Annales scientifiques de l'É.N.S.

Lionel Bérard-Bergery

Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 11, nº 4 (1978), p. 543-576

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_4_543_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 11, 1978, p. 543 à 576.

SUR LA COURBURE DES MÉTRIQUES RIEMANNIENNES INVARIANTES DES GROUPES DE LIE ET DES ESPACES HOMOGÈNES

PAR LIONEL BÉRARD BERGERY

1. Introduction

Cet article rassemble plusieurs résultats sur la courbure (sectionnelle, de Ricci ou scalaire) des métriques riemanniennes invariantes sur les groupes de Lie et les espaces homogènes. Les deux résultats principaux répondent à des questions posées par J. Milnor dans l'article [M] de la bibliographie :

THÉORÈME 1. — *Les trois propositions suivantes sont équivalentes pour un groupe de Lie connexe* G *:*

(1) G *admet une métrique riemannienne invariante à gauche à courbure sectionnelle positive ou nulle;*

(2) G *admet une métrique riemannienne invariante à gauche à courbure de Ricci positive ou nulle;*

(3) *le revêtement universel de* G *est produit semi-direct d'un sous-groupe distingué admettant une métrique riemannienne invariante à gauche à courbure sectionnelle nulle, et d'un sous-groupe semi-simple qui opère sur le précédent par isométries pour l'une des métriques riemanniennes invariantes plates.*

THÉORÈME 2. — *Soit* $M = G/H$ *un espace homogène sous un groupe de Lie connexe* G, *admettant des métriques riemanniennes* G*-invariantes. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le revêtement universel de* M *est difféomorphe à un espace euclidien;*

(2) *toute métrique riemannienne* G*-invariante sur* M *est ou bien plate ou bien à courbure scalaire strictement négative.*

L'article est divisé en trois parties. La première (§ 2 à 4) donne la démonstration du théorème 1. La deuxième (§ 5 et 6) donne la démonstration du théorème 2 pour les groupes de Lie (ce qui était la question de Milnor dans [M]). La troisième donne la démonstration du théorème 2 dans le cas général et précise (dans les théorèmes 8, 9 et 10) quels sont les signes possibles pour la courbure scalaire de toutes les métriques riemanniennes G-invariantes sur G/H. D'une façon plus détaillée :

— au paragraphe 2, après avoir fixé les notations, on construit des métriques riemanniennes invariantes à courbure sectionnelle (ou de Ricci) positive ou nulle sur les groupes de Lie vérifiant l'énoncé (3) du théorème 1;

— au paragraphe 3, on démontre que ces constructions fournissent tous les groupes de Lie et toutes les métriques riemanniennes invariantes à gauche à courbure sectionnelle (ou de Ricci) positive ou nulle;

— au paragraphe 4, on étudie le cas particulier de la courbure de Ricci nulle, et l'on indique une nouvelle démonstration (communiquée à l'auteur par E. Heintze) du théorème récent de D. V. Alekseevski et B. N. Kimel'fel'd ([A-K]) : *un espace homogène riemannien à courbure de Ricci nulle est plat*;

— au paragraphe 5, on détaille le calcul de la courbure d'une métrique riemannienne invariante à gauche pour un groupe de Lie admettant un sous-groupe distingué propre non trivial, en fonction des courbures des métriques induites sur ce sous-groupe et sur le quotient;

— au paragraphe 6, on exploite ces calculs pour la démonstration du théorème 2 dans le cas des métriques riemanniennes invariantes à gauche sur les groupes de Lie;

— au paragraphe 7, on démontre le théorème 2 dans le cas des espaces homogènes compacts, et on classifie également les espaces homogènes compacts dont toutes les métriques riemanniennes invariantes sont à courbure scalaire positive;

— au paragraphe 8, on introduit une construction auxiliaire et on utilise en particulier la théorie des submersions riemanniennes pour construire certaines métriques riemanniennes invariantes à courbure scalaire strictement positive;

— au paragraphe 9, on démontre le théorème 2 pour les espaces homogènes non compacts, en se ramenant par une autre construction de submersions riemanniennes à à l'étude de quelques cas particuliers qui sont traités au paragraphe suivant;

— au paragraphe 10, on étudie le cas particulier des espaces homogènes non compacts G/H, où G est un groupe de Lie simple de type non compact et H un sous-groupe connexe semi-simple compact maximal (pour ces trois propriétés) et qui n'est pas maximal parmi les sous-groupes de G. On est amené à étudier en détail l'espace homogène $SO_0(n, 2)/SO(n)$ dont on montre en passant qu'il admet (si $n \geqq 2$) une métrique riemannienne invariante à courbure de Ricci strictement négative (ce qui n'est pas le cas des autres espaces homogènes G/H de ce paragraphe);

— au paragraphe 11, on classe dans le théorème 9 les espaces homogènes qui admettent une métrique riemannienne invariante à courbure sectionnelle identiquement nulle et parmi eux ceux dont toutes les métriques riemanniennes invariantes sont plates;

— au paragraphe 12, on termine l'étude de toutes les possibilités pour le signe de la courbure scalaire des métriques riemanniennes invariantes sur les espaces homogènes en classant dans le théorème 10, les espaces homogènes non compacts dont toutes les métriques riemanniennes invariantes ont une courbure scalaire strictement positive.

Je remercie le référé pour ses suggestions.

I. GROUPES DE LIE A COURBURE DE RICCI POSITIVE OU NULLE

2. Construction de métriques à courbure positive ou nulle

Dans tout l'article, G sera un groupe de Lie connexe et $\mathfrak{G}$ sera l'algèbre de Lie de G, identifiée indifféremment soit à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G, soit à l'espace tangent à G en son élément neutre e. On dira qu'une métrique riemannienne est invariante si elle est invariante par l'action de G à gauche. La donnée d'une telle métrique est alors équivalente à la donnée d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{G}$. Une métrique riemannienne invariante est dite bi-invariante si elle est aussi invariante par l'action de G à droite; le produit scalaire correspondant est alors invariant par l'action adjointe de G sur $\mathfrak{G}$, et l'action adjointe d'un élément de $\mathfrak{G}$ sur elle-même est alors antisymétrique. De plus, comme G est connexe, cette dernière condition est en fait équivalente à la bi-invariance. On dira parfois pour simplifier qu'un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante est un groupe de Lie riemannien. On aura besoin pour la construction annoncée du résultat classique suivant :

PROPOSITION 1. — *Si* G *est le produit semi-direct d'un sous-groupe distingué connexe* H *et d'un sous-groupe* K, *si* H *et* K *sont munis de métriques riemanniennes invariantes telles que l'action de* K *sur* H *se fasse par des isométries, alors la métrique produit sur la variété* $H \times K = G$ *est invariante à gauche pour* G.

Démonstration. — Dans la décomposition canonique $G = H \times K$, le produit s'écrit $(a, b)(c, d) = (a\,\alpha_b(c), bd)$ où α_b est l'action de l'élément b de K sur H. L'action à gauche L de l'élément (a, b) sur G peut donc s'écrire :

$$L_{(a, b)} = (L_a \times \mathrm{Id}_K) \circ (\alpha_b \times \mathrm{Id}_K) \circ (\mathrm{Id}_H \times L_b)$$

et les trois facteurs sont des isométries par hypothèse.

Voici quelques applications de cette proposition :

COROLLAIRE 1. — *Sous les hypothèses de la proposition* 1, *si* H *et* K *sont abéliens, la métrique obtenue sur* G *est à courbure nulle.*

On aura besoin plus loin de la réciproque de ce résultat :

THÉORÈME 3 (J. I. Hano [HA], p. 898, il y a aussi une démonstration dans [M]). — *Si* G *est un groupe de Lie riemannien à courbure sectionnelle nulle, alors il existe un sous-groupe abélien distingué* H *et un sous-groupe abélien* K *de* G *tels que* G *soit produit semi-direct de* H *et* K, *la métrique riemannienne de* G *est la métrique produit de deux métriques riemanniennes invariantes sur* H *et* K *dans la décomposition canonique* $G = H \times K$ *et l'action de* K *sur* H *se fait par des isométries et est effective.*

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses de la proposition* 1, *si* H *est compact et semi-simple, et si* K *est abélien et agit sur* H *par des automorphismes intérieurs de* H, *alors* G *admet une métrique riemanniennes invariante à courbure sectionnelle positive ou nulle.*

Démonstration. — Le groupe H admet des métriques bi-invariantes qui d'une part sont à courbure sectionnelle positive ou nulle, d'autre part sont invariantes par les automorphismes intérieurs. On prend une telle métrique sur H et une métrique riemannienne invariante (automatiquement plate) sur K, et on applique la proposition 1.

A partir de ces deux corollaires, on obtient plus généralement :

COROLLAIRE 3. — *Soit* G *un groupe de Lie et trois sous-groupes* P, A, H *vérifiant :*

(1) P *est un sous-groupe distingué connexe admettant une métrique riemannienne invariante* g_1 *à courbure sectionnelle nulle;*

(2) A *est un sous-groupe abélien connexe;*

(3) H *est un sous-groupe semi-simple compact connexe, distingué dans le produit semi-direct* AH*;*

(4) A *opère sur* H *par des automorphismes intérieurs;*

(5) AH *opère sur* P *par des isométries de* g_1;

(6) G *est le produit semi-direct de* P *et de* AH.

Soit g la métrique riemannienne invariante sur G *qui est produit de* g_1 *sur* P, *d'une métrique riemannienne invariante* g_2 *sur* A *et d'une métrique riemannienne invariante* g_3 *sur* H, *avec* g_3 *invariante sous l'action de* A *sur* H *et à courbure sectionnelle* (*respectivement de Ricci*) *positive ou nulle. Alors g est elle-même à courbure sectionnelle* (*respectivement de Ricci*) *positive ou nulle.*

Démonstration. — On applique le corollaire 2 pour le produit AH, puis la proposition 1 pour le produit de P et de AH.

Remarque 1. — Il peut y avoir sur H des métriques riemanniennes invariantes (et invariantes par A) à courbure positive ou nulle autres que les bi-invariantes.

Remarque 2. — Comme toute extension d'un groupe semi-simple par un groupe abélien est en fait triviale, on sait que, sous les hypothèses du corollaire 3, il existe un sous-groupe A′ de AH tel que le groupe AH soit le produit *direct* de A′ et H. Donc G est en fait le produit semi-direct de PA′ et de H, avec H semi-simple compact et PA′ admettant une métrique riemannienne invariante à courbure sectionnelle nulle, invariante pour l'action de H sur PA′. On retrouve ici l'énoncé (3) du théorème 1. Mais il faut remarquer que le corollaire 3 fournit plus de métriques invariantes à courbure positive ou nulle sur G que l'application directe de la proposition 1 à PA′ et H.

3. Démonstration du théorème 1

Pour démontrer le théorème 1, il suffit de démontrer la réciproque suivante du corollaire 3.

THÉORÈME 4. — *Soit* G *un groupe de Lie riemannien simplement connexe dont la courbure sectionnelle* (*respectivement de Ricci*) *est positive ou nulle. Alors* G *est l'un des groupes de Lie riemanniens obtenus par la construction du corollaire* 3.

Grâce à la remarque 2, on voit facilement que le théorème 1 est une conséquence immédiate du corollaire 3 et du théorème 4.

Démonstration du théorème 4. — Il suffit de démontrer le théorème pour le cas de la courbure de Ricci. Le cas de la courbure sectionnelle suit alors aisément. Le point de départ de la démonstration est la classification par J. Cheeger et D. Gromoll des espaces homogènes riemanniens à courbure de Ricci positive ou nulle, obtenue comme corollaire de leur théorème de scindage; en transposant directement à la situation du théorème 4 le théorème 5, p. 127 de [C-G], on obtient le

LEMME 1. — *Si* G *vérifie les hypothèses du théorème* 4, *alors,* comme variété riemannienne, G *est le produit d'une variété plate* R *isométrique à un espace euclidien* $\mathbf{R}^n$, *et d'une variété compacte simplement connexe* H *à courbure de Ricci positive ou nulle. De plus, la composante connexe de l'identité* $I_0(G)$ *du groupe des isométries de* G *est exactement le produit* $I_0(R) \times I_0(H)$.

