{E}/k}(\chi_\psi\, t)$$

et donc $\mathrm{G}(\theta, \psi_{\mathrm{E}/k}\, \pi_\psi) = \mathrm{G}(\chi_{\mathrm{E}/k}, \psi_{\mathrm{E}/k}\, \chi_\psi)$; mais par la formule d'induction des facteurs ε (1.7) appliquée au caractère $\chi_{\mathrm{E}/k}$ de $\mathrm{E}^\times$, le second membre vaut $\lambda_{\mathrm{E}/k}(\psi\chi_\psi)^{-1}\, \mathrm{G}(\chi, \psi\chi_\psi)^2$; comme la proposition de 4.5 donnait

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \chi_{\mathrm{E}/k}(\psi\chi_\psi)\, \varepsilon(\theta, \psi_{\mathrm{E}/k}),$$

et que $\alpha_\theta = \pi_{\theta, \eta, \chi}$, on a bien la formule du théorème précédent

$$\varepsilon(\alpha_\theta, \psi) = \mu_{\mathrm{E}}(\pi_\psi)^{1/2}\, \psi_{\mathrm{E}/k}(\pi_\psi)\, \theta(\pi_\psi)^{-1}\, \mathrm{G}(\chi, \psi\chi_\psi)^2.$$

Remarques. — (1) Le principe de la construction des représentations qui a été donné au n° 5 s'applique également lorsqu'on a affaire à l'extension quadratique non ramifiée. On introduit dans ce cas aussi le sous-groupe H fixateur de la trace $\mathrm{T}_{\mathrm{E}/k}$ dans le groupe $\mathrm{A}^\times$ des automorphismes sur k de l'extension E, et la filtration par les $\mathrm{H}(m)$ (*cf.* 5.3; 5.4); à un caractère régulier θ de $\mathrm{E}^\times$ de conducteur relatif pair $2m$ (resp. impair >1, resp. 1), on associe une représentation non dégénérée de $\mathrm{H}(m)$ — en ce sens qu'elle induit à H une représentation non dégénérée — de degré 1 (resp. q, resp. $q-1$), et on retrouve ainsi les résultats du n° 3.

(2) Pour $m'' \geqq d$, la torsion par le caractère $\hat{\sigma}$ de $k^\times$ que définit E ne modifie pas la représentation de $\mathrm{E}^\times\,\mathrm{H}(m)$ qui induit $\pi_{\theta, \eta, \chi}$; par le critère de Labesse-Langlands, cette dernière figure donc dans la série de type diédral définie par E. La correspondance est explicitée dans [8]', pour tous les cas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Cassels et A. Frohlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, New York, 1967.

[2] P. Deligne, (*a*) *Formes modulaires et représentations de* GL (2); (*b*) *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions* L; *Modular Functions of One Variable II* (*Lecture Notes* 349, Springer, Berlin, 1972).

[3] P. Deligne et G. Lusztig, *Representations of Reductive Groups Over Finite Fields* (*Ann. of Math.*, vol. 103, 1976, p. 103-162).

[4] I. M. Gelfand et M. I. Graev, *Representations of Quaternions Groups Over Locally Compact Fields and Functional Fields* (*Funct. Anal. Appl.*, vol. 2, 1968, p. 19-33).

[5] P. Gérardin, *Construction de séries discrètes p-adiques* (*Lecture Notes* 462, Springer, Berlin, 1975).

[5]' P. Gérardin, *Cuspidal Unramified Series for Central Simple Algebras Over Local Fields, Automorphic forms, representations, and L-functions*, P.S.P.M., XXIII, I, p. 157-170; Amer. Math. Soc., 1979.

[6] G. Henniart, *Représentations de degré* 2 *de* Gal $(\overline{\mathbf{Q}}_2/\mathbf{Q}_2)$ (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, 1977).

[7] H. Jacquet et R. P. Langlands, *Automorphic Forms on* GL (2) (*Lecture Notes* 114, Springer, Berlin, 1966).

[8] P. Kutzko, *On the Supercuspidal Representations of* GL (2), I, II (*Amer. J. Math.*, vol. 100, 1978, p. 43-60 et 705-716).

[8]' P. Kutzko, *The Exceptional Representations of* GL (2) (à paraître).

[9] R. P. Langlands, *Base change for* GL (2), Institute for Advanced Study, 1975.

[10] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[11] T. Shintani, *On Certain Square Integrable Irreductible Unitary Representations of Some p-Adic Linear Groups* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 20, 1968, p. 522-565).

[12] A. Weil, *Basic Number Theory*, 2nd edition, Springer, 1973.

(Manuscrit reçu le 19 octobre 1979.)

Paul Gérardin,
U.E.R. de Mathématique,
Université Paris-VII, 2, place Jussieu,
75221 Paris Cedex 05.

Philip Kutzko,
Department of Mathematics,
The University of Iowa, Iowa
City, Iowa 52242, U.S.A.