ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE BERTHELOT

Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 13, n° 2 (1980), p. 225-268
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_2_225_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4ᵉ série, t. 13, 1980, p. 225 à 268.

THÉORIE DE DIEUDONNÉ SUR UN ANNEAU DE VALUATION PARFAIT

Par PIERRE BERTHELOT (¹)

Soient S un schéma normal connexe, K le corps des fonctions rationnelles sur S, G et H deux groupes p-divisibles sur S, de fibres génériques G_K et H_K. D'après un théorème bien connu de Tate ([21], [22]), l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}(G, H) \to \mathrm{Hom}(G_K, H_K)$$

est un isomorphisme lorsque K est un corps de caractéristique nulle. Par contre, on ignore s'il en est toujours de même lorsque S est d'égale caractéristique $p > 0$; on sait, d'après Grothendieck ([20], exposé IX), que ce résultat donnerait par exemple, lorsque S est un trait hensélien et A un schéma abélien sur K, une méthode pour étendre au cas $l = p$ les critères de bonne réduction de A obtenus en termes du module de Tate $T_l(A)$ pour $l \neq p$.

Une façon d'aborder ce problème consiste à utiliser des théorèmes du type « classification par le module de Dieudonné », analogues aux résultats classiques pour les groupes finis ou p-divisibles sur un corps parfait, afin de réduire le problème étudié à un problème d'algèbre p-linéaire. Un dévissage standard montre qu'on peut se ramener au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet A, à corps résiduel algébriquement clos. Comme nous l'observerons plus bas, il suffit alors de disposer sur S d'un « foncteur de Dieudonné » compatible au changement de base, et induisant sur la clôture parfaite $\overline{A}$ de A une équivalence entre la catégorie des groupes p-divisibles sur $\overline{A}$ et une catégorie convenable de modules de Dieudonné.

Les trois premières parties de ce travail sont donc consacrées à développer la théorie de Dieudonné pour les schémas en groupes commutatifs, finis localement libres sur un anneau de valuation parfait de caractéristique p (en fait sur une base parfaite dont les anneaux locaux sont des anneaux de valuation ou des corps). Il s'agit ici d'une extension de la théorie contravariante lorsque la base est un corps parfait (*voir* par exemple [6], ou [5]). La principale

(¹) Laboratoire associé au C.N.R.S., n° 305.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. – 0012-9593/1980/225 /$ 5.00
© Gauthier-Villars

difficulté provient de ce qu'il n'est plus possible, sur une base non ponctuelle, de considérer séparément le cas des groupes unipotents et celui des groupes de type multiplicatif, puisqu'un schéma en groupes fini localement libre n'est même pas en général extension de l'un par l'autre. Il faut donc partir d'une définition unifiée du module de Dieudonné pour les schémas en groupes finis. Partant d'une construction de Barsotti [1], Fontaine a introduit une telle définition sur un corps parfait en montrant que le module de Dieudonné classique d'un groupe fini G est isomorphe au module Hom (G, CW), où CW est le faisceau des « covecteurs de Witt », et c'est cette définition que nous adoptons ici. L'utilisation des covecteurs de Witt est une source de difficultés techniques, qui tiennent à ce que ce faisceau abélien n'est pas représentable, mais seulement limite inductive de sous-faisceaux d'ensembles (et non de groupes) représentables. C'est pourquoi nous avons regroupé, dans la première partie, quelques résultats qui montrent que des résultats classiques pour les schémas en groupes restent valables pour des faisceaux tels que CW. Dans la deuxième partie, nous procédons à l'étude des principales propriétés du module de Dieudonné d'un schéma en groupes fini localement libre. Le point central est l'exactitude du module de Dieudonné par rapport aux suites exactes courtes de schémas en groupes; la technique employée consiste à exploiter l'hypothèse faite sur la base pour dévisser les groupes considérés en groupes annulés par F ou V, et à utiliser l'exactitude du module de Dieudonné de la fibre générique. Inversement, nous construisons dans la troisième partie un schéma en groupes fini localement libre à partir de la donnée d'un module de Dieudonné, en adaptant la construction de Grothendieck dans [11], et en utilisant la théorie de Dieudonné classique sur la fibre générique et la fibre spéciale. On en déduit alors les théorèmes de classification cherchés : si A est un anneau de valuation parfait, et

$$\mathbf{D}_A = W(A)_\sigma[F, V]/(FV - p, VF - p),$$

l'anneau de Dieudonné de A, la catégorie des schémas en groupes commutatifs, de p-torsion, finis localement libres sur A (resp. des groupes p-divisibles sur A), est anti-équivalente à la catégorie des $\mathbf{D}_A$-modules à gauche, de longueur constante sur Spf (W (A)) au sens de 3.1.3 [resp. libres de rang fini sur W (A) ([2])].

Dans une quatrième partie, nous appliquons le résultat précédent au problème du théorème de Tate en égale caractéristique p; les deux résultats essentiels obtenus sont alors les suivants :

(*a*) le théorème de Tate pour les groupes p-divisibles peut être ramené à un théorème analogue (encore conjectural) pour les F-cristaux sur l'anneau $k[[t]]$, où k est un corps algébriquement clos;

(*b*) le théorème de Tate est vrai pour les groupes p-divisibles dont le polygone de Newton est constant sur S.

Pour obtenir (*a*), il faut relier la définition du module de Dieudonné utilisée ici à la définition générale du cristal de Dieudonné associé à un groupe p-divisible sur une base de caractéristique p, introduite par Grothendieck ([10], [11]) et Messing ([15], [16]), et étendue

([2]) Après la rédaction de ce travail, Baldassarri m'a signalé que le cas des groupes p-divisibles connexes sur un anneau de valuation parfait a été étudié par Poletti [23].

aux schémas en groupes finis localement libres dans [3]. C'est pourquoi, après quelques rappels sur les cristaux, nous montrons qu'il existe un isomorphisme (σ-linéaire) entre le module de Dieudonné d'un schéma en groupes fini localement libre (resp. d'un groupe p-divisible) sur un anneau de valuation parfait A, et son cristal de Dieudonné, identifié à un W(A)-module. Après avoir prouvé (*a*) (th. 4.3.3), nous déduisons (*b*) d'un énoncé analogue pour les F-cristaux. Ce dernier est alors une conséquence facile d'un résultat dû à Katz [13], grâce auquel la structure à isogénie près d'un F-cristal sur $k[[t]]$, dont le polygone de Newton est constant sur $\mathrm{Spec}(k[[t]])$ et de pentes entières, peut être à peu près complètement explicitée en passant à la clôture parfaite de $k[[t]]$.

Signalons enfin, bien que ce problème ne soit pas abordé dans le présent article, que le théorème de classification prouvé ici sur un anneau de valuation parfait peut être utilisé pour obtenir, par des méthodes de descente inséparable, un théorème de pleine fidélité pour le cristal de Dieudonné associé à un schéma en groupes fini localement libre ou à un groupe p-divisible sur un schéma lisse sur un corps parfait. Cette question sera traitée dans un article en préparation avec W. Messing.

Je tiens à remercier ici W. Messing, pour les nombreuses discussions que nous avons eues, en particulier sur le théorème de Tate, et qui sont pour une bonne part à l'origine de cet article, ainsi que L. Breen, et J.-M. Fontaine, avec qui j'ai eu bien des discussions sur la théorie de Dieudonné; l'influence de chacun apparaîtra dans ce qui suit.

1. Remarques sur certaines extensions d'un schéma en groupes fini par les covecteurs de Witt

1.1. Rappelons tout d'abord quelques définitions et résultats dus à Fontaine ([8], II). Soient A un anneau (commutatif unitaire), R une A-algèbre. On note CW (R), ensemble des *covecteurs de Witt* à coefficients dans R, l'ensemble des familles $(a_{-i})_{i\in\mathbb{N}}$, où les $a_{-i}\in R$ vérifient la condition :

($\star$) il existe des entiers $r\geqq 0$, $s\geqq 1$ tels que, si $\mathfrak{a}_r$ est l'idéal de R engendré par les a_{-i} pour $i\geqq r$, alors $(\mathfrak{a}_r)^s=0$.

Pour r, s fixés, on note $\mathrm{CW}_{r,s}(R)$ l'ensemble des covecteurs tels que $(\mathfrak{a}_r)^s=0$. Les ensembles CW(R) et $\mathrm{CW}_{r,s}(R)$ sont de façon évidente fonctoriels en R, et

$$\mathrm{CW}(R)=\bigcup_{r,s}\mathrm{CW}_{r,s}(R).$$

Pour tous r, s, $\mathrm{CW}_{r,s}$ est un foncteur représentable sur la catégorie des A-algèbres :

$$\mathrm{CW}_{r,s}(R)\simeq \mathrm{Hom}_{\text{A-alg}}(A[X_{-i}]_{i\in\mathbb{N}}/(\mathfrak{v}_r)^s,\ R),$$

où $\mathfrak{v}_r$ est l'idéal engendré par les X_{-i}, $i\geqq r$. On posera

$$\Lambda=A[X_{-i}]_{i\in\mathbb{N}},$$
$$\Lambda_{r,s}=\Lambda/(\mathfrak{v}_r)^s,$$
$$\hat{\Lambda}=\varprojlim_{r,s}\Lambda_{r,s},$$

et on considèrera $\hat{\Lambda}$ comme une A-algèbre topologique, grâce à la topologie limite projective des topologies discrètes sur les $\Lambda_{r,s}$. Si on considère R comme muni de la topologie discrète, on a donc

$$CW(R) = \mathrm{Hom\ cont}_A(\hat{\Lambda}, R).$$

On remarquera enfin que CW est un faisceau sur la catégorie des A-algèbres munie de la topologie fidèlement plate.

Soit p un nombre premier, et, pour tout $n \geqq 0$, soient $S_n(X_0, \ldots, X_n; Y_0, \ldots, Y_n)$ les polynômes à coefficients entiers définissant l'addition dans l'anneau des vecteurs de Witt (relatifs à p) à coefficients dans un anneau variable. La suite de polynômes $S_n(X_{-n}, \ldots, X_0; Y_{-n}, \ldots, Y_0)$ converge dans $\hat{\Lambda} \hat{\otimes}_A \hat{\Lambda}$ vers une série formelle qu'on notera $S(X_{-i}; Y_{-j})_{i,j \geqq 0}$, isobare de poids 1 par rapport à l'ensemble des variables X_{-i}, Y_{-j} si l'on affecte X_{-i} et Y_{-i} du poids p^{-i}. On définit alors une structure de foncteur en groupes abéliens sur CW en posant, pour $(a_{-i}), (b_{-i}) \in CW(R)$, $(a_{-i}) + (b_{-i}) = (s_{-i})$,

$$s_{-i} = S(\ldots, a_{-j-i}, \ldots, a_{-i}; \ldots, b_{-j-i}, \ldots, b_{-i}). \tag{1.1.1}$$

Si $(a_{-i}) \in CW_{r,s}(R)$, $(b_{-i}) \in CW_{r',s'}(R)$, et si $r'' = \mathrm{Sup}(r, r')$, $s'' = s + s'$, alors $(s_{-i}) \in CW_{r'',s''}(R)$, de sorte que la structure de foncteur en groupes de CW est définie par une structure de bigèbre topologique sur $\hat{\Lambda}$, provenant par passage à la limite projective des homomorphismes

$$\Lambda_{r'',s''} \to \Lambda_{r,s} \otimes_A \Lambda_{r',s'},$$

définissant les accouplements $CW_{r,s} \times CW_{r',s'} \to CW_{r'',s''}$. Enfin, lorsque R est de caractéristique p, la multiplication par p dans CW(R) est donnée par

$$p(\ldots, a_{-i}, \ldots, a_0) = (\ldots, a^p_{-i-1}, \ldots, a^p_{-1}). \tag{1.1.2}$$

Supposons maintenant que A soit un anneau de caractéristique p. Pour toute A-algèbre R, soit $R_{(p)}$ l'anneau R muni de la structure de A-algèbre définie par $A \xrightarrow{F_A} A \to R$, où F_A est le frobenius absolu de A. On définit alors un foncteur en groupes abéliens $CW^{(p/A)}$ par

$$CW^{(p/A)}(R) = CW(R_{(p)}).$$

Le frobenius absolu F_R est un homomorphisme A-linéaire $R \to R_{(p)}$, et définit donc un morphisme de foncteurs en groupes (Frobenius) :

$$F : \quad CW \to CW^{(p/A)},$$

ces définitions étant du reste valables pour tout foncteur sur la catégorie des A-algèbres. De plus, comme CW est défini sur $\mathbb{F}_p$, il existe un isomorphisme canonique $CW^{(p/A)} \xrightarrow{\sim} CW$. Si on note encore F l'endomorphisme de CW obtenu par composition, on a par définition

$$F((a_{-1})) = (a^p_{-i}), \tag{1.1.3}$$

et F est défini par l'endomorphisme A-linéaire continu de $\hat{\Lambda}$ caractérisé par $F(X_{-i}) = X^p{}_i$. Notons que, par construction, le morphisme $F : CW \to CW^{(p/A)}$ commute à tout morphisme de foncteurs de but ou de source CW.

On définit d'autre part un endomorphisme V : CW → CW (Verschiebung) de la façon suivante. Pour tout A-schéma X affine et plat, il existe un carré commutatif ([19], VII_A, 4.2) fonctoriel en X :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X^p \\ {\scriptstyle F^{X/A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X^{(p/A)} & \xrightarrow{\varphi} & X^p/\mathfrak{S}_p, \end{array}$$

où $F^{X/A}$ est le morphisme de Frobenius relatif de X sur A, Δ l'immersion diagonale, q le morphisme de passage au quotient par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$. Pour $r \geqq 0, s \geqq 1$, la loi de groupe sur CW induit un morphisme

$$(CW_{r,s})^p \to CW_{r,ps},$$

qui se factorise par $(CW_{r,s})^p/\mathfrak{S}_p$, et donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} CW_{r,s} & \xrightarrow{\Delta} & (CW_{r,s})^p & \longrightarrow & CW_{r,ps} \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow & \nearrow{\scriptstyle v_{r,s}} & \\ (CW_{r,s})^{(p/A)} & \xrightarrow{\varphi_{r,s}} & (CW_{r,s})^p/\mathfrak{S}_p & & \end{array}$$

d'où

$$V_{r,s} = v_{r,s} \circ \varphi_{r,s} : \quad CW_{r,s}^{(p/A)} \to CW_{r,ps}.$$

Pour r, s variable, les $V_{r,s}$ se recollent et définissent

$$V : \quad CW^{(p/A)} \to CW.$$

Par construction, $V \circ F = p$, et, par fonctorialité de F, F et V commutent, de sorte que $F \circ V = p$. Utilisant de nouveau l'isomorphisme $CW^{(p/A)} \simeq CW$, on considèrera encore V comme un endomorphisme de CW, additif par fonctorialité. Comme les inclusions $W_r \simeq CW_{r,1} \subset CW_{r,s}$ correspondent à un homomorphisme injectif de A-algèbres topologiques : $\hat{\Lambda} \subsetneq \Lambda'$, où Λ' est le séparé complété de Λ pour la topologie admettant les $\mathfrak{v}_r$ comme système fondamental de voisinages de 0, la formule habituelle du décalage pour les vecteurs de Witt et la fonctorialité de la construction précédente montrent que V est défini par l'endomorphisme A-linéaire continu de $\hat{\Lambda}$ caractérisé par $V_{\hat{\Lambda}}(X_{-i}) = X_{-i-1}$; par suite,

$$V(\ldots, a_{-i}, \ldots, a_0) = (\ldots, a_{-i-1}, \ldots, a_{-1}). \tag{1.1.4}$$

Si G est un schéma en groupes abéliens affine et plat sur A, tout morphisme de foncteurs $\varphi : CW \to G$ commute à V, car il suffit de le vérifier pour la restriction de φ aux $CW_{r,s}$, ce qui résulte de la fonctorialité des diagrammes précédents. De même, tout morphisme $\psi : G \to CW$ commute à V, car il résulte du lemme de Yoneda que l'image de ψ est contenue dans l'un des $CW_{r,s}$.

Supposons enfin que A soit un anneau parfait. Soient, pour $n \geqq 0$, $P_n(X_0, \ldots, X_n; Y_0, \ldots, Y_n)$ les polynômes à coefficients entiers définissant la multiplication dans l'anneau des vecteurs de Witt. Si $\lambda=(\lambda_0, \lambda_1, \ldots) \in W(A)$, la suite de polynômes $P_n(\lambda_0^{p^{-n}}, \ldots, \lambda_n^{p^{-n}}; X_{-n}, \ldots, X_0)$ converge dans $\hat{\Lambda}$ vers une série formelle notée $P_\lambda(X_{-i})_{i \geqq 0}$, isobare de poids 1 par rapport aux X_{-i}, si l'on affecte X_{-i} du poids p^{-i}. On définit alors une structure de foncteur en W(A)-modules sur CW en posant, pour $(a_{-i}) \in CW(R)$ et $\lambda \in W(A)$, $\lambda(a_{-i})=(c_{-i})$,

$$c_{-i}=P_{\sigma^{-i}(\lambda)}(\ldots, a_{-j-i}, \ldots, a_{-i}), \tag{1.1.5}$$

où σ est l'automorphisme de Frobenius de W(A). D'après la propriété d'isobarité de P, l'idéal engendré par les $(a_{-i})_{i \geqq r}$ contient l'idéal engendré par les $(c_{-i})_{i \geqq r}$, de sorte que $CW_{r,s}$ est stable par les opérations de W(A). Si $t \in A$, et si $\tilde{t} \in W(A)$ est le représentant de Teichmüller de t, alors :

$$\tilde{t}.(a_{-i})=(t^{p^{-i}} a_{-i}). \tag{1.1.6}$$

Les endomorphismes F et V sont respectivement σ-linéaires et σ^{-1}-linéaires pour la structure de W(A)-module.

1.2. Nous aurons à considérer par la suite certaines extensions d'un schéma en groupes fini par CW, qui seront seulement des foncteurs pro-représentables, et auxquelles nous aurons besoin d'étendre des constructions classiques pour les schémas en groupes. Fixons un anneau de base A, et munissons la catégorie des A-algèbres de la topologie fidèlement plate; on peut alors identifier un A-schéma affine au faisceau qu'il représente. Supposons donnés une suite exacte de schémas en groupes commutatifs affines sur A :

$$0 \to G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} G'' \to 0,$$

telle que G' soit fini et plat sur A, et un morphisme de foncteurs en groupes $\varphi : G' \to CW$. On en déduit une extension dans la catégorie des faisceaux en groupes abéliens

$$0 \to CW \to E \to G'' \to 0.$$

PROPOSITION 1.2.1. — *Le faisceau* E *est réunion de sous-faisceaux représentables* $E_{r,s}$. *Pour tous* r, s, r', s', *il existe* r'', s'' *tels que* $E_{r,s}+E_{r',s'} \subset E_{r'',s''}$.

Par définition, $E=(CW \times G)/G'$, où G' est considéré comme sous-groupe de $CW \times G$ par l'homomorphisme $(\varphi, -u)$. Soit R' l'algèbre de G'. D'après le lemme de Yoneda, φ est défini par un élément de $CW(R')=\bigcup_{r,s} CW_{r,s}(R')$; par suite, il existe r_0, s_0 tels que φ se factorise par CW_{r_0,s_0}. Donc pour tous r, s, il existe r', s' tels que l'action de G' sur CW induise un morphisme de foncteurs

$$\mu_{r,s} : \quad G' \times CW_{r,s} \to CW_{r',s'}.$$

Ceux-ci sont représentables, et $\mu_{r,s}$ est un morphisme de schémas. Soit $\overline{CW}_{r,s}$ l'image fermée de $\mu_{r,s}$ dans $CW_{r',s'}$ (qui ne dépend pas du choix de r', s'). Alors $\mu_{r,s}$ est défini par un homomorphisme d'algèbres

$$\mu_{r,s}^* : \quad \Lambda_{r',s'} \to R' \otimes_A \Lambda_{r,s},$$

et si $I = \mathrm{Ker}(\mu_{r,s}^*)$, $\overline{CW}_{r,s}$ est le sous-schéma fermé de $CW_{r',s'}$ défini par I. D'autre part, il existe r'', s'' tels que $\mu_{r',s'}$ envoie $G' \times CW_{r',s'}$ dans $CW_{r'',s''}$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{r'',s''} & \xrightarrow{\mu_{r,s}^*} & R' \otimes_A \Lambda_{r,s} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{r',s'}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{G'}^* \otimes \mathrm{Id}} \\ R' \otimes_A (\Lambda_{r',s'}/I) & \xrightarrow[\mathrm{Id} \otimes \mu_{r,s}^*]{} & (R' \otimes_A R') \otimes_A \Lambda_{r,s} \end{array}$$

où la flèche horizontale du bas est injective par platitude de R'. Si

$$J = \mathrm{Ker}(\mu_{r,s}^* : \Lambda_{r'',s''} \to R' \otimes_A \Lambda_{r,s}),$$

de sorte que $\Lambda_{r'',s''}/J \simeq \Lambda_{r',s'}/I$, on voit que

$$J \subset \mathrm{Ker}(\mu_{r',s'}^* : \Lambda_{r'',s''} \to R' \otimes_A (\Lambda_{r',s'}/I)),$$

d'où une factorisation de $\mu_{r',s'}^*$ par

$$\Lambda_{r',s'}/I \to R' \otimes_\Lambda (\Lambda_{r',s'}/I),$$

qui montre que $\overline{CW}_{r,s}$ est stable sous l'action de G'.

Posons alors $F_{r,s} = \overline{CW}_{r,s} \times G \subset CW \times G$. L'action de G' sur $F_{r,s}$ définit une relation d'équivalence sur $F_{r,s}$, finie et plate puisque G' l'est. Comme G' et $F_{r,s}$ sont affines, le quotient de $F_{r,s}$ par G' est représentable et est affine sur A ([19], V.4.1); nous le noterons $E_{r,s}$. Il est clair que les $E_{r,s}$ sont des sous-faisceaux de E, et que E est réunion des $E_{r,s}$.

La dernière assertion résulte de l'assertion analogue pour les $F_{r,s}$, conséquence immédiate de leur définition et des propriétés des $CW_{r,s}$.

Supposons que A soit un anneau de caractéristique p. On définit comme plus haut le foncteur en groupes abéliens $E^{(p/A)}$, et l'homomorphisme $F_E : E \to E^{(p/A)}$, qui commute à tout morphisme de foncteurs. Comme le foncteur qui à F associe $F^{(p/A)}$ est exact dans la catégorie des faisceaux abéliens,

$$E^{(p/A)} \simeq (CW^{(p/A)} \times G^{(p/A)})/G'^{(p/A)}.$$

On peut alors définir le Verschiebung $V_E : E^{(p/A)} \to E$ par passage au quotient de $V_{CW} \times V_G$, où V_G est le Verschiebung de G, et V_{CW} celui de CW tel qu'il a été défini en 1.1. Il résulte aussitôt de cette définition et de la fonctorialité de V_{CW} que le diagramme

$$(1.2.1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & CW^{(p/A)} & \longrightarrow & E^{(p/A)} & \longrightarrow & G''^{(p/A)} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle V_{CW}} & & \downarrow{\scriptstyle V_E} & & \downarrow{\scriptstyle V_{G''}} & & \\ 0 & \longrightarrow & CW & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif.

1.3. Soient $S = \mathrm{Spec}(A)$, $e_{CW} : S \to CW_{r,s}$ la section unité. Pour $s \geqq 2$, on pose

$$\omega_{CW} = e_{CW}^* (\Omega^1_{CW_{r,s}/A}),$$

qui ne dépend pas de r, s. En effet, $CW_{r,s} = \mathrm{Spec}\,(A[X_i]/(v_r)^s)$, de sorte que

$$e_{CW}^*(\Omega^1_{CW_{r,s}/A}) \simeq (\Omega^1_{A[X_{-i}]/A}/(dX_{-i_1} \ldots X_{-i_s})_{i_j \geqq r}) \otimes_{A[X_{-i}]} A,$$

et l'homomorphisme

$$d : v_0/v_0^2 \to e_{CW}^*(\Omega^1_{CW_{r,s}}), \tag{1.3.1}$$

est un isomorphisme. En particulier ω_{CW} est un A-module libre de base dX_{-i}, $i \geqq 0$.

PROPOSITION 1.3.1. — *Soient* $e_E : S = \mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow E_{r,s} \subset E$ *la section unité de* E, *et* $\omega_{E_{r,s}} = e_E^*(\Omega^1_{E_{r,s}/A})$.

(i) *Il existe* r_1, s_1 *tels que pour* $r' \geqq r \geqq r_1$, $s' \geqq s \geqq s_1$, *l'homomorphisme naturel* $\omega_{E_{r',s'}} \to \omega_{E_{r,s}}$ *soit un isomorphisme.*

(ii) *Si on pose* $\omega_E = \omega_{E_{r,s}}$ *pour* $r \geqq r_1$, $s \geqq s_1$, *la suite* $0 \to CW \to E \to G'' \to 0$ *définit une suite exacte*

$$0 \to \omega_{G''} \to \omega_E \to \omega_{CW} \to 0.$$

L'homomorphisme de faisceaux $\pi : E \to G''$ induit un morphisme de A-schémas $\pi_{r,s} : E_{r,s} \to G''$. Celui-ci donne alors naissance à un triangle de transitivité entre les complexes cotangents relatifs ([12], II.2.1) :

$$\begin{array}{ccc} & L_{E_{r,s}/G''} & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \mathbb{L}\pi^*(L_{G''/A}) & \longrightarrow & L_{E_{r,s}/A}. \end{array}$$

Prenant l'image inverse par e_E, on obtient le triangle

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{L}e_E^*(L_{E_{r,s}/G''}) & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \mathbb{L}e_{G''}^*(L_{G''/A}) & \longrightarrow & \mathbb{L}e_E^*(L_{E_{r,s}/A}), \end{array} \tag{1.3.2}$$

où

$$H^0(\mathbb{L}e_E^*(L_{E_{r,s}/A})) = \omega_{E_{r,s}}, \qquad H^0(\mathbb{L}e_{G''}^*(L_{G''/A})) = \omega_{G''}.$$

Pour calculer $\mathbb{L}e_E^*(L_{E_{r,s}/G''})$, on observe qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\overline{CW}_{r,s} \times G \xrightarrow{\sim} E_{r,s} \times_{G''} G,$$

commutant aux projections sur G et aux sections unités. Notant e' la section unité de $E_{r,s} \times_{G''} G$, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & E_{r,s} & \xleftarrow{p} & E_{r,s} \times_{G''} G \xleftarrow{\sim} \overline{CW}_{r,s} \times G \\ & \swarrow^{e_E} & \downarrow & \nearrow_{e'} & \downarrow \\ S & \longleftarrow & G'' & \xleftarrow{\pi} & G \end{array}$$

donne les isomorphismes

$$\mathbb{L}e_E^*(L_{E_{r,s}/G''}) \simeq \mathbb{L}e'^*\mathbb{L}p^*(L_{E_{r,s}/G''}) \simeq \mathbb{L}e'^*(L_{(E_{r,s} \times_{G''} G)/G}),$$

par platitude de v, soit

$$\mathbb{L}e_E^*(L_{E_{r,s}/G''}) \simeq \mathbb{L}e'^*(L_{(\overline{CW}_{r,s} \times G)/G}).$$

Comme G est plat sur S, on obtient, en notant q la projection de $\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}\times \mathrm{G}$ sur $\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}$,

$$\mathbb{L}\, e_{\mathrm{E}}^{*}(\mathrm{L}_{\mathrm{E}_{r,s}/\mathrm{G}''})\simeq \mathbb{L}\, e'^{*}\,\mathbb{L}\, q^{*}(\mathrm{L}_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}/\mathrm{A}})\simeq \mathbb{L}\, e_{\mathrm{CW}}^{*}(\mathrm{L}_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}/\mathrm{A}}).$$

Le triangle (1.3.2) donne donc la suite exacte

(1.3.3) $$n_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}}\to \omega_{\mathrm{G}''}\to \omega_{\mathrm{E}_{r,s}}\to \omega_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}}\to 0,$$

où

$$n_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}}=\mathrm{H}^{-1}(\mathbb{L}\, e_{\mathrm{CW}}^{*}(\mathrm{L}_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}/\mathrm{A}})).$$

Pour $s\geqq 2$, la suite d'immersions fermées

$$\mathrm{CW}_{0,2}\subset \overline{\mathrm{CW}}_{0,2}\subset \overline{\mathrm{CW}}_{r,s}\subset \mathrm{CW}_{r',s'}$$

donne une suite d'homomorphismes surjectifs

$$\omega_{\mathrm{CW}_{r',s'}}\to \omega_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}}\to \omega_{\overline{\mathrm{CW}}_{0,2}}\to \omega_{\mathrm{CW}_{0,2}}.$$

Or le composé est un isomorphisme, donc, pour $s\geqq 2$, $\omega_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}}\xrightarrow{\sim}\omega_{\mathrm{CW}}$.

Observons que, si on pose $\mathrm{I}_{r,s}=(\mathfrak{v}_r)^s$, le tronqué à l'ordre un de $\mathrm{L}_{\mathrm{CW}_{r,s}/\mathrm{A}}$ peut être représenté par

$$\mathrm{K}'=\tau_{[-1}\,\mathrm{L}_{\mathrm{CW}_{r,s}/\mathrm{A}}\simeq 0\to \mathrm{I}_{r,s}/\mathrm{I}_{r,s}^{2}\to \Omega^{1}_{\mathrm{A}[\mathrm{X}_{-i}]/\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}[\mathrm{X}_{-i}]}\Lambda_{r,s}\to 0$$

([12], III, 1.2.9.1). Par suite, ce complexe étant plat en degré 0, le complexe

$$\tau_{[-1}\,\mathbb{L}\, e'^{*}(\mathrm{L}_{\mathrm{CW}_{r,s}/\mathrm{A}})\simeq \tau_{[-1}\,\mathbb{L}\, e'^{*}(\tau_{[-1}\,\mathrm{L}_{\mathrm{CW}_{r,s}/\mathrm{A}}),$$

peut être représenté par

$$0\to (\mathrm{I}_{r,s}/\mathrm{I}_{r,s}^{2})\otimes_{\Lambda_{r,s}}\mathrm{A}\to \Omega^{1}_{\mathrm{A}[\mathrm{X}_{-i}]/\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}[\mathrm{X}_{-i}]}\mathrm{A}\to 0$$

[ceci résulte par exemple de la suite spectrale

$$\mathrm{E}_{1}^{p,q}=\mathrm{Tor}_{-q}^{\Lambda_{r,s}}(\mathrm{K}^{p},\mathrm{A})\Rightarrow \mathrm{H}^{n}(\mathrm{K}'\otimes_{\Lambda_{r,s}}\mathrm{A})].$$

Si maintenant on prend $s'\geqq 2s$, $\mathrm{I}_{r,s'}\subset(\mathrm{I}_{r,s})^{2}$, de sorte que l'homomorphisme

$$n_{\mathrm{CW}_{r,s'}}\to n_{\mathrm{CW}_{r,s}}$$

est nul. On peut trouver une suite d'immersions fermées

$$0=\mathrm{CW}_{0,1}\subset \overline{\mathrm{CW}}_{0,1}\subset \mathrm{CW}_{r_0,s_0}\subset \overline{\mathrm{CW}}_{r_0,s_0}\subset \mathrm{CW}_{r_1,s_1},$$

avec $s_1\geqq 2s_0$. Pour $r\geqq r_1$, $s\geqq s_1$, l'homomorphisme composé

$$n_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}}\to n_{\mathrm{CW}_{r_1,s_1}}\to n_{\mathrm{CW}_{r_0,s_0}}\to n_{\overline{\mathrm{CW}}_{0,1}}$$

est donc nul. Le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} n_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}} & \longrightarrow & \omega_{\mathrm{G}''} & \longrightarrow & \omega_{\mathrm{E}_{r,s}} \\ \downarrow{\scriptstyle 0} & & \| & & \downarrow \\ n_{\overline{\mathrm{CW}}_{0,1}} & \longrightarrow & \omega_{\mathrm{G}''} & \longrightarrow & \omega_{\mathrm{E}_{0,1}} \end{array}$$

montre alors que pour $r\geqq r_1$, $s\geqq s_1$ la suite

$$0\to \omega_{\mathrm{G}''}\to \omega_{\mathrm{E}_{r,s}}\to \omega_{\overline{\mathrm{CW}}_{r,s}}\simeq \omega_{\mathrm{CW}}\to 0$$

est exacte, et la proposition en résulte aussitôt.

1.4. On notera $\mathscr{A}ut^c E$ le sous-faisceau du faisceau $\mathscr{A}ut E$ des automorphismes (non nécessairement additifs) de E formé des automorphismes $f : E \to E$ tels que pour tous r, s, il existe r', s' tels que $f(E_{r,s}) \subset E_{r',s'}$; c'est un sous-faisceau de groupes de $\mathscr{A}ut E$. D'après 1.2.1, pour toute A-algèbre B et tout $x \in E(B)$, la translation $\tau_x : E_B \to E_B$ est une section de $\mathscr{A}ut^c E$, d'où une inclusion $E \subsetneq \mathscr{A}ut^c E$. Par ailleurs, E agit sur $\mathscr{A}ut^c E$ par $(x, f) \mapsto \tau_x^{-1} \circ f \circ \tau_x$, et l'inclusion précédente identifie E au faisceau des invariants de $\mathscr{A}ut^c E$ sous l'action de E.

On définit les faisceaux $\mathscr{L}ie E$ et $\mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c E$ par

$$\mathscr{L}ie E(B) = \mathrm{Ker}[E(B[\varepsilon]) \to E(B)],$$

$$\mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c E(B) = \mathrm{Ker}[\mathscr{A}ut^c E(B[\varepsilon]) \to \mathscr{A}ut^c E(B)],$$

où $B[\varepsilon]$ est l'anneau des nombres duaux sur B, et on pose

$$\mathrm{Lie}(E) = \mathscr{L}ie E(A) = \mathrm{Ker}[E(A[\varepsilon]) \to E(A)].$$

L'inclusion $E \subsetneq \mathscr{A}ut^c E$ induit une inclusion

$$\mathscr{L}ie E \subsetneq \mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c E.$$

L'opération de E sur $\mathscr{A}ut^c E$ définit une opération de E sur $\mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c E$, et $\mathscr{L}ie E$ s'identifie au faisceau des invariants sous E.

Posons $E_{r,s} = \mathrm{Spec}(B_{r,s})$, et notons $\lambda : B_{r',s'} \to B_{r,s}$ les morphismes de transition. La donnée d'une section f de $\mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c E$ au-dessus d'une A-algèbre A′ équivaut à la donnée d'une famille transitive d'homomorphismes $f_{r,s}$:

$$f_{r,s} : \quad B_{r',s'} \otimes A'[\varepsilon] \to B_{r,s} \otimes A'[\varepsilon],$$

se réduisant à λ modulo ε et commutant à la comultiplication. Il revient au même de se donner une famille transitive de λ-dérivations :

$$D_{r,s} : \quad B_{r',s'} \otimes A' \to B_{r,s} \otimes A'.$$

On en déduit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c E$, et, lorsque A est de caractéristique p, une structure de p-algèbre de Lie. Comme $\mathscr{L}ie E$ est formée des dérivations invariantes par translation, c'est une sous-p-algèbre de Lie de $\mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c E$.

PROPOSITION 1.4.1. — *La suite exacte*

$$0 \to CW \to E \to G'' \to 0,$$

définit une suite exacte de p-algèbres de Lie :

$$0 \to \mathrm{Lie}(CW) \to \mathrm{Lie}(E) \to \mathrm{Lie}(G'') \to 0.$$

Un élément de Lie(E) s'identifie à une famille transitive d'homomorphismes $B_{r,s} \otimes A[\varepsilon] \to A[\varepsilon]$ se réduisant à l'augmentation $\eta : B_{r,s} \to A$ (définie par la section unité) modulo ε, soit encore à une famille transitive de η-dérivations $B_{r,s} \to A$, qui correspondent à des homomorphismes A-linéaires $\omega_{E_{r,s}} \to A$. Par suite,

$$\mathrm{Lie}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\omega_E, A). \tag{1.4.1}$$

Le même résultat s'appliquant en particulier à CW, la suite exacte de 1.3.1 donne par dualité une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Lie}(\mathrm{CW}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{E}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{G}'') \to 0,$$

l'exactitude à droite venant de ce que ω_{CW} est un A-module libre.

Comme $\mathrm{CW}_{r,s} \subset \mathrm{E}_{r,s}$, il est clair par construction que $\mathrm{Lie}(\mathrm{CW}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{E})$ est un homomorphisme de p-algèbres de Lie; l'homomorphisme $\mathrm{E} \to \mathrm{G}''$ est défini par la famille de morphismes de schémas $\mathrm{E}_{r,s} \to \mathrm{G}''$, donc par un homomorphisme d'algèbres $\mathrm{R}'' \to \varinjlim_{r,s} \mathrm{B}_{r,s}$, et on en déduit immédiatement la compatibilité de $\mathrm{Lie}(\mathrm{E}) \to \mathrm{Lie}(\mathrm{G}'')$ aux puissances p-ièmes.

PROPOSITION 1.4.2. — *Soient* L *une p-algèbre de Lie localement libre de rang fini sur* A, $\mathfrak{G}_p(\mathrm{L})$ *le* A*-schéma en groupes de hauteur* $\leqq 1$ *défini par* L. *Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathfrak{G}_p(\mathrm{L}), \mathrm{E}) \to \mathrm{Hom}_p(\mathrm{L}, \mathrm{Lie}(\mathrm{E})), \tag{1.4.2}$$

où le deuxième terme est l'ensemble des homomorphismes de A*-p-algèbres de Lie, est un isomorphisme.*

Remarquons d'abord qu'il suffit de prouver que l'homomorphisme de faisceaux

$$\mathscr{H}om(\mathfrak{G}_p(\mathrm{L}), \mathscr{A}ut^c \mathrm{E}) \to \mathscr{H}om_p(\mathscr{L}, \mathscr{L}ie\, \mathscr{A}ut^c \mathrm{E}),$$

où $\mathscr{L}$ est le faisceau de p-algèbres de Lie quasi cohérent défini par L, est un isomorphisme. En effet, prenant les invariants sous E, on en déduit l'isomorphisme

$$\mathscr{H}om(\mathfrak{G}_p(\mathrm{L}), \mathrm{E}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_p(\mathscr{L}, \mathscr{L}ie\, \mathrm{E}),$$

qui donne (1.4.2) en prenant les sections globales.

Soient $\mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ l'algèbre enveloppante restreinte de L, $\mathrm{D} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{U}_p(\mathrm{L}), \mathrm{A})$ la bigèbre duale, de sorte que $\mathfrak{G}_p(\mathrm{L}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{D})$. Par le lemme de Yoneda, une section de $\mathscr{H}om(\mathfrak{G}_p(\mathrm{L}), \mathscr{A}ut^c \mathrm{E})$ sur une A-algèbre A′ définit une famille transitive de morphismes

$$\mathfrak{G}_p(\mathrm{L})_{\mathrm{A}'} \times \mathrm{E}_{r,s\,\mathrm{A}'} \to \mathrm{E}_{r',s'\,\mathrm{A}'},$$

soit encore une famille transitive d'homomorphismes de A′-algèbres

$$\mathrm{B}_{r',s'} \otimes \mathrm{A}' \to \mathrm{B}_{r,s} \otimes \mathrm{D} \otimes \mathrm{A}'.$$

On en déduit une famille d'homomorphismes A′-linéaires

$$\mathrm{B}_{r',s'} \otimes \mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{A}' \to \mathrm{B}_{r,s} \otimes \mathrm{A}',$$

soit encore, par passage à la limite

$$\rho : \quad \mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{A}' \to \mathrm{End\,cont}_{\mathrm{A}'}(\varinjlim_{r,s} (\mathrm{B}_{r,s} \otimes \mathrm{A}')),$$

où $\mathrm{End\,cont}_{A'}$ est l'ensemble des endomorphismes A'-linéaires de $\varprojlim_{r,s}(B_{r,s}\otimes A')$ tels que le composé avec la projection sur l'un des $B_{r,s}\otimes A'$ se factorise par $B_{r',s'}\otimes A'$ pour r', s' assez grands. De plus, on vérifie aisément que ρ correspond à un homomorphisme $\mathfrak{G}_p(L)_{A'}\to \mathscr{A}ut^c E_{A'}$ si et seulement si c'est une représentation d'algèbre telle que pour tous $u\in U_p(L)\otimes A'$, $x, y\in\varprojlim B_{r,s}\otimes A'$,

$$(1.4.3)\qquad \begin{cases} \rho(u)(1_{\varprojlim B_{r,s}\otimes A'})=\varepsilon(u).1_{\varprojlim B_{r,s}\otimes A'},\\ \rho(u)(xy)=\sum_i \rho(u_i)(x).\rho(v_i)(y), \end{cases}$$

où ε est l'augmentation de $U_p(L)\otimes A'$, et, si Δ est le morphisme diagonal, $\Delta(u)=\sum u_i\otimes v_i$.

Ces conditions sont vérifiées pour tout u si et seulement si elles le sont lorsque u est dans l'image de $L\otimes A'\to U_p(L)\otimes A'$; de plus, pour un tel u, elles signifient que $\rho(u)$ est une A'-dérivation continue de $\varprojlim_{r,s}(B_{r,s}\otimes A')$, donc que ρ induit un homomorphisme de p-algèbres de Lie $L\otimes A'\to \mathscr{L}ie\,\mathscr{A}ut^c E(A')$. Inversement, la donnée d'un tel homomorphisme définit une représentation

$$\rho:\quad U_p(L)\otimes A'=U_p(L\otimes A')\to \mathrm{End\,cont}_{A'}(\varprojlim B_{r,s}\otimes A'),$$

vérifiant (1.4.3), d'où la proposition.

1.5. Nous expliciterons maintenant la structure de p-algèbre de Lie de Lie (CW), grâce au lemme général suivant (où G est supposé affine pour simplifier).

LEMME 1.5.1. — *Soient* S *un schéma de caractéristique* $p>0$, G *un* S*-schéma en groupes affine commutatif et plat. Alors l'opération puissance p-ième symbolique dans* Lie(G) *est l'homomorphisme induit par fonctorialité sur* Lie G *par le Verschiebung* $G^{(p/S)}\to G$.

On peut supposer S affine, soit $S=\mathrm{Spec}\,A$. Notons R l'algèbre affine de G, μ sa comultiplication, $\Sigma^p R$ l'algèbre des tenseurs symétriques de $R^{\otimes p}$, $N^p R$ le sous-espace des tenseurs symétrisés. Le Verschiebung de G est défini par l'homomorphisme composé

$$V_R:\quad R\xrightarrow{\mu}\Sigma^p R\twoheadrightarrow \Sigma^p R/N^p R\xrightarrow{\eta^{-1}} R^{(p/A)},$$

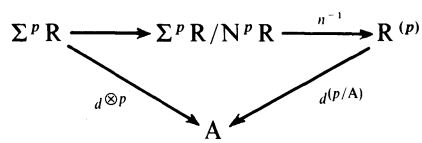
où $\eta: R^{(p/A)}\to \Sigma^p R/N^p R$ est défini par $\eta(x)=x\otimes\ldots\otimes x$, et est un isomorphisme pour R plat. L'homomorphisme qu'il induit sur Lie(G) associe à une A-dérivation $d: R\to A$ la dérivation

$$R\xrightarrow{V_R} R^{(p/A)}\xrightarrow{d^{(p/A)}} R,$$

tandis que la puissance p-ième symbolique de d est la dérivation

$$R\xrightarrow{\mu} R^{\otimes p}\xrightarrow{d\otimes\ldots\otimes d} A.$$

Il suffit donc de vérifier la commutativité du diagramme



qui résulte immédiatement de ce qu'un tenseur symétrique est somme d'un tenseur symétrisé et de tenseurs de la forme $\lambda\, a \otimes \ldots \otimes a$.

1.5.2. Remplaçant dans la démonstration précédente R par le système projectif des $\Lambda_{r,s}$, on voit que 1.5.1 reste valable pour CW. Comme ω_{CW} est muni de la base formée par les dX_{-i}, on obtient d'après (1.4.1) un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Lie}(CW) \xrightarrow{\sim} A^{\mathbb{N}}. \tag{1.5.1}$$

Nous noterons un élément $x \in \mathrm{Lie}(CW)$ sous la forme $(x_{-i})_{i\in\mathbb{N}}$; il lui correspond la dérivation continue $d : \hat{\Lambda} \to A$ définie par $d(X_{-i}) = x_{-i}$. Si φ est l'opération puissance p-ième symbolique dans Lie(CW), on a d'après ce qui précède

$$\varphi(d)(X_{-i}) = d^{(p/A)}(V_{\hat{\Lambda}}(X_{-i}));$$

comme $V_{\hat{\Lambda}}(X_{-i}) = X_{-i-1}$,

$$\varphi(d)(X_{-i}) = d^{(p/A)}(X_{-i-1}) = x^{p}_{-i-1},$$

d'où

$$\varphi(x_{-i}) = (y_{-i}), \qquad \text{avec} \quad y_{-i} = x^{p}_{-i-1}. \tag{1.5.2}$$

2. Le module de Dieudonné d'un schéma en groupes fini localement libre

2.1. Soit A un anneau de caractéristique $p > 0$, qu'on suppose parfait. On note $W(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A, $W_n(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt tronqués de longueur n, qui s'identifie à $W(A)/p^n W(A)$ puisque A est parfait, σ l'automorphisme de Frobenius de $W(A)$. Pour tout $x \in A$, on désigne par $\tilde{x}$ le représentant de Teichmüller $(x, 0, 0, \ldots)$ de x dans $W(A)$ [ou $W_n(A)$], et, pour toute partie $S \subset A$, on désigne par $\tilde{S}$ l'ensemble des représentants de Teichmüller des éléments de S. Enfin, on note

$$\mathbf{D}_A = W(A)_\sigma[F, V]/(FV - p, VF - p),$$

l'anneau de Dieudonné de A, l'indice σ rappelant les relations de commutation $F\,a = \sigma(a)\,F$, $V\,\sigma(a) = a\,V$ pour tout $a \in W(A)$.

Pour tout schéma en groupes (commutatif) fini localement libre sur A, annulé par une puissance de p, on pose

$$M(G) = \mathrm{Hom}_A(G, CW),$$

où Hom_A désigne l'ensemble des homomorphismes de foncteurs en groupes sur la catégorie des A-algèbres. Comme CW est muni d'une structure de foncteur à valeurs dans la catégorie des $W(A)$-modules, $M(G)$ possède une structure naturelle de $W(A)$-module. De plus, les endomorphismes F et V de CW induisent des endomorphismes de $M(G)$, encore notés F et V, et vérifiant les relations habituelles. On obtient de la sorte une structure de $\mathbf{D}_A$-module à gauche sur $M(G)$, fonctorielle en G par construction.

PROPOSITION 2.1.1. — *Soient* R *l'algèbre de* G, $\mu : R \to R \otimes_A R$ *sa comultiplication.*

(i) *Il existe une injection canonique, fonctorielle en* G *et en* A,

$$M(G) \subsetneq CW(R),$$

identifiant M(G) *au sous-*$\mathbf{D}_A$*-module formé des covecteurs* (a_{-i}) *tels que*

$$\forall i, \quad \mu(a_{-i}) = S(\ldots, 1 \otimes a_{-j-i}, \ldots, 1 \otimes a_{-i}; \ldots, a_{-j-i} \otimes 1, \ldots, a_{-i} \otimes 1).$$

(ii) *Soit* $V_R : R \to R$ *l'homomorphisme* p^{-1}*-linéaire définissant le Verschiebung de* G. *Si le covecteur* $(a_{-i}) \in CW(R)$ *appartient à* M(G), *il vérifie la condition*

$$\forall\, i, \quad a_{-i} = V_R^i(a_0).$$

La première assertion résulte immédiatement du lemme de Yoneda. Pour vérifier la seconde, on observe que tout homomorphisme $\varphi : G \to CW$ commute au Verschiebung, d'après 1.1, et que dans $\hat{\Lambda}$ on a $X_{-i} = V_{\hat{\Lambda}}^i(X_0)$.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soient* $S \subset A$ *une partie multiplicative telle que* A *soit sans* S*-torsion,* $A' = S^{-1}A$, G *un groupe de p-torsion fini localement libre sur* A, $G' = G \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(A')$. *Alors l'homomorphisme canonique de* $\mathbf{D}_{A'}$*-modules*

$$M(G) \otimes_{W(A)} W(A') \to M(G'), \tag{2.2.1}$$

est un isomorphisme.

Soit n tel que $p^n G = 0$. Alors $p^n M(G) = 0 = p^n M(G')$, de sorte que l'on a

$$M(G) \otimes_{W(A)} W(A') \xrightarrow{\sim} M(G) \otimes_{W_n(A)} W_n(A') \to M(G').$$

De la relation

$$\forall x \in A, \quad \forall (a_i) \in W(A), \qquad \tilde{x}.(a_i) = (x^{p^i} a_i),$$

on déduit facilement que l'homomorphisme canonique

$$\tilde{S}^{-1} W_n(A) \to W_n(A'), \tag{2.2.2}$$

est un isomorphisme, et (2.2.1) s'identifie à

$$\tilde{S}^{-1} M(G) \to M(G').$$

Soit $m \in M(G)$ d'image nulle dans M(G'). Identifiant M(G) à un sous-W(A)-module de CW(R) grâce à 2.1.1, et posant $m = (a_{-i})$, on en déduit que $a_{-i} = 0$ dans $S^{-1}R$, donc dans R puisque R est plat sur A. L'homomorphisme (2.2.1) est donc injectif.

Soit d'autre part $m' = (a'_{-i}) \in M(G') \subset CW(S^{-1}R)$. Il existe $s \in S$ tel que $a'_0 = a_0/s$, avec $a_0 \in R$. Par suite,

$$a'_{-i} = V_{S^{-1}R}^i(a'_0) = V_{S^{-1}R}^i(a_0/s) = s^{-p^{-i}} V_R^i(a_0).$$

Posons $a_{-i}=V_R^i(a_0)$. Comme $\tilde{s}^{-1}.(a_{-i})=(s^{-p^{-i}}a_{-i})=(a'_{-i})$, il suffit de vérifier que $(a_{-i})\in M(G)$, donc que pour tout i :

$$\mu(a_{-i})=S(\ldots, 1\otimes a_{-i-j}, \ldots, 1\otimes a_{-i}; \ldots, a_{-i-j}\otimes 1, \ldots, a_{-i}\otimes 1).$$

Or on a

$$\begin{aligned}s^{-p^{-i}}\mu(a_{-i})&=\mu(s^{-p^{-i}}a_{-i})=\mu(a'_{-i})\\&=S(\ldots, 1\otimes a'_{-i-j}, \ldots, 1\otimes a'_{-i}; \ldots, a'_{-i-j}\otimes 1, \ldots, a'_{-i}\otimes 1)\\&=S(\ldots, 1\otimes s^{-p^{-i-j}}a_{-i-j}, \ldots; \ldots, s^{-p^{-i-j}}a_{-i-j}\otimes 1, \ldots)\\&=s^{-p^{-i}}S(\ldots, 1\otimes a_{-i-j}, \ldots; \ldots, a_{-i-j}\otimes 1, \ldots),\end{aligned}$$

d'après l'isobarité de $S(X_{-i}; Y_{-j})$. On en tire la relation cherchée puisque $R\otimes_A R$ est sans S-torsion.

COROLLAIRE 2.2.2. — *Supposons* A *intègre, de corps des fractions* K. *Alors l'isomorphisme* (2.2.1) *identifie* $M(G)\otimes_{W(A)} W(K)$ *au module de Dieudonné de la fibre générique* G_K *de* G.

Cela résulte de [8], III, corollaire 3 à la proposition 5.3.

2.3. A partir de maintenant, on suppose, sauf mention expresse du contraire, que A est un anneau parfait de caractéristique $p>0$, intègre et dont les localisés sont des corps ou des anneaux de valuation ([3]) (hypothèse satisfaite par exemple si A est la clôture parfaite de l'anneau d'une courbe affine non singulière). On note K le corps des fractions de A.

LEMME 2.3.1. — *Soient* G *un schéma en groupes fini localement libre sur* A, $H\subset G_K$ *un sous-schéma en groupes de la fibre générique de* G, $G'\subset G$ *l'adhérence schématique de* H. *Alors* G′ *est un sous-schéma en groupes fini localement libre de* G.

Soient R l'algèbre de G, R_1 celle de H. Si I est le noyau de l'homomorphisme composé $R\subsetneq R\otimes K\twoheadrightarrow R_1$, l'algèbre R′ de G′ est R/I, et est donc sans torsion. Il en est de même de ses localisées aux idéaux premiers de A, ce qui entraîne leur platitude, et donc celle de R′, d'après l'hypothèse faite sur A. Comme R′ est finie sur A, elle est donc localement libre. Il en résulte facilement que G′ est un sous-schéma en groupes de G.

LEMME 2.3.2. — *Soit* G *un schéma en groupes commutatif, fini localement libre sur* A, *de p-torsion. Alors* G *possède une suite de composition par des sous-schémas en groupes finis localement libres, telle que les quotients soient annulés par* F *ou* V. *Si on suppose de plus* K *algébriquement clos, on peut supposer les quotients de rang p.*

L'assertion est claire lorsque A est un corps, la seconde partie résultant de ce que G possède alors une suite de composition, dont les quotients sont isomorphes à $\mathbb{Z}/p$, μ_p ou α_p. Le cas général en résulte en prenant l'adhérence schématique d'une suite de composition de la fibre générique de G.

([3]) Un tel anneau est appelé *anneau de Prüfer* dans BOURBAKI, *Algèbre Commutative*, chap, 7, § 2, exercice 12.

2.4. On suppose dans la suite que tous les schémas en groupes considérés sont commutatifs et de p-torsion, de sorte qu'on omettra en général de rappeler ces hypothèses. Le but des numéros qui suivent est de prouver l'assertion suivante :

PROPOSITION 2.4.1. — *Soit*

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

une suite exacte de schémas en groupes finis localement libres sur A. *Alors la suite*

$$0 \to M(G'') \to M(G) \to M(G') \to 0$$

est exacte.

D'après la définition de M(G), il suffit de montrer que $M(G) \to M(G')$ est surjectif. Supposons que G'' possède une suite de composition G_i'' dont les quotients H_i vérifient la propriété suivante : pour toute suite exacte de schémas en groupes finis localement libres

$$0 \to H' \to H \to H_i \to 0,$$

l'homomorphisme $M(H) \to M(H')$ est surjectif. Si G_i est l'image inverse de G_i'' dans G, les suites

$$0 \to G_{i-1} \to G_i \to H_i \to 0$$

permettent d'en déduire par récurrence la surjectivité de $M(G) \to M(G')$. On voit donc d'après 2.3.2 qu'il suffit de prouver le théorème lorsque G'' est annulé par F ou V.

Sans hypothèse sur G'', observons qu'un élément $\varphi \in M(G') = \mathrm{Hom}(G', CW)$ définit par fonctorialité une extension de G'' par CW dans la catégorie des faisceaux pour la topologie fidèlement plate (sur la catégorie des A-algèbres), du type étudié dans la première partie :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & CW & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

et qu'on peut relever φ dans M(G) si et seulement si cette extension est scindée. Il suffit donc de montrer cette dernière propriété avec G'' annulé par F ou V.

2.5. DÉMONSTRATION DE 2.4.1 LORSQUE G'' EST ANNULÉ PAR F.

LEMME 2.5.1. — *Soient* A *un anneau parfait, et* H *un schéma en groupes fini localement libre sur* A, *annulé par* F. *Il existe un isomorphisme canonique* A*-linéaire*

$$(2.5.1)\quad M(H) = \mathrm{Hom}(H, CW) \simeq \mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathrm{Lie}(H), \mathrm{Lie}(CW)) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Lie}(H), A).$$

Le premier isomorphisme ayant été établi en 1.4.2, il reste à construire le second. Soient $L = \mathrm{Lie}(H)$, $M = \mathrm{Lie}(CW)$, Φ_L et Φ_M les opérations de puissance symbolique p-ième. Utilisant l'isomorphisme canonique (1.5.1) $M \simeq A^{\mathbb{N}}$, un homomorphisme $\varphi : L \to M$ équivaut à la

donnée d'une famille d'homomorphismes A-linéaires $\varphi_{-i} : L \to A$, pour tout $i \in \mathbb{N}$. La relation de commutation aux puissances symboliques p-ièmes :

$$\Phi_M \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_L$$

s'écrit, d'après (1.5.2) :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad (\varphi_{-i-1})^p = \varphi_{-i} \circ \Phi_L .$$

Comme A est parfait, ces relations sont équivalentes aux relations

(2.5.2) $$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \varphi_{-i} = \mathbf{f}_A^{-i} \circ \varphi_0 \circ \Phi_L^i ,$$

où $\mathbf{f}_A$ est l'automorphisme de Frobenius de A. Par suite, l'application

$$\mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathrm{Lie}(H), \mathrm{Lie}(CW)) \to \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Lie}(H), A),$$

qui à φ associe φ_0, est un isomorphisme.