Dans la décomposition $G = R \times H$, l'élément neutre e de G s'écrit $e = (e', e'')$ et on identifiera désormais R et H avec respectivement $R \times \{ e'' \}$ et $\{ e' \} \times H$.

LEMME 2. — *Les sous-variétés* R et H *sont des sous-groupes de* G.

Démonstration. — Pour tout élément (a, b) de G, on sait par le lemme 1 que l'isométrie $L_{(a, b)}$ de G est le produit d'une isométrie $f(a, b)$ de R et d'une isométrie $g(a, b)$ de H, soit :

$$(a, b)(c, d) = (f(a, b)(c), g(a, b)(d)).$$

En particulier $(a, b) = (a, b)(e', e'') = (f(a, b)(e'), g(a, b)(e''))$. Puis

$$(a, e'')(c, e'') = (f(a, e'')(c), g(a, e'')(e'')) = (f(a, e'')(c), e''),$$

donc R est un sous-groupe et $ac = f(a, e'')(c)$ est la structure de groupe induite. De même H est un sous-groupe, avec le produit $bd = g(e', b)(d)$.

On notera désormais $\varphi(a, d) = g(a, e'')(d)$ et $\omega(b, c) = f(e', b)(c)$. Alors l'application $\varphi(a) : d \mapsto \varphi(a, d)$ est une isométrie de H qui conserve e'' et de même $\omega(b) : c \mapsto \omega(b, c)$ est une isométrie de R conservant e'. De plus, si $I_1(H)$ [resp. $I_1(R)$] est le sous-groupe de $I_0(H)$ [resp. $I_0(R)$] formé des isométries conservant l'élément neutre, on vérifie facilement grâce à l'associativité le

LEMME 3. — *L'application* $\varphi : a \mapsto \varphi(a)$ *est un homomorphisme de* R *dans* $I_1(H)$ *et l'application* $\omega : b \mapsto \omega(b)$ *est un homomorphisme de* H *dans* $I_1(R)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}(a, e'')(b, e'')(c, d) &= (a, e'')(bc, \varphi(b, d)) = (abc, \varphi(a, \varphi(b, d))) \\ &= (ab, e'')(c, d) = (abc, \varphi(ab, d))\end{aligned}$$

donc

$$\varphi(a)(\varphi(b)d) = \varphi(a, \varphi(b, d)) = \varphi(ab, d) = \varphi(ab)(d).$$

Et la démonstration pour ω est identique.

Les deux relations :

$$\text{(i)} \qquad (a, e'')(c, d) = (ac, \varphi(a, d)),$$

$$\text{(ii)} \qquad (e', b)(c, d) = (\omega(b, c), bd)$$

décrivent l'action de G sur lui-même à gauche, mais les applications φ et ω ne sont pas indépendantes.

LEMME 4. — *L'action de* G *à gauche est complètement décrite par les formules* (i) *et* (ii), *avec les deux relations :*

$$\text{(iii)} \qquad a\,\omega(\varphi(a^{-1}, b), c) = \omega(b, \omega(b^{-1}, a)\,c),$$

$$\text{(iv)} \qquad b\,\varphi(\omega(b^{-1}, a), d) = \varphi(a, \varphi(a^{-1}, b)\,d).$$

Démonstration. — Par (i), on a $(a, b) = (a, e'')\,(e', \varphi\,(a^{-1}, b))$ puisque

$$\varphi\,(a^{-1}, b) = \varphi\,(a^{-1})\,(b) = \varphi\,(a)^{-1}\,(b).$$

Donc

$$\begin{aligned}(a, b)(c, d) &= (a, e'')(e', \varphi(a^{-1}, b))(c, d) = (a, e'')(\omega(\varphi(a^{-1}, b), c), \varphi(a^{-1}, b)\,d)\\ &= (a\,\omega(\varphi(a^{-1}, b), c), \varphi(a, \varphi(a^{-1}, b)\,d)).\end{aligned}$$

D'autre part, par (ii) on a $(a, b) = (e', b)\,(\omega\,(b^{-1}, a), e'')$ d'où

$$\begin{aligned}(a, b)(c, d) &= (e', b)(\omega(b^{-1}, a), e'')(c, d) = (e', b)(\omega(b^{-1}, a)\,c, \varphi(\omega(b^{-1}, a), d))\\ &= (\omega(b, \omega(b^{-1}, a)\,c), b\,\varphi(\omega(b^{-1}, a), d))\end{aligned}$$

et il suffit de comparer les deux expressions pour avoir (iii) et (iv). Il resterait à vérifier que ce sont les seules relations, mais comme c'est à la fois long, parfaitement élémentaire et inutile pour la suite, on s'en dispensera.

D'après le théorème 3, on remarque que le groupe R est *résoluble*, donc son image φ (R) est un sous-groupe résoluble connexe du groupe compact I_1 (H). On sait qu'un tel sous-groupe est nécessairement abélien, et donc le noyau de φ contient le sous-groupe dérivé de R. On notera P la composante connexe de l'élément neutre du noyau de φ. Toujours d'après le théorème 3 le groupe R est produit semi-direct de son sous-groupe dérivé R', qui est abélien et d'un sous-groupe abélien B opérant sur R' par isométries, et de plus la métrique de R est la métrique produit de celles induites sur R' et B.

Maintenant $P \cap B$ est un sous-groupe abélien connexe de B. Comme B est isomorphe à un espace euclidien (avec l'addition des vecteurs comme structure de groupe), il existe un sous-groupe abélien connexe A de B tel que R soit aussi produit semi-direct et produit riemannien de P et A. On remarque que A opère sur P par des isométries.

LEMME 5. — P *est distingué dans* G, *et* P *et* A *sont invariants par tout* $\omega\,(b)$ *pour* b *dans* H.

Démonstration. — D'abord P est distingué dans R. Il suffit donc de regarder la conjuguaison de P par un élément de H :

$$(e', b^{-1})(a, e'')(e', b) = (e', b^{-1})(a, \varphi(a, b)) = (\omega(b^{-1}, a), b^{-1}\varphi(a, b)).$$

Mais si a est dans P, alors $\varphi\,(a)$ est l'identité donc

$$b^{-1}\varphi(a, b) = b^{-1}\varphi(a)(b) = b^{-1}b = e''.$$

De plus

$$b\,\varphi(\omega(b^{-1}, a), d) = \varphi(a, \varphi(a^{-1}, b)\,d) \quad \text{par (iv)}$$
$$= bd \quad \text{puisque } a \text{ et } a^{-1} \text{ sont dans P.}$$

Donc $\varphi(\omega(b^{-1}, a))$ est l'identité et $\omega(b^{-1}, a)$ est dans P, ce qui prouve que P est distingué, et aussi que $\omega(b^{-1})\,P = P$.

Enfin on a vu que R est le produit riemannien de P et A. Puisque $\omega(b)$ est une isométrie de R conservant e', on en déduit immédiatement que A est aussi invariant par $\omega(b)$.

On ne va plus désormais s'intéresser qu'au produit riemannien $A \times H$. On remarque d'abord que c'est le sous-groupe engendré par A et H puisque, si a et c sont dans A, b et d dans H, on a :

$$(a, e'')(c, d) = (ac, \varphi(a, d)) \qquad \text{et} \qquad (e', b)(c, d) = (\omega(b, c), bd)$$

qui sont dans $A \times H$ puisque $\omega(b, c)$ est dans A si c est dans A.

On note alors $\mu(b)$ la restriction de $\omega(b)$ à A et $\mu(b, c) = \mu(b)(c)$.

LEMME 6. — *L'application* $\mu(b)$ *est un automorphisme du groupe* A.

Démonstration. — A est abélien et simplement connexe, donc isomorphe à un espace vectoriel euclidien. Et on sait bien qu'une isométrie d'un espace euclidien qui conserve l'origine est linéaire, donc en particulier un automorphisme du groupe additif.

La relation (iii), restreinte à AH, s'écrit alors :

$$a\,\mu(\varphi(a^{-1}, b), c) = \mu(b, \mu(b^{-1}, a)\,c) = \mu(b)((\mu(b)^{-1}(a))\,c) = a\,\mu(b, c)$$

ce qui veut dire que $\mu(b^{-1}\,\varphi(a^{-1}, b))$ est l'identité de A.

On introduit alors la composante connexe V de l'identité du noyau de l'application μ. La relation peut donc se réécrire :

$$b^{-1}\varphi(a, b) \in V, \qquad \forall\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in H.$$

En recopiant la démonstration du lemme 5, on obtient ici :

LEMME 7. — *Le sous-groupe* V *est distingué dans* AH *et invariant par* $\varphi(a)$ *pour tout* a *de* A.

Comme H est compact et simplement connexe, il est semi-simple et il existe un sous-groupe distingué W de H tel que H soit le groupe produit direct de V et W (mais H n'est pas *a priori* la variété riemannienne produit). On note :

$$\alpha(a, b) = b^{-1}\varphi(a, b) \quad \text{pour } a \text{ dans A et } b \text{ dans W.}$$

L'application $\alpha(a) : b \mapsto \alpha(a, b)$ est alors une application différentiable de W dans V. On note $\zeta(a)$ la restriction de $\varphi(a)$ à V et $\zeta(a, b) = \zeta(a)(b)$.

LEMME 8. — *La relation* (iv) *se réduit sur* AH *aux trois propriétés suivantes :*

(v) $\zeta(a)$ *est un homomorphisme de* V;

(vi) $$\alpha(a, cd) = \alpha(a, c)\alpha(\mu(c^{-1}, a), d);$$

(vii) $$\zeta(\mu(d^{-1}, a), b) = \alpha(a, d)^{-1}\zeta(a, b)\alpha(a, d),$$

avec a dans A, *b dans* V *et c et d dans* W.

Démonstration :

(v) En considérant $b' = \varphi(a^{-1}, b)$, qui est dans V, la relation (iv) s'écrit, pour tout d de H :

$$\varphi(a, b'd) = \varphi(a, b')\varphi(\mu(\varphi(a, b')^{-1}, a), d).$$

Mais $\varphi(a, b')$ est dans V d'après le lemme 7 donc $\mu(\varphi(a, b')^{-1}, a) = a$ et finalement :

$$\varphi(a)(b'd) = \varphi(a)(b')\varphi(a)(d).$$

En particulier, pour d dans V, on obtient que $\zeta(a)$ est un homomorphisme.

(vi) Si maintenant d est dans W, alors $b'd = db'$ puisque V et W commutent. On obtient :

$$\varphi(a, b'd) = \varphi(a, db') = \varphi(a, d)\varphi(\mu(\varphi(a, d)^{-1}, a), b'),$$

mais aussi d'après le calcul de (v) :

$$\varphi(a, b'd) = \varphi(a, b')\varphi(a, d).$$

En utilisant $\varphi(a, d) = \alpha(a, d)d$ et la commutation de V et W (en effet, les expressions $\varphi(a, b')$ et $\varphi(\mu(\varphi(a, d)^{-1}, a), b')$ sont dans V et d dans W), l'égalité des deux expressions de $\varphi(a, b'd)$ donne en simplifiant par d :

$$\alpha(a, d)\varphi(\mu(\varphi(a, d)^{-1}, a), b') = \varphi(a, b')\alpha(a, d).$$

Enfin $\mu(\varphi(a, d)) = \mu(\alpha(a, d)d) = \mu(\alpha(a, d))\circ\mu(d) = \mu(d)$ donc

$$\mu(\varphi(a, d)^{-1}, a) = \mu(d^{-1}, a)$$

et la relation devient

$$\alpha(a, d)\varphi(\mu(d^{-1}, a), b') = \varphi(a, b')\alpha(a, d).$$

Comme $\varphi(a, b) = \zeta(a, b)$ si b est dans V, on a donc (vi).

(vii) On écrit enfin (iv) avec c et d dans W :

$$\varphi(a, cd) = \varphi(a, c)\varphi(\mu(\varphi(a, c)^{-1}, a), d).$$

On a encore $\mu(\varphi(a, c)^{-1}, a) = \mu(c^{-1}, a)$ comme ci-dessus, d'où, en simplifiant par cd :

$$\alpha(a, cd) = \alpha(a, c)\,\alpha(\mu(c^{-1}, a), d).$$

Un calcul élémentaire, dont on se dispensera ici, montrerait que (iv) est conséquence des trois relations (v), (vi) et (vii).

Maintenant $\zeta(\mathrm{A})$ est un groupe connexe d'automorphismes du groupe semi-simple V, donc $\zeta(\mathrm{A})$ est formé d'automorphismes *intérieurs* de V. De plus A et V sont simplement connexes, donc l'homomorphisme $\zeta : \mathrm{A} \to \mathrm{Int}(\mathrm{V})$ se relève en un homomorphisme $\varepsilon : \mathrm{A} \to \mathrm{V}$ puisque V est le revêtement universel de Int (V). Soit $\zeta(a)(b) = \varepsilon(a)\, b\, \varepsilon(a)^{-1}$ si a est dans A et b dans V.

LEMME 9. — *On a la relation* (viii) : $\alpha(a, d) = \varepsilon(a)\,\varepsilon(\mu(d^{-1}, a))^{-1}$.

Démonstration. — La relation (vi) du lemme 8 s'écrit :

$$\varepsilon(\mu(d^{-1}, a))\, b\, \varepsilon(\mu(d^{-1}, a))^{-1} = \alpha(a, d)^{-1}\,\varepsilon(a)\, b\, \varepsilon(a)^{-1}\,\alpha(a, d)$$

pour tout b de V. Donc

$$\varepsilon(\mu(d^{-1}, a)) = \alpha(a, d)^{-1}\,\varepsilon(a)\, z,$$

où z est un élément du centre de V, dépendant *a priori* de a et d. Mais ce centre est fini alors que A et W sont connexes et α, μ et ε différentiables; on en déduit que z est constant et égal à l'élément neutre de V (que l'on obtient pour a et d éléments neutres). Et finalement :

$$\alpha(a, d) = \varepsilon(a)\,\varepsilon(\mu(d^{-1}, a))^{-1}.$$

On peut remarquer que (vii) est une conséquence de (viii).

Revenant à l'isométrie $\varphi(a)$, on voit que si b est dans V et d dans W on a

$$\begin{aligned}\varphi(a)(bd) &= \varphi(a)(b)\,\varphi(a)(d) = \zeta(a)(b)\,\alpha(a, d)\, d = \varepsilon(a)\, b\, \varepsilon(a)^{-1}\varepsilon(a)\,\varepsilon(\mu(d^{-1}, a))^{-1}\, d\\ &= \varepsilon(a)\, b\, \varepsilon(\mu(d^{-1}, a))^{-1}\, d.\end{aligned}$$

On va utiliser le fait que $\varphi(a)$ est une *isométrie* de H pour montrer qu'en fait on a V = H. Pour cela, on va calculer la dérivée de $\varphi(a)$ en e'' élément neutre de H. On rappelle que $\varphi(a)(e'') = e''$ et $\varphi(a)(\mathrm{V}) = \mathrm{V}$. On notera $\mathfrak{H}$ l'algèbre de Lie de H, identifiée avec l'espace tangent à H en e'', et $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{W}$ les sous-algèbres correspondant à V et W.

LEMME 10. — *Dans la décomposition* $\mathfrak{H} = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$, *l'application tangente* $\varphi(a)_*$ *de* $\varphi(a)$ *en* e'' *s'écrit :*

$$\varphi(a)_*(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (ad(\varepsilon(a))(\mathrm{X}) + \delta(a)(\mathrm{Y}), \mathrm{Y}),$$

où l'application linéaire $\delta(a) : \mathfrak{W} \to \mathfrak{V}$ *sera précisée dans la démonstration.*

Démonstration. — Si b est dans V, $\varphi(a)(b) = \varepsilon(a)\, b\, \varepsilon(a)^{-1}$ et le premier terme est donc évident.

Pour d dans W, on a $\varphi(a)(d) = \varepsilon(a)\,\varepsilon(\mu(d^{-1}, a))^{-1}\, d$, où les deux premiers termes sont dans V. Le troisième terme de $\varphi(a)_*$ est donc évident. Et $\delta(a)$ est simplement l'application tangente en e'' à l'application $d \mapsto \varepsilon(a)\,\varepsilon(\mu(d^{-1}, a))^{-1}$ de W dans V. On peut écrire cette application comme la composée des applications suivantes :

on note $\operatorname{inv}(d) = d^{-1}$ et $f_a : \mathrm{I}_1(\mathrm{A}) \to \mathrm{A}$ l'application définie par

$$f_a(h) = a h(a^{-1}) \qquad \text{et on a} \quad \delta(a) = \varepsilon \circ f_a \circ \mu \circ \operatorname{inv}.$$

On remarque que ε, f_a, μ, inv envoient l'élément neutre en l'élément neutre. On note ε_*, $(f_a)_*$, μ_* et inv_* leur dérivée en ces points. On a évidemment $\operatorname{inv}_* = -\mathrm{Id}$. D'autre part, on a déjà identifié A à un espace euclidien, auquel est aussi identifiée l'algèbre de Lie de A. Alors $\mathrm{I}_1(\mathrm{A})$ est identifié au groupe orthogonal de cet espace euclidien et son algèbre de Lie $\mathfrak{I}_1(\mathrm{A})$ est l'algèbre des applications antisymétriques, qui est ainsi présentée opérant sur A. Avec ces identifications, on a alors :

$$(f_a)_*(\mathrm{Z}) = -\mathrm{Z}(a) \quad \text{pour tout Z de } \mathfrak{I}_1(\mathrm{A})$$

et finalement

$$\delta(a)(\mathrm{Y}) = \varepsilon_*(\mu_*(\mathrm{Y})(a)).$$

Le sous-groupe $\varepsilon(\mathrm{A})$ de V est abélien connexe, donc il existe un sous-groupe de Cartan T de V tel que $\varepsilon(\mathrm{A})$ soit inclus dans T. On note $\mathfrak{T}$ l'algèbre de Lie de T, qui est donc une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{V}$, et $\mathfrak{S}$ son complémentaire orthogonal dans $\mathfrak{V}$. On choisit une base de $\mathfrak{H}$ réunion d'une base orthonormée de chacun des sous-espaces (supplémentaires) $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{W}$. Dans cette base et pour la décomposition $\mathfrak{H} = \mathfrak{V} \oplus \mathfrak{W}$, le produit scalaire se traduit par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathrm{D} \\ {}^t\mathrm{D} & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

et $\varphi(a)_*$, qui est la matrice

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ad}(\varepsilon(a)) & \delta(a) \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix},$$

doit être orthogonale pour le produit scalaire ce qui donne immédiatement les trois relations :

$$ {}^t\operatorname{ad}(\varepsilon(a))\operatorname{ad}(\varepsilon(a)) = \mathrm{Id},$$

$$ {}^t\operatorname{ad}(\varepsilon(a))(\delta(a)+\mathrm{D}) = \mathrm{D}$$

et

$$ {}^t\delta(a)(\delta(a)+\mathrm{D}) + {}^t\mathrm{D}\,\delta(a) + \mathrm{Id} = \mathrm{Id}.$$

La première relation implique que $\operatorname{ad}(\varepsilon(a))$ est orthogonale, ce qui entraîne en particulier que l'automorphisme intérieur $\varepsilon(a)$ sur V est une isométrie (c'est-à-dire A opère sur V par des isométries qui sont aussi des automorphismes intérieurs). La deuxième relation peut s'écrire :

$$\delta(a) = (\operatorname{ad}(\varepsilon(a)) - \mathrm{Id})\,\mathrm{D}$$

et la troisième relation est une conséquence des deux premières.

Mais $\varepsilon(a)$ est dans T abélien, donc ad $(\varepsilon(a))$ restreinte à $\mathfrak{T}$ est l'identité de $\mathfrak{T}$ sur elle-même. De plus ad $(\varepsilon(a))$ est orthogonale donc envoie $\mathfrak{S}$ sur $\mathfrak{S}$. On en déduit que ad $(\varepsilon(a))-\mathrm{Id}$ est nulle sur $\mathfrak{T}$ et envoie tout $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{S}$, donc $(\mathrm{ad}(\varepsilon(a))-\mathrm{Id})\,\mathrm{D}$ est à valeurs dans $\mathfrak{S}$. D'autre part $\delta(a)(\mathrm{Y}) = \varepsilon_*(\mu_*(\mathrm{Y})(a))$ est à valeurs dans l'image de ε_*, qui est incluse dans $\mathfrak{T}$. On a donc $\delta(a)(\mathrm{Y}) = 0$ pour tout a de A et Y de $\mathfrak{W}$. Or ε_* et μ_* sont par définition des applications *injectives*. On en déduit donc que $\mathrm{Y} = 0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{W} = 0$ et $\mathrm{V} = \mathrm{H}$. Et le théorème 1 est démontré.

4. Une remarque sur le cas de la courbure de Ricci nulle

On remarque en particulier que l'on n'a pas eu besoin de traiter à part le cas où la courbure de Ricci est nulle; on déduit aisément du théorème 4 le

COROLLAIRE 4. — *Une structure riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie et à courbure de Ricci nulle est plate.*

En effet, c'est le cas où il n'y a pas de facteur H dans le théorème.

Bien sûr, ce corollaire est aussi une conséquence du résultat plus général.

THÉORÈME 5 (D. V. Alekseevski et B. N. Kimel'fel'd [A-K]). — *Un espace homogène riemannien à courbure de Ricci nulle est plat.*

Mais E. Heintze a fait remarquer à l'auteur que le théorème 5 pouvait se déduire directement du résultat de Cheeger et Gromoll qui a servi de point de départ à la démonstration du théorème 4. On va donner ici cette belle démonstration, très différente de la (non moins belle) démonstration originale de Alekseevski et Kimel'fel'd, qui utilise des propriétés de croissance de groupes.

Démonstration du théorème 5. — D'après Cheeger et Gromoll ([C-G], p. 127, th. 5), un espace homogène riemannien M à courbure de Ricci positive ou nulle est produit riemannien d'une variété plate (isométrique à un $\mathbf{R}^n$) et d'une variété N compacte homogène à courbure de Ricci positive ou nulle. En particulier, si M est à courbure de Ricci nulle, N aussi. Maintenant, c'est un résultat classique de Bochner que sur une variété compacte à courbure de Ricci négative ou nulle, les champs de Killing sont parallèles, donc qu'un espace homogène compact à courbure de Ricci négative ou nulle est plat (*voir* par exemple [K-N], I, p. 251, cor. 5.6). Donc M est plat.

II. COURBURE SCALAIRE DES GROUPES DE LIE RIEMANNIENS

5. Calculs préliminaires

Soit toujours G un groupe de Lie riemannien, $\mathfrak{G}$ son algèbre de Lie et $\langle\, .,.\,\rangle$ le produit scalaire de $\mathfrak{G}$ définissant la métrique riemannienne de G. On rappelle que $\mathfrak{G}$ est identifiée avec $\mathrm{T}_e\,\mathrm{G}$. On notera R le tenseur de courbure de G en e, Ric sa courbure de Ricci (forme bilinéaire symétrique) et τ sa courbure scalaire (on rappelle que c'est évidemment une constante sur G). On sait (*voir* par exemple [C-E], chap. 3 ou [K-N], II, chap. 10) que R se calcule à partir du crochet et du produit scalaire de la façon suivante : on définit d'abord l'application bilinéaire symétrique $\mathrm{U} : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ par

$$\text{(i)} \qquad \langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{Z} \rangle = \frac{1}{2}(\langle \mathrm{X}, [\mathrm{Z}, \mathrm{Y}] \rangle + \langle \mathrm{Y}, [\mathrm{Z}, \mathrm{X}] \rangle);$$

et on a alors la formule :

$$\text{(ii)} \quad \langle \mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = -\frac{3}{4}\|[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]\|^2 - \frac{1}{2}\langle [\mathrm{X}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]], \mathrm{Y} \rangle - \frac{1}{2}\langle [\mathrm{Y}, [\mathrm{Y}, \mathrm{X}]], \mathrm{X} \rangle + \|\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\|^2 - \langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{X}), \mathrm{U}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}) \rangle.$$

On va supposer dans ce paragraphe que $\mathfrak{G}$ contient un idéal propre non nul $\mathfrak{U}$. On note $\mathfrak{A}$ le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{G}$. ($\mathfrak{A}$ n'est pas forcément une sous-algèbre.) Pour tout X de $\mathfrak{G}$, on notera $\mathrm{X}_{\mathfrak{U}}$ et $\mathrm{X}_{\mathfrak{A}}$ ses composantes dans la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{A}$. On remarque que la restriction à $\mathfrak{A}$ de la deuxième composante du crochet fait de $\mathfrak{A}$ l'algèbre de Lie *quotient* de $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{U}$. Le produit scalaire de $\mathfrak{G}$ induit sur $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{A}$ des produits scalaires qui correspondent à des métriques invariantes sur des groupes de Lie connexes d'algèbres de Lie $\mathfrak{U}$ ou $\mathfrak{A}$. On notera U_1, U_2, R_1, R_2 les expressions obtenues dans le calcul de la courbure de ces métriques. On vérifie facilement que ce sont simplement les expressions obtenues en restreignant les formules (i) et (ii) à $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{A}$. En particulier, si X et Y sont dans $\mathfrak{U}$ (respectivement $\mathfrak{A}$), alors $\mathrm{U}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ (respectivement $\mathrm{U}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$) est bien la composante $\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathfrak{U}}$ (respectivement $\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathfrak{A}}$) de $\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. On va chercher à calculer la courbure scalaire de $\mathfrak{G}$ à partir de celles de $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{A}$. Mais d'autres termes interviennent; on introduit pour les exprimer les notations suivantes : dans la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{A}$, on notera

$$\mathrm{ad}(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{S}(\mathrm{X}) + \mathrm{A}(\mathrm{X}) & 2\mathrm{C}(\mathrm{X}) \\ 0 & \mathrm{T}(\mathrm{X}) + \mathrm{B}(\mathrm{X}) \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{S}(\mathrm{X}) : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ et $\mathrm{T}(\mathrm{X}) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ sont symétriques, $\mathrm{A}(\mathrm{X}) : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ et $\mathrm{B}(\mathrm{X}) : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ sont antisymétriques et $\mathrm{C}(\mathrm{X})$ va de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{U}$. On remarque que $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{B}(\mathrm{X}) = 0$ si X est dans $\mathfrak{U}$ et que $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre si et seulement si $\mathrm{C}(\mathrm{Y}) = 0$ pour tout Y de $\mathfrak{A}$. Avec ces notations, on obtient pour U les formules suivantes :

si X et Y sont dans $\mathfrak{U}$, $\langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{Z} \rangle = \langle \mathrm{S}(\mathrm{Z})\mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$;

si X et Y sont dans $\mathfrak{A}$, $\langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{Z} \rangle = \langle \mathrm{T}(\mathrm{Z})\mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$ (et donc $\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathfrak{A}$);

si X est dans $\mathfrak{U}$ et Y dans $\mathfrak{A}$, $\langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{Z} \rangle = \langle \mathrm{X}, \mathrm{C}(\mathrm{Z})\mathrm{Y} \rangle$.

On note enfin $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base orthonormée de $\mathfrak{U}$ et $(\mathrm{Y}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ une base orthonormée de $\mathfrak{A}$. On commence par calculer quelques courbures sectionnelles :

(*a*) *soient* X *et* Y *dans* $\mathfrak{U}$. Alors $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, $[\mathrm{X}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]]$, $[\mathrm{Y}, [\mathrm{Y}, \mathrm{X}]]$ sont dans $\mathfrak{U}$, ainsi que $\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathfrak{U}} = \mathrm{U}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. On a donc :

$$\langle \mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = \langle \mathrm{R}_1(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle + \|\mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{\mathfrak{A}}\|^2 - \langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{X})_{\mathfrak{A}}, \mathrm{U}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y})_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

avec $\langle U(X, Y), Y_j \rangle = \langle S(Y_j) X, Y \rangle$ et donc

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)X, Y \rangle &= \langle R_1(X, Y)X, Y \rangle \\ &\quad + \sum_{j \in J} (\langle S(Y_j)X, Y \rangle^2 - \langle S(Y_j)X, X \rangle \langle S(Y_j)Y, Y \rangle),\end{aligned}$$

(*b*) *soient* X *et* Y *dans* $\mathfrak{A}$. Alors $\langle [X, [X, Y]], Y \rangle = \langle [X, [X, Y]_2]_2, Y \rangle$, mais $[X, Y]$ a deux composantes. Enfin $U(X, Y) = U(X, Y)_{\mathfrak{A}} = U_2(X, Y)$ s'exprime à partir de $[\ ,\ ]_{\mathfrak{A}}$ seulement. On a donc :

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \langle R_2(X, Y)X, Y \rangle - \frac{3}{4} \| [X, Y]_{\mathfrak{U}} \|^2.$$

(*c*) *soient* X *dans* $\mathfrak{U}$ *et* Y *dans* $\mathfrak{A}$. On va faire intervenir ici l'action de $\mathfrak{A}$ sur $\mathfrak{U}$. On prendra donc : $[X, Y] = -(S(Y) + A(Y))X$. On remarque que $\langle [X, [X, Y]], Y \rangle = 0$ puisque le premier terme est dans $\mathfrak{U}$. Puis

$$U(X, Y) = -\frac{1}{2}{}^t(\mathrm{ad}(Y))X = -\frac{1}{2}(S(Y) - A(Y))X - {}^tC(Y)X.$$

Enfin

$$\begin{aligned}\langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle &= \sum_{j \in J} \langle U(X, X), Y_j \rangle \langle U(Y, Y), Y_j \rangle \\ &= \sum_{j \in J} \langle S(Y_j)X, X \rangle \langle T(Y_j)Y, Y \rangle\end{aligned}$$

puisque $U(Y, Y)$ est dans $\mathfrak{A}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)X, Y \rangle &= -\frac{3}{4} \| (S(Y) + A(Y))X \|^2 - \frac{1}{2} \langle (S(Y) + A(Y))^2 X, X \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \| (S(Y) - A(Y))X \|^2 + \| {}^tC(Y)X \|^2 \\ &\quad - \sum_{j \in J} \langle S(Y_j)X, X \rangle \langle T(Y_j)Y, Y \rangle\end{aligned}$$

ou encore, en regroupant les trois premiers termes :

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)X, Y \rangle &= -\| S(Y)X \|^2 - 2\langle S(Y)X, A(Y)X \rangle + \| {}^tC(Y)X \|^2 \\ &\quad - \sum_{j \in J} \langle S(Y_j)X, X \rangle \langle T(Y_j)Y, Y \rangle.\end{aligned}$$

La réunion des X_i et des Y_j est une base orthonormée de $\mathfrak{G}$. On a donc la courbure scalaire de $\mathfrak{G}$ par

$$\begin{aligned}\tau = &\sum_{i, k \in I} \langle R(X_i, X_k)X_i, X_k \rangle + \sum_{j, l \in J} \langle R(Y_j, Y_l)Y_j, Y_l \rangle \\ &+ 2 \sum_{i \in I, j \in J} \langle R(X_i, Y_j)X_i, Y_j \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau_1 + \sum_{i,k\in I,\, j\in J} (\langle S(Y_j)X_i, X_k\rangle^2 - \langle S(Y_j)X_i, X_i\rangle\langle S(Y_j)X_k, X_k\rangle)\\
&\quad + \tau_2 - \frac{3}{4}\sum_{j,l\in J} \| [Y_j, Y_l]_{\mathfrak{u}}\|^2 + 2\sum_{i\in I,\, j\in J}(-\|S(Y_j)X_i\|^2\\
&\quad - 2\langle S(Y_j)X_i, A(Y_j)X_i\rangle + \|{}^tC(Y_j)X_i\|^2)\\
&\quad - 2\sum_{i\in I,\, j,\, l\in J}\langle S(Y_j)X_i, X_i\rangle\langle T(Y_j)Y_l, Y_l\rangle.
\end{aligned}$$

On notera encore $\|.\|$ la norme des applications linéaires (par exemple

$$\|S(Y_j)\|^2 = \sum_{i\in I}\|S(Y_j)X_i\|^2)$$

et tr leur trace (par exemple $\operatorname{tr}(S(Y_j)) = \sum_{i\in I}\langle S(Y_j)X_i, X_i\rangle$). On remarque que

$$\|[Y_j, Y_l]_{\mathfrak{u}}\|^2 = 4\|C(Y_j)Y_k\|^2 = 4\|C(Y_j)\|^2.$$

On a enfin le

LEMME 11. — $\sum_{i\in I}\langle S(Y)X_i, A(Y)X_i\rangle = 0.$

Démonstration. — La quantité considérée ne dépend pas de la base (X_i) (orthonormée) choisie. Il suffit donc de considérer le cas où la base (X_i) diagonalise l'application linéaire symétrique $S(Y)$, c'est-à-dire $S(Y)X_i = \lambda_i X_i$. On a alors $\langle \lambda_i X_i, A(Y)X_i\rangle = 0$ puisque A est antisymétrique.

On obtient donc finalement la formule :

$$(\star)\qquad \tau = \tau_1 + \tau_2 - \sum_{j\in J}(\|S(Y_j)\|^2 + \|C(Y_j)\|^2 + (\operatorname{tr}(S(Y_j)))^2 + 2(\operatorname{tr}(S(Y_j)))(\operatorname{tr}(T(Y_j)))).$$

6. Le signe de la courbure scalaire des groupes de Lie

Dans [M], J. Milnor redémontre un résultat de E. Heintze et G. R. Jensen.

THÉORÈME 6 (E. Heintze [HE], th. B, G. R. Jensen [J], th. 6 et 7). — *Si* G *est un groupe de Lie connexe résoluble, la courbure scalaire de toute métrique riemannienne invariante à gauche est négative ou nulle et si elle est nulle, alors la métrique correspondante est plate.*

J. Milnor montre aussi que la courbure scalaire de toute métrique riemannienne invariante sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ est négative. Il montre enfin que si G contient un sous-groupe compact non commutatif, il existe une métrique invariante à courbure scalaire positive. Ceci l'amène à conjecturer le résultat suivant, que l'on va prouver ici.

THÉORÈME 7. — *Les deux propositions suivantes sont équivalentes pour un groupe de Lie connexe* G :

(*a*) *le revêtement universel de* G *est difféomorphe à un espace euclidien,*

(*b*) *toute métrique riemannienne invariante à gauche sur* G *est ou bien plate ou bien à courbure scalaire strictement négative.*

Démonstration. — Le revêtement universel de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ est le seul groupe de Lie simple difféomorphe à un $\mathbf{R}^n$, donc le revêtement universel de G est difféomorphe à un $\mathbf{R}^n$ si et seulement si une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{G}$ est un produit de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Pour démontrer le théorème, on peut donc raisonner par récurrence sur le nombre de tels facteurs $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, à partir des résolubles. Il suffit donc de démontrer (*b*) dans le cas suivant : $\mathfrak{G}$ contient un idéal $\mathfrak{U}$ vérifiant (*b*) tel que le quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ soit $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. Dans les notations du paragraphe 5, cela veut dire que le complémentaire orthogonal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{G}$, muni du crochet $[\ ,\ ]_{\mathfrak{A}}$, est l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$. C'est une algèbre simple donc $\operatorname{tr}(T(Y_j)) = 0$, puisque cette trace est celle de l'action adjointe de Y_j dans cette algèbre simple. Puisque τ_1 est négatif ou nul par hypothèse de récurrence et que τ_2 est strictement négatif d'après les calculs de J. Milnor, la formule ($\star$) nous dit aussitôt que τ est strictement négatif.

Pour la réciproque, il suffit évidemment de remarquer que si le revêtement universel de G n'est pas difféomorphe à un espace euclidien, alors G contient un groupe simple différent de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ et des autres groupes d'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, donc aussi un groupe compact connexe non commutatif : le sous-groupe compact connexe maximal de ce groupe simple.

III. COURBURE SCALAIRE DES ESPACES HOMOGÈNES

7. Courbure scalaire des espaces homogènes compacts

D'abord quelques préliminaires : soit $M = G/H$ un espace homogène d'un groupe de Lie connexe G. On suppose bien sûr que H est un sous-groupe fermé pour que M soit une variété séparée. On va étudier le signe de la courbure scalaire des métriques riemanniennes G-invariantes sur M. Cette courbure scalaire est évidemment une constante par homogénéité.

On pourra toujours supposer que G est *effectif* sur G/H, c'est-à-dire que H ne contient pas de sous-groupe distingué de G. En effet, soit K le plus grand sous-groupe distingué fermé de G contenu dans H. Soit $G^* = G/H$ et $H^* = H/K$ les groupes de Lie quotients. Alors M est aussi l'espace homogène G^*/H^* et toute métrique G-invariante sur M est G^*-invariante et réciproquement.

Pour démontrer le théorème 2, on pourra enfin se ramener au cas où H est un sous-groupe compact. On sait en effet que si on munit M d'une métrique G-invariante g, alors G est un sous-groupe de la composante connexe de l'identité $I_0(M, g)$ du groupe des isométries de (M, g), que le sous-groupe d'isotropie $I_1(M, g)$, formé des isométries de $I_0(M, g)$ conservant le point eH de M, est compact, que H est l'intersection de G et $I_1(M, g)$ et que M est aussi l'espace homogène $I_0(M, g)/I_1(M, g)$. De plus toute métrique $I_0(M, g)$-invariante sur M est G-invariante. On en déduit immédiatement que le théorème 2 est vrai pour tous les espaces homogènes G/H admettant des métriques G-invariantes (avec G connexe et H fermé), dès qu'il est vrai dans le cas particulier *où* G *est connexe et effectif, et où* H *est compact*, ce que l'on supposera désormais jusqu'à la fin de l'article.

Dans la suite du paragraphe on va regarder le cas où M est compact, ce qui revient à supposer que G est aussi compact. On remarque d'abord que si G est abélien, alors par effectivité H est réduit à l'élément neutre et on sait que toute métrique G-invariante sur M est plate. Bien sûr, le revêtement universel de M est alors un espace euclidien. On suppose maintenant que G n'est pas abélien. Alors, toujours par effectivité, H ne peut pas contenir le plus grand sous-groupe semi-simple de G, qui est distingué dans G. On en déduit immédiatement que le revêtement universel de M n'est pas difféomorphe à un espace euclidien. On met alors sur M une métrique riemannienne normale (au sens de M. Berger [BE]), c'est-à-dire provenant par quotient d'une métrique bi-invariante sur G. On sait que dans ce cas la courbure scalaire de M est strictement positive. On a donc bien vérifié le théorème 2 dans le cas d'un espace homogène compact.

Mais on peut aussi se demander si M admet des métriques invariantes à courbure scalaire négative. Pour répondre à cette question, on va poser une définition.

Définition 1. — *On dira qu'un espace homogène* M = G/H *est de type normal si toute métrique* G-*invariante sur* M *est normale.*

Exemple 1. — J. A. Wolf classifie dans [WO] les espaces homogènes G/H qu'il appelle « isotropy irreductible » et qui sont caractérisés par le fait que la représentation linéaire d'isotropie de la *composante connexe de l'élément neutre de* H est irréductible. De tels espaces sont de type normal (dans le cas compact), mais ce ne sont pas tous les espaces de type normal : par exemple, le produit de deux tels espaces est encore de type normal, mais n'est plus « isotropy irreductible ».

Exemple 2. — La « sphère de Poincaré » est l'espace homogène quotient de SO (3) par le sous-groupe Γ qui laisse globalement stable un icosaèdre régulier. Alors la représentation adjointe du sous-groupe Γ dans l'algèbre de Lie SO (3) est irréductible, donc la sphère de Poincaré est un espace de type normal (qui n'a d'ailleurs à un facteur près qu'une seule métrique riemannienne SO (3)-invariante, à courbure constante en l'occurrence). Par contre son revêtement universel est l'espace homogène SU (2) (avec $H = \{1\}$) qui n'est pas de type normal.

Exemple 3. — On peut remarquer que la sphère S^{2n-1}, qui est de type normal comme espace homogène $SO(2n)/SO(2n-1)$, n'est plus de type normal si on se restreint au sous-groupe transitif $SU(n)$, c'est-à-dire si on considère S^{2n-1} comme l'espace homogène $SU(n)/SU(n-1)$. Mais ce comportement est plutôt exceptionnel : les sphères de dimension paire, comme la plupart des espaces « isotropy irreducible » de J. A. Wolf, sont toujours de type normal.

On a alors le

THÉORÈME 8. — *Soit* M = G/H *un espace homogène avec* G *compact et effectif. Alors on a les trois possibilités suivantes :*

(*a*) M *est de type normal avec* G *abélien, et toute métrique* G-*invariante sur* M *est plate;*

(*b*) M *est de type normal avec* G *non abélien, et toute métrique* G-*invariante sur* M *est à courbure scalaire strictement positive;*

(*c*) M *n'est pas de type normal, et il existe sur* M *des métriques* G-*invariantes à courbure scalaire strictement négative, ainsi que des métriques* G-*invariantes à courbure scalaire nulle ou à courbure scalaire positive.*

Démonstration. — On a déjà démontré (*a*) et (*b*) qui ne sont là que pour avoir un énoncé global. Reste (*c*) : on commence par un lemme qui permettra de caractériser les espaces homogènes de type normal en terme d'algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{H}$ la sous-algèbre correspondant à H, $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire bi-invariant sur $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{P}$ l'orthogonal de $\mathfrak{H}$ dans G pour $\langle\ ,\ \rangle$. Bien sûr, $\mathfrak{P}$ est ad (H)-invariant. Soit $(\mathfrak{P}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une décomposition de $\mathfrak{P}$ en facteurs irréductibles orthogonaux pour la représentation de H dans $\mathfrak{P}$ définie par la restriction à $\mathfrak{P}$ de l'opération ad (H).

Lemme 12. — *Si* M *vérifie la propriété* (N) : $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] = 0$, $\forall\, i \neq j$, *alors* M *est de type normal.*

Démonstration. — On commence par tirer quelques conséquences de l'hypothèse (N) : si $\mathfrak{R}_0$ est la somme des $\mathfrak{P}_i$ sur lesquels ad (H) opère trivialement, on vérifie en particulier que $[\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_0] = 0$. On regarde ensuite $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i]$. Par bi-invariance, on a :

$$\langle [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i], \mathfrak{P}_j \rangle = \langle \mathfrak{P}_i, [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] \rangle = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq j.$$

Donc $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i] \subset \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{P}_i$. On forme alors $\mathfrak{W}_i = \mathfrak{P}_i + [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i]$ et on vérifie facilement que $\mathfrak{W}_i$ est le plus petit idéal de $\mathfrak{G}$ contenant $\mathfrak{P}_i$. On voit ainsi que si $i \neq j$, $[\mathfrak{W}_i, \mathfrak{W}_j] = 0$ et $\mathfrak{W}_i \cap \mathfrak{W}_j = 0$, et que l'on a une décomposition en somme directe d'idéaux orthogonaux : $\mathfrak{G} = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{W}_i \oplus \mathfrak{Z}$. Mais $\mathfrak{P}$ est inclus dans la somme des $\mathfrak{W}_i$ donc $\mathfrak{H}$ contient l'idéal $\mathfrak{Z}$, qui doit donc être nul d'après l'hypothèse d'effectivité. On note $\mathfrak{B}_i$ l'idéal $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{W}_i$ de $\mathfrak{H}$. On remarque que si $\mathfrak{B}_i = 0$, cela signifie $\langle \mathfrak{H}, [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_i] \rangle = 0$, soit $\langle [\mathfrak{H}, \mathfrak{P}_i], \mathfrak{P}_i \rangle = 0$ ce qui veut dire que la représentation de H dans $\mathfrak{P}_i$ est triviale. Si elle ne l'est pas, on a donc $\mathfrak{B}_i \neq 0$, mais aussi $[\mathfrak{B}_i, \mathfrak{P}_i] \neq 0$ et $[\mathfrak{B}_i, \mathfrak{P}_j] = 0$ si $i \neq j$. On en déduit que dans ce cas la représentation de H dans $\mathfrak{P}_i$ n'est pas équivalente à la représentation de H dans $\mathfrak{P}_j$ pour $j \neq i$.

Soit alors un produit scalaire sur $\mathfrak{P}$ invariant par ad (H). De la remarque ci-dessus, on déduit que $\mathfrak{R}_0$ et les $\mathfrak{P}_i$ non triviaux forment une décomposition orthogonale de $\mathfrak{P}$ pour ce produit scalaire. Maintenant, sur chaque $\mathfrak{P}_i$ non trivial, il y a un produit scalaire $g_{i,0}$, $\mathfrak{B}_i$-invariant, induit par une métrique bi-invariante $g_{i,1}$ sur $\mathfrak{W}_i$. Par irréductibilité, le produit scalaire donné est proportionnel à $g_{i,0}$ sur $\mathfrak{P}_i$; on le note $a_i g_{i,0}$. Donc le produit scalaire donné est la restriction à $\mathfrak{P}$ du produit scalaire sur $\mathfrak{G}$ somme directe orthogonale des $a_i g_{i,1}$ sur les $\mathfrak{W}_i$ pour $\mathfrak{P}_i$ non trivial, et du produit scalaire induit sur $\mathfrak{R}_0$. Ce produit scalaire sur $\mathfrak{G}$ est ad ($\mathfrak{G}$)-invariant, donc aussi ad (G)-invariant, puisque G est connexe.

Pour démontrer le théorème 6, il ne reste plus qu'à démontrer le

Lemme 13. — *Si* M = G/H *ne vérifie pas* (N), *il existe une métrique* G-*invariante sur* M *à courbure scalaire strictement négative.*

On déduit en particulier de ce lemme :

Corollaire 5. — *Si* M *est de type normal, il vérifie* (N).

En effet, d'après (*a*) et (*b*), si M est de type normal il n'a pas de métrique G-invariante à courbure scalaire négative.

On remarque enfin que si M a des métriques G-invariantes à courbure négative, il possède également des métriques G-invariantes à courbure scalaire strictement positive (une métrique normale par exemple), donc aussi des métriques à courbure scalaire nulle, puisque l'espace des métriques G-invariantes est connexe.

Démonstration du lemme 13. — Par hypothèse, il existe i et j distincts tels que $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] \neq 0$. On a $\langle \mathfrak{H}, [\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] \rangle = \langle [\mathfrak{H}, \mathfrak{P}_i], \mathfrak{P}_j \rangle = \langle \mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j \rangle = 0$, donc $[\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j] \subset \mathfrak{P}$. On pose $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{Q}_2 = \bigoplus_{j \neq i} \mathfrak{P}_j$. On a donc la situation $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}_1 \oplus \mathfrak{Q}_2$ avec $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ ad (H)-invariants. On remarque alors que $[\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2]$ est non nul et dans $\mathfrak{P}$. On peut donc supposer, quitte à échanger 1 et 2, que $\langle [\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2], \mathfrak{Q}_1 \rangle \neq 0$, ce qui implique $\langle [\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_1], \mathfrak{Q}_2 \rangle \neq 0$ par bi-invariance. On considère alors le produit scalaire $\langle \, , \rangle_t$ sur $\mathfrak{P}$ défini par : $\langle \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2 \rangle_t = 0$, $\langle \, , \rangle_t = \langle \, , \rangle$ sur $\mathfrak{Q}_1$ et $\langle \, , \rangle_t = t^2 \langle \, , \rangle$ sur $\mathfrak{Q}_2$. Soit $(Y_i)_{i \in I}$ une base de $\mathfrak{Q}_1$ orthonormée pour $\langle \, , \rangle$ et $(Z_j)_{j \in J}$ une base de $\mathfrak{Q}_2$ orthonormée pour $\langle \, , \rangle$. Alors les Y_i et les $(1/t) Z_j$ forment une base orthonormée de $\mathfrak{P}$ pour $\langle \, , \rangle_t$. On va calculer la courbure scalaire de M pour $\langle \, , \rangle_t$ en utilisant cette base. En effet, $\langle \, , \rangle_t$ est encore ad (H)-invariant sur $\mathfrak{P}$ donc définit une métrique G-invariante sur M. Comme indiqué dans [C-E] (chap. 3), on prolonge les produits scalaires $\langle \, , \rangle$ et $\langle \, , \rangle_t$ à tout $\mathfrak{G}$ en choisissant un produit scalaire (noté encore $\langle \, , \rangle = \langle \, , \rangle_t$) bi-invariant sur $\mathfrak{H}$ (c'est possible puisque H est compact) et en imposant $\langle \mathfrak{H}, \mathfrak{P} \rangle_t = 0$. La courbure de M se calcule alors par la formule :

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle = -\frac{3}{4} \| [X, Y]_{\mathfrak{P}} \|^2 - \frac{1}{2} \langle [X, [X, Y]], Y \rangle - \frac{1}{2} \langle [Y, [Y, X]], X \rangle + \| U(X, Y) \|^2 - \langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle$$

pour X et Y dans $\mathfrak{P}$, où $U : \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ est défini par la formule :

$$\langle U(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2} (\langle X, [Z, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle).$$

(On notera sans indice les quantités calculées avec $\langle \, , \rangle$ et avec un indice t les mêmes quantités calculées avec $\langle \, , \rangle_t$.)

Si $[\, ,]_0$, $[\, ,]_1$, $[\, ,]_2$ sont les trois composantes de $[\, ,]$ dans la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{Q}_1 \oplus \mathfrak{Q}_2$, on vérifie facilement que, si X et Y sont dans $\mathfrak{Q}_1$, $U_t(X, Y) = 0$, si X et Y sont dans $\mathfrak{Q}_2$, $U_t(X, Y) = 0$ et si $X \in \mathfrak{Q}_1$ et $Y \in \mathfrak{Q}_2$, alors

$$U_t(X, Y) = \frac{1-t^2}{2} [X, Y]_1 + \frac{1-t^2}{2t^2} [X, Y]_2 .$$

On obtient alors, en utilisant la bi-invariance de $\langle \, , \rangle$, si

X et $Y \in \mathfrak{Q}_1$, $\quad \langle R_t(X, Y)X, Y \rangle_t = \| [X, Y]_0 \|^2 + \frac{1}{4} \| [X, Y]_1 \|^2 + \frac{4-3t^2}{4} \| [X, Y]_2 \|^2;$

si

$$X \text{ et } Y \in \mathfrak{Q}_2, \qquad \langle R_t(X, Y)X, Y\rangle_t = t^2 \| [X, Y]_0 \|^2 + \frac{4t^2-3}{4} \| [X, Y]_1 \|^2 + \frac{t^2}{4} \| [X, Y]_2 \|^2;$$

si

$$X \in \mathfrak{Q}_1 \text{ et } Y \in \mathfrak{Q}_2, \qquad \langle R_t(X, Y)X, Y\rangle_t = \frac{t^2+1}{2} \| [X, Y]_0 \|^2 + \frac{t^4}{4} \| [X, Y]_1 \|^2 + \frac{1}{4t^2} \| [X, Y]_2 \|^2.$$

On obtient en conséquence pour la courbure scalaire :

$$\begin{aligned}\tau_t = \sum_{i, i' \in I} &\left(\| [Y_i, Y_{i'}]_0 \|^2 + \frac{1}{4} \| [Y_i, Y_{i'}]_1 \|^2 + \frac{4-3t^2}{4} \| [Y_i, Y_{i'}]_2 \|^2 \right) \\ &+ \sum_{i \in I, j \in J} \frac{2}{t^2} \left(\frac{t^2+1}{2} \| [Y_i, Z_j]_0 \|^2 + \frac{t^4}{4} \| [Y_i, Z_j]_1 \|^2 + \frac{1}{4t^2} \| [Y_i, Z_j]_2 \|^2 \right) \\ &+ \sum_{j, j' \in J} \frac{1}{t^4} \left(t^2 \| [Z_j, Z_{j'}]_0 \|^2 + \frac{4t^2-3}{4} \| [Z_j, Z_{j'}]_1 \|^2 + \frac{t^2}{4} \| [Z_j, Z_{j'}]_2 \|^2 \right).\end{aligned}$$

Si t tend vers l'infini, le terme dominant de cette expression est en t^2 et vaut :

$$-\frac{3}{4}\left(\sum_{i, i' \in J} \| [Y_i, Y_{i'}]_2 \|^2 \right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i \in I, j \in J} \| [Y_i, Z_j]_1 \|^2 \right).$$

Mais

$$\| [Y_i, Y_{i'}]_2 \|^2 = \sum_{j \in J} \langle [Y_i, Y_{i'}], Z_j \rangle^2$$

et de même

$$\| [Y_i, Z_j]_1 \|^2 = \sum_{i' \in I} \langle [Y_i, Z_j], Y_{i'} \rangle^2 = \sum_{i' \in I} \langle [Y_i, Y_{i'}], Z_j \rangle^2$$

par bi-invariance de $\langle\ ,\ \rangle$. On trouve donc finalement que le terme dominant vaut :

$$-\frac{1}{4} \sum_{i, i' \in I, j \in J} \langle [Y_i, Y_{i'}], Z_j \rangle^2.$$

Puisque $\langle\ ,\ \rangle$, $[\ ,\ ]$, les Y_i et les Z_j sont indépendants de t, on en déduit que pour t assez grand la courbure scalaire de M pour la métrique correspondant à $\langle\ ,\ \rangle_t$ est strictement négative.

8. Une construction auxiliaire

Soient G un groupe de Lie connexe, H et K deux sous-groupes fermés avec H contenu dans K. Soient $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ les sous-algèbres correspondant à H et K. On suppose que $\mathrm{ad}_G(K)$ est relativement compact dans $\mathrm{Gl}(\mathfrak{G})$, ce qui implique que

$ad_G(H)$ est également relativement compact dans $Gl(\mathfrak{G})$. On sait que $\mathfrak{H}$ est invariant sous $ad_G(H)$ et que $\mathfrak{K}$ est invariant sous $ad_G(K)$ [et aussi $ad_G(H)$] et que l'on peut trouver [en prenant par exemple un produit scalaire sur $\mathfrak{G}$ invariant par $ad_G(K)$] un supplémentaire $ad_G(K)$-invariant $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{G}$ et un supplémentaire $ad_G(H)$-invariant $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{K}$. Alors $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ est un supplémentaire $ad_G(H)$-invariant de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$. Soit g_1 une métrique G-invariante sur G/K; il lui correspond un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_1$ sur $\mathfrak{M}$, qui est $ad_G(K)$-invariant. Soit g_2 une métrique K-invariante sur K/H; il lui correspond un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_2$ sur $\mathfrak{N}$, qui est $ad_G(H)$-invariant. On forme le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_3$ sur $\mathfrak{P}$ en posant : $\langle\ ,\ \rangle_3 = \langle\ ,\ \rangle_2$ sur $\mathfrak{N}$, $\langle\ ,\ \rangle_3 = \langle\ ,\ \rangle_1$ sur $\mathfrak{M}$ et $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \rangle_3 = 0$. Alors $\langle\ ,\ \rangle_3$ est un produit scalaire $ad_G(H)$-invariant sur $\mathfrak{P}$; soit g_3 la métrique G-invariante correspondante sur G/H.

PROPOSITION 2. — *La projection canonique* $G/H \to G/K$ *est une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques isométriques à* $(K/H, g_2)$, *de la variété riemannienne* $(G/H, g_3)$ *sur* $(G/K, g_1)$.

Démonstration. — Puisque les métriques riemanniennes g_1 et g_3 sont G-invariantes, et que la projection commute à l'action par G, il suffit de regarder au point e H de G/H, où l'espace tangent à G/H s'identifie à $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, et $\mathfrak{N}$ s'identifie alors au sous-espace vertical de la submersion, et $\mathfrak{M}$ au sous-espace horizontal, puisque c'est l'orthogonal de $\mathfrak{N}$. D'autre part l'application tangente à la projection en e H s'identifie alors à la projection de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{M}$ parallèlement à $\mathfrak{N}$. Enfin il a été montré dans la démonstration du lemme 6 de [B B 2] (voir la remarque après la démonstration, p. 53)que sous les hypothèses de la proposition, K/H est totalement géodésique dans G/H.

Pour une submersion riemannienne, B. O'Neill a introduit dans [O] deux tenseurs notés A et T. Si les fibres sont totalement géodésiques, alors T = 0. Le tenseur A mesure la déviation par rapport à l'intégrabilité de la distribution horizontale. On peut le calculer facilement en e H en utilisant la formule du lemme 2 de [O], p. 461. Avec les identifications faites précédemment, on obtient :

$$\text{si}\quad X, Y \in \mathfrak{M}, \qquad \text{alors}\quad A_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{N}},$$

où $[\ ,\ ]_{\mathfrak{N}}$ est la composante sur $\mathfrak{N}$ de $[\ ,\ ]$ dans la décomposition $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N} \oplus \mathfrak{M}$. En appliquant les formules de O'Neill pour la courbure (dans le cas T = 0), on voit que la courbure scalaire τ_3 de g_3 (qu'il suffit de calculer en e H puisqu'elle est constante) s'exprime à partir des courbures scalaires τ_1 de g_1 et τ_2 de g_2, et de la norme de A par la formule :

$$\tau_3 = \tau_1 + \tau_2 - \|A\|^2,$$

où $\|A\|^2$ est la norme de A en tant qu'application bilinéaire de l'espace horizontal dans l'espace vertical, c'est-à-dire, si X_i est une base orthornormée de $\mathfrak{M}$ pour $\langle\ ,\ \rangle_1$, Y_k une base orthonormée de $\mathfrak{N}$ pour $\langle\ ,\ \rangle_2$, alors

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j,k} \langle A_{X_i} X_j, Y_k \rangle^2 = \sum_{i,j} \|A_{X_i} X_j\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i,j} \|[X_i, X_j]_{\mathfrak{N}}\|_2^2.$$

On remarque que cette construction fonctionne quelles que soient les métriques riemanniennes invariantes g_1 et g_2. En particulier, si on remplace g_2 par tg_2 où t est un scalaire strictement positif, on obtient par la construction une famille de métriques $g_3(t)$ qui n'est pas en général tg_3. On peut alors calculer la courbure scalaire $\tau_3(t)$ de $g_3(t)$ à partir des courbures scalaires de g_1 et g_2 et de la norme du tenseur A *pour* g_1 *et* g_2 (et non pas tg_2) par la formule :

LEMME 14. — $\tau_3(t) = \tau_1 + (1/t)\tau_2 - t\,\|A\|^2$.

Démonstration. — D'abord, la courbe scalaire de tg_2 est $(1/t)\tau_2$. Puis le tenseur A de O'Neill, considéré comme application bilinéaire sur l'espace horizontal, à valeurs dans l'espace vertical, ne dépend que de la distribution des espaces horizontaux. Et sa norme pour g_1 et tg_2 est simplement sa norme pour g_1 et g_2, multipliée par t, puisque g_2 correspond à l'espace vertical.

Puisque $\mathrm{ad}_G(K)$ est relativement compact dans $\mathrm{Gl}(\mathfrak{G})$, il existe sur $\mathfrak{G}$ et donc en particulier sur $\mathfrak{K}$ un produit scalaire $\mathrm{ad}_G(K)$-invariant. Si $\langle\ ,\ \rangle_2$ est la restriction à $\mathfrak{N}$ d'un tel produit scalaire, alors la métrique riemannienne invariante g_2 associée à $\langle\ ,\ \rangle_2$ sur K/H est *normale*, et en particulier sa courbure scalaire τ_2 est positive ou nulle, et nulle si et seulement si K/H vérifie les conditions suivantes : la composante connexe de e H dans K/H est homogène sous un sous-groupe abélien connexe de K. (Cette condition s'obtient en appliquant à K/H les remarques faites au paragraphe 7 sur les métriques normales, et en tenant compte du fait que K n'est plus supposé ni connexe, ni effectif, mais que $\mathfrak{K}$ admet un produit scalaire invariant par ad (K), ce qui implique que $\mathfrak{K}$ est somme directe d'une sous-algèbre compacte et d'une sous-algèbre abélienne.) *On dira pour simplifier dans ce cas que* K/H *est de type abélien.* On remarque en particulier que si K/H est de type abélien, toute métrique riemannienne K-invariante sur K/H est plate. On déduit de cette analyse la :

PROPOSITION 3. — (*a*) *Si* K/H *n'est pas de type abélien,* G/H *admet une métrique riemannienne* G-*invariante à courbure scalaire strictement positive.*

(*b*) *Si* K/H *est de type abélien et* τ_1 *est négatif ou nul, alors* $\tau_3(t)$ *est négatif ou nul pour tout* t.

(*c*) *Si* K/H *est de type abélien et si il existe sur* G/K *une métrique riemannienne* G-*invariante à courbure scalaire strictement positive, alors* G/H *admet une métrique riemannienne* G-*invariante à courbure scalaire strictement positive.*

(*d*) *Si* G/K ou K/H *admettent une métrique riemannienne invariante à courbure scalaire strictement négative, alors* G/H *admet également une métrique riemannienne* G-*invariante à courbure scalaire strictement négative.*

Démonstration. — (*a*) On choisit g_2 normale et on a donc $\tau_2 > 0$. Il suffit alors de prendre t assez petit pour que $\tau_3(t)$ soit positif.

(*b*) Si K/H est de type abélien, on a $\tau_2 = 0$ pour tout g_2, donc si τ_1 est négatif ou nul τ_3 l'est également.

(*c*) On a encore $\tau_2 = 0$; il suffit donc, si $\tau_1 > 0$, de prendre t assez petit pour que $\tau_3(t)$ soit positif.

(d) Si $\tau_1 < 0$, alors $\tau_3(t) < 0$ si t assez grand; et si $\tau_2 < 0$, alors $\tau_3(t) < 0$ si t assez petit.

Il faut remarquer que les métriques G-invariantes sur G/H ne sont pas forcément toutes de la forme g_3 pour la construction appliquée à des g_1 et g_2 bien choisies. C'est toutefois le cas sous certaines hypothèses assez fortes.

PROPOSITION 4. — *On suppose que, sous les hypothèses générales de ce paragraphe, pour toute composante irréductible* $\mathfrak{M}_i$ *de la représentation de* K *dans* $\mathfrak{M}$ *donnée par* $\mathrm{ad}_G(K)$, *la représentation induite par restriction à* $\mathrm{ad}_G(H)$, *de* H *dans* $\mathfrak{M}_i$ *est encore irréductible et n'est pas équivalente à un facteur irréductible de la représentation de* H *dans* $\mathfrak{N}$ *donnée par* $\mathrm{ad}_G(H)$. *Alors toute métrique riemannienne* G-*invariante sur* G/H *s'obtient comme métrique* g_3 *par la construction pour des métriques* g_1 *et* g_2 *bien choisies.*

Remarque. — La condition donnée est en fait également nécessaire.

Démonstration. — On note $\mathfrak{M}^j$ les composantes isotypiques ([BO] p. 40) de la représentation de K dans $\mathfrak{M}$. L'hypothèse implique aussitôt que les $\mathfrak{M}^j$ sont aussi des composantes isotypiques de la représentation de H dans $\mathfrak{P}$. Donc tout produit scalaire $\mathrm{ad}_G(H)$-invariant sur $\mathfrak{P}$ est tel que $\mathfrak{N}$ et les $\mathfrak{M}^j$ soient deux à deux orthogonaux et que le produit scalaire induit sur chacun des $\mathfrak{M}^j$ soit $\mathrm{ad}_G(K)$-invariant. En prenant les produits scalaires induits sur $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$, on a donc immédiatement $\langle\ ,\ \rangle_1$ et $\langle\ ,\ \rangle_2$ qui fournissent g_1 et g_2 pour la construction.

Remarque. — Cette proposition a déjà été utilisée (plus ou moins explicitement) par l'auteur dans [BB 1 et 2] (*voir* en particulier le lemme 13, p. 59 de [BB 2]). La fibration $G/H \to G/K$ est également utilisée dans [BS] (chap. 7, § 6).

9. Courbure scalaire des espaces homogènes non compacts

D'après le début du paragraphe 7, on sait qu'il suffit de considérer le cas M = G/H, où G est connexe effectif *non compact* et où H est *compact*. On sait (*voir* par exemple [HO], chap. XV) que H est contenu dans un sous-groupe compact maximal K de G et que G/K est difféomorphe à un espace euclidien. On en déduit que G/H a un revêtement universel difféomorphe à un espace euclidien si et seulement si K/H a un revêtement universel difféomorphe à un espace euclidien. En utilisant le résultat (a) de la proposition 3 du paragraphe 8, on en déduit aussitôt la première partie du théorème 2 dans ce cas : *si le revêtement universel de* G/H *n'est pas difféomorphe à un espace euclidien, alors* G/H *admet une métrique riemannienne* G-*invariante à courbure scalaire strictement positive.*

On supposera désormais que le revêtement universel de G/H (et donc aussi de K/H) est difféomorphe à un espace euclidien. On remarque que, comme K/H est de type abélien, H contient le plus grand sous-groupe semi-simple connexe L de K. Le sous-groupe L est dans G un sous-groupe semi-simple connexe compact maximal pour ces trois propriétés.

Remarque (en forme de regret). — On pourrait regarder la projection : $G/L \to G/H$. Puisque H/L est de type abélien, en appliquant (c) de la proposition 3 du paragraphe 8 on voit que si G/H a des métriques à courbure scalaire positive, alors G/L aussi; mais on n'a ainsi aucun renseignement sur les métriques à courbure nulle de G/H. On va donc devoir procéder autrement.

On va d'abord généraliser les calculs du paragraphe 5 au cas des espaces homogènes. Soit donc $M = G/H$, $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{H}$ celle de H. Soit $\mathfrak{G}_1$ un idéal de $\mathfrak{G}$, G_1 le sous-groupe engendré par $\mathfrak{G}_1$ dans G, que l'on supposera *fermé*. On forme $H_1 = G_1 \cap H$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$, qui est un idéal de $\mathfrak{H}$. On suppose toujours que H est compact, donc il existe un supplémentaire $\mathfrak{P}_1$ ad (H)-invariant de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{G}_1$ et un supplémentaire $\mathfrak{P}$ ad (H)-invariant de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$, contenant $\mathfrak{P}_1$. On considère un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, ad (H)-invariant sur $\mathfrak{P}$ (qui correspond donc à une métrique riemannienne G-invariante sur M). On remarque que la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $\mathfrak{P}_1$ est ad (H_1)-invariante, donc définit une métrique riemannienne G_1-invariante sur $M_1 = G_1/H_1$. On étend le produit scalaire à tout $\mathfrak{G}$ en posant $\langle \mathfrak{P}, \mathfrak{H} \rangle = 0$ et en choisissant sur $\mathfrak{H}$ un produit scalaire ad (H)-invariant. Soit $\mathfrak{P}_2$ l'orthogonal de $\mathfrak{P}_1$ dans $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{H}_2$ l'orthogonal de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}$. On remarque que $\mathfrak{P}_2$ est ad (H)-invariant, donc en particulier ad $(\mathfrak{H}_2)$-invariant, que $\mathfrak{H}_2$ est un idéal de $\mathfrak{H}$, commutant à $\mathfrak{H}_1$, mais que $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{P}_2$ n'est pas forcément une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$. Toutefois, si on munit $\mathfrak{A}$ du crochet $[\ ,\ ]_{\mathfrak{A}}$ (qui est la restriction à $\mathfrak{A}$ de la projection sur $\mathfrak{A}$ parallèlement à $\mathfrak{G}_1$ du crochet de $\mathfrak{G}$), on obtient l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_2$ quotient de $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G}_1$. On remarque ici que si $X \in \mathfrak{H}_2$ et $Y \in \mathfrak{A}$, alors $[X, Y] \in \mathfrak{A}$ donc $\mathfrak{H}_2$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}_2$ et $\mathfrak{P}_2$ est un supplémentaire ad $(\mathfrak{H}_2)$-invariant de $\mathfrak{H}_2$ dans $\mathfrak{G}_2$. De plus $\mathfrak{G}_2$ est l'algèbre de Lie du groupe $G_2 = G/G_1$, $\mathfrak{H}_2$ est la sous-algèbre correspondant au sous-groupe $H_2 = p(H)$, où p est la projection de G sur G_2, et l'on vérifie facilement que $\mathfrak{P}_2$ et la restriction à $\mathfrak{P}_2$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sont tous deux ad (H_2)-invariants pour l'action adjointe dans $\mathfrak{G}_2$. En particulier, le produit scalaire ainsi défini sur $\mathfrak{P}_2$ induit une métrique riemannienne G_2-invariante sur $M_2 = G_2/H_2$. On définit enfin $\pi : M \to M_2$ par $\pi(gH) = p(g)H_2$.

PROPOSITION 5. — *Pour les métriques riemanniennes considérées,* π *est une submersion riemannienne, dont la fibre en* eH *est* M_1.

Démonstration. — On remarque d'abord que π est équivariante par rapport aux actions de G sur M et M_2 définies par l'action à gauche de g et $p(g)$. Comme ces actions sont des isométries, il suffit donc de regarder au point eH de M, où la fibre est trivialement M_1. On identifie alors l'espace tangent à M en eH avec $\mathfrak{P}$ en identifiant $\mathfrak{G}$ avec les champs de l'action de G sur M. Alors l'espace vertical de la fibration est $\mathfrak{P}_1$ qui correspond à l'action de G_1, donc l'espace horizontal est $\mathfrak{P}_2$ (orthogonal de $\mathfrak{P}_1$). L'application tangente à π en eH est alors la projection orthogonale de $\mathfrak{P}$ sur $\mathfrak{P}_2$, où $\mathfrak{P}_2$ est considéré ici dans $\mathfrak{G}_2$, identifiée avec les champs de l'action de G_2 sur M_2. Comme on a pris le même produit scalaire dans les deux cas, π est bien une submersion riemannienne.

On va avoir besoin des tenseurs T et A de O'Neill en eH :

LEMME 15. — *Sous les hypothèses précédentes, avec l'identification de l'espace vertical avec* $\mathfrak{P}_1$ *et de l'espace horizontal avec* $\mathfrak{P}_2$, *on a : si* $X_1, X_2 \in \mathfrak{P}_1$ *et* $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{P}_2$, *alors*

(*a*) $$\langle T_{X_1} X_2, Y_1 \rangle = \frac{1}{2}(\langle [Y_1, X_1], X_2 \rangle + \langle [Y_1, X_2], X_1 \rangle),$$

(*b*) $$\langle A_{Y_1} Y_2, X_1 \rangle = -\frac{1}{2}\langle [Y_1, Y_2], X_1 \rangle.$$

Démonstration. — On considère les champs de vecteurs de l'action de G sur M définis par X_1, X_2, Y_1, Y_2. On calcule $\langle D_{X_1} X_2, Y_1 \rangle$ comme indiqué dans [WA] (p. 280) en remarquant que $[X_1, X_2] \in \mathfrak{P}_1$, d'où (*a*). De même, pour (*b*), on remarque que $[X_1, Y_1]$ et $[X_2, Y_2]$ sont dans $\mathfrak{P}_2$ [qui est ad (H)-invariant].

Les formules de O'Neill permettent de calculer la courbure scalaire de M (en *e*H) à partir de celles de M_1 et de M_2 et des tenseurs T et A. On note $(X_i)_{i \in I}$ une base orthonormée de $\mathfrak{P}_1$ et $(Y_j)_{j \in J}$ une base orthonormée de $\mathfrak{P}_2$. On a alors :

$$\tau(M) = \tau(M_1) + \tau(M_2) - \sum_{j, j' \in J} \| A_{Y_j} Y_{j'} \|^2 - \sum_{i, i' \in I} \| T_{X_i} X_{i'} \|^2$$
$$+ 2 \sum_{i \in I, j \in J} \langle (D_{Y_j} T)_{X_i} X_i, Y_j \rangle - \| \sum_{i \in I} T_{X_i} X_i \|^2.$$

Et en traduisant dans $\mathfrak{G}$, on obtient :

LEMME 16. — *On a*

$$\tau(M) = \tau(M_1) + \tau(M_2) - \sum_{i \in I, j, j' \in J} \frac{1}{4} \langle [Y_j, Y_{j'}], X_i \rangle^2$$
$$- \sum_{i, i' \in I, j \in J} \frac{1}{4} (\langle [Y_j, X_i], X_{i'} \rangle + \langle [Y_j, X_{i'}], X_i \rangle)^2$$
$$-2 \sum_{k \in J} (\sum_{i \in I} \langle [Y_k, X_i], X_i \rangle)(\sum_{j \in J} \langle [Y_k, Y_j], Y_j \rangle)$$
$$- \sum_{j \in J} (\sum_{i \in I} \langle [Y_j, X_i], X_i \rangle)^2.$$

En particulier, si $\sum_{j \in J} \langle [Y_k, Y_j], Y_j \rangle = 0$ *pour tout* k, *alors* $\tau(M) \leqq \tau(M_1) + \tau(M_2)$ *et on a l'égalité si et seulement si* M *est localement la variété riemannienne produit de* M_1 *et* M_2.

Démonstration. — Compte tenu du lemme 15, pour avoir la formule il suffit d'exprimer le terme qui fait intervenir la dérivée covariante du tenseur T. Dans les formules de O'Neill, ce terme provient de

$$\langle R_M(X_i, Y_j) X_i, Y_j \rangle = \langle (D_{Y_j} T)_{X_i} X_i, Y_j \rangle + \| A_{Y_j} X_i \|^2 - \| T_{X_i} Y_j \|^2,$$

où R_M est la courbure de la variété M. On rappelle que

$$\langle A_{Y_j} X_i, Y_{j'} \rangle = - \langle A_{Y_j} Y_{j'}, X_i \rangle \qquad \text{donc} \qquad \| A_{Y_j} X_i \|^2 = \sum_{j' \in J} \langle A_{Y_j} Y_{j'}, X_i \rangle^2,$$

et que

$$\langle T_{X_i} Y_j, X_{i'} \rangle = - \langle T_{X_i} X_{i'}, Y_j \rangle \qquad \text{donc} \qquad \| T_{X_i} Y_j \|^2 = \sum_{i' \in I} \langle T_{X_i} X_{i'}, Y_j \rangle^2.$$

Pour calculer R_M, on la relie à la courbure R de la métrique riemannienne invariante sur G définie par le produit scalaire étendu à tout $\mathfrak{G}$, par la formule (*voir* [C-E], p. 69) :

$$\langle R_M(Y_j, X_i) Y_j, X_i \rangle = \langle R(Y_j, X_i) Y_j, X_i \rangle + \frac{3}{4} \| [X_i, Y_j]_{\mathfrak{H}} \|^2.$$

Puisque X_i est dans $\mathfrak{G}_1$, $[X_i, Y_j]$ aussi, donc $[X_i, Y_j]_{\mathfrak{H}}$ est dans $\mathfrak{H}_1$.

On calcule enfin le premier terme à l'aide des formules du paragraphe 5 :

$$\langle R(X_i, Y_j)X_i, Y_j\rangle = -\|S(Y_j)X_i\|^2 - 2\langle S(Y_j)X_i, A(Y_j)X_i\rangle + \|{}^tC(Y_j)X_i\|^2 - \sum_{j'\in J}\langle S(Y_{j'})X_i, X_i\rangle\langle T(Y_{j'})Y_j, Y_j\rangle,$$

où S, C, A, T ont été définis au paragraphe 5 pour $\mathfrak{U} = \mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{A}$ son complémentaire orthogonal. Dans le dernier terme de cette expression, on s'est contenté de sommer sur les Y_j, alors que la formule du paragraphe 5 (*c*) faisait intervenir une sommation sur une base de tout $\mathfrak{A}$; mais ici $\mathfrak{H}_2$ est orthogonal à $\mathfrak{P}_2$ et l'action adjointe des éléments de $\mathfrak{H}_2$ est antisymétrique, donc il suffit de sommer sur la base orthonormée $(Y_{j'})_{j'\in J}$ de $\mathfrak{P}_2$.

Pour pouvoir regrouper les termes, on va décomposer la restriction de $\operatorname{ad}(Y_j)$ à $\mathfrak{G}_1$ suivant la somme $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{P}_1$. On remarque d'abord que si Z est dans $\mathfrak{H}_1$, alors $[Z, Y_j]$ est dans $\mathfrak{P}_2$ [qui est $\operatorname{ad}(\mathfrak{H})$-invariant] et aussi dans l'idéal $\mathfrak{G}_1$, donc est nul. On en déduit immédiatement que si on note $2\,E(Y_j)X_i$ et $(V(Y_j)+F(Y_j))X_i$ les composantes sur $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{P}_1$ de $[Y_j, X_i]$, avec $V(Y_j)$ symétrique et $F(Y_j)$ antisymétrique dans $\mathfrak{P}_1$, alors $S(Y_j)X_i = E(Y_j)X_i + V(Y_j)X_i$, $A(Y_j)X_i = E(Y_j)X_i + F(Y_j)X_i$ et $[Y_j, X_i]_{\mathfrak{H}_1} = 2\,E(Y_j)X_i$. D'autre part, si Z est dans $\mathfrak{H}_2$, alors $[Z, Y_j]$ est dans $\mathfrak{P}_2$, donc ${}^tC(Y_j)X_i$ est dans $\mathfrak{P}_2$ et

$$\|{}^tC(Y_j)X_i\|^2 = \sum_{j'\in J}\langle X_i, C(Y_j)Y_{j'}\rangle^2 = \sum_{j'\in J}\frac{1}{4}\langle X_i, [Y_j, Y_{j'}]\rangle^2.$$

Puis

$$\langle S(Y_{j'})X_i, X_i\rangle = \langle [Y_{j'}, X_i], X_i\rangle \qquad \text{et} \qquad \langle T(Y_{j'})Y_j, Y_j\rangle = \langle [Y_{j'}, Y_j], Y_j\rangle.$$

On remarque enfin que

$$\langle T_{X_i}X_{i'}, Y_j\rangle = \frac{1}{2}(\langle [Y_j, X_i], X_{i'}\rangle + \langle [Y_j, X_{i'}], X_i\rangle) = \langle V(Y_j)X_i, X_{i'}\rangle.$$

On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned}\langle (D_{Y_j}T)_{X_i}X_i, Y_j\rangle &= -\|E(Y_j)X_i\|^2 - \|V(Y_j)X_i\|^2 - 2\|E(Y_j)X_i\|^2 \\ &\quad -2\langle V(Y_j)X_i, F(Y_j)X_i\rangle + \sum_{j'\in J}\frac{1}{4}\langle X_i, [Y_j, Y_{j'}]\rangle^2 \\ &\quad - \sum_{j'\in J}\langle [Y_{j'}, X_i], X_i\rangle\langle [Y_{j'}, Y_j], Y_j\rangle + 3\|E(Y_j)X_i\|^2 \\ &\quad - \sum_{j'\in J}\frac{1}{4}\langle [Y_j, Y_{j'}], X_i\rangle^2 + \sum_{i'\in I}\langle V(Y_j)X_i, X_{i'}\rangle^2 \\ &= -2\langle V(Y_j)X_i, F(Y_j)X_i\rangle - \sum_{j'\in J}\langle [Y_{j'}, X_i], X_i\rangle\langle [Y_{j'}, Y_j], Y_j\rangle.\end{aligned}$$

Et on obtient la formule cherchée pour la courbure scalaire en remarquant comme au lemme 11 que $\sum_{i\in I}\langle V(Y_j)X_i, F(Y_j)X_i\rangle = 0$.

Maintenant, si $\sum_{j\in J}\langle [Y_{j'}, Y_j], Y_j\rangle = 0$ pour tout j', on a aussitôt $\tau(M) \leqq \tau(M_1) + \tau(M_2)$

puisque les trois autres termes qui interviennent sont négatifs ou nuls et on voit facilement en regardant les deux premiers que l'on n'a l'égalité que si les deux tenseurs A et T de O'Neill sont nuls. On applique alors le résultat du paragraphe 6 de [O] : « à des revêtements près », M est le produit riemannien de M_1 et M_2.

On va utiliser ce calcul pour se ramener au cas où G est simple. On remarque d'abord que pour démontrer le théorème 2 dans le cas qui nous reste, il suffit de le démontrer dans le cas où H est connexe : en effet, si H_0 est la composante connexe de l'élément neutre de H, G/H_0 est un revêtement riemannien de G/H.

On se ramène ensuite au cas où G est réductif. Pour cela, on considère le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{G}_1$ de $\mathfrak{G}$. On a $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H} = 0$ par effectivité, puisque $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$ serait central dans $\mathfrak{G}$ d'après la compacité de H. Alors l'algèbre quotient $\mathfrak{G}_2$ est réductive et on a :

LEMME 17. — *Avec les notations du lemme* 16, *si* $\mathfrak{G}_2$ *est réductive, alors :*

$$\sum_{j \in J} \langle [Y_{j'}, Y_j], Y_j \rangle = 0 \quad \textit{pour tout } Y_{j'}, j' \in J.$$

Démonstration. — Soit $(Z_k)_{k \in K}$ une base orthonormée de $\mathfrak{H}_2$. On a $[Z_k, Y_{j'}] \in \mathfrak{P}_2$, donc $\langle [Z_k, Y_{j'}], Z_k \rangle = 0$ et par conséquent :

$$\sum_{j \in J} \langle [Y_{j'}, Y_j], Y_j \rangle = \sum_{j \in J} \langle [Y_{j'}, Y_j], Y_j \rangle + \sum_{k \in K} \langle [Y_{j'}, Z_k], Z_k \rangle$$
$$= \operatorname{trace}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{G}_2}(Y_{j'})) = 0.$$

De plus, on a ici $M_1 = G_1$ nilpotent donc $\tau(M_1) \leqq 0$ et $\tau(M_1) = 0$ si et seulement si M_1 est plat. Si on suppose que l'on a le même résultat pour M_2, on a alors $\tau(M) \leqq 0$ et $\tau(M) = 0$ si et seulement si M est plat d'après le lemme 16. On est donc ramené au cas où G est réductif. On remarque que l'on peut de nouveau supposer que G est effectif : sinon, on divise par un sous-groupe distingué de G et H comme indiqué au début du paragraphe 7 et le quotient de G est encore réductif. On considère alors le centre de G, qui correspond au centre de $\mathfrak{G}$, qui est aussi le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{G}$. Donc le même raisonnement ramène au cas où G est semi-simple. On considère alors les facteurs simples de G et une application itérée du lemme 16 montre facilement que l'on est ramené au cas où G est simple. On a alors deux cas à considérer :

(1) $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre *compacte maximale* de $\mathfrak{G}$: alors G/H est un espace symétrique irréductible de type non compact et on sait dans ce cas que la courbure de ses métriques riemanniennes G-invariantes (qui sont toutes proportionnelles) est négative;

(2) $\mathfrak{H}$ est une sous-algèbre *semi-simple compacte de* $\mathfrak{G}$ *maximale pour ces deux propriétés et n'est pas maximale parmi les sous-algèbres compactes.* Ce cas sera traité au paragraphe suivant.

10. Étude des G/H, avec G simple, H connexe semi-simple compact maximal pour ces trois propriétés et non maximal parmi les sous-groupes compacts

Dans ce paragraphe, on suppose donc que $\mathfrak{G}$ est une algèbre de Lie simple non compacte, et $\mathfrak{H}$ une sous-algèbre semi-simple compacte maