ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GILLES LEBEAU

Fonctions harmoniques et spectre singulier

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 13, nº 2 (1980), p. 269-291

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_2_269_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 13, 1980, p. 269 à 291.

FONCTIONS HARMONIQUES ET SPECTRE SINGULIER

PAR GILLES LEBEAU

Introduction

On se propose d'étudier l'application qui à f distribution ou hyperfonction sur la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ associe $g=\tilde{f}|_{\partial\Omega}$, où $\tilde{f}$ est le prolongement harmonique de f :

$$\tilde{f}(x)=\frac{1-x^2}{\omega_n}\int_{S}\frac{f(y)}{[(x-y)^2]^{(n+1)/2}}d\sigma(y)$$

et où $\partial\Omega$ désigne le bord du cône complexe strictement pseudoconvexe :

$$\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}^{n+1},\ z^2=0,\ |z|^2<\frac{1}{2}\right\}$$

à l'intérieur duquel $\tilde{f}$ est holomorphe.

On montre qu'inversement f s'exprime au moyen de g par une formule intégrale :

$$f(x)=\int \mathrm{K}(x,\ y)\,g(y)\,dy,$$

où le noyau K jouit de propriétés assez analogues à celles du noyau de Poisson et s'exprime de façon suffisamment explicite pour qu'on ait des renseignements très précis sur ses singularités.

Ceci permet de montrer l'équivalence

$$(x,\ \xi)_{|\xi|=1}\in \mathrm{SS}(f)\quad\Leftrightarrow\quad \frac{x-i\xi}{2}\in \mathrm{Suppsing}\, g$$

sans avoir recours à la puissante théorie cohomologique de S.K.K. [6].

Ce résultat peut donc être utilisé (avec le théorème B de Cartan) pour donner une définition assez élémentaire du spectre singulier et du faisceau des microfonctions.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. — 0012-9593/1980/269/$ 5.00

L'article est organisé comme suit :

les parties 1, 2, 3, donnent des résultats assez faciles sur les SS et la décomposition des hyperfonctions en valeur au bord de fonctions holomorphes. Les parties 4, 5, 6, étudient les transformations $f \to g$ et $g \to f$. Enfin les deux appendices donnent les résultats qui permettent d'étudier les singularités du noyau inverse K.

(Notons que l'appendice 2 donne un résultat plus fort que ce dont on a besoin.)

Pour ce qui est des hyperfonctions, on réfère à [4] et [5].

1. Décomposition de δ

Nous partons de la formule usuelle sur $\mathbb{R}^n$:

$$\delta = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\, d\xi. \tag{1.1}$$

En considérant l'intégrant comme une fonction holomorphe de ξ, on modifie le cycle d'intégration dans le complexe en choisissant comme nouveau cycle :

$$\{\eta \in \mathbb{C}^n,\ \eta = \xi + i\varepsilon x|\xi|, \text{ où } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ et } \varepsilon > 0\}.$$

Comme

$$d\eta = \left(1 + i\varepsilon x.\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi,$$

ceci ramène formellement le deuxième membre de (1) à l'expression

$$(2\pi)^{-n} \int e^{iz.\xi - \varepsilon z^2|\xi|}\left(1 + i\varepsilon z.\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi, \tag{1.2}$$

où l'on a remplacé x par z. L'expression (2) n'a pas de sens *à priori*; néanmoins, soit Γ une partie mesurable, conique, propre (ou saillante) de $\mathbb{R}^n$; on posera

$$\Gamma^0_\alpha = \{y \in \mathbb{R}^n,\ y.\xi > \alpha|y|.|\xi|,\ \forall \xi \in \Gamma\} \qquad \text{pour} \quad 1 > \alpha > 0$$

qui est toujours non vide si Γ est propre. Alors :

$$\mathrm{H}_\Gamma(z) = (2\pi)^{-n} \int_\Gamma e^{iz.\xi - z^2|\xi|}\left(1 + iz.\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \tag{1.3}$$

est une fonction holomorphe de $z \in \mathbb{C}^n$ pour $z \in \mathrm{D}_\Gamma$ où :

$$\mathrm{D}_\Gamma = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C}^n,\ \forall \xi \in \Gamma,\ x^2 - y^2 + y\frac{\xi}{|\xi|} > 0\right\}.$$

On a en particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n,\ y \in \Gamma^0_\alpha,\ |y| < \alpha\} \subset \mathrm{D}_\Gamma, \\ \{z = x + i0,\ x \neq 0\} \subset \mathrm{D}_\Gamma. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Il en résulte que la fonction $H_\Gamma(z)$ définit une hyperfonction sur $\mathbb{R}^n$, analytique en dehors de l'origine, qu'on notera toujours H_Γ; H_Γ est défini comme suit :

pour $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, analytique au voisinage de 0, on a

$$\langle H_\Gamma, \varphi \rangle = \int_\Sigma H_\Gamma(z)\varphi(z)\,dz, \tag{1.5}$$

où Σ est le cycle

$$\Sigma = \{ z = x + i\theta(x) y_0 \in \mathbb{C}^n,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y_0 \in \Gamma_\alpha^0,\ |y_0| < \alpha \},$$

où $x \to \theta(x) \geqq 0$ est dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support contenu dans les points d'analyticité de φ, $\theta(0) > 0$ et assez petite pour que (5) ait un sens.

□ Il est alors naturel d'avoir la proposition suivante [1] :

Proposition 1.1. — *Soit* Γ_α, $\alpha \in A$ *fini un recouvrement de* $\mathbb{R}^n$ *par des cônes mesurables propres* 2 *à* 2 *disjoints. On a*

$$\delta = \sum_\alpha H_{\Gamma_\alpha}.$$

2. Spectre singulier d'une hyperfonction

Soit u une fonctionnelle analytique à support compact K sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $\varepsilon > 0$ posons

$$\Omega(K, \varepsilon) = \{ z = x + iy \in \mathbb{C}^n,\ d(x, K) < \varepsilon,\ |y| < \varepsilon \}.$$

Il existe alors une mesure μ_ε à support compact E_ε dans $\Omega(K, \varepsilon)$ telle que

$$\forall f \in \mathscr{O}(\Omega(K, \varepsilon)), \quad (u, f) = \int f\,d\mu_\varepsilon.$$

Soit $(x_0, \xi^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

Définition 2.1. — On dit que (x_0, ξ^0) n'est pas dans le spectre singulier de u si il existe $\alpha > 0$, $\eta > 0$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ petit on puisse choisir μ_ε de support E_ε vérifiant :

$$z = x + iy \in E_\varepsilon \quad \text{et} \quad |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad y.\xi^0 < -\alpha |y|.|\xi^0|.$$

On note $SS(u)$ le spectre singulier de u; c'est une partie conique et fermée de $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$.

La définition donnée est manifestement locale [i. e. si $x \notin K$ pour tout ξ, $(x, \xi) \notin SS(u)$] ce qui permet de définir $SS(u)$ pour une hyperfonction quelconque et on vérifie facilement qu'elle ne dépend pas du choix du système de coordonnées, ce qui permet de la transporter sur une variété analytique réelle.

3. Décomposition spectrale

Soit u une fonctionnelle analytique à support compact dans $\mathbb{R}^n$. On pose

$$H_\Gamma \star u(z) = \int H_\Gamma(z - \lambda)\,u(\lambda)\,d\lambda = \langle u_\lambda, H_\Gamma(z - \lambda) \rangle, \tag{3.1}$$

où Γ est une partie conique propre.