2.5.2. Revenons aux hypothèses de 2.4.1. D'après 1.4.1, la suite exacte

(2.5.3) $$0 \to CW \to E \to G'' \to 0$$

donne une suite exacte de p-algèbres de Lie :

(2.5.4) $$0 \to \mathrm{Lie}(CW) \xrightarrow{f} \mathrm{Lie}(E) \xrightarrow{g} \mathrm{Lie}(G'') \to 0.$$

Posons encore $M = \mathrm{Lie}(CW)$, $N = \mathrm{Lie}(E)$, $L = \mathrm{Lie}(G'')$, et notons Φ_M, Φ_N, Φ_L les puissances symboliques p-ièmes. Comme G'' est fini localement libre de hauteur $\leqq 1$, L est un A-module localement libre de rang fini, et G'' est isomorphe à $\mathfrak{G}_p(L)$ ([19], VII_A, 7.4). D'après 1.4.2, la suite (2.5.3) est donc scindée si et seulement si la suite (2.5.4) l'est en tant que suite de p-algèbres de Lie.

Si on se restreint aux fibres génériques, le foncteur M s'identifie au module de Dieudonné usuel d'après 2.2.2, et par suite $M(G_K) \to M(G'_K)$ est surjectif. L'extension (2.5.3) est donc scindée sur K, et si on pose $M_K = \mathrm{Lie}(CW_K)$, $N_K = \mathrm{Lie}(E_K)$, $L_K = \mathrm{Lie}(G''_K) = L \otimes_A K$, la suite de p-algèbres de Lie :

(2.5.5) $$0 \to M_K \xrightarrow{f_K} N_K \xrightarrow{g_K} L_K \to 0$$

est aussi scindée sur K. Fixons un supplémentaire L' de M dans N comme A-module, et soit $s : L_K \to N_K = M_K \oplus L'_K$ une section de g_K ; on peut écrire $s = s_1 + s_2$, $s_1 : L_K \to M_K$, $s_2 : L_K \to L'_K$, et $s_1 = (\varphi_{-i})$, où φ_{-i} est un homomorphisme K-linéaire de L_K dans K. Il faut alors construire $s' : L_K \to M_K$, qui soit un homomorphisme de p-algèbres de Lie, tel que $s + s'$ envoie L dans N. Si l'on observe que s_2 est l'inverse de l'isomorphisme $L'_K \xrightarrow{\sim} L_K$ induit par g_K, donc envoie L dans L', il suffit de vérifier que $s_1 + s'$ envoie L dans M, c'est-à-dire, en posant $s' = (\psi_{-i})$ avec $\psi_{-i} : L_K \to K$, que $\varphi_{-i} + \psi_{-i}$ envoie L dans A.

Posons alors $\psi_0 = -\varphi_0$. Pour que s' soit un homomorphisme de p-algèbres de Lie, il faut et suffit, d'après (2.5.2), que

$$\psi_{-i} = \mathbf{f}_K^{-i} \circ \psi_0 \circ \Phi_{L_K}^i ,$$

ce qui détermine s' à partir du choix fait pour ψ_0. D'autre part,

$$s \circ \Phi_{L_K} = \Phi_{N_K} \circ s = \Phi_{N_K} \circ (s_1 + s_2) = \Phi_{M_K} \circ s_1 + \Phi_{N_K} \circ s_2 .$$

Comme Φ_{N_K} et s_2 sont définis sur A, $\Phi_{N_K} \circ s_2$ aussi, et on peut le décomposer en somme de deux homomorphismes $\chi : L_K \to M_K$, $\sigma : L_K \to L'_K$, définis sur A. On peut donc écrire $\chi = (\chi_{-i})$, avec $\chi_{-i}(L) \subset A$. D'où

$$s_1 \circ \Phi_{L_K} = \Phi_{M_K} \circ s_1 + \chi,$$

c'est-à-dire

$$\forall i, \quad \varphi_{-i} \circ \Phi_{L_K} = \mathbf{f}_K \circ \varphi_{-i-1} + \chi_{-i}.$$

Comme

$$\psi_{-i} \circ \Phi_{L_K} = \mathbf{f}_K \circ \psi_{-i-1},$$

on en déduit

$$(\varphi_{-i-1} + \psi_{-i-1}) = \mathbf{f}_K^{-1} \circ [(\varphi_{-i} + \psi_{-i}) \circ \Phi_{L_K} - \chi_{-i}],$$

ce qui montre par récurrence que $(\varphi_{-i} + \psi_{-i})(L) \subset A$.

2.6. Démonstration de 2.4.1 lorsque G'' est annulé par V. — Soit n tel que $p^n G = 0$, de sorte que M(G) est un $W_n(A)$-module. Les idéaux premiers de $W_n(A)$ sont de la forme

$$\mathfrak{p}' = \{(a_i) \mid a_i \in A,\ i = 0, \ldots, n-1, \text{ et } a_0 \in \mathfrak{p}\},$$

où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier fixé de A. Le localisé de $W_n(A)$ en $\mathfrak{p}'$ s'identifie alors à $\tilde{S}^{-1} W_n(A) = W_n(A_\mathfrak{p})$, avec $S = A - \mathfrak{p}$. Par suite, il suffit pour prouver la surjectivité de $M(G) \to M(G')$ de la prouver lorsque A est un anneau de valuation parfait, compte tenu de 2.2.1 et de l'hypothèse faite sur A (le cas d'un corps étant classique).

Comme A est parfait, la fonctorialité du Verschiebung (1.2.1) nous fournit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & CW & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle V_{CW}} & & \downarrow{\scriptstyle V_E} & & \downarrow{\scriptstyle V_{G''}} & & \\ 0 & \longrightarrow & CW^{(p^{-1}/A)} & \longrightarrow & E^{(p^{-1}/A)} & \longrightarrow & G''^{(p^{-1}/A)} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Puisque V_{CW} est un épimorphisme, et que le noyau de V sur CW est isomorphe au groupe additif $\mathbb{G}_a$, on en tire une extension

$$0 \to \mathbb{G}_a \to E' \to G'' \to 0, \tag{2.6.1}$$

où E' est le noyau de V sur R, et il suffit de prouver que cette dernière extension est scindée.

Notons $\mathrm{Ext}^i_A(G'', \mathbb{G}_a)$ les groupes d'extensions de G'' par $\mathbb{G}_a$ dans la catégorie des faisceaux abéliens sur la catégorie des A-algèbres. Rappelons (*cf.* [7]) que pour tout faisceau abélien H, il existe une suite exacte

$$0 \to C \to \mathbb{Z}[H^3] \times \mathbb{Z}[H^2] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[H^2] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[H] \xrightarrow{\partial_0} H \to 0,$$

où $\mathbb{Z}[X]$ désigne le faisceau abélien libre engendré par le faisceau d'ensembles X, ∂_0 est l'homomorphisme naturel, ∂_1 et ∂_2 sont définis par

$$\partial_1([x,y])=[x]-[x+y]+[y],$$
$$\partial_2([x,y,z])=[y,z]-[x+y,z]+[x,y+z]-[x,y],$$
$$\partial_2([x,y])=[y,x],$$

en notant $[x]$ la section de base de $\mathbb{Z}[X]$ associée à la section x de X. Comme

$$\mathrm{Ext}^i_A(\mathbb{Z}[X],\mathbb{G}_a)=H^i(X,\mathbb{G}_a)=0 \qquad \text{pour} \quad i>0,$$

si X est représentable, $\mathrm{Ext}^1_A(G'',\mathbb{G}_a)$ s'identifie au groupe de cohomologie du complexe

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G''],\mathbb{G}_a) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G''^2],\mathbb{G}_a) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G''^3]\times\mathbb{Z}[G''^2],\mathbb{G}_a) \\
\wr & & \wr & & \wr \\
R'' & \longrightarrow & R''\otimes_A R'' & \longrightarrow & (R''\otimes_A R''\otimes_A R'')\times(R''\otimes_A R''),
\end{array}$$

où R'' est la bigèbre de G''. En particulier, pour tout changement de base plat $A\to A'$, l'homomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_A(G'',\mathbb{G}_a)\otimes_A A'\to \mathrm{Ext}^1_{A'}(G''_{A'},\mathbb{G}_{aA'}),$$

est un isomorphisme, et, si A' est fidèlement plat sur A,

$$\mathrm{Ext}^1_A(G'',\mathbb{G}_a)\subsetneq \mathrm{Ext}^1_{A'}(G''_{A'},\mathbb{G}_{aA'}).$$

Il suffit donc, pour prouver 2.4.1 dans le cas où G'' est annulé par V, de le faire après extension fidèlement plate de l'anneau de base A.

Il existe une extension K' de K, de degré fini, telle que $G''_{K'}$ possède une filtration dont les quotients successifs soient des groupes de rang p. L'anneau A' des entiers de K' est fidèlement plat sur A, et vérifie les hypothèses de 2.3 (Bourbaki, *Algèbre Commutative*, chap. 6, § 8, n° 6, prop. 6). D'après 2.3.1, le groupe $G''_{A'}$ possède alors une filtration par des sous-groupes finis localement libres, telle que les quotients successifs soient de rang p sur A'; on est de la sorte ramené au cas où G'' est un groupe de rang p sur A.

Dans ce cas, la structure de la bigèbre R'' de G'' est donnée par le théorème de Oort-Tate ([17], th. 2). Comme A est intègre, et G'' tué par V, il existe $a\in A$ tel que

$$R''\simeq A[X]/(X^p-aX),$$

la comultiplication étant définie par

$$\mu_{G''}(X)=X\otimes 1+1\otimes X.$$

Si on note encore a l'endomorphisme de $\mathbb{G}_a$ sur A défini par la multiplication par a, G'' s'identifie donc au noyau de l'endomorphisme $F-a$ de $\mathbb{G}_a$; de plus, celui-ci est un épimorphisme pour la topologie fidèlement plate, si bien que l'on a une suite exacte de faisceaux abéliens

$$0\to G''\to \mathbb{G}_a\xrightarrow{F-a}\mathbb{G}_a\to 0.$$

On en déduit la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1_A(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a) \xrightarrow{F-a} \mathrm{Ext}^1_A(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a) \to \mathrm{Ext}^1_A(G'', \mathbb{G}_a) \to \mathrm{Ext}^2_A(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a).$$

Or $\mathrm{Ext}^2_A(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a) = 0$ d'après [4], prop. 2, et $\mathrm{Ext}^1_A(\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_a) \simeq A_\sigma[F]$ (avec pour base l'extension $0 \to \mathbb{G}_a \to W_2 \to \mathbb{G}_a \to 0$), de sorte que

$$\mathrm{Ext}^1_A(G'', \mathbb{G}_a) \simeq A_\sigma[F]/A_\sigma[F].(F-a) \simeq A,$$

et en particulier $\mathrm{Ext}^1_A(G'', \mathbb{G}_a)$ est sans torsion sur A. L'extension (2.6.1) est donc scindée sur A si et seulement si elle l'est sur K, ce qui est le cas d'après 2.2.2 puisque $M(G_K) \to M(G'_K)$ est surjectif.

2.7. Nous pouvons maintenant généraliser la commutation de M(G) au changement de base établie en 2.2.1.

PROPOSITION 2.7.1. — *Soit* $A \to A'$ *un homomorphisme d'anneaux vérifiant les conditions de* 2.3, G *un schéma en groupes fini localement libre sur* A. *Alors l'homomorphisme canonique*

$$M(G) \otimes_{W(A)} W(A') \to M(G_{A'}), \tag{2.7.1}$$

est un isomorphisme.

Supposons d'abord G annulé par F. Alors l'isomorphisme (2.5.1) :

$$M(G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Lie}(G), A) \simeq \omega_G$$

commute à l'extension des scalaires. Comme dans ce cas ω_G est un A-module localement libre, donc commute au changement de base, l'assertion est vérifiée.

Si maintenant G est annulé par V, tout homomorphisme $\varphi : G \to CW$ se factorise par le noyau de V sur CW, qui est isomorphe à $\mathbb{G}_a$. On obtient donc

$$M(G) \simeq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a),$$

et ce dernier groupe s'identifie classiquement à Lie (G*), où G* est le dual de Cartier de G. Comme G* est annulé par F, son algèbre de Lie est encore localement libre sur A, et commute au changement de base, et l'assertion est aussi vérifiée.

Dans le cas général, G possède une filtration sur A dont les quotients sont annulés par F ou V. Considérons donc une suite exacte

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0.$$

Le diagramme à lignes exactes (d'après 2.4.1) :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M(G'') \otimes_{W(A)} W(A') & \longrightarrow & M(G) \otimes_{W(A)} W(A') & \longrightarrow & M(G') \otimes_{W(A)} W(A') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M(G''_{A'}) & \longrightarrow & M(G_{A'}) & \longrightarrow & M(G'_{A'}) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2.7.2}$$

montre alors que si l'assertion est vraie pour G' et G'', l'homomorphisme (2.7.1) est surjectif. Il suffit donc de prouver son injectivité.

Reprenant l'argument de localisation de 2.6, on peut supposer que A est un corps ou un anneau de valuation. Si A est un corps, W(A') est plat sur W(A), la suite exacte supérieure de (2.7.2) peut être complétée par un zéro à gauche, et l'assertion en résulte. Supposons donc que A est un anneau de valuation, et supposons de plus $A \to A'$ injectif. Comme A' est intègre, A' est plat sur A; comme $A' \simeq A \otimes_{W_n(A)} W_n(A')$, et que

$$(p\,W_n(A)) \otimes_{W_n(A)} W_n(A') \xrightarrow{\sim} p\,W_n(A'),$$

$W_n(A')$ est plat sur $W_n(A)$. Puisque M(G) est annulé par p^n pour n assez grand, on peut encore compléter la ligne du haut de (2.7.2) par un zéro à gauche et en déduire l'assertion.

Supposons enfin que $A \to A'$ se factorise en $A \to A'' \to A'$, où A'' est un quotient de A et un sous-anneau de A'. Compte tenu de ce qui précède, il suffit de prouver que

$$M(G) \otimes_{W(A)} W(A'') \xrightarrow{\sim} M(G_{A''}).$$

Soit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}(A \to A'')$; alors $W(A'') \simeq W(A)/I$, où I est l'idéal des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathfrak{p}$. Considérons un élément $x \in M(G)$, d'image nulle dans $M(G_{A''})$. On peut, par 2.1.1, identifier x à un covecteur $(x_{-i}) \in CW(R)$, où R est l'algèbre de G, et x est d'image nulle si et seulement si $s_{-i} \in \mathfrak{p}\,R$ pour tout i. Comme R est libre de type fini sur A, on peut en choisir une base. Les coordonnées de x_0 dans cette base engendrent un idéal de type fini, donc principal, contenu dans $\mathfrak{p}$; soit t un générateur de cet idéal. On peut donc écrire $x_0 = t x_0'$, avec $t \in \mathfrak{p}$. Comme d'après 2.1.1 :

$$x_{-i} = V_R^i(x_0),$$

on en tire

$$x_{-i} = t^{p^{-i}}\, V_R^i(x_0').$$

posons $x'_{-i} = V_R^i(x_0')$, $x' = (x'_{-i})$. On a donc $x = \tilde{t}x'$; comme $R \otimes_A R$ est sans torsion, on en déduit comme en 2.2.1 que $x' \in M(G)$. Comme $\tilde{t} \in I$, on a ainsi prouvé que

$$\mathrm{Ker}(M(G) \to M(G_{A''})) = I.M(G),$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 2.7.2. — *Soient* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* A, $k(\mathfrak{p})$ *le corps résiduel en* $\mathfrak{p}$, G *un schéma en groupes fini localement libre sur* A. *Alors* $M(G) \otimes_{W(A)} W(k(\mathfrak{p}))$ *s'identifie au module de Dieudonné usuel de* $G_{k(\mathfrak{p})}$.

2.8. Indiquons enfin les propriétés de finitude de M(G).

PROPOSITION 2.8.1. — *Soit* G *un schéma en groupes fini localement libre sur* A. *Alors* M(G) *est un* W(A)*-module de présentation finie, sans torsion par rapport à l'ensemble* $\tilde{S}$ *des représentants de Teichmüller de* $A - \{0\}$ *dans* W(A). *Si* G *est de rang* p^d, $M(G) \otimes_{W(A)} W(k(\mathfrak{p}))$ *est de longueur d pour tout idéal premier* $\mathfrak{p} \subset A$.

Si G est annulé par F ou V, on a respectivement

$$M(G) \simeq \omega_G, \qquad M(G) \simeq \mathrm{Lie}(G^*),$$

de sorte que M(G) est localement libre de rang fini sur A, et par suite de présentation finie sur W(A). Comme M(G) est un foncteur exact, et que G possède une filtration dont les quotients sont annulés par F ou V, la première assertion en résulte.

Pour vérifier la seconde, on considère l'inclusion $M(G) \subset CW(R)$ définie en 2.1.1. Si $\tilde{t}$ est le représentant de Teichmüller de $t \in A$, $t \neq 0$, et si $x = (x_{-i}) \in CW(R)$, on a $\tilde{t}.(x_{-i}) = (t^{p^{-i}} x_{-i})$. Par suite, si $\tilde{t}x = 0$, $t^{p^{-i}} x_{-i} = 0$ pour tout i. Comme R est sans torsion sur A, $x_{-i} = 0$, d'où la seconde assertion. La dernière résulte de 2.7.2 et de la théorie classique.

Nous donnerons des propriétés équivalentes à celles de 2.8.1 au paragraphe suivant.

3. Un foncteur quasi inverse

Nous allons maintenant construire un foncteur quasi inverse du foncteur M(G) étudié dans la section précédente, associant à un W(A)-module satisfaisant les conditions de 2.8.1, et muni d'opérateurs F et V, un schéma en groupes fini localement libre sur A.

3.1. Donnons d'abord quelques propriétés algébriques des modules considérés.

PROPOSITION 3.1.1. — *Soient* A *un anneau de valuation parfait,* K *son corps des fractions, k son corps résiduel,* M *un* W(A)*-module de type fini et de p-torsion. On suppose de plus que* M *vérifie l'une des deux hypothèses :*

(i) M *est sans* $\tilde{S}$*-torsion,* $\tilde{S}$ *étant l'ensemble des représentants de Teichmüller de* $S = A - \{0\}$ *dans* W(A);

(ii) $\operatorname{long}_{W(K)} M \otimes_{W(A)} W(K) = \operatorname{long}_{W(k)} M \otimes_{W(A)} W(k)$.

Alors M *possède une filtration finie par des sous-*W(A)*-modules de type fini, telle que les quotients associés soient libres de rang* 1 *sur* A.

On procède par récurrence sur la longueur de $M \otimes W(K)$. Si celle-ci est nulle, $M \otimes W(K) = 0$, ce qui entraîne $M = 0$ sous l'hypothèse (i), puisque $M \otimes W(K) = \tilde{S}^{-1} M$ d'après (2.2.2). Sous l'hypothèse (ii), $M \otimes W(k) = 0$, ce qui entraîne encore $M = 0$ grâce au lemme de Nakayama, le noyau de $W(A) \to W(k)$ étant contenu dans l'unique maximal de W(A).

Montrons l'assertion sous l'hypothèse (i) lorsque long $M \otimes W(K) = 1$. Alors $M \otimes W(K)$ est annulé par p, et il en est de même de M, puisque $M \subset \tilde{S}^{-1} M = M \otimes W(K)$. Par suite, M est un A-module de type fini, sans torsion, donc libre, et nécessairement de rang 1.

Dans le cas général, $M \otimes W(K)$ possède un quotient N′ de longueur 1. Soient L le noyau de l'homomorphisme $M \to N'$, et $N = M/L$. Par construction, N est de type fini sur W(A) et sans $\tilde{S}$-torsion; comme $N \otimes W(K) \simeq \tilde{S}^{-1} N \simeq N'$, N est libre de rang 1 sur A d'après ce qui précède. Considérons alors la suite exacte

$$\operatorname{Tor}_1^{W(A)}(N, W(k)) \to L \otimes_{W(A)} W(k) \to M \otimes_{W(A)} W(k) \to N \otimes_{W(A)} W(k) \to 0.$$

Puisque $N \simeq A$, la résolution

$$0 \to W(A) \xrightarrow{p} W(A) \to A \to 0$$

montre que $\operatorname{Tor}_1^{W(A)}(N, W(k)) = 0$, et la suite

$$0 \to L \otimes_{W(A)} W(k) \to M \otimes_{W(A)} W(k) \to N \otimes_{W(A)} W(k) \to 0,$$

est exacte. Par suite, $L \otimes_{W(A)} W(k)$ est de type fini sur W(k); fixons-en des générateurs e_i', et soit $x' \in M \otimes W(k)$ relevant un générateur de $N \otimes W(k)$. Si on relève les e_i' et x' en des éléments $e_i \in L$, $x \in M$, ceux-ci constituent une famille de générateurs de M d'après

Nakayama; de plus, l'image de x dans N forme une base de N comme A-module. Posons $y=px$, de sorte que $y\in L$. Pour tout élément $m\in L$, on peut écrire :

$$m=\sum_i \lambda_i e_i+\mu x, \qquad \lambda_i,\ \mu\in W(A).$$

Projetant sur N, on obtient $\mu x=0$, d'où $\mu=p\nu$, et

$$m=\sum_i \lambda_i e_i+\nu y,$$

ce qui montre que L est engendré par les e_i et y, donc est de type fini sur W(A).

Si M vérifie l'hypothèse (i), L est donc de type fini et sans $\tilde{S}$-torsion. Si M vérifie l'hypothèse (ii),

$$\text{long } L\otimes W(k)=\text{long } M\otimes W(k)-1=\text{long } M\otimes W(K)-1=\text{long } L\otimes W(K),$$

et L vérifie aussi (ii). Dans les deux cas, on peut donc achever la récurrence.

En revenant aux hypothèses de 2.3 sur l'anneau A, on en déduit par localisation les corollaires suivants.

COROLLAIRE 3.1.2. — *Soit* M *un* W(A)*-module de type fini, et de p-torsion. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est sans* $\tilde{S}$*-torsion (avec* $S=A-\{0\}$*);*

(ii) *la longueur sur* $W(k(\mathfrak{p}))$ *de* $M\otimes_{W(A)} W(k(\mathfrak{p}))$ *est indépendante de l'idéal premier* $\mathfrak{p}\subset A$.

COROLLAIRE 3.1.3. — *Sous les mêmes hypothèses,* M *est de présentation finie et de dimension projective* 1 *sur* W(A)*; de plus,*

$$\text{Tor}_1^{W(A)}(M,\ W(k(\mathfrak{p})))=0,$$

pour tout idéal premier $\mathfrak{p}\subset A$.

Pour simplifier le langage, nous dirons désormais qu'un W(A)-module est de *longueur constante* s'il satisfait les conditions de 3.1.2; la longueur des $M\otimes W(k(\mathfrak{p}))$ sera alors appelée simplement la *longueur* de M.

Il est intéressant d'observer que ces hypothèses peuvent s'exprimer en termes de dualité. Soit en effet T_A le W(A)-module $W(A)[1/p]/W(A)$, qui peut encore se décrire comme limite inductive du système

$$\ldots W_{n-1}(A)\xrightarrow{p} W_n(A)\xrightarrow{p} W_{n+1}(A)\ldots$$

PROPOSITION 3.1.4. — (i) *Soit* M *un* W(A)*-module de longueur constante. Alors* $\text{Hom}_{W(A)}(M,\ T_A)$ *est de longueur constante.*

(ii) *Soit* M *un* W(A)*-module de type fini et de p-torsion. Pour que* M *soit de longueur constante, il faut et suffit que l'homomorphisme canonique*

$$M\to \text{Hom}_{W(A)}(\text{Hom}_{W(A)}(M,\ T_A),\ T_A)$$

soit un isomorphisme.

Le foncteur $M \mapsto \mathrm{Hom}_{W(A)}(M, T_A)$ induit donc une autodualité sur la catégorie des $W(A)$-modules de longueur constante.

Le foncteur $\mathrm{Hom}_{W(A)}(., T_A)$ commute à la localisation pour les modules de longueur constante, puisqu'ils sont de présentation finie. Pour montrer (i), on peut donc supposer que A est un anneau de valuation. On a alors :

$$\mathrm{Ext}^1_{W(A)}(M, T_A) = 0.$$

En effet, il suffit grâce à 3.1.1 de le montrer pour $M = A$. Cela résulte alors de ce que la multiplication par p sur T_A est un épimorphisme, en utilisant la résolution

$$0 \to W(A) \xrightarrow{p} W(A) \to A \to 0.$$

Comme $\mathrm{Hom}_{W(A)}(A, T_A) \simeq A$, on en déduit l'assertion.

Pour prouver (ii), observons d'abord que T_A est sans $\tilde{S}$-torsion. En effet, soient $x \in W(A)$, $t \in S$ tels que $\tilde{t}x \in p^r W(A)$. Si $x = (x_i)$, $\tilde{t}x = (t^{p^i} x_i)$, et dire que $\tilde{t}x \in p^r W(A)$ signifie que $t^{p^i} x_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$, donc $x_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$, et $x \in p^r W(A)$. La condition est donc suffisante.

Si M est de longueur constante, $\mathrm{Hom}_{W(A)}(M, T_A)$ est en particulier de présentation finie d'après (i), donc le foncteur $\mathrm{Hom}_{W(A)}(\mathrm{Hom}_{W(A)}(., T_A), T_A)$ commute à la localisation pour les modules de longueur constante. Pour prouver que la condition de (ii) est nécessaire, on peut de nouveau supposer que A est un anneau de valuation, et utiliser 3.1.1 et l'exactitude prouvée plus haut pour se ramener au cas $M = A$, qui est clair.

3.2. Dans ce numéro et le suivant, on suppose que A est un anneau parfait quelconque.

Soit M un $\mathbf{D}_A$-module à gauche, où $\mathbf{D}_A$ est l'anneau de Dieudonné de A (*cf.* 2.1). Pour toute A-algèbre B, le groupe $CW(B)$ est muni d'une structure de $\mathbf{D}_A$-module à gauche. Si $\varphi : M \to CW(B)$ est un homomorphisme $\mathbf{D}_A$-linéaire, nous noterons $\varphi = (\varphi_{-i})_{i \in \mathbb{N}}$, où les φ_{-i} sont des applications de M dans B, et J^{φ}_r l'idéal de B engendré par les éléments $\varphi_{-i}(x)$ pour $x \in M$ et $i \geqq r$. On pose alors, pour $r \geqq 0$, $s \geqq 1$,

$$E_{M, r, s}(B) = \left\{ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_A}(M, CW(B)) \,\middle|\, (J^{\varphi}_r)^s = 0 \right\},$$

$$E_M(B) = \bigcup_{r, s} E_{M, r, s}(B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_A}(M, CW(B)).$$

Les relations (1.1.1) et (1.1.5) montrent que

$$E_{M, r, s}(B) + E_{M, r', s'}(B) \subset E_{M, r'', s''}(B),$$

avec $r'' = \mathrm{Sup}(r, r')$ et $s'' = s + s'$. Les $E_{M, r, s}$ sont des foncteurs de la catégorie des A-algèbres dans la catégorie des ensembles, et E_M est un foncteur en groupes abéliens. Si M est de type fini sur $W(A)$, on a simplement

$$E_M(B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_A}(M, CW(B)).$$

En effet, soit $\varphi : M \to CW(B)$, $\mathbf{D}_A$-linéaire. Si (x_α), $\alpha = 1, \ldots, m$, est un système de générateurs de M, il existe par définition de CW un entier r tel que l'idéal engendré par les $\varphi_{-i}(x_\alpha)$, $i \geqq r$, $\alpha = 1, \ldots, m$, soit nilpotent. Comment tout élément x de M est combinaison linéaire des x_α, il résulte de (1.1.1) et (1.1.5) que l'idéal engendré par des $\varphi_{-i}(x)$, $i \geqq r$, est contenu dans celui qu'engendrent les $\varphi_{-i}(x_\alpha)$, $i \geqq r$, donc il existe r, s tels que $(J_r^\varphi)^s = 0$.

Nous allons étudier la représentabilité de E_M en adaptant la construction donnée par Grothendieck lorsque la base est un corps parfait ([11], II.6).

PROPOSITION 3.2.1. — *Pour tous $r \geqq 0$, $s \geqq 1$, le foncteur $E_{M,r,s}$ est représentable par une A-algèbre $R_{r,s}$; les $R_{r,s}$ forment un système projectif à morphismes de transition surjectifs, et*

$$E_M(B) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{r,s} \mathrm{Hom}_A(R_{r,s}, B).$$

Fixons $r \geqq 0$, $s \geqq 1$. Soient R′ l'algèbre de polynômes $A[T_x]_{x \in M}$, I_r l'idéal engendré par les $T_{V^i x}$ pour $i \geqq r$, $x \in M$, et $R'_{r,s} = R'/(I_r)^s$. Soit $R_{r,s}$ le quotient de $R'_{r,s}$ par les relations :

(i) $T_{x+x'} = S(\ldots, T_{V^i x}, \ldots, T_x; \ldots, T_{V^i x'}, \ldots, T_{x'})$, pour x, $x' \in M$;

(ii) $T_{\lambda x} = P_\lambda(\ldots, T_{V^i x}, \ldots, T_x)$, pour $\lambda \in W(A)$, $x \in M$;

(iii) $T_{Fx} = (T_x)^p$.

On notera que les relations (i) et (ii) ont un sens parce que I_r est nilpotent dans $R'_{r,s}$.

On définit pour tous r, s une application $\theta_{r,s} : M \to CW(R_{r,s})$ en posant

$$\theta_{r,s}(x) = (T_{V^i x})_{i \in \mathbb{N}}.$$

Cette application commute à V par construction, et les relations (i) à (iii) entraînent que $\theta_{r,s}$ est un homomorphisme de W(A)-modules, commutant à F; $\theta_{r,s}$ est donc $\mathbf{D}_A$-linéaire. De plus, $(J_r^{\theta_{r,s}})^s = 0$ par construction, de sorte que $\theta_{r,s} \in E_{M,r,s}(R_{r,s})$. Par composition, on obtient donc un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_A(R_{r,s}, B) \to E_{M,r,s}(B)$$

pour toute A-algèbre B.

Soit alors $\varphi : M \to CW(B)$ un homomorphisme $\mathbf{D}_A$-linéaire appartenant à $E_{M,r,s}(B)$, avec $\varphi(x) = (\varphi_{-i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$. Si on définit un homomorphisme $\psi : R' \to B$ en posant

on a
$$\psi(T_x) = \varphi_0(x),$$
$$\psi(T_{V^i x}) = \varphi_0(V^i x) = (V^i(\varphi(x)))_0 = \varphi_{-i}(x),$$

et par suite ψ se factorise par $R'_{r,s}$. Comme φ est $\mathbf{D}_A$-linéaire, les φ_{-i} vérifient les relations

$$\varphi_0(x+x') = S(\ldots, \varphi_{-i}(x), \ldots, \varphi_0(x); \ldots, \varphi_{-i}(x'), \ldots, \varphi_0(x')),$$
$$\varphi_0(\lambda x) = P_\lambda(\ldots, \varphi_{-i}(x), \ldots, \varphi_0(x)), \qquad \varphi_0(Fx) = \varphi_0(x)^p,$$

et ψ se factorise par $R_{r,s}$. Par construction

$$\varphi = CW(\psi) \circ \varphi_{r,s},$$

et ψ est uniquement déterminé par cette relation, d'où l'assertion.

PROPOSITION 3.2.2. — *Soit* M *un* $\mathbf{D}_A$*-module à gauche, tel que le* W(A)*-module sous-jacent soit de type fini. Alors chaque* $R_{r,s}$ *est une* A*-algèbre finie.*

Fixons r, s. Soient y, $y' \in M$. Utilisant l'homomorphisme $\Lambda_{r,s} \otimes_A \Lambda_{r,s} \to R'_{r,s}$ envoyant X_{-i} sur $T_{V^i y}$ et Y_{-j} sur $T_{V^j y'}$, on voit que l'image dans $R'_{r,s}$ de la série $S(T_{V^i y}; T_{V^j y'})$ est un polynôme de degré $\leqq d_1$, par rapport aux $T_{V^i y}$, $T_{V^j y'}$ pour $i, j \leqq i_1$, où d_1 et i_1 sont des entiers indépendants de y et y' (*cf.* [8], II, lemme 1.3). Appliquant la formule d'associativité pour S, il en résulte que pour m fixé et $y_1, \ldots, y_m \in M$, la classe de $T_{y_1 + \ldots + y_m}$ dans $R_{r,s}$ est un polynôme de degré $\leqq d_2$ par rapport aux $T_{V^i y_j}$ pour $i \leqq i_2$, les entiers d_2 et i_2 étant indépendants des éléments y_j considérés. Utilisant maintenant l'homomorphisme $\Lambda_{r,s} \to R'_{r,s}$ envoyant X_{-i} sur $T_{V^i y}$, et [8], II, lemme 2.1, on voit que l'image dans $R'_{r,s}$ de la série $P_\lambda(T_{V^i y})$ est un polynôme de degré $\leqq d_3$ par rapport aux $T_{V^i y}$, $i \leqq i_3$, d_3 et i_3 étant indépendants de λ et y. Écrivons alors un élément $x \in M$ sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

où les x_α forment une famille de générateurs de M; par substitution, on obtient dans $R_{r,s}$:

$$T_x = Q_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}(T_{V^i x_\alpha}),$$

où $Q_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}$ est un polynôme de degré $\leqq N_1$ par rapport aux $T_{V^i x_\alpha}$, $i < N_2$, N_1 et N_2 étant des entiers indépendants de x.

En particulier, $R_{r,s}$ est une A-algèbre de type fini, engendrée par $m N_2$ éléments. Soit k un entier; si l'on pose

$$F^k(V^j x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_j,$$

les relations (iii) entraînent dans $R_{r,s}$:

$$(T_{V^j x_\alpha})^{p^k} = T_{F^k V^j x_\alpha} = Q_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}(T_{V^i x_\alpha}),$$

avec $\deg(Q_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}) < N_1$. Fixant k tel que $p^k > N_1$, on en déduit que $R_{r,s}$ est engendrée comme A-module par les monômes de degré total $\leqq m N_2 p^k$ par rapport aux $T_{V^i x_\alpha}$, donc est finie sur A.

3.3. Soit $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux parfaits. Rappelons que, si on considère $\mathbf{D}_A$ et $\mathbf{D}_{A'}$ comme modules sur W(A) et W(A') grâce à la multiplication à gauche, l'homomorphisme canonique W(A')-linéaire

$$W(A') \otimes_{W(A)} \mathbf{D}_A \to \mathbf{D}_{A'},$$

est un isomorphisme. Pour tout $\mathbf{D}_A$-module à gauche M, le W(A')-module sous-jacent à $\mathbf{D}_{A'} \otimes_{\mathbf{D}_A} M$ s'identifie donc à $W(A') \otimes_{W(A)} M$.

LEMME 3.3.1. — *Soient* M *un* $\mathbf{D}_A$*-module à gauche,* $M' = \mathbf{D}_{A'} \otimes_{\mathbf{D}_A} M$, $R_{r,s}$ *et* $R'_{r,s}$ *les algèbres représentant respectivement les foncteurs* $E_{M,r,s}$ *sur la catégorie des* A*-algèbres, et* $E_{M',r,s}$ *sur la catégorie des* A'*-algèbres. Alors il existe un isomorphisme canonique de* A'*-algèbres*

$$R_{r,s} \otimes_A A' \xrightarrow{\sim} R'_{r,s}.$$

Soit B une A′-algèbre; il suffit d'établir un isomorphisme fonctoriel en B :

$$E_{M,r,s}(B) \simeq E_{M',r,s}(B).$$

Comme

$$\mathrm{Hom}_{D_A}(M, CW(B)) \simeq \mathrm{Hom}_{D_{A'}}(M', CW(B)),$$

il suffit de montrer que pour tout $\varphi : M \to CW(B)$ se factorisant en $\varphi' : M' \to CW(B)$, les idéaux J_r^{φ} et $J_r^{\varphi'}$ sont égaux. Or, d'après (1.1.1) et (1.1.5), l'idéal engendré par les $\varphi'_{-i}(x')$ pour $x' \in M'$ et $i \geqq r$ est engendré par les $\varphi'_{-i}(1 \otimes x) = \varphi_{-i}(x)$ pour $x \in M$ et $i \geqq r$.

PROPOSITION 3.3.2. — *Soient* A *un anneau parfait n'ayant qu'un nombre fini d'idéaux premiers minimaux,* M *un* D_A*-module à gauche, de p-torsion et de type fini sur* W(A), *tel que la fonction*

$$\mathfrak{p} \to \mathrm{long}_{W(k(\mathfrak{p}))} M \otimes_{W(A)} W(k(\mathfrak{p})),$$

soit constante de valeur d sur Spec(A). *Alors le foncteur* E_M *est représentable par un schéma en groupes* G_M, *fini localement libre sur* A, *de rang* p^d.

Si A est un corps, l'assertion est connue d'après la théorie de Dieudonné classique, et la construction explicite d'un foncteur quasi inverse ([11], II.6 dans le cas unipotent, [8], III, § 1, th. 1 dans le cas général, et avec la définition utilisée ici). Si R est l'algèbre représentant E_M, on a donc dans ce cas un isomorphisme

$$R \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{r,s} R_{r,s},$$

et les homomorphismes de transition $R_{r',s'} \to R_{r,s}$, étant surjectifs, sont des isomorphismes pour (r, s) assez grand, le rang de $R_{r,s}$ étant p^d.

Dans le cas général, soient $\mathfrak{q}_i$ les idéaux premiers minimaux de A. Comme A est réduit, les localisés $A_{\mathfrak{q}_i}$ sont des corps. D'après 3.3.1, et ce qui précède, il existe r_0, s_0 tels que l'homomorphisme

$$R_{r,s} \otimes_A A_{\mathfrak{q}_i} \to R_{r_0,s_0} \otimes_A A_{\mathfrak{q}_i}$$

soit un isomorphisme pour $r \geqq r_0$, $s \geqq s_0$, et pour tout i, puisque les $\mathfrak{q}_i$ sont en nombre fini. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Pour la même raison, le rang sur $k(\mathfrak{p})$ de $R_{r,s} \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est au plus p^d, quels que soient r et s. Puisque $R_{r,s}$ est finie sur A d'après 3.2.2, son rang en un point de Spec(A) augmente par spécialisation, d'après Nakayama. Pour $r \geqq r_0$, $s \geqq s_0$, le rang de $R_{r,s}$ aux idéaux premiers minimaux est égal à p^d, donc il est égal à p^d en tout point de Spec(A). Comme A est réduit, les $R_{r,s}$ sont des A-algèbres localement libres de rang p^d, et les homomorphismes surjectifs $R_{r,s} \to R_{r_0,s_0}$ sont des isomorphismes. Posant $R = \varprojlim R_{r,s}$, $G_M = \mathrm{Spec}(R)$ représente E_M, et vérifie les propriétés annoncées.

THÉORÈME 3.4.1. — *Soit* A *un anneau parfait intègre, dont les localisés sont des corps ou des anneaux de valuation. Alors les foncteurs*

$$G \mapsto M(G) = \mathrm{Hom}_A(G, CW) \qquad \textit{et} \qquad M \mapsto G_M,$$

sont des anti équivalences de catégories quasi inverses l'une de l'autre entre la catégorie des schémas en groupes commutatifs, de p-torsion, finis localement libres sur A, *et la catégorie des* D_A*-modules à gauche, de longueur constante sur* W(A) *au sens de* 3.1.

Nous avons vu en 2.8.1 que M(G) est de longueur constante sur W(A), de sorte que les deux foncteurs prennent leurs valeurs dans les catégories considérées.

Soit G un schéma en groupes commutatif, de p-torsion, fini localement libre sur A, et soit $M = M(G)$. Pour toute A-algèbre B, il existe un homomorphisme fonctoriel en G et en B :

$$G(B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_A}(\mathrm{Hom}(G, CW), CW(B));$$

on obtient donc un homomorphisme de schémas en groupes $G \to G_M$. Si A est un corps, c'est un isomorphisme d'après [8], III, § 1, prop. 1.2. De plus, les foncteurs $G \mapsto M(G)$, $M \mapsto G_M$ commutent à la localisation sur A d'après 2.2.1 et 3.3.1. On peut donc supposer que A est un anneau de valuation; soient K son corps des fractions, k son corps résiduel. D'après 2.7.1, $M(G_k) \simeq M(G) \otimes W(k)$, et $G_{M \otimes W(k)} \simeq G_M \times \mathrm{Spec}(k)$. Par suite, l'homomorphisme $G \to G_M$ fournit par passage à la fibre spéciale l'homomorphisme

$$G_k \to G_{M(G_k)},$$

qui est un isomorphisme puisque la base est un corps. D'après Nakayama, G est donc un sous-schéma fermé de G_M. Mais

$$\mathrm{rang}(G_M) = \mathrm{long}_{W(k)} M \otimes W(k) = \mathrm{rang}(G),$$

d'après 3.3.2 et 2.7.2. Donc $G \xrightarrow{\sim} G_M$.

Réciproquement, soit M un $\mathbf{D}_A$-module de longueur constante sur W(A). Si $m \in M$, m définit de manière évidente pour toute A-algèbre B un homomorphisme fonctoriel en B :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}_A}(M, CW(B)) \to CW(B),$$

d'où un homomorphisme, fonctoriel en M, $\mathbf{D}_A$-linéaire,

$$M \to \mathrm{Hom}(G_M, CW) = M(G_M).$$

Utilisant de nouveau la commutation des foncteurs $M \mapsto G_M$ et $G \mapsto M(G)$ avec le passage aux fibres sur A, les homomorphismes

$$M \otimes W(k) \to M(G_M) \otimes W(k),$$

$$M \otimes W(K) \to M(G_M) \otimes W(K),$$

sont des isomorphismes d'après la théorie de Dieudonné classique ([8], III, § 1, th. 1). Comme $M(G_M)$ est un W(A)-module de type fini, et M sans $\tilde{S}$-torsion, ces isomorphismes entraînent respectivement la surjectivité et l'injectivité de $M \to M(G_M)$.

COROLLAIRE 3.4.2. — *Sous les hypothèses de* 3.4.1, *soit*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de $\mathbf{D}_A$*-modules de longueur constante sur* W(A). *Alors la suite*

$$0 \to G_{M''} \to G_M \to G_{M'} \to 0$$

est exacte.

D'après la définition du foncteur E_M, la suite

$$0 \to G_{M''} \to G_M \to G_{M'}$$

est exacte. Soit H le quotient de G_M par $G_{M''}$, qui s'identifie à un sous-groupe fini localement libre de $G_{M'}$, et soit H' le quotient de $G_{M'}$ par H.

D'après 2.4.1, les suites

$$0 \to M(H') \to M(G_{M'}) \to M(H) \to 0,$$
$$0 \to M(H) \to M(G_M) \to M(G_{M''}) \to 0,$$

sont exactes. Mais l'homomorphisme composé $M(G_{M'}) \to M(G_M)$ s'identifie à $M' \to M$ par 3.4.1, donc est injectif. Par conséquent, $M(H')=0$, d'où $H'=0$, et $G_M \to G_{M'}$ est un épimorphisme.

COROLLAIRE 3.4.3. — *Sous les hypothèses de* 3.4.1, *le foncteur*

$$M(G)=\mathrm{Hom}(G, CW)$$

induit une anti équivalence entre la catégorie des groupes p-divisibles sur A, *et la catégorie des* $\mathbf{D}_A$*-modules à gauche, localement libres de rang fini sur le spectre formel de* W(A). *Si h est la hauteur de* G, M(G) *est localement libre de rang h.*

Soient G un groupe p-divisible de hauteur h sur A, G_n le noyau de la multiplication par p^n sur G, de sorte que $G=\varinjlim G_n$, et

$$M(G)=\mathrm{Hom}(\varinjlim G_n, CW)=\varprojlim \mathrm{Hom}(G_n, CW)=\varprojlim M(G_n).$$

D'après 2.8.1, $M(G_1)$ est un A-module de type fini, sans torsion, donc localement libre, nécessairement de rang h puisqu'il en est ainsi de sa fibre générique. Quitte à localiser sur A, donc sur Spf(W(A)), on peut supposer $M(G_1)$ libre. Les suites exactes

$$0 \to G_n \to G_{n+1} \xrightarrow{p^n} G_{n+1},$$

donnent d'après 2.4.1 des suites exactes

$$M(G_{n+1}) \xrightarrow{p^n} M(G_{n+1}) \to M(G_n) \to 0,$$

d'où l'on déduit par récurrence que $M(G_n)$ est libre de rang h sur $W_n(A)$, en utilisant la propriété analogue sur la fibre générique, donc que M(G) est libre sur W(A).

Réciproquement, si M est un $\mathbf{D}_A$-module localement libre de rang fini h sur Spf(A), chaque $M/p^n M$ correspond d'après 3.4.1 à un schéma en groupes localement libre G_n sur A, de rang p^{nh}. De plus, les suites exactes

$$M/p^{n+1}M \xrightarrow{p^n} M/p^{n+1}M \to M/p^n M \to 0$$

donnent les suites exactes

$$0 \to G_n \to G_{n+1} \xrightarrow{p^n} G_{n+1},$$

de sorte que les G_n forment un groupe p-divisible.

Les énoncés 3.4.1 (resp. 3.4.3), 2.2.2 et 2.7.2 justifient la définition suivante :

DÉFINITION 3.4.4. — *Soient* A *un anneau parfait intègre dont les localisés sont des corps ou des anneaux de valuation, et* G *un schéma en groupes commutatif, de p-torsion, fini localement libre sur* A (*resp. un groupe p-divisible*). *Le* $\mathbf{D}_A$*-module* M(G) *est appelé* module de Dieudonné *de* G.

4. Applications au théorème de Tate en égale caractéristique p

Soient S un schéma connexe normal de caractéristique $p>0$, K le corps des fonctions rationnelles sur S, G, H deux groupes p-divisibles sur S, de fibres génériques G_K, H_K.

PROBLÈME 4.1 (théorème de Tate en égale caractéristique). — *L'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_S(G, H) \to \mathrm{Hom}_K(G_K, H_K) \tag{4.1.1}$$

est-il un isomorphisme?

Il est bien connu que ce problème peut se ramener à un problème analogue sur un anneau de séries formelles en une indéterminée, à coefficients dans un corps algébriquement clos. En effet, soient G_n, H_n les noyaux de la multiplication par p^n sur G, H. Comme G_n et H_n sont localement libres de rang fini sur S, l'homomorphisme (4.1.1) est injectif. Pour montrer qu'il est surjectif, considérons un homomorphisme $f: G_K \to H_K$, et les homomorphismes $f_n: G_{nK} \to H_{nK}$ induits par f. Si U_α est un recouvrement de S tel que les algèbres de G_n et H_n soient libres sur chaque U_α, il faut montrer que les matrices à coefficients dans K définissant f sont à coefficients dans $\Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_S)$ pour tout α. Par suite, on peut supposer $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau normal. Comme A est l'intersection des A_p pour les idéaux premiers de hauteur 1, et que chaque A_p est un anneau de valuation discrète, on peut supposer que A est un anneau de valuation discrète. Soit $\hat{A}$ son complété; comme $\hat{A} \cap K = A$, on peut supposer A complet, donc de la forme $k[[t]]$ puisque A est d'égales caractéristiques. Si $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k, $\bar{k}[[t]] \cap k((t)) = k[[t]]$, si bien qu'on peut aussi supposer k algébriquement clos.

4.2. Une approche naturelle du problème 4.1 consiste à essayer d'obtenir pour les groupes p-divisibles sur $k[[t]]$ un théorème de classification du type « théorie de Dieudonné », afin de transformer le problème posé en un problème d'algèbre p-linéaire. Grothendieck ([10], [11]) et Messing ([15], [16]) ont introduit une construction généralisant celle du module de Dieudonné sur un corps parfait : le cristal de Dieudonné d'un groupe p-divisible; cette construction est systématisée pour les schémas en groupes finis dans [3] et [3 *bis*]. Comme nous l'observons plus loin, il n'est pas en fait nécessaire d'avoir un théorème de pleine fidélité pour les cristaux associés aux groupes p-divisibles sur $k[[t]]$ (4) pour ramener le problème 4.1 à un problème sur les cristaux; il faut néanmoins pouvoir relier la construction cristalline à celle de la section 2. Nous allons donc faire ici quelques rappels sur les cristaux, en nous limitant à ce qui nous sera nécessaire dans la suite, et en renvoyant à [2], [3] et [3 *bis*] pour plus de détails.

(4) Bien que ce théorème soit effectivement démontré, *voir* l'article commun avec W. Messing mentionné dans l'introduction.

4.2.1. Fixons un nombre premier p, et un schéma Σ muni d'un idéal à puissances divisées quasi cohérent $(\mathscr{I}, \gamma)$ [dans la suite, Σ sera le spectre de $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{Z}/p^n$, $(\mathscr{I}, \gamma)$ étant l'idéal engendré par p, muni de ses puissances divisées canoniques]. Si S est un Σ-schéma sur lequel p est nilpotent, les objets du (gros) site cristallin de S relativement à $(\Sigma, \mathscr{I}, \gamma)$, noté $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma, \mathscr{I}, \gamma)$, ou $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, sont constitués par la donnée d'un S-schéma U, d'une Σ-immersion de U dans un Σ-schéma T sur lequel p est nilpotent, et d'une structure d'idéal à puissances divisées δ, compatible à γ, sur l'idéal de U dans T; un tel objet est noté (U, T, δ). Un morphisme de (U', T', δ') dans (U, T, δ) consiste en la donnée d'un Σ-morphisme $v: T' \to T$ commutant aux puissances divisées, et induisant un S-morphisme $u: U' \to U$. On peut munir $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma, \mathscr{I}, \gamma)$ de différentes topologies, construites à partir des topologies usuelles sur la catégorie des schémas; nous n'aurons besoin que de la topologie de Zariski, pour laquelle les familles couvrant (U, T, δ) sont les familles $(U_i, T_i, \delta) \to (U, T, \delta)$ où $(T_i \to T)$ est une famille couvrante d'immersions ouvertes, et $U_i = U \cap T_i$.

Un faisceau E sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ peut alors s'interpréter comme la donnée pour tout objet (U, T, δ) d'un faisceau $E_{(U, T, \delta)}$ sur T pour la topologie de Zariski, et pour tout morphisme $(u, v): (U', T', \delta') \to (U, T, \delta)$ d'un morphisme de faisceaux

$$\rho_v : \quad v^{-1} E_{(U, T, \delta)} \to E_{(U', T', \delta')},$$

qui soit un isomorphisme lorsque u et v sont des immersions ouvertes, et tel que, avec

$$(u', v') : \quad (U'', T'', \delta'') \to (U', T', \delta'),$$

on ait

$$\text{(4.2.1)} \qquad \begin{cases} \rho_{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}, \\ \rho_{v \circ v'} = \rho_{v'} \circ v'^{-1}(\rho_v). \end{cases}$$

On obtient en particulier un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$ en posant

$$\Gamma((U, T, \delta), \mathscr{O}_{S/\Sigma}) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T).$$

Nous appellerons ici *cristal sur* S un $\mathscr{O}_{S/\Sigma}$-module E tel que pour tout (u, v), l'homomorphisme $(v^* E)_{(U, T, \delta)} = v^{-1} E_{(U, T, \delta)} \otimes_{v^{-1}(\mathscr{O}_T)} \mathscr{O}_{T'} \to E_{(U', T', \delta')}$ soit un isomorphisme; nous supposerons de plus les $E_{(U, T, \delta)}$ quasi cohérents.

Soit $f: S' \to S$ un Σ-morphisme. On définit un foncteur de changement de base f^*_{CRIS} de la catégorie des faisceaux sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ dans la catégorie des faisceaux sur $\mathrm{CRIS}(S'/\Sigma)$ par restriction, un objet (U', T', δ') de $\mathrm{CRIS}(S'/\Sigma)$ étant considéré comme un objet de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ en considérant U' comme S-schéma grâce à f. Si E est un cristal, il en est de même de $f^*_{\mathrm{CRIS}}(E)$.

Dans certains cas, la catégorie des cristaux possède une description plus terre à terre.

PROPOSITION 4.2.2 (cf. [11], IV, §4). — *Soient* A *un anneau parfait*, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. *Le foncteur « sections globales »* $\Gamma(\mathrm{CRIS}(S/\mathbb{Z}_p), .)$ *induit une équivalence de catégories entre la catégorie des cristaux sur* $\mathrm{CRIS}(S/\mathbb{Z}_p)$, *et la catégorie des* W(A)*-modules séparés et complets pour la topologie p-adique.*

Soient A' une A-algèbre, $A'' \to A'$ un homomorphisme surjectif d'anneaux, tel qu'il existe m tel que $p^m A'' = 0$, et dont le noyau J est muni de puissances divisées δ. Si $y \in J$, l'existence de puissances divisées entraîne

$$\text{(4.2.2)} \qquad y^p = p!\, \delta_p(y) \in pJ.$$

Par suite, si $x' \in A'$, et si x_1'' et x_2'' sont deux relèvements de x' dans A'', on a pour tout i :

$$x_1''^{p^i} \equiv x_2''^{p^i} \bmod p^i,$$

et en particulier pour $i=0, \ldots, m$, les éléments $p^i\, x''^{p^{m-i}}$ ne dépendent pas du choix du relèvement x'' de x'.

Il existe alors un unique homomorphisme d'anneaux $\beta : W(A) \to A''$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{\beta} & A'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\alpha} & A' \end{array}$$

soit commutatif : en effet, tout élément de $W_m(A)$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} p^i \tilde{a}_i^{p^{m-i}}, \qquad a_i \in A,$$

et on pose

$$\beta(x) = \sum_{i=0}^{m-1} p^i\, a_i''^{p^{m-i}},$$

où a_i'' relève $\alpha(a_i)$ dans A''. Considérant les immersions $S \subsetneq \operatorname{Spec}(W_m(A))$ comme des objets de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ grâce aux puissances divisées canoniques de p, on en déduit que, pour tout objet (U, T, δ) de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, il existe pour m assez grand un unique morphisme $(U, T, \delta) \to (S, \operatorname{Spec} W_m(A))$ dans $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$. Or une section d'un faisceau E sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ peut s'interpréter comme une famille de sections s_T des faisceaux zariskiens $E_{(U, T, \delta)}$, soumise aux conditions $v^*(s_T) = s_{T'}$ pour tout morphisme $(u, v) : (U', T', \delta') \to (U, T, \delta)$. Donc

$$\Gamma(\mathrm{CRIS}(S/\Sigma), E) = \varprojlim_n \Gamma(\operatorname{Spec} W_n(A), E_{(S, \operatorname{Spec} W_n(A))}). \tag{4.2.3}$$

Posant

$$M_n = \Gamma(\operatorname{Spec} W_n(A), E_{(S, \operatorname{Spec} W_n(A))}),$$

et $M = \varprojlim M_n$, on associe à tout cristal E un $W(A)$-module M, séparé et complet pour la topologie p-adique. On peut reconstruire E à partir de M en posant

$$E_{(U, T, \delta)} = \beta^*(M),$$

où $\beta : T \to \operatorname{Spec} W(A)$ est l'unique morphisme induisant le morphisme $U \to S$ donné, d'où l'équivalence de catégories annoncée.

Soient maintenant k un corps parfait, $A = k[[t]]$, $K = k((t))$, W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, $W_n = W/p^n W$, et posons

$$B_n = W_n[[t]], \qquad B = \varprojlim_n B_n = W[[t]],$$

$$C_n = W_n[[t]][1/t], \qquad C = \varprojlim_n C_n;$$

C peut être décrit comme l'anneau des séries formelles $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n t^n$, $a_n \in W$, telles que a_n tende vers zéro pour la topologie p-adique lorsque $n \to -\infty$. On observera que $B/p^n B \simeq B_n$, $C/p^n C \simeq C_n$; de plus, C est un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal engendré par p, de corps résiduel K, donc un anneau de Cohen de K. Enfin, on notera $d : B \to B$ (resp. $C \to C$) la W-dérivation continue (pour la topologie t-adique) telle que $d(t) = 1$.

PROPOSITION 4.2.3. — *Sous les hypothèses précédentes, la catégorie des cristaux sur* A (*resp.* K) *relativement à* $\mathbb{Z}_p$ *est équivalente à la catégorie des* B*-modules* M (*resp.* C*-modules*) *séparés et complets pour la topologie p-adique, et munis d'une connexion topologiquement quasi nilpotente, i.e. d'un endomorphisme additif* $\nabla : M \to M$ *tel que :*

(i) $\forall a \in B$ (*resp.* C), $\forall x \in M$, $\nabla(ax) = a\nabla(x) + d(a)x$;

(ii) $\forall x \in M$, *la suite des* $\nabla^n(x)$ *tend vers zéro pour la topologie p-adique.*

La démonstration est la même sur A et sur K; considérons donc le cas de A.

Fixons un entier m, et, pour tout entier i tel que $0 \leqq i \leqq m$, soit $B'_{m,i}$ la sous-W-algèbre de B_m définie par

$$B'_{m,i} = W_m[[t^{p^i}]] + p\,W_m[[t^{p^{i-1}}]] + \ldots + p^i W_m[[t]];$$

on posera $B'_m = B'_{m,m}$. On observera que si $x \in B'_{m,i}$, alors $x^p \in B'_{m,i+1}$, et que $px \in B'_{m,i}$ si et seulement si $x \in B'_{m,i-1}$. Par récurrence sur i, on en déduit que tout élément $x \in B'_{m,i}$ s'écrit :

$$x = x_0^{p^i} + px_1^{p^{i-1}} + \ldots + p^i x_i,$$

les éléments x_j étant uniquement déterminés modulo p; en particulier, tout élément de B'_m s'écrit :

$$x = x_0^{p^m} + px_1^{p^{m-1}} + \ldots + p^{m-1} x_{m-1}^{p};$$

de plus, d'après la remarque initiale de la démonstration de 4.2.2, les éléments $p^j x_j^{p^{m-j}}$ sont uniquement déterminés dans B'_m. Par ailleurs, B_m est engendrée comme $B'_{m,i}$-algèbre par l'élément t, qui définit un homomorphisme surjectif

$$B'_{m,i}[T]/(T^{p^i} - t^{p^i},\ pT^{p^{i-1}} - pt^{p^{i-1}},\ \ldots,\ p^i T - p^i t) \to B_m;$$

par récurrence sur m, on vérifie que c'est un isomorphisme pour tout i.

Soient alors A′ une A-algèbre, $A'' \to A'$ un homomorphisme surjectif, tel que $p^m A'' = 0$, et dont le noyau est muni de puissances divisées. Il existe alors un homomorphisme β : $B_m \to A''$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} B'_m & \longrightarrow & B_m & \xrightarrow{\beta} & A'' \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A & \xrightarrow{\alpha} & A' \end{array}$$

soit commutatif, et sa restriction β' à B'_m est uniquement déterminée.

La construction de β' se fait comme en 4.2.2, et on l'étend à B_m en envoyant T sur un élément $t'' \in A''$ relevant $\alpha(t)$; d'après la construction de β', les relations

$$p^j t''^{p^{m-j}} = \beta'(p^j t^{p^{m-j}})$$

sont alors automatiquement satisfaites.

Pour tout entier ν, on note $B_m^{\otimes \nu+1}$ le produit tensoriel sur B'_m de $\nu+1$ facteurs B_m, J_ν le noyau de l'homomorphisme canonique $B_m^{\otimes \nu+1} \to B_m$, et $\mathscr{D}_{B_m/B'_m}(\nu)$ l'enveloppe à puissances divisées (compatibles à celle de p) de $(B_m^{\otimes \nu+1}, J_\nu)$ ([2], I, 2.4.2); la condition de compatibilité aux puissances divisées de p entraîne que $\mathscr{D}_{B_m/B'_m}(\nu)$ est aussi l'enveloppe à puissances divisées (compatibles à celles de p) du noyau de l'homomorphisme composé $B_m^{\otimes \nu+1} \to B_m \to A$. On pose $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S_m = \mathrm{Spec}(B_m)$, $S'_m = \mathrm{Spec}(B'_m)$, $D_{S_m/S'_m}(\nu) = \mathrm{Spec}(\mathscr{D}_{B_m/B'_m}(\nu))$. Les immersions $S \to S_m$, $S \to D_{S_m}(\nu)$ sont des objets de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, où $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. Pour $\nu \leqq \nu'$, les homomorphismes naturels $B_m^{\otimes \nu+1} \to B_m^{\otimes \nu'+1}$ induisent des homomorphismes $\mathscr{D}_{B_m/B'_m}(\nu) \to \mathscr{D}_{B_m/B'_m}(\nu')$ commutant aux puissances divisées; on en déduit en particulier des morphismes de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$:

$$p_i : \quad D_{S_m/S'_m}(1) \to S_m, \qquad i = 1, 2,$$
$$q_{ij} : \quad D_{S_m/S'_m}(2) \to D_{S_m/S'_m}(1), \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Considérons $B_m \otimes B_m$ comme B_m-algèbre grâce à l'homomorphisme $x \mapsto x \otimes 1$, et montrons que $\mathscr{D}_{B_m/B'_m}(1)$ est alors isomorphe à une algèbre de polynômes à puissances divisées en une indéterminée sur B_m. On définit un homomorphisme surjectif

$$B_m[X] \to B_m \otimes_{B'_m} B_m,$$

en envoyant X sur $1 \otimes T - T \otimes 1$; son noyau est engendré par les éléments $p^i (X+T)^{p^{m-i}} - p^i t^{p^{m-i}}$. On en déduit un homomorphisme surjectif commutant aux puissances divisées

$$B_m \langle X \rangle \to \mathscr{D}_{B_m/B'_m}(1),$$

où $B_m \langle X \rangle$ est l'algèbre des polynômes à puissances divisées en X, à coefficients dans B_m. Pour montrer que c'est un isomorphisme, il suffit, grâce à la propriété universelle des enveloppes à puissances divisées, de montrer que les relations

$$p^i (T+X)^{p^{m-i}} = p^i t^{p^{m-i}},$$

sont vérifiées pour tout $i \leqq m$ dans $B_m \langle X \rangle$; mais comme X possède des puissances divisées,

$$p^i (T+X)^{p^{m-i}} = p^i T^{p^{m-i}} = p^i t^{p^{m-i}},$$

d'où l'assertion.

Soit maintenant E un cristal sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, et posons

$$M_m = \Gamma(S_m, E_{(S, S_m)}), \qquad M = \varprojlim_m M_m,$$

de sorte que M est un B-module séparé et complet. Comme E est un cristal, il existe des isomorphismes canoniques

$$p_2^*(E_{(S, S_m)}) \xrightarrow{\sim} E_{(S, D_{S_m/S'_m}(1))} \xleftarrow{\sim} p_1^*(E_{(S, S_m)}),$$

d'où un isomorphisme

$$\varepsilon : \quad p_2^*(E_{(S, S_m)}) \xrightarrow{\sim} p_1^*(E_{(S, S_m)});$$

d'après (4.2.1), la restriction de ε au sous-schéma fermé S_m de $D_{S_m/S'_m}(1)$ (par l'immersion diagonale) est l'identité de $E_{(S, S_m)}$, et les images inverses $q_{ij}^*(\varepsilon)$ sur $D_{S_m/S'_m}(2)$ vérifient :

$$q_{13}^*(\varepsilon) = q_{12}^*(\varepsilon) \circ q_{23}^*(\varepsilon). \tag{4.2.4}$$

Compte tenu de ce qui a été vu sur la structure de $\mathscr{D}_{B_m/B'_m}(1)$, il résulte de [2], II, 4.3.9 que la donnée d'un tel isomorphisme ε équivaut à la donnée de $\nabla_n : M_n \to M_n$ vérifiant la relation (i), et tel que pour tout $x \in M_n$ on ait $\nabla_n^q(x) = 0$ pour q assez grand, d'où la condition (ii) sur M. Ceci définit le foncteur annoncé.

Réciproquement, soit (M, ∇) vérifiant les conditions (i) et (ii), et posons $M_m = M/p^m M$. Alors, d'après *loc. cit.*, les opérateurs $\nabla_m : M_m \to M_m$ induits par ∇ définissent un isomorphisme

$$\varepsilon : \quad p_2^*(E_m) \xrightarrow{\sim} p_1^*(E_m),$$

vérifiant les conditions énoncées plus haut, E_m étant le faisceau quasi cohérent sur S_m défini par M_m. Pour tout objet (U, T, δ) de CRIS (S/Σ), il existe localement sur U un morphisme $\beta : (U, T, \delta) \to (S, S_m)$ d'après ce qui a été vu plus haut; si β_1 et β_2 sont deux tels morphismes, les composés $T \to S_m \to S'_m$ sont égaux, de sorte qu'il existe un morphisme $\gamma : T \to S_m \times_{S'_m} S_m$ tel que $\beta_i = p_i \circ \gamma$; d'après la propriété universelle de l'enveloppe à puissances divisées, γ se factorise par $D_{S_m/S'_m}(1)$. Si l'on pose

$$E_{(U, T, \delta)} = \beta^*(E_m),$$

alors $E_{(U, T, \delta)}$ ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de β : si β_1, β_2 sont deux morphismes $(U, T, \delta) \to (S, S_m)$, on en déduit un isomorphisme

$$\gamma^*(\varepsilon) : \quad \beta_2^*(E_m) \xrightarrow{\sim} \beta_1^*(E_m),$$

canonique dans le sens où, si l'on a trois morphismes $(U, T, \delta) \to (S, S_m)$ le triangle

$$\begin{array}{ccc} \beta_3^*(E_m) & \xrightarrow{\sim} & \beta_1^*(E_m) \\ & \searrow^{\sim} \quad \nearrow_{\sim} & \\ & \beta_2^*(E_m) & \end{array}$$

est commutatif grâce à (4.2.4). Ceci permet de définir $E_{(U, T, \delta)}$ par recollement lorsque β n'existe pas globalement sur U; par construction, la famille des $E_{(U, T, \delta)}$ forme alors un cristal sur CRIS (S/Σ), d'où l'équivalence de catégories.

4.3. Soient S un schéma de caractéristique p, G un schéma en groupes commutatif sur S (ou plus généralement un faisceau abélien sur la catégorie des S-schémas); on pose $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, $\Sigma_n = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^n)$. D'après [3], on peut associer à G un faisceau de $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, noté $\mathbb{D}(G)$, contravariant en G et commutant aux changements de base $S' \to S$ au sens de 2.4.1. Résumons les propriétés de $\mathbb{D}(G)$ dont nous aurons besoin par la suite (*voir* [3], [3 *bis*]).

4.3.1. Lorsque G est un schéma en groupes fini localement libre sur S, $\mathbb{D}(G)$ est un cristal, localement de présentation finie comme $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-module. Si G est un groupe p-divisible, $\mathbb{D}(G)$ est un cristal localement libre, de rang égal à la hauteur de G, et s'identifie naturellement au cristal associé à G dans [15]; si (U, T, δ) est tel que $p^n \mathcal{O}_T = 0$,

$$\mathbb{D}(G)_{(U,T,\delta)} \simeq \mathbb{D}(G_n)_{(U,T,\delta)},$$

où $G_n = \mathrm{Ker}(p_G^n)$.

4.3.2. Soit $\mathbf{f}_S$ l'endomorphisme de Frobenius de S, et, pour tout faisceau E sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$, posons $E^\sigma = \mathbf{f}_{S\,\mathrm{CRIS}}^*(E)$; lorsque E est un cristal, et (U, T, δ) un objet de $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ tel qu'il existe un morphisme $\sigma : T \to T$ relevant $\mathbf{f}_U$, et commutant aux δ_i, il existe donc un isomorphisme canonique

$$\sigma^*(E_{(U,T,\delta)}) \xrightarrow{\sim} E^\sigma_{(U,T,\delta)}. \tag{4.3.1}$$

Si G est un schéma en groupes commutatif sur S (resp. un groupe p-divisible), on obtient par fonctorialité des homomorphismes $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-linéaires

$$F : \mathbb{D}(G)^\sigma \to \mathbb{D}(G), \qquad V : \mathbb{D}(G) \to \mathbb{D}(G)^\sigma,$$

tels que $FV = p$, $VF = p$.

4.3.3. Supposons que $S = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau parfait. Si G est un schéma en groupes commutatif, fini localement libre sur S (resp. un groupe p-divisible), le cristal $\mathbb{D}(G)$ est défini d'après 4.2.2 par le W(A)-module :

$$D(G) = \Gamma(\mathrm{CRIS}(S/\mathbb{Z}_p), \mathbb{D}(G)). \tag{4.3.2}$$

D'après 4.3.2, D (G) est muni d'une structure de $\mathbf{D}_A$-module. D'autre part, il existe un homomorphisme canonique ([3], 4.3) :

$$M(G) = \mathrm{Hom}_A(G, CW) \to D(G), \tag{4.3.3}$$

semi-linéaire par rapport à l'automorphisme de Frobenius σ de W(A), commutant à F et V. Si S est le spectre d'un corps parfait, on vérifie, par passage à la clôture algébrique et dévissage en groupes de rang p, que l'on obtient ainsi un isomorphisme

$$M(G)^\sigma \xrightarrow{\sim} D(G), \tag{4.3.4}$$

où M $(G)^\sigma$ est déduit de M (G) par l'extension des sclaires σ (*cf.* [3 *bis*]).

Lorsque A vérifie les hypothèses des sections précédentes, on en déduit l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4.3.4. — *Soient* A *un anneau parfait intègre, dont les localisés sont des corps ou des anneaux de valuation,* $S=\mathrm{Spec}(A)$, G *un schéma en groupes commutatif, fini localement libre sur* S (*resp. un groupe p-divisible*). *Alors l'homomorphisme canonique*

$$M(G)^{\sigma} \to D(G) \tag{4.3.4}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{D}_A$*-modules.*

Supposons d'abord que G soit fini, annulé par p^n. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, $G_{\mathfrak{p}}=G\times_S \mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}})$, $G(\mathfrak{p})=G\times_S \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p}))$. Comme $p^n\,\mathbb{D}(G)=0$, il résulte de (4.2.3) et (4.3.2) que

$$D(G)=\Gamma(\mathrm{Spec}\,W_n(A),\ \mathbb{D}(G_{(S,\,\mathrm{Spec}\,W_n(A))});$$

la formation du cristal $\mathbb{D}$ (G) commutant aux changements de base $S'\to S$, les homomorphismes

$$D(G)\otimes_{W(A)} W(A_{\mathfrak{p}}) \to D(G_{\mathfrak{p}}), \qquad D(G)\otimes_{W(A)} W(k(\mathfrak{p})) \to D(G(\mathfrak{p})),$$

sont des isomorphismes. Comme les homomorphismes analogues pour M (G) sont aussi des isomorphismes, on est ramené au cas où A est un anneau de valuation parfait. Comme M (G) est sans torsion, et que (4.3.4) est un isomorphisme au-dessus du point générique de S, (4.3.4) est injectif; puisque D(G) est un W(A)-module de type fini d'après 4.3.1, et que (4.3.4) est un isomorphisme sur $k(\mathfrak{p})$, (4.3.4) est aussi surjectif.

Le cas où G est un groupe *p*-divisible résulte alors du cas où G est fini par passage à la limite, d'après 3.4.3 et 4.3.1.

4.4. On reprend maintenant les notations de 4.2.3. Si σ est l'automorphisme de Frobenius de W, on note encore σ l'endomorphisme de B (resp. C) défini par

$$\sigma\Big(\sum_i a_i t^i\Big)=\sum_i \sigma(a_i)\, t^{pi}.$$

Si E est un cristal sur A (resp. K) relativement à $\Sigma=\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$, correspondant par 4.2.3 à un B-module M (resp. C-module) muni d'une connexion, il résulte de (4.3.1) que le cristal E^{σ} correspond au B-module M^{σ} (resp. C-module) déduit de M par l'extension des scalaires σ.

DÉFINITION 4.4.1. — *Soit* S *un schéma de caractéristique p. On appelle* F-cristal sur S *la donnée d'un cristal* E *sur* S, *localement libre de rang fini, et d'un homomorphisme linéaire* $F : E^{\sigma}\to E$ *tel qu'il existe un entier n et un homomorphisme linéaire* $V : E\to E^{\sigma}$ *vérifiant* $FV=p^n$, $VF=p^n$.

Pour $a\geqq 1$, on note E^{σ^a} le faisceau déduit d'un faisceau E sur $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ en appliquant a fois le foncteur M^{σ}. Par abus de langage, nous appellerons aussi F-cristal la donnée d'un cristal E localement libre de rang fini, et d'un homomorphisme linéaire $F : E^{\sigma^a}\to E$ comme plus haut.

Si G est un groupe p-divisible sur S, $\mathbb{D}(G)$ est de façon naturelle un F-cristal d'après ce qui précède. Un F-cristal sur A (resp. K) s'identifie donc à un B-module libre de rang fini M (resp. C-module), muni d'une connexion ∇ vérifiant les conditions de 4.2.3, et d'un homomorphisme $F : M^{\sigma} \to M$, commutant à ∇, tel qu'il existe n, $V : M \to M^{\sigma}$, avec $FV = p^n$, $VF = p^n$. Un homomorphisme de F-cristaux s'identifie à un homomorphisme B-linéaire (resp. C-linéaire) $M \to M'$, commutant à ∇ et F.

On conjecture que le foncteur qui à un groupe p-divisible G associe le F-cristal $\mathbb{D}(G)$ est pleinement fidèle, pour des bases S assez générales. Il est donc naturel de retranscrire le problème 4.1 en un problème sur les F-cristaux. Observons que si E est un F-cristal sur A, défini par un B-module libre de rang fini M muni de ∇, F, sa restriction E_K à $\mathrm{CRIS}(K/\Sigma)$ est définie par le C-module

$$N = \varprojlim_n E_{(\mathrm{Spec}(K),\ \mathrm{Spec}(C_n))} \simeq \varprojlim_n E_{(\mathrm{Spec}(A),\ \mathrm{Spec}(B_n))} \otimes_{B_n} C_n \simeq M \otimes_B C,$$

puisque E est un cristal, libre de rang fini; de plus N est muni des endomorphismes ∇, F définis de manière évidente par ceux de M.

PROBLÈME 4.4.2. — *Soient* E, E′ *deux* F-*cristaux sur* $A = k\ [[t]]$. *L'homomorphisme canonique* (*où* Hom *est l'ensemble des homomorphismes de* F-*cristaux*) :

$$\mathrm{Hom}(E, E') \to \mathrm{Hom}(E_K, E'_K)$$

est-il un isomorphisme ?

D'après la description précédente du foncteur qui à E associe E_K, cet homomorphisme est toujours injectif. On ignore par contre s'il est toujours surjectif; nous donnerons plus bas un exemple où il en est ainsi.

Le lien entre les problèmes 4.4.2 et 4.1 est alors fourni par le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4.3. — *Soient* G, G′ *deux groupes p-divisibles sur* A, E *et* E′ *les* F-*cristaux* $\mathbb{D}(G)$, $\mathbb{D}(G')$. *Si l'homomorphisme*

$$\mathrm{Hom}(E', E) \to \mathrm{Hom}(E'_K, E_K)$$

est un isomorphisme, il en est de même de l'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(G, G') \to \mathrm{Hom}(G_K, G'_K).$$

On note $\overline{A}$, $\overline{K}$ les clôtures parfaites de A, K; $\overline{A}$ est un anneau de valuation parfait, de corps des fractions $\overline{K}$.

Soit $\varphi : G_K \to G'_K$. Par fonctorialité, φ définit un morphisme de F-cristaux

$$\mathbb{D}(\varphi) : \quad \mathbb{D}(G'_K) \to \mathbb{D}(G_K).$$

Si l'on suppose que $\mathrm{Hom}(E', E) \to \mathrm{Hom}(E'_K, E_K)$ est surjectif, il existe un morphisme de F-cristaux

$$u : \quad \mathbb{D}(G') \to \mathbb{D}(G),$$

induisant $\mathbb{D}(\varphi)$ par le changement de base $A \to K$. Par extension des scalaires de A à $\overline{A}$, on obtient un morphisme de F-cristaux

$$u_{\overline{A}} : \quad \mathbb{D}(G')_{\overline{A}} \to \mathbb{D}(G)_{\overline{A}},$$

et comme la formation de $\mathbb{D}(G)$ commute aux changements de base, on peut considérer $u_{\overline{A}}$ comme un morphisme

$$u_{\overline{A}} : \quad \mathbb{D}(G'_{\overline{A}}) \to \mathbb{D}(G_{\overline{A}}).$$

Identifiant un cristal sur $\overline{A}$ à un $W(\overline{A})$-module, $\mathbb{D}(G'_{\overline{A}})$ et $\mathbb{D}(G_{\overline{A}})$ s'identifient à $M(G'_{\overline{A}})^{\sigma}$ et $M(G_{\overline{A}})^{\sigma}$ d'après (4.3.2) et (4.3.4). De plus, l'homomorphisme $u_{\overline{A}}$ est $W(\overline{A})$-linéaire, et commute à F; comme $M(G_{\overline{A}})$ et $M(G'_{\overline{A}})$ sont libres sur $W(\overline{A})$, donc sans p-torsion, $u_{\overline{A}}$ commute aussi à V, et $u_{\overline{A}}$ s'identifie à un homomorphisme $\mathbf{D}_{\overline{A}}$-linéaire $M(G'_{\overline{A}})^{\sigma} \to M(G_{\overline{A}})^{\sigma}$. D'après 3.4.3, il existe alors un homomorphisme $\psi : \ G_{\overline{A}} \to G'_{\overline{A}}$ tel que

$$\mathbb{D}(\psi) = u_{\overline{A}};$$

de plus, l'homomorphisme $\psi_{\overline{K}} : G_{\overline{K}} \to G'_{\overline{K}}$ induit sur les cristaux l'homomorphisme

$$\mathbb{D}(\psi_{\overline{K}}) = \mathbb{D}(\psi)_{\overline{K}} = u_{\overline{K}} = (u_K)_{\overline{K}} = \mathbb{D}(\varphi)_{\overline{K}} = \mathbb{D}(\varphi_{\overline{K}}).$$

Comme le foncteur $\mathbb{D}$ s'identifie sur $\overline{K}$ au foncteur M^{σ}, il est fidèle, et par suite

$$\psi_{\overline{K}} = \varphi_{\overline{K}}.$$

Si G_n, G'_n sont les noyaux de la multiplication par p^n sur G, G', et si R_n, R'_n sont leurs algèbres sur A, ce sont des A-modules libres de rang fini, et par suite l'homomorphisme φ est défini par des matrices à coefficients dans $K \cap \overline{A} = A$, ce qui prouve le théorème.

4.5. Avant d'appliquer 4.4.3 à la démonstration d'un cas particulier du « théorème de Tate », observons que la réponse au problème 4.4.2 ne dépend que de la classe des cristaux E et E′ à isogénie près.

DÉFINITION 4.5.1. — *Un morphisme de* F-*cristaux* $f : E \to E'$ *est une isogénie s'il existe un entier* n *et un morphisme de* F-*cristaux* $g : E' \to E$ *tels que* $g \circ f = p^n, f \circ g = p^n$.

Une isogénie entre groupes p-divisibles induit par fonctorialité une isogénie entre les F-cristaux associés.

Si la base est $k[[t]]$ [resp. $k((t))$], de sorte que E et E′ s'identifient à des B-modules M et M′ (resp. C-modules) munis de V, F, alors l'homomorphisme $M \to M'$ identifie M à un sous-module de M′, stable par V et F, tel que $p^n M' \subset M$.

PROPOSITION 4.5.2. — *Soient* E, E′, D, D′ *quatre* F-*cristaux sur* $A = k[[t]]$, $u : D \to E$, $v : E' \to D'$ *deux isogénies,* $f : E_K \to E'_K$ *un morphisme de* F-*cristaux sur* $K = k((t))$. *Alors* f *est défini sur* A *si et seulement si* $v_K \circ f \circ u_K$ *est défini sur* A.

Pour que f soit défini sur A, il faut et suffit que, si l'on identifie E, E' à des B-modules libres de rang fini M, M' munis de F, ∇, et f à un homomorphisme $M \otimes_B C \to M' \otimes_B C$ commutant à ∇ et F, $f(x)$ appartienne à M' pour tout $x \in M$ (en identifiant M et M' à des réseaux de $M \otimes_B C$, $M' \otimes_B C$).

Le W-module quotient C/B est l'ensemble des séries formelles restreintes de la forme

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i t^i,$$

et est sans p-torsion. Par suite, si M est un B-module libre, et si $x \in M \otimes_B C$ est tel que $px \in M$, alors $x \in M$. Soient N, N' les B-modules (munis de ∇, F) définissant D, D'; les isogénies u et v identifient N à un sous-module de M, M' à un sous-module de N'. Supposons alors que $v_K \circ f$ soit défini sur A; pour tout $x \in M$, on a donc $f(x) \in N'$. Or il existe n tel que $p^n N' \subset M'$, donc $p^n f(x) \in M'$, et $f(x) \in M'$ d'après la remarque précédente. On procède de même pour $f \circ u_K$.

Remarque 4.5.3. — Il est facile de vérifier l'analogue de 4.5.2 pour les groupes p-divisibles, soit par 4.4.3, soit plus simplement directement.

4.6. Rappelons que si k est un corps algébriquement clos, la catégorie des F-cristaux à isogénie près sur k est semi-simple, et tout F-cristal sur k est isogène à un F-cristal E défini par un W-module de la forme

$$M = \bigotimes_{\substack{\lambda \in \mathbb{Q} \\ \lambda \geqq 0}} (W_\sigma[F]/(F^s - p^r))^{d_\lambda}, \qquad \text{avec} \quad \lambda = r/s, \quad (r, s) = 1,$$

où $(F^s - p^r)$ est l'idéal à gauche engendré par $F^s - p^r$, l'endomorphisme F de E étant défini par la multiplication à gauche par F sur M (théorème de Dieudonné-Manin, *cf.* [14] ou [5], IV, § 4). Les nombres rationnels λ tels que $d_\lambda \neq 0$ sont les *pentes* de M, et permettent de construire un polygone convexe, dont les côtés ont pour pente λ et une projection horizontale de longueur $s_\lambda d_\lambda$, appelé *polygone de Newton* du F-cristal. Sa connaissance équivaut donc à la connaissance du F-cristal à isogénie près.

Si S est un schéma de caractéristique p, et E un F-cristal (resp. G un groupe p-divisible) sur S, et si $\overline{k(x)}$ est une clôture algébrique du corps résiduel en un point $x \in S$, les pentes et le polygone de Newton de E (resp. G) au point x sont par définition ceux du F-cristal déduit de E par le changement de base $\mathrm{Spec}(\overline{k(x)}) \to S$ [resp. du module de Dieudonné de $G \times_S \mathrm{Spec}(\overline{k(s)})$]. Par ailleurs, les définitions s'étendent au cas plus général d'un cristal E localement libre de rang fini sur $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$, muni d'une isogénie $F : E^{\sigma^a} \to E$ pour un certain entier a.

Soient de nouveau k un corps parfait, $A = k[[t]]$, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $B = W[[t]]$. Nous allons considérer dans la suite le cas particulier des F-cristaux sur S dont le polygone de Newton est constant sur S (rappelons que dans le cas général, le polygone de Newton s'élève par spécialisation, d'après un théorème de Grothendieck [11]). Le résultat suivant, dû à Katz ([13], cor. 2.6.3), est la clé de la structure à isogénie près d'un tel F-cristal, les pentes étant ici supposées entières.

THÉORÈME 4.6.1. — *Soit* E *un* F-*cristal sur* S, *avec* $F : E^{\sigma^a} \to E$, *dont le polygone de Newton est constant sur* S, *et dont les pentes sont des entiers*

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_d.$$

Alors E *est isogène sur* S *à un* F-*cristal* $\tilde{E}$ *possédant une filtration par des sous*-F-*cristaux*

$$0 = \tilde{E}_0 \subset \tilde{E}_1 \subset \ldots \subset \tilde{E}_d = \tilde{E},$$

telle que les $\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}$ *soient libres de rang fini, et que :*

(i) *sur chaque* $\tilde{E}/\tilde{E}_{i-1}$, $F = p^{r_i} F_i$, *avec* $F_i : (\tilde{E}/\tilde{E}_{i-1})^{\sigma^a} \to \tilde{E}/\tilde{E}_{i-1}$;

(ii) *sur chaque* $\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}$, F_i *est un isomorphisme.*

De plus, cette filtration possède un scindage unique sur la clôture parfaite $\overline{A}$ *de* A.

Explicitons le foncteur de changement de base de A à $\overline{A}$, en termes des descriptions 4.2.2 et 4.2.3. D'après 4.2.3, la donnée d'un homomorphisme $\rho : B \to W(\overline{A})$ relevant l'homomorphisme $A \to \overline{A}$ équivaut à la donnée d'un élément de $W(\overline{A})$ relevant l'élément $t \in \overline{A}$. On définit donc un tel homomorphisme en posant

$$\rho(t) = \tilde{t} = (t, 0, \ldots).$$

Si E est un cristal sur A, l'homomorphisme

$$E_{(A, W_n([t]))} \otimes_{W_n[[t]]} W_n(\overline{A}) \to E_{(\overline{A}, W_n(\overline{A}))}$$

est un isomorphisme pour tout n. Le foncteur de changement de base peut donc s'interpréter comme le foncteur qui à un B-module M, libre de rang fini et muni d'une connexion ∇, associe le $W(\overline{A})$-module $M \otimes_B W(\overline{A})$, ce dernier ne dépendant pas, à isomorphisme canonique près, du choix fait pour définir ρ, grâce à la connexion ∇ sur M.

THÉORÈME 4.7.1. — *Soient* E, E′ *deux* F-*cristaux sur* $S = \mathrm{Spec}(k[[t]])$, *avec* $F_E : E^{\sigma^a} \to E$, $F_{E'} : E'^{\sigma^a} \to E$, *tels que leurs polygones de Newton soient constants sur* S, *et soient* E_K *et* E'_K *leurs fibres génériques. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}(E, E') \to \mathrm{Hom}(E_K, E'_K)$$

est un isomorphisme.

Notons encore ρ l'homomorphisme

$$C = \varprojlim W_n[[t]][1/t] \to W(\overline{K})$$

envoyant t sur $\tilde{t} = (t, 0, \ldots)$; l'homomorphisme canonique

$$W_n(\overline{A}) \otimes_{B_n} C_n \to W_n(\overline{K})$$

est alors un isomorphisme. D'autre part, $W_n(\overline{A})$ est fidèlement plat sur B_n : en effet, d'une part

$$W_n(\overline{A}) \otimes_{B_n} (B_n/p\,B_n) \simeq W_n(\overline{A})/p\,W_n(\overline{A}) \simeq \overline{A}$$

est plat sur $B_n/p\,B_n = A$, puisque sans t-torsion; d'autre part,

$$\mathrm{Tor}_1^{B_n}(W_n(\overline{A}),\ B_n/p\,B_n) = 0,$$

comme le montre la résolution

$$\ldots \xrightarrow{p} B_n \xrightarrow{p^{n-1}} B_n \xrightarrow{p} B_n \to B_n/p\,B_n \to 0,$$

de $B_n/p\,B_n$; par suite $W_n(\overline{A})$ est plat sur B_n, donc fidèlement plat puisque ρ est un homomorphisme local d'anneaux locaux. Par conséquent, l'homomorphisme

$$\rho : \quad C_n/B_n \to W_n(\overline{K})/W_n(\overline{A}) \simeq W_n(\overline{A}) \otimes_{B_n} (C_n/B_n)$$

est injectif. Or, pour montrer qu'un homomorphisme $E_K \to E'_K$ est défini sur A, il suffit de vérifier que pour un choix de bases sur B de E et E', il est défini par une matrice à coefficients dans B; il suffira donc de faire cette vérification après extension des scalaires à $W(\overline{K})$.

Comme il existe un entier b tel que F_E^b et $F_{E'}^b$ aient des pentes entières, on peut supposer que E et E' ont des pentes entières. D'après 4.5.2, on peut les remplacer par des F-cristaux isogènes, de sorte qu'on peut supposer qu'ils possèdent une filtration vérifiant les conditions de 4.6.1. Passant à la clôture parfaite de A, cette filtration est scindée sur $\overline{A}$, ce qui nous ramène au cas de F-cristaux où F est de la forme $p^r\varphi$, φ étant un isomorphisme $E^{\sigma a} \xrightarrow{\sim} E$. Mais si E est de pente r, et E' de pente r', avec $r' \neq r$, le théorème de semi-simplicité de la catégorie des F-cristaux à isogénie près sur un corps algébriquement clos montre que tout morphisme de E_K dans E'_K est nul. On peut donc supposer que la pente r est la même pour E et E'.

Notons v la valuation de $\overline{K}$; son groupe des ordres est $\mathbb{Z}[1/p]$. On définit une famille d'applications

$$\omega_n : \quad W(\overline{K}) \to \mathbb{Z}[1/p] \cup \{+\infty\}, \qquad n \geqq 0,$$

en posant, pour $x = (x_0, \ldots, x_n, \ldots)$:

$$\omega_n(x) = \inf_{0 \leqq i \leqq n} v(x_i)/p^i.$$

Compte tenu de l'isobarité des polynômes S_i et P_i, on vérifie facilement les relations

(i) $x = 0 \Leftrightarrow \forall\, n,\ \omega_n(x) = +\infty$; $x \in W_n(\overline{A}) \Leftrightarrow \forall\, n,\ \omega_n(x) \geqq 0$;
(ii) $\omega_n(x+y) \geqq \mathrm{Inf}(\omega_n(x), \omega_n(y))$;
(iii) $\omega_n(xy) \geqq \omega_n(x) + \omega_n(y)$; $\omega_n(\tilde{a}x) = v(a) + \omega_n(x)$ pour $a \in A$;
(iv) $\omega_n(px) = \omega_{n-1}(x)$;
(v) $\omega_n(\sigma(x)) = p\,\omega_n(x)$.

Si $\Gamma=(\gamma_{ij})$ est une matrice à coefficients dans $W(\overline{K})$, on pose

$$\omega_n(\Gamma)=\operatorname*{Inf}_{i,j}\omega_n(\gamma_{ij}),$$

et les relations précédentes restent vérifiées. Enfin, si E et E′ sont des modules libres de rang fini sur $W(\overline{A})$, munis de bases (e_i) et (e'_i) sur $W(\overline{A})$, et si $u : E\otimes W(\overline{K})\to E'\otimes W(\overline{K})$ est une application linéaire de matrice Γ dans les bases (e_i) et (e'_i), on pose

$$\omega_n(u)=\omega_n(\Gamma),$$

et cette définition est indépendante du choix des bases sur $W(\overline{A})$. En particulier, si v est un isomorphisme défini sur $W(\overline{A})$,

$$\omega_n(u)=\omega_n(v^{-1}\circ v\circ u)\geqq\omega_n(v^{-1})+\omega_n(v\circ u)\geqq\omega_n(v\circ u)\geqq\omega_n(v)+\omega_n(u)\geqq\omega_n(u),$$

donc pour tout n et tout u :

$$\omega_n(v\circ u)=\omega_n(u);$$

de même,

$$\omega_n(u\circ v)=\omega_n(u).$$

Soit alors $u : E_K\to E'_K$ un morphisme de F-cristaux, où E et E′ sont tels que $F_E=p^r\varphi_E$, $F_{E'}=p^r\varphi_{E'}$, φ_E et $\varphi_{E'}$ étant des isomorphismes. Puisque u commute à F_E et $F_{E'}$, et que E′ est sans p-torsion, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E^{\sigma^a} & \xrightarrow{u^{(\sigma^a)}} & E'^{\sigma^a} \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_E} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{E'}} \\ E & \xrightarrow{u} & E' \end{array}$$

est commutatif. On en déduit pour tout n :

$$\omega_n(u)=\omega_n(u\circ\varphi_E)=\omega_n(\varphi_{E'}\circ u^{(\sigma^a)})=\omega_n(u^{(\sigma^a)})=p^a\omega_n(u),$$

d'où $\omega_n(u)=0$ ou $\omega_n(u)=+\infty$; par suite, $\omega_n(u)\geqq 0$ pour tout n, et u est défini par un morphisme de F-cristaux $E\to E'$.

THÉORÈME 4.7.2. — *Soient* S *un schéma connexe normal de caractéristique* $p>0$, K *le corps des fonctions rationnelles sur* S, G *et* H *deux groupes p-divisibles sur* S, *de fibres génériques* G_K, H_K. *On suppose que les polygones de Newton de* G *et* H *sont constants sur* S. *Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_S(G,H)\to\mathrm{Hom}_K(G_K,H_K)$$

est un isomorphisme.

Le dévissage de 4.1 conservant l'hypothèse sur G et H, on est ramené à $S=\mathrm{Spec}(k[[t]])$. L'énoncé résulte alors de 4.7.1 et 4.4.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. BARSOTTI, *Moduli canonici e gruppi analitici commutativi* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, vol. 13, 1959, p. 303-372).

[2] P. BERTHELOT, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p>0$* (*Lecture Notes in Math.*, n° 407, 1974, Springer-Verlag).

[3] P. BERTHELOT et W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline I* [*Journées de Géométrie algébrique*, Rennes, 1978 (*Astérisque*, vol. 63)].

[3 *bis*] P. BERTHELOT, L. BREEN et W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline II*, en préparation.

[4] L. BREEN, *Un théorème d'annulation pour certains* Ext^i *de faisceaux abéliens* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 8, 1975, p. 339-352).

[5] M. DEMAZURE, *Lectures on p-Divisible Groups* (*Lecture Notes in Math.*, n° 302, 1972, Springer-Verlag).

[6] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, *Groupes algébriques*, North-Holland, 1970.

[7] S. EILENBERG et S. MACLANE, *On the Groups* $H(\pi, n)$, I, II (*Ann. of Math.*, vol. 58, 1953, p. 53-106 et vol. 60, 1954, p. 49-139).

[8] J.-M. FONTAINE, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux* (*Astérisque*, 1977, vol. 47-48).

[9] J.-M. FONTAINE, *Sur la construction du module de Dieudonné d'un groupe formel* (*C.R. Acad. Sc.*, t. 280, série A, 1975, p. 1273-1276).

[10] A. GROTHENDIECK, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux*. In *Actes, Congrès intern. Math.*, t. 1, 1970, p. 431-436, Gauthier-Villars, Paris.

[11] A. GROTHENDIECK, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné* (*Sém. Math. Sup.*, vol. 45, 1970, Presses de l'Université de Montréal).

[12] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations I* (*Lectures Notes in Math.*, n° 239, 1971, Springer-Verlag).

[13] N. KATZ, *Slope Filtration of* F*-Crystals* [*Journées de Géométrie algébrique*, Rennes, 1978 (*Astérisque*, vol. 63)].

[14] Yu. I. MANIN, *The Theory of Commutative Formal Groups Over Fields of Finite Characteristic* (*Russian Math. Surveys*, vol. 18, 1963, p. 1-83).

[15] B. MAZUR et W. MESSING, *Universal Extensions and One-Dimensional Crystalline Cohomology* (*Lecture Notes in Math.*, n° 370, 1974, Springer-Verlag).

[16] W. MESSING, *The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups* (*Lecture Notes in Math.*, n° 264, 1972, Springer-Verlag).

[17] F. OORT et J. TATE, *Group Schemes of Prime Order* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 3, 1970, p. 1-21).

[18] M. RAYNAUD, *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$ (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 102, 1974, p. 241-280).

[19] S.G.A. 3, *Schémas en groupes I* (*Lecture Notes in Math.*, n° 151, 1970, Springer-Verlag).

[20] S.G.A. 7, *Groupes de monodromie en Géométrie algébrique I* (*Lecture Notes in Math.*, n° 288, 1972, Springer-Verlag).

[21] J.-P. SERRE, *Groupes p-divisibles*. In *Sém. Bourbaki*, 19^e année, n° 318, 1966-1967, Benjamin, New York.

[22] J. TATE, *p-Divisible Groups*. In *Proceedings of a Conference on Local Fields*, 1967, p. 158-183, Springer-Verlag.

[23] M. POLETTI, *Iperalgebre su schiere valutanti* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, vol. 23, 1969, p. 745-770).

(Manuscrit reçu le 4 avril 1979.)

P. BERTHELOT,
Université de Rennes-I,
U.E.R. de Mathématiques et Informatique,
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes Cedex.