La fonction $H_\Gamma \star u$ est alors holomorphe dans le domaine de $\mathbb{C}^n$:

$$\left\{ z=x+iy,\ \forall \xi \in \Gamma,\ \forall \lambda \in K,\ (x-\lambda)^2-y^2+y\frac{\xi}{|\xi|}>0 \right\} = \bigcap_{\lambda \in K} (D_\Gamma+\lambda). \tag{3.2}$$

Il en résulte, comme précédemment, que $H_\Gamma \star u$ définit une hyperfonction sur $\mathbb{R}^n$, analytique en dehors de K, par la formule

$$\langle H_\Gamma \star u, \varphi \rangle = \int_\Sigma (H_\Gamma \star u)(z)\,\varphi(z)\,dz \tag{3.3}$$

pour $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$, analytique au voisinage de K, Σ étant le cycle :

$$\Sigma = \{ x+i\theta(x)\,y_0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y_0 \in \Gamma_\alpha^0,\ |y_0|<\alpha \},$$

où $x \mapsto \theta(x) \geqq 0$ est dans $\mathscr{C}_0^\infty$, à support dans le domaine d'analycité de φ, assez petite et $\theta>0$ sur K. L'hyperfonction $H_\Gamma \star u$ est la convolée usuelle de H_Γ et de u et est donc ainsi directement définie comme « valeur au bord » d'une fonction holomorphe dans le tube,

$$\{ z=x+iy \in \mathbb{C}^n,\ y \in \Gamma_\alpha^0,\ |y|<\alpha \} \quad \text{pour tout } \alpha \in]0, 1[. \tag{3.4}$$

Lorsque les Γ_β, $\beta \in A$ forment une partition, on a

$$u = \sum_\beta H_{\Gamma_\beta} \star u, \tag{3.5}$$

d'après la proposition 1.1.

De plus, il résulte aisément de (3.3) et (3.4) qu'on a

$$SS(H_\Gamma \star u) \subset \{ (x, \xi),\ \xi \in (\Gamma^0)^0 \}, \tag{3.6}$$

où $(\Gamma^0)^0$ désigne l'enveloppe convexe fermée de Γ.

PROPOSITION 3.1. — *On suppose que* $(x_0, \xi^0) \notin SS(u)$ *et on pose*

$$\Gamma = \left\{ \xi,\ \left| \frac{\xi_0}{|\xi_0|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right| \leqq \gamma \right\}.$$

Alors pour γ *assez petit*, $H_\Gamma \star u(z)$ *se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de* $z=x_0$.

Preuve. — On reprend les notations de la définition 2.1 du spectre, en particulier, η et α sont choisis. On a

$$H_\Gamma \star u(z) = \int H_\Gamma(z-\lambda)\,d\mu\varepsilon(\lambda).$$

On pose $\lambda=u+iv$. Pour que $H_\Gamma \star u$ se prolonge au voisinage de x_0, il suffit qu'on ait

$$\Delta = (x_0-u)^2 - v^2 - v\,.\frac{\xi}{|\xi|} > 0 \qquad \text{pour} \quad \xi \in \Gamma$$

et $u+iv$ dans le support (compact) de μ_ε. Or pour $|x_0-u| \geqq \eta$ on a

$$\Delta \geqq \eta^2 - (\varepsilon^2+\varepsilon)$$

et pour $|x_0-u|<\eta$ on a

$$\Delta \geqq -|v|^2 - v.\frac{\xi_0}{|\xi_0|} + v.\left[\frac{\xi_0}{|\xi_0|} - \frac{\xi}{|\xi|}\right] \geqq -|v|^2 + \alpha|v| - \gamma|v|,$$

soit $\Delta \geqq |v|[\alpha-(\gamma+\varepsilon)]$.

Il suffit donc de choisir ε et γ assez petits.

C.Q.F.D.

On déduit donc de la proposition (3.1) et de (3.5) et (3.6) que (au voisinage de x_0) u est « valeur au bord » de fonctions holomorphes dans des tubes contenus dans $y.\xi^0<0$, i.e. la définition de Sato du spectre singulier.

4. Notations et géométrie sur les sphères

On désigne par S la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e.

(4.1) $$S=\{y\in\mathbb{R}^{n+1},\ y^2=1\}$$

et par Y sa complexifiée naturelle :

(4.2) $$Y=\{y\in\mathbb{C}^{n+1},\ y^2=1\}.$$

On désignera aussi par Y_ε le voisinage d'ordre ε de S :

(4.3) $$Y_\varepsilon=\{y\in Y,\ |\operatorname{Im} y|<\varepsilon\}.$$

On désigne par C le cône complexe isotrope dans $\mathbb{C}^{n+1}$:

(4.4) $$C=\{z\in\mathbb{C}^{n+1},\ z^2=0\}=\{z=u+iv,\ u^2-v^2=0,\ u.v=0\}.$$

Soit ρ la fonction sur C définie par

(4.5) $$\rho(z)=z.\bar{z}=u^2+v^2$$

et Ω l'ouvert strictement pseudo-convexe de C :

(4.6) $$\Omega=\{z\in C,\ \rho(z)<1/2\}.$$

On a

$$\partial\Omega=\{z\in C,\ \rho(z)=1/2\}=\left\{u+iv,\ u^2=v^2=\frac{1}{4},\ u.v=0\right\},$$

de sorte que $\partial\Omega$ s'identifie à $\mathbb{S}^*S$, le fibré en cosphères sur S.

On désigne par α la 1 forme canonique sur $\mathbb{S}^* \mathrm{S}$ i.e.

$$\alpha = \frac{1}{2i}(\partial\rho - \bar{\partial}\rho)|_{\mathbb{S}^*\mathrm{S}} \tag{4.7}$$

et par Σ :

$$\Sigma = \{(x, \lambda\alpha(x)), \lambda > 0\} \subset \mathrm{T}^*(\mathbb{S}^*\mathrm{S}) \setminus 0, \tag{4.8}$$

le cône positif engendré par α.

On complexifie $\mathbb{S}^* \mathrm{S}$ par X de la manière suivante :

$$\mathrm{X} = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1},\ z_1^2 = 0,\ z_2^2 = 0,\ z_1 . z_2 = \frac{1}{2} \right\} \tag{4.9}$$

de sorte que les points réels de X, i.e. $\mathbb{S}^*$ S, sont donnés par $z_2 = \bar{z}_1$. On considérera aussi le voisinage d'ordre ε :

$$\mathrm{X}_\varepsilon = \{(z_1, z_2) \in \mathrm{X},\ |z_2 - \bar{z}_1| < \varepsilon\}. \tag{4.10}$$

Sur X × Y, on considérera les deux fonctions suivantes :

$$\theta(z_1, z_2, y) = 2 z_1 . \mathrm{Y},$$

$$\theta'(z_1, z_2, y) = 2 z_2 . \mathrm{Y}.$$

On munira toujours S et $\mathbb{S}^*$ S des mesures héritées de celles de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ de sorte que :

$$\int_{\mathrm{S}} 1 = \omega_n, \qquad \int_{\mathbb{S}^*\mathrm{S}} 1 = \frac{\omega_n \circ \omega_{n-1}}{2^{2n-1}},$$

où ω_n désigne le volume de la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Le groupe SO(n) opère transitivement sur S et $\mathbb{S}^*$ S. Le groupe $\mathbb{U}(1)$ opère également sur $\mathbb{S}^*$ S par

$$(e^{i\theta}, z) \to e^{i\theta} z.$$

Les mesures considérées sont invariantes par les actions de ces groupes.
de sorte que les points réels de X, i.e. $\mathbb{S}^*$ S, sont donnés par $z_2 = \tilde{z}_1$. On considérera aussi le

5. L'action de SO(n) sur S

L'action de SO(n) sur S induit une représentation unitaire de SO(n) dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{S})$. Soit

$$\mathrm{L}^2(\mathrm{S}) = \bigoplus_{d=0}^{+\infty} \mathrm{E}_d, \tag{5.1}$$

la décomposition en sous-espaces irréductibles (de dimension fini ν_d). Les éléments de E_d sont les fonctions propres du laplacien sphérique associées à la valeur propre

$$\mu_d = d^2 + (n-1) d \tag{5.2}$$

et ils s'identifient aux traces sur la sphère des polynômes harmoniques homogènes de degré d dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On notera $e_d^j(x)$ une base orthonormée de E_d, pour $1 \leqq j \leqq \nu_d$.

Une fonction utile à considérer dans E_d est :

(5.3) $$f_d(x)=(x_1+ix_2)^d.$$

On a alors, d'après l'appendice 2, corollaire 2.6,

(5.4) $$\| f_d \|^2 = \int_S (x_1^2+x_2^2)^d \simeq C\, d^{-((n-1)/2)}$$

puisque la fonction $x \to (x_1^2+x_2^2)$ est maximale $(=1)$ sur S pour $x_1^2+x_2^2=1$ qui est de codimension $n-1$.

Soit à présent h une fonction harmonique dans la boule ouverte $y^2<1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Posons

(5.5) $$\lambda_d^j = \frac{1}{\omega_n r^{2d+n}} \int_{S_r} h\, \bar{e}_d^j, \qquad S_r = \{ y \in \mathbb{R}^{n+1},\ y^2 = r^2 \},$$

où l'intégrale est normalisée par $\int_{S_r} 1 = \omega_n r^n$.

Il résulte de l'harmonicité de h et e_d^j que λ_d^j est indépendant de r et on a donc d'après 5.4,

(5.6) $$|\lambda_d^j| \leqq \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} e^{\varepsilon(d+n/2)} \left(\int_{S_r} |h|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{pour} \quad \varepsilon>0$$

et aussi pour $-\varepsilon>0$ petit si h se prolonge au voisinage de S. Comme ν_d est un polynôme en d, il résulte de (5.6) que h définit une hyperfonction u sur S, qu'on note $u=B(h)$ par

(5.7) $$(B(h), a) = \int_S h(x e^{-\varepsilon})\, \tilde{a}(x e^{\varepsilon}) \qquad \text{pour} \quad \varepsilon>0 \text{ petit},$$

$\tilde{a}$ désignant le prolongement harmonique de a. Dans un sens évident, on a

(5.7′) $$B(h) = \sum_{\substack{1 \leqq j \leqq \nu_d \\ d \geqq 0}} \lambda_d^j e_d^j.$$

Les polynômes $e_d^j(z)$ induisent par restriction des fonctions sur $\mathbb{S}^*S$, qu'on notera $e_d^j(z)$. On notera E'_d le sous-espace de $L^2(\mathbb{S}^*S)$ engendré par les $e_d^j(z)$ pour $1 \leqq j \leqq \nu_d$. Les sous-espaces E'_d sont alors deux à deux orthogonaux; en effet, par invariance de la mesure par action de $\mathbb{U}$, on a

$$\int_{\mathbb{S}^*S} e_{d_1}(z)\overline{e_{d_2}(z)} = \int_{\mathbb{S}^*S} e_{d_1}(e^{i\theta}z)\overline{e_{d_2}(e^{i\theta}z)} = e^{i(d_1-d_2)\theta} \int_{\mathbb{S}^*S} e_{d_1}(z)\overline{e_{d_2}(z)}.$$

(5.8) On notera $E' = \bigoplus_d E'_d$ et E'' le supplémentaire orthogonal de E' dans $L^2(\mathbb{S}^*S)$ et π le projecteur orthogonal (projecteur de Szëgo) de $L^2(\mathbb{S}^*S)$ sur E'.

On choisira la base $e_d^j(x)$ de E_d telle que la base correspondante $e_d^j(z)$ de E'_d soit orthogonale (ce qui est toujours possible). On a alors :

$$\| e_d^j(z) \|^2_{L^2(\mathbb{S}^* S)} = \frac{1}{\lambda(d)}, \tag{5.9}$$

où $\lambda(z)$ est la fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(z) > 0$:

$$\lambda(z) = \frac{\displaystyle\int_S (x_1^2 + x_2^2)^z}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^* S} (|z_1 + iz_2|^2)^z}. \tag{5.9'}$$

La fonction $\lambda(z)$ est alors un symbole analytique (au sens de [2 *a*]) de degré $(n-1)/2$. Il suffit en effet pour voir cela de calculer la codimension du lieu (lisse) de $\mathbb{S}^* S$ sur lequel $|z_1 + iz_2|^2$ est maximal. Posons $z_j = u_j + iv_j$ ($j = 1, \ldots, n+1$). Alors sur $\mathbb{S}^* S$ on a

$$\sum u_j^2 = \sum v_j^2 = \frac{1}{4}, \qquad \sum u_j v_j = 0$$

et

$$|z_1 + iz_2|^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2u_1 v_2 + 2v_1 . u_2.$$

Comme on a

$$u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 \leqq \frac{1}{2}, \qquad -2u_1 v_2 + 2v_1 u_2 \leqq \frac{1}{2},$$

le lieu cherché est celui pour lequel on a des égalités soit : $z_3 = \ldots = z_{n+1} = 0$, $v_2 = -u_1$, $v_1 = u_2$ qui est de codimension $2n-2$ (i.e. de dimension 1). Par suite, le degré de $\lambda(z)$ est

$$-\frac{(n-1)}{2} + \frac{2n-2}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

(Pour cela, *cf.* Appendice 2.6.)

Les fonctions suivantes seront utiles : pour $y \in S$, $z \in \mathbb{S}^* S$, on pose pour $d \geqq 0$:

$$K_d(y, z) = \sum_{1 \leqq j \leqq \nu_d} e_d^j(z) \overline{e_d^j}(y). \tag{5.10}$$

La fonction K_d est la composante homogène de degré d du noyau de Poisson; on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — $K_d(y, z) = \lambda_d^0 (2z . y)^d$, *où*

$$\lambda_d^0 = \frac{(-1)^d}{\omega_n d!} \alpha(\alpha - 1) . (\alpha - d + 1) \qquad \textit{avec } \alpha = -\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

Preuve. — Par la formule de Poisson, on a

$$\frac{1-z^2}{\omega_n}\frac{1}{[(z-y)^2]^{(n+1)/2}}=\sum_{j,\,d} e_d^j(z)\,\overline{e_d^j(y)},$$

égalité valable pour $y^2=1$ et $|z|$ assez petit. En faisant $z^2=0$ et en comparant les termes homogènes de degré d, on obtient le résultat souhaité.

Remarquons que

$$\lambda_d^0=\frac{1}{\omega_n\,\Gamma((n+1)/2)}\,\frac{\Gamma(d+(n+1)/2)}{\Gamma(d+1)}$$

de sorte que λ_d^0 est un symbole analytique de degré $(n-1)/2$.

On a aussi l'égalité :

$$(5.11)\qquad \sum_{1\leqq j\leqq \nu_d}\overline{e_d^j(z)}\,e_d^j(y)=\lambda_d^0\,(2\,\bar z\,.\,y)^d.$$

Définissons enfin l'application bord qui associe à toute fonction holomorphe dans Ω une hyperfonction sur $\partial\Omega=\mathbb{S}^*\mathrm{S}$. Rappelons que le complexifié X de $\mathbb{S}^*\mathrm{S}$ est

$$\mathrm{X}=\left\{(z_1,\,z_2)\ z_1^2=z_2^2=0,\ z_1.z_2=\frac{1}{2}\right\}.$$

Soit alors $f(z)$ holomorphe dans Ω. Elle définit de façon évidente une fonction holomorphe dans l'ouvert $|z_1|^2<1/2$ de X, soit $f(z_1)$ et donc une hyperfonction u sur $\mathbb{S}^*\mathrm{S}$ par

$$(5.12)\qquad (u,\,a)=\int_{\Sigma_\lambda} f.a,\qquad a \text{ analytique sur } \mathbb{S}^*\mathrm{S},$$

où Σ_λ est le cycle

$$\Sigma_\lambda=\{(z_1,\,z_2)\in\mathrm{X},\ z_1=e^{-\lambda}z,\ z_2=e^{\lambda}\bar z,\ \lambda>0,\ z\in\mathbb{S}^*\mathrm{S}\},$$

ce qui a un sens pour λ assez petit.

On notera $u=b(f)$.

[L'hyperfonction u apparaît directement comme valeur au bord d'une fonction holomorphe dans un ouvert associé à un demi-espace imaginaire; de façon précise, on a alors :

$$\mathrm{SS}\,b(f)\subset\Sigma,$$

où Σ est celui de (6.8)].

6. Opérateurs de Poisson et inverses

Soit $f=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction holomorphe dans le disque unité de $\mathbb{C}$, $|z|<1$; on supposera toujours que la seule singularité de f sur le cercle $|z|=1$ est le point $z=1$, i. e. que f se prolonge holomorphiquement au voisinage des points $z=e^{i\theta}$, $\theta\neq 0$. On montrera en appendice 1 qu'il en est toujours ainsi lorsque $a_n=g(n)$ où g est un symbole analytique.

On va associer à f les deux opérateurs suivants :

(6.a) Opérateur de poisson $K(f) : \mathscr{B}(S)\to\mathscr{B}(\mathbb{S}^* S)$. — Soit u une hyperfonction sur la sphère S. Alors :

(6.a.1)
$$h(z)=\int f(2z.y)\,u(y)\,dy$$

est holomorphe pour $|z|^2<1/2$ sur le cône $z^2=0$. En effet :

$$|2z.y|^2=4[(u.y)^2+(v.y)^2]<1$$

compte tenu de $u.v=0$ et $u^2=v^2<1/4$. Par définition, on pose donc :

(6.a.2)
$$K(f)\,u=b\left[\int f(2z.y)\,u(y)\,dy\right].$$

On a l'égalité évidente (compte tenu de la proposition 5.1) :

(6.a.3)
$$K(f)[e_d^j(x)]=\frac{a_d}{\lambda_d^0}e_d^j(z),$$

où a_d est le d-ième coefficient de la série de Taylor de f et λ_d^0 est introduit en proposition 5.1.

(6.b) Opérateur inverse $K'(f) : \mathscr{B}(\mathbb{S}^* S)\to\mathbb{B}(S)$. — La fonction $f(2z_2.y)$ est holomorphe sur X_ε pour $y\in\mathbb{R}^{n+1}$, $y^2<1/(1+2\varepsilon)$; en effet sur X_ε on a

$$\frac{1}{2}=z_1.z_2=|z_2|^2+z_2.(z_1-\bar{z}_2)$$

d'où

$$|z_2|^2\leqq\frac{1}{2}+|z_2|\varepsilon\leqq\frac{1}{2}+\varepsilon,$$

d'où

$$|2z_2.y|^2\leqq 2|y|^2|z_2|^2\leqq(1+2\varepsilon)y^2.$$

C.Q.F.D.

Par suite, si u est une hyperfonction sur $\mathbb{S}^*\mathrm{S}$,

$$h(y)=\langle u, f(2z_2.y)\rangle \tag{6.b.1}$$

est défini pour $y^2<1$ et h est harmonique puisque

$$\Delta_y f(2z_2.y)=4z_2^2 f''(2z_2.y)=0 \qquad \text{(puisque } z_2^2=0 \text{ sur X).}$$

On posera donc :

$$\mathrm{K}'(f)(u)=\mathrm{B}(h)=\mathrm{B}(\langle u, f(2z_2.y)\rangle). \tag{6.b.2}$$

On a alors, puisque $z_2|_{\mathbb{S}^*\mathrm{S}}=\bar{z}$ et d'après (5.11) :

$$\begin{aligned} &\mathrm{K}'(f)|_{\mathrm{E}''}=0,\\ &\mathrm{K}'(f)(e_d^j(z))=\frac{a_d}{\lambda_d^0\lambda(d)}e_d^j(y). \end{aligned} \tag{6.b.3}$$

Exemples. — En choisissant

$$f(x)=\sum\lambda_d^0 x^d=\frac{1}{\omega_n}\frac{1}{(1-x)^{(n+1)/2}},$$

on note $\mathrm{K}=\mathrm{K}(f)$. On a

$$\mathrm{K}(u)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathrm{S}}\frac{u(y)}{(1-2z.y)^{(n+1)/2}}d\sigma(y), \tag{6.E.1}$$

ce qui est le noyau de Poisson usuel.

En choisissant $f(x)=\sum\lambda_d^0\lambda_d x^d$, on notera $\mathrm{K}'=\mathrm{K}'(f)$, $\lambda_d^0\lambda_d$ étant un symbole analytique; K' est alors inverse de K dans le sens où l'on a

$$\begin{cases}\mathrm{K}'.\mathrm{K}=\mathrm{Id},\\ \mathrm{K}.\mathrm{K}'=\pi.\end{cases} \tag{6.E.2}$$

Compte tenu de $\|e_d^j(z)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^*\mathrm{S})}\simeq \mathrm{C}\,d^{-((n-1)/4)}$, on a pour les espaces de Sobolev :

$$\begin{cases}\mathrm{K}: \quad \mathrm{H}^s(\mathrm{S})\to\mathrm{H}^{s+((n-1)/4)}(\mathbb{S}^*\mathrm{S}),\\ \mathrm{K}': \quad \mathrm{H}^s(\mathbb{S}^*\mathrm{S})\to\mathrm{H}^{s-((n-1)/4)}(\mathrm{S}).\end{cases} \tag{6.E.3}$$

PROPOSITION 6.1. — *Si* $(y_0, \xi^0)\notin\mathrm{SS}(u)$, $\mathrm{K}(f)u$ *est analytique au voisinage du point* $z_0=u_0+iv_0$ *de* $\mathbb{S}^*\mathrm{S}$, $u_0=y_0/2$, $v_0=(-1/2)(\xi^0/|\xi^0|)$.

Preuve. — Il s'agit de montrer que la fonction $h(z)$: $h(z)=\langle u, f(2z.y)\rangle$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de z_0. Soit Y le voisinage complexe d'ordre ε de la sphère et p la projection naturelle de Y_ε sur S : si $y+i\theta\in\mathrm{Y}_\varepsilon$ $p(y+i\theta)=y/\sqrt{1+\theta^2}$.

Par hypothèse, il existe $\eta>0$ et $\alpha>0$ tels que pour tout ε assez petit, u soit défini par une mesure μ_ε à support compact dans Y_ε et telle que

$$y+i\theta\in\operatorname{Supp}(\mu_\varepsilon),\qquad |p(y)-y_0|<\eta\quad\Rightarrow\quad \theta.\xi^0<-\alpha|\theta|.|\xi^0|,$$

α étant donné, on peut choisir alors η aussi petit que l'on veut; on le prendra tel que

$$\omega\in S\,|\omega-y_0|<\eta\quad\Rightarrow\quad \alpha u_0.\omega-v_0.\omega\geqq C>0\,[v_0.y_0=0].$$

Il s'agit alors de montrer que pour ε assez petit, $2z_0.(y+i\theta)$ est dans le domaine de f pour tout $y+i\theta$ dans le support de μ_ε. Or :

(i) si $|p(y+i\theta)-y_0|\geqq\eta/2$ on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\sup\{|2z_0.(y+i\theta)|,\,|\theta|<\varepsilon\}=1,$$

$$\operatorname{Re}(2z_0.(y+i\theta))=2(u_0.y-v_0.\theta)\ \leqq\cos\eta/2\sqrt{1+\varepsilon^2}+\varepsilon\to\cos\eta/2<1;$$

(ii) si $|p(y+i\theta)-y_0|<\eta$ on a

$$\begin{aligned}|2z_0.(y+i\theta)|^2&=4[(u_0.y-v_0.\theta)^2+(v_0.y+u_0.\theta)^2]\\&=4[(u_0.y)^2+(v_0.y)^2+(v_0.\theta)^2\\&\quad+(u_0.\theta)^2-2(u_0-y)(v_0.\theta)+2(v_0.y)u_0.\theta]\\&\leqq(1+\theta^2)+2\theta^2-4C|\theta|\sqrt{1+\theta^2}<1\end{aligned}$$

pour $|\theta|$ petit, $\neq 0$, ce qui assure le résultat.

On note σ l'application de $T^*S\setminus 0$ dans $\mathbb{S}^*S$ qui à (x_0,ξ^0) associe $z_0=u_0+iv_0$, $u_0=x_0/2$, $v_0=(-1/2)(\xi^0/|\xi^0|)$.

Proposition 6.2. — *Soit* $m\in T^*(S)\setminus 0$ *et* U *une hyperfonction sur* $\mathbb{S}^*S$; *si* U *est analytique au voisinage de* $\sigma(m)$, *on a* $m\notin SS(K'(f)U)$.

Preuve. — Montrons tout d'abord un lemme intermédiaire :

Lemme 6.1. — *Si support* (U) CF, *alors* SS $(K'(f)U)\subset\sigma^{-1}(F)$.

Preuve. — Soit $D(f)$ un voisinage de $\{z\in\mathbb{C},|z|\leqq 1,z\neq 1\}$ sur lequel f est bien défini. Soit Ω l'ouvert de Y :

(6.L.1) $$\Omega=\{y\in Y,\ \forall z\in F,\ 2\bar{z}.y\in D(f)\}$$

(Ω peut être vide). Pour $y\in\Omega$ posons

(6.L.2) $$G(y)=(u,f(2z_2.y)).$$

Alors G est holomorphe sur Ω.

Soit $y_0\in S$ et $u_0=y_0/2$.

(I) Si pour tout v, $(u_0,v)\notin F$, on a $y_0\in\Omega$.

(II) S'il existe v tel que $(u_0, v) \in \mathrm{F}$ et θ tel que

$|\theta|=1$, $\theta . y_0=0$ et vérifiant :

$$\exists \gamma>0, \quad \exists_\eta>0, \quad tq\,(u, v) \in \mathrm{F}, \qquad |u-u_0|<\eta \quad \Rightarrow \quad \theta . v<-\gamma, \tag{6.L.3}$$

alors en posant $y=y_0 \sqrt{1+\varepsilon^2 \theta^2}+i \varepsilon \theta$, on a $y \in \Omega$ pour ε assez petit, $\varepsilon>0$.

(I) est évident et (II) résulte du développement à l'ordre 1 en ε de la fonction $2 z . y$.

Supposons en particulier que $\mathrm{F}' \subset \mathrm{V} \times \Gamma$ où

$$\mathrm{V}=\{u,\, |u-u_0| \leqq \alpha\}, \qquad \Gamma=\{v,\, |v-v_0| \leqq \beta\}$$

α, β petits et $u_0 . v_0=0$ et soit θ tel que pour tout $v \in \Gamma$, $\theta . v<0$. Soit $\mathrm{X}(y)$ dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathrm{S})$, à support dans un voisinage de V. $1 \geqq \mathrm{X}(y) \geqq 0$ et $\mathrm{X}(y)>0$ sur V. Posons

$$\Sigma_\varepsilon=\{y \sqrt{1+\varepsilon^2 \mathrm{X}_y^2 \pi y(\theta)^2}+i \varepsilon \mathrm{X}(y) \pi y(\theta),\ y \in \mathrm{S}\} \tag{6.L.4}$$

où $\pi y(\theta)=\theta-(y . \theta) y$. On a alors $\Sigma_\varepsilon \subset \Omega$ pour ε petit et il résulte de la définition de B (en déformant d'abord l'intégrale dans le complexe puis en faisant tendre r vers 1) [*cf.* (5.5), (5.6), (5.7)]. qu'on a

$$\langle \mathrm{K}'(f) \mathrm{U}, a\rangle=\frac{1}{\omega_n} \int_{\Sigma_\varepsilon} \mathrm{G}(y) a(y) \tag{6.L.5}$$

pour a holomorphe dans $\mathrm{Y}_{2\varepsilon}$.

Il résulte alors de la définition et de (6.L.3) que l'on a

$$\mathrm{SSK}'(f) \mathrm{U} \subset \mathrm{V} \times -\Gamma$$

ce qui, compte tenu du fait qu'on peut décomposer toute hyperfonction en somme de termes de support aussi petit qu'on le désire, prouve le lemme.

Soit alors $\mathrm{F}=\{(u, v),\, |u-u_0|+|v-v_0| \leqq \alpha\}$; il suffit de montrer la proposition lorsque U est tracé sur F' d'une fonction analytique g, et nulle en dehors de F. Alors :

$$\mathrm{G}(y)=\int_{\mathrm{F}} f(2 y . \bar{z}) g(u, v).$$

Soit $\lambda \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{S}^* \mathrm{S})$, $\lambda \geqq 0$, $\lambda=1$ au voisinage de u_0, v_0, à support strictement dans F, et F_ε le cycle dans X :

$$\mathrm{F}_\varepsilon=\{(z_1, z_2) \in \mathrm{X},\ z_1=e^{\varepsilon \lambda} z,\ z_2=e^{-\varepsilon \lambda} \bar{z},\ z \in \mathrm{F}\}.$$

Pour ε petit, on a

$$\mathrm{G}(y)=\int_{\mathrm{F}_\varepsilon} f(2 y . z_2) g(z_1, z_2)=\mathrm{I}_0(y)+\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{I}_\alpha(\mathrm{Y}),$$

où I_0 est l'intégrale sur les points F_0 de F_ε paramétrés par des z voisins de (u_0, v_0), où l'on a $\lambda \geqq \eta > 0$ et I_α l'intégrale sur les points paramétrés par des F_α, qui recouvrent le reste et sont contenus dans des fermés de type $V \times \Gamma$, ne contenant pas u_0, v_0. Les $I_\alpha(y)$ ne contribuent donc pas au spectre en $(2u_0, -v_0)$ (même preuve que le lemme) et $I_0(y)$ est analytique sur S puisque $|2y.z_2| \leqq e^{-\varepsilon\eta}$ sur F_0.

C.Q.F.D.

APPENDICE 1

Soit $h(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où a_n est un symbole analytique au sens de [2 a], c'est-à-dire qu'il existe N_0 tel que pour $n \geqq N_0$, on ait $a_n = f(n)$ où la fonction $f(z)$ est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ et dans Γ_η :

$$\Gamma_\eta = \{ z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ |\mathrm{Im}\, z| < \eta\, [\mathrm{Re}(z)] \} \tag{1.A.1}$$

pour un certain $\eta > 0$ et y vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists C_\varepsilon \text{ telle que } |f(z)| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon |z|} \text{ pour } z \in \Gamma, \tag{1.A.2}$$

On a alors $|a_n| \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon n}$ d'où lim sup $\sqrt[n]{|a_n|} \leqq 1$, ce qui assure que $h(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$. En fait, on a :

PROPOSITION. — *$h(z)$ se prolonge holomorphiquement au voisinage des points z, $|z| = I$, $z \neq 1$.*

Preuve. — On peut toujours supposer $h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) z^n$ et, quitte à retrancher à f son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0, supposer $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}; \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

On introduit alors la fonction g sur R :

$$\begin{cases} g(x) = f(x), & x \geqq 0; \\ g(x) = 0, & x < 0, \end{cases} \tag{1.A.3}$$

qui est de classe C^2, et pour $0 < \rho < 1$ les fonctions

$$g_\rho(x) = \rho^x g(x) = e^{x \operatorname{Log} \rho} g(x) \tag{1.A.3'}$$

qui sont $\mathscr{C}^2$, à décroissance exponentielle, de transformée de Fourier inverse :

$$\check{g}_\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{ix\xi} e^{x \operatorname{Log} \rho} g(x)\, dx \tag{1.A.4}$$

qui sont analytiques et vérifient les majorations :

$$(1.A.5)\qquad |\check{g}_\rho(\xi)| \leqq \frac{C_\rho}{1+\xi^2}; \qquad \left|\frac{d}{d\xi}\check{g}_\rho(\xi)\right| \leqq \frac{C_\rho}{1+\xi^2}.$$

On a donc l'identité de Poisson :

$$(1.A.6)\qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \check{g}_\rho(x+2k\pi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_\rho(n)\,e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \rho^n e^{inx}.$$

En remarquant que

$$\check{g}_\rho(\xi) = \frac{1}{2\pi(\mathrm{Log}_\rho + i\xi)^2}\int_0^{+\infty} e^{t[\mathrm{Log}_\rho + i\xi]}\, g''(t)\,dt,$$

on interprète l'égalité (A.6) de la manière suivante : soit $U \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^*$ le revêtement universel de $\mathbb{C}^*$ et $\theta(z)$ la fonction holomorphe sur $\{z\in U, |\pi(z)|<1\}$:

$$\theta(z) = \frac{1}{2\pi(\mathrm{Log}\, z)^2}\int_0^{+\infty} e^{t\,\mathrm{Log}\, z} f''(t)\,dt$$

on a

$$(1.A.7)\qquad h(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta(z_k) \qquad \text{avec} \quad \{z_k\} = \pi^{-1}(z).$$

Alors soit $z_k \in U$, $|\pi(z_k)|=1$, notation prise telle que pour z voisin de z_k, on ait :

$$\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\,|\pi(z)| + i\,\mathrm{Arg}\,\pi(z) + 2ik\pi, \qquad 0 \leqq \mathrm{Arg} < 2\pi,$$

avec $\mathrm{Arg}\,\pi(z_k) \in]0, 2\pi[$. Alors puisque f'' est un symbole analytique, pour $|\varepsilon|$ assez petit, on a au voisinage de z_k, pour $|\pi(z)|<1$:

$$\theta(z) = \frac{1}{2\pi(\mathrm{Log}\, z)^2}\int_0^{+\infty} (1+i\varepsilon)\, e^{t(1+i\varepsilon)\mathrm{Log}\, z} f''(t(1+i\varepsilon))\,dt,$$

ce qui, puisque

$$\mathrm{Re}((1+i\varepsilon)\,\mathrm{Log}\, z) = -\varepsilon[\mathrm{Arg}\,\pi(z) + 2k\pi] + \mathrm{Log}\,|\pi(z)|$$

montre que $\theta(z)$ se prolonge dans un voisinage de z_k (uniforme en k) et que, sur ce voisinage, on a

$$|\theta(z_k)| \leqq \frac{C}{1+k^2}$$

[$\varepsilon>0$ pour k positif, $\varepsilon<0$ pour k négatif] ce qui montre le résultat.

APPENDICE 2

(2.0) NOTATIONS :

$$\Gamma_{\eta,\, a}=\{ z\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re} z>a\geqq 0,\ |\operatorname{Im} z|<\eta \operatorname{Re} z\}.$$

Soient M et M′ deux variétés analytiques réelles, $x\in \mathrm{M}$, $y\in \mathrm{M}'$. On note $\mathrm{SR}^d(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ l'espace des fonctions analytiques $f(x, y, \lambda)$ de $\mathrm{M}\times \mathrm{M}'\times \mathbb{R}_+$ à valeurs complexes, telles que pour tous compacts $\mathrm{K}\subset \mathrm{M}$, $\mathrm{K}'\subset \mathrm{M}'$, il existe un voisinage complexe K_ε de K, un voisinage réel U de K′ dans M′, des constantes η, a, C, A et des fonctions analytiques $a_k(x, y)$ définies sur $\mathrm{K}'_\varepsilon\times \mathrm{U}$ tels que :

(1) f se prolonge à $\mathrm{K}_\varepsilon\times \mathrm{U}\times \Gamma_{\eta,\, a}$;

(2) $$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N},\quad \left| f(x, y, \lambda)-\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} a_k(x, y)\lambda^{d-k}\right| \leqq \mathrm{CA^N N}!\,|\lambda|^{d-\mathrm{N}}$$

pour $(x, y, \lambda)\in \mathrm{K}_\varepsilon\times \mathrm{U}\times \Gamma_{\eta,\, a}$.

On notera $\mathrm{DA}(f)=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x, y)\lambda^{d-k}$ le développement asymptotique de f, $\sigma(f)=a_0(x, y)$ son terme principal.

2. *Remarques.* — (1.*a*) On a $|a_k(x, y)|\leqq \mathrm{CA}^k k!$ sur $\mathrm{K}_\varepsilon\times \mathrm{U}$.

(1 *b*) Il y a équivalence entre (*cf.* [2 *a*]) :

(i) $f\in\bigcap \mathrm{SR}^d(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$;

(ii) $|f(x, y, \lambda)|\leqq \mathrm{C}e^{-\varepsilon|\lambda|}$.

Dans ce cas, on a $\mathrm{DA}(f)=0$ et on note $f\sim 0$.

(1 *c*) Si $d\mu(y)$ est une mesure à support compact dans M′ et $f\in \mathrm{SR}^d(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, alors

$$\int f(x, y, \lambda)\, d\mu(y)\in \mathrm{SR}^d(\mathrm{M}, \{pt\})$$

et son DA s'obtient par intégration.

Lorsque X est une variété complexe, on définit de manière analogue $\mathrm{SR}^d(\mathrm{X}, \mathrm{M})$.

Dans la proposition suivante, on utilise la méthode de [7].

PROPOSITION 2.2. — *Soit* U *un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^q$ *et* φ *une fonction analytique de* $\mathrm{U}\times \mathrm{M}'$ *dans* $\mathbb{C}$ *telle que*

$$\varphi(0, y)=d\varphi(0, y)=0,\qquad \det \varphi''_{xx}(0, y)\neq 0,\qquad \operatorname{Im}\varphi(x, y)>0\ x\neq 0.$$

Pour $a(x, y, \lambda)\in \mathrm{SR}^d(\mathrm{U}, \mathrm{M}')$ *et* $r>0$ *tel que* $\{|x|<r\}\subset\mathrm{U}$, *posons*

$$\mathrm{I}_\varphi(a)=\int_{\|x\|<r} e^{i\lambda\varphi(x, y)}\, a(x, y, \lambda)\, dx.$$

Alors $\mathrm{I}\varphi(a)\in \mathrm{SR}^{d-q/2}(\{pt\}, \mathrm{M}')$.

Preuve. — Il suffit de le montrer pour y voisin de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et r peut être choisi aussi petit qu'on le désire compte tenu de $\operatorname{Im}\varphi(x, y)>0$ pour $x\neq 0$. On écrira :

$$\mathrm{I}_{\varphi}(a)=\int_{\Sigma}\alpha,$$

où α est la q-forme $e^{i\lambda\varphi}\, a dx$ et

$$\Sigma=\{x\in\mathbb{C}^q;\ x\in\mathbb{R}^q,\ |x|\leqq r\}.$$

D'après le lemme de Morse (*cf.* [7]) il existe un changement de variable $(y, x)\to(y, z(x, y))$ pour y voisin de 0 dans $\mathbb{R}^n$, x voisin de 0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que l'on ait

$$z(0, y)=0,\qquad \varphi(x, y)=(i/2).z^2$$

et si $z=u+iv$, u, v réels, les points réels sont décrits par $v=\gamma(y, u)$, et donc $u^2>\gamma^2(y, u)$ pour $u\neq 0$. On peut aussi supposer que $x\to u(x, 0)$ préserve l'orientation de $\mathbb{R}^q$. On note

$$\mathrm{D}(y)=\{u(x, y),\ x\in\mathbb{R}^q,\ |x|\leqq r\}.$$

On a alors :

$$\alpha=e^{-\lambda z^2/2}\, b(z, y, \lambda)\, dz\qquad \text{où}\quad b(z, y, \lambda)=a[x(z, y), y, \lambda]\,\frac{dx}{dz}$$

et donc $b\in\mathrm{SR}^d(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, U voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^q$, V voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et pour r petit.

$$\Sigma=\{z\in\mathbb{C}^q,\ z=u+i\gamma(y, u),\ u\in\mathrm{D}(y)\}\subset\mathrm{U}.$$

Comme $\operatorname{Re}(z^2)=u^2-\gamma^2(y, u)>0$ pour $u\neq 0$, on peut remplacer Σ par :

$$\Sigma'=\{z\in\mathbb{C}^q,\ z=u+i\theta(u)\gamma(y, u),\ |u|\leqq\varepsilon\}$$

pour ε petit où $\theta\in\mathscr{C}_0^\infty(|u|<\varepsilon)$, $0\leqq\theta\leqq 1$, $\theta=1$ au voisinage de 0. En déformant alors Σ' en Σ'_s, pour $0\leqq s\leqq 1$:

$$\Sigma'_s=\{z\in\mathbb{C}^q,\ z=u+is\theta(u)\gamma(y, u),\ |u|\leqq\varepsilon\}$$

on se ramène à étudier :

$$\int_{|u|\leqq\varepsilon} e^{-\lambda u^2/2}\, b(u, y, \lambda)\, du.$$

2.3. *Remarque.* — D'après [7], on a

$$\sigma(b)(0, y)=\sigma(a)(0, y)\left[\det\left[\frac{1}{i}\,\varphi''_{xx}(0, y)\right]^{-1/2}\right],$$

où la détermination est choisie telle qu'elle se transforme en 1 par l'homotopie

$$s \mapsto \frac{1}{i}(1-s)\,\varphi''_{xx}(0, y)+s\,\mathrm{Id}.$$

La proposition sera donc conséquence du lemme suivant :

LEMME 2.4 (*Phase stationnaire*). — *Soit* U *un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{C}^q$, $\rho>0$ *tel que*

$$\{z\in\mathbb{C}^q, |z|_j\leqq\rho\}\subset \mathrm{U} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon\in]0, \rho[.$$

Posons pour $a\in \mathrm{SR}^d(\mathrm{U}, \mathrm{M})$:

$$\mathrm{I}_a=\int_{\|x\|<\varepsilon} e^{-\lambda x^2/2}\, a(x, y, \lambda)\, dx.$$

Alors $\mathrm{I}_a\in \mathrm{SR}^{d-q/2}(\{pt\}, \mathrm{M})$ *et de plus*

$$\mathrm{DA}(\mathrm{I}_a)=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{q/2}[e^{\Delta x/2\lambda}\,\mathrm{DA}(a)]|_{x=0} \qquad \text{où} \quad \Delta_x=\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Preuve. — On s'intéresse d'abord au cas où $a=f(x, y)$, c'est-à-dire ne dépend pas de λ. Remarquons que si $f(x, y)$ est polynomial en x, on a

$$\int_{\mathbb{R}^q} e^{-\lambda x^2/2} f(x, y)\, dx=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{q/2}[e^{\Delta/2} f(x, y)]|_{x=0}. \tag{2.4.a}$$

Pour simplifier, on ne notera pas y, qui sera supposé parcourir un compact fixe de M'.

On note

$$|f|_\rho=\sup\{|f(z)|, |z_j|<\rho, j=1, \ldots, q\}, \qquad \|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_q^2}$$

et

$$p_n(f)(x)=\sum_{|\alpha|\leqq n}\frac{1}{\alpha!}x^\alpha\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0).$$

Enfin, on pose

$$\mathrm{R_N}(f, \lambda)=\mathrm{I}f(\lambda)-\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{q/2}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}\frac{1}{k!}\frac{\Delta^k f(0)}{(2\lambda)^k}.$$

On a

$$\mathrm{R_N}(f, \lambda)=\int_{\|x\|<\varepsilon} e^{-\lambda x^2/2}[f(x)-p_{2\mathrm{N}-1}(x)]\, dx-\int_{\|x\|\geqq\varepsilon} e^{-\lambda x^2/2}\, p_{2\mathrm{N}-1}\, x\, dx.$$

D'après la formule de Taylor, on a

$$f(x)-p_{2N-1}(x)=\frac{1}{(2N-1)!}\sum_{|\alpha|=2N}\frac{(2N)!}{\alpha!}x^{\alpha}\int_0^1(1-u)^n\frac{\partial^{\alpha}f}{\partial x^{\alpha}}(ux_1,\ \ldots,\ ux_q)\,du,$$

d'où, en utilisant la formule de Cauchy et l'inégalité

$$\sum_{|\alpha|=n}|x^{\alpha}|\leqq C_{n+q-1}^{q-1}\|x\|^n,$$

$$(2.4.b)\quad |f(x)-p_{2N-1}(x)|\leqq\frac{\rho^q}{(\rho-\varepsilon)^{2N+q}}|f|_{\rho}C_{2N+q-1}^{q-1}\|x\|^{2N}\qquad \text{pour}\quad \|x\|\leqq\varepsilon.$$

On a aussi

$$(2.4.c)\qquad |p_{2N-1}(x)|\leqq\sum_{|\alpha|\leqq n}|x^{\alpha}|.|f|_{\rho}\frac{1}{\rho^{|\alpha|}}\leqq|f|_{\rho}\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{1}{\rho k}C_{k+q-1}^{q-1}\|x\|^k$$

$$\leqq|f|_{\rho}\left(\frac{\|x\|}{\varepsilon}\right)^{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}C_{k+q-1}^{q-1}\qquad \text{pour}\quad \|x\|\geqq\varepsilon.$$

Il résulte donc de $(2.4.b)$ et c qu'on a

$$(2.4.d)\quad |R_N(f,\lambda)|\leqq|f|_{\rho}\sup\left[\frac{\rho^q}{(\rho-\varepsilon)^{2N+q}},\frac{1}{\varepsilon^{2N}}\right]P(N)\int_{\mathbb{R}^q}e^{-\mathrm{Re}\,\lambda x^2/2}\|x\|^{2N}\,dx,$$

où P (N) est un polynôme fixe de N de degré $\leqq q$.

Or, on a d'après $(2.4.a)$:

$$\int_{\mathbb{R}^q}e^{-\lambda x^2/2}\|x\|^{2N}\,dx=2^N\,N!\prod_{k=1}^{N}[q+2(k-1)]\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{q/2}\frac{1}{(2\lambda)^N}\frac{1}{N!},$$

d'où il résulte

$$(2.4.e)\qquad |R_N(f,\lambda)|\leqq|f|_{\rho}AB^N\,N!(\mathrm{Re}\,\lambda)^{-q/2-N},$$

où les constantes A et B ne dépendent que de ρ et ε.

Passons au cas général. On a alors pour $\lambda\in\Gamma_{\eta,\,a}$:

$$\left|a-\sum_{k=0}^{N-1}f_k\lambda^{d-k}\right|_{\rho}<CD^N\,N!\,|\lambda|^{d-N}.$$

D'où il résulte

$$(2.4.f)\qquad \left|I_a-\sum_{k=0}^{N-1}I_{f_k}\lambda^{d-k}\right|<\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{q/2}CD^N\,N!\,|\lambda|^{d-N}.$$

Or, d'après la majoration précédente $(2.4.e)$, il vient

$$(2.4.g) \qquad |R_{N-k}(f_k, \lambda)| \leqq |f_k|_\rho AB^{N-k}(N-k)!(\operatorname{Re}\lambda)^{-q/2-N+k},$$

d'où, puisque $|f_k|_\rho \leqq CD^k k!$ et $(N-k)!\, k! \leqq N!$:

$$(2.4.h) \qquad \sum_{k=0}^{N-1} |R_{N-k}(f_k, \lambda)|.|\lambda|^{d-k} \leqq C' N! \left(\sum_{k=0}^{N-1} D^k B^{N-k}\right) |\lambda|^{d-q/2-N}.$$

En combinant $(2.4.f)$ et $(2.4.h)$ on obtient le résultat cherché. Nous pouvons à présent démontrer le théorème qui fait l'objet de cet appendice.

Soit M une variété analytique riemanienne compacte; on la supposera orientée par une forme volume dx. Rappelons la définition suivante :

DÉFINITION. — Une fonction φ est dite transversalement elliptique sur une sous-variété N si $d\varphi=0$ sur $-$N et $rg[\text{Hess } \varphi]=\text{codim N}$ aux points de N.

THÉORÈME 2.5. — *Soit* φ *une fonction analytique sur* M, *à valeurs complexes, telle que* $\operatorname{Im}\varphi \geqq 0$. *On suppose que*

$$\{x \in M,\ d\varphi_x=0,\ \operatorname{Im}\varphi(x)=0\}=N$$

est une sous-variété lisse connexe de codimension q *et que* φ *est transversalement elliptique sur* N. *Pour tout* $a \in SR^d(M)$, *posons*

$$I\varphi(a)=\int_M e^{i\lambda\varphi(x)} a(x, \lambda)\, dx$$

alors $I_\varphi(a)=e^{i\lambda c}\, b(\lambda)$ *où* $b \in SR^{d-q/2}$ *et* $C \in \mathbb{R}$ *est la valeur critique de* φ *sur* N.

Preuve. — Quitte à remplacer φ par $\varphi-c$, on peut supposer $c=0$.

1^re^ *étape.* — On se ramène à supposer $\operatorname{Im}\varphi>0$ en dehors de N. Soit X un voisinage complexe de M sur lequel φ et a sont bien définis. Sur X considérons le champ de vecteur analytique

$$x \to V(x)=i\, \text{grad}_x\, \varphi$$

X muni de sa structure hermitienne.

Soit $\theta(x, s)$ le flot associé pour s petit, au voisinage de M :

$$\theta(x, 0)=x, \qquad \frac{d\theta}{ds}(x, s)=V[\theta(x, s)].$$

On a par la formule de Taylor :

$$\operatorname{Im}\varphi[\theta(x, s)]=\operatorname{Im}\varphi(x)+\int_0^s |\text{grad}\, \varphi\theta(x, t)|^2\, dt.$$

Soit $M_s = \{\theta(x, s), x \in M\}$. Pour $s > 0$ petit on a alors $M_s \subset X$ et

$$I\varphi(a) = \int_{M_s} e^{i\lambda\varphi(z)} a(z, \lambda)\, dz = \int_M e^{i\lambda\psi(x)} b(x, \lambda)\, dx,$$

avec

$$\psi(x) = \varphi[\theta(x, s)], \qquad b(x, \lambda) = a[\theta(x, s), \lambda] \frac{d\theta}{dx}(x, s).$$

On a alors $\psi(x) = 0$, $d\psi(x) = 0$ sur N, $\operatorname{Im}\psi(x) > 0$ en dehors de N, et $b(x, \lambda) \in SR^d(M)$.

De plus, si on choisit un système de coordonnées locales au voisinage d'un point de N, $z \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^q$, tel que N soit défini par $y = 0$ on a, dans ce système :

$$\operatorname{Hess}\frac{1}{i}\varphi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & H \end{array}\right),$$

où $H \in GL_q(\mathbb{C})$, $\operatorname{Re}H \geqq 0$, $\det H = \Delta_{1/i}\varphi$ étant le déterminant hessien transverse de $(1/i)\varphi$ sur N. Or pour $x \in N$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x, s) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id} & B \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{où} \quad D \in GL_q(\mathbb{C})$$

et

$$\operatorname{Hess}\psi_x = \frac{{}^t\partial\theta}{\partial x}(x, s) \operatorname{Hess}\varphi_x \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, s),$$

d'où il résulte

$$\operatorname{Hess}\frac{1}{i}\psi = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & {}^tDHD \end{array}\right) \qquad \text{avec} \quad \operatorname{Re}{}^tDHD > 0$$

et par suite, avec la convention (2.3), on a

$$\sigma(a)(\Delta_{1/i}\varphi)^{-1/2} = \sigma(b)(\Delta_{1/i}\psi)^{-1/2} \quad \text{sur N},$$

ce qui d'ailleurs, résultera de la démonstration du théorème.

2ᵉ *étape*. — Par troncature, on se ramène alors à étudier :

$$I' = \int_F e^{i\lambda\psi} b\, dx,$$

où F est un voisinage tubulaire de N dans M; $F \xrightarrow{\pi} N$ est alors un fibré de rang q. Soit alors Ω_j, une (presque) partition de N par des ouverts de carte Ω_j tels que

$$\pi^{-1}(\Omega_j) \simeq \Omega_j \times \mathbb{R}^q, \qquad \text{où} \quad j \in J \quad \text{fini}.$$

On a

$$\mathrm{I}'=\sum_{j\in \mathrm{J}} \int_{\pi^{-1}(\Omega_j)} e^{i\lambda\psi}\, b\, dx.$$

Il suffit donc d'étudier les intégrales du type

$$\int_{\Omega y} dy \int_{\|x\|\leqq r} e^{i\lambda\psi(x,\,y)}\, b(x,\, y,\, \lambda)\, \theta(x,\, y)\, dx,$$

où dx (resp. dy) est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^q$ (resp. $\mathbb{R}^n$) et θ l'expression dans cette carte de la forme volume initiale, et où $b\,\theta\in \mathrm{SR}^d(\mathbb{R}^q,\, \mathrm{U})$ où U est un voisinage de $\overline{\Omega}_j$ dans $\mathbb{R}^n$.

Le résultat est donc la conséquence des propositions 2.2 et 2.1.*c*.

Remarques. — (1) $\sigma(a)\,[\Delta_{1/2}\,\varphi]^{-1/2}\,|dx|$ définit par restriction à N une densité $\sigma(a)|_{\mathrm{N}}\,|dy|_\varphi$ sur N et on a

$$\sigma(e^{-i\lambda c}\,\mathrm{I}_\varphi(a))=(2\,\pi)^{q/2}\int_{\mathrm{N}} \sigma(a)|_{\mathrm{N}}\,|dy|_\varphi.$$

(2) La connexité de N est sans importance. Si $\mathrm{N}=\mathrm{U}\mathrm{N}_j$ où N_j est de codimension q_j, on aura

$$\mathrm{I}_\varphi(a)=\sum_j e^{i\lambda c j}\, b_j(\lambda), \qquad b_j(\lambda)\in \mathrm{SR}^{d-qj/2}.$$

COROLLAIRE 2.6. — (1) *Soit* $f: \mathrm{M}\to[0,\,1]$ *analytique tel que* $f(x)=1$ *si* $x\in \mathrm{N}$ *et* f *elliptique transverse sur* N. *Alors* $\Gamma_f(\lambda)=\int_{\mathrm{M}} f^\lambda\, dx$ *est exactement dans* $\mathrm{SR}^{-q/2}$.

COROLLAIRE 2.6. — (2) *Soit* V *un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* $\varphi: \mathrm{M}\times \mathrm{V}\to\mathbb{C}$, *telle que* $\mathrm{Im}\,\varphi\geqq 0$, $\mathrm{Im}\,\varphi(x,\,0)=0$ *et* $\varphi'_x(x,\,0)=0$ *si et seulement si* $x=x_0\in \mathrm{M}$, *et* $\det\varphi''_{xx}(x_0,\,0)\neq 0$.

Alors si $a\in \mathrm{SR}^d\,(\mathrm{V}\times\mathrm{M},\,\ldots)$ *on a*

$$\int_{\mathrm{M}} e^{i\lambda\varphi(x,\,y)}\, a(x,\, y,\, \lambda)\, dx=e^{i\lambda\psi(y)}\, b(y),$$

où $\psi(y)$ *est la valeur critique de* φ *au point* $y\in \mathrm{U}$ *et* $b\in \mathrm{SR}^{d-(\dim \mathrm{M}/2)}(\mathrm{U},\,\ldots)$ *où* U *est un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.

En effet, par déformation de M, on se ramène à supposer qu'on a

$$\mathrm{Im}\,\varphi(x,\,0)>0 \quad \text{pour } x\neq x_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Re}\frac{1}{i}\,\varphi''_{x,\,x}(x_0,\,0)\gg 0.$$

En suivant [7], on a alors :

$$\varphi(x,\, y)-\psi(y)=i^{z^2/2}$$

pour x et y voisins de x_0 et 0 et on applique la méthode de la proposition 2.2.

Notons que d'après [7], on a $\mathrm{Im}\,\Psi(y)\geqq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BONY, Appendice dans *Propagation des singularités différentiables...*, Soc. math. France (*Astérisque*, vol. 34-35, 1976, p. 43-91).

[2] BOUTET DE MONVEL, (*a*) *Opérateurs pseudo-diff. analytiques...* (*Ann. Inst. Fourier*, 1972, p. 229-268); (*b*) *Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 287, série A, 1978, p. 855.

[3] BROS-IAGOLNITZER, *Support essentiel et structure analytique des distributions* (*Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz*, n° 18, 1975).

[4] MARTINEAU, *Les hyperfonctions de M. Sato* (*Séminaire Bourbaki*, vol. 214, 1960/1961).

[5] SCHAPIRA, *Théorie des hyperfonctions* (*Lect. Notes in Maths.*, vol. 126, Springer-Verlag, 1970).

[6] S. K. K. : M. SATO, T. KAWAI et M. KASHIWARA, *Hyperfunctions and Pseudo Differential Equations* (*Lect. Notes in Maths*, vol. 287, 1973, Springer, p. 265-529).

[7] MELLIN-SJÖSTRAND, *Fourier Integral Operators with Complex Valued Phase Functions* (*Lect. Notes in Maths*, vol. 459, 1975, Springer).

(Manuscrit reçu le 3 juillet 1979.)

Gilles LEBEAU,
5, avenue Gaston-Bertier,
77120 Coulommiers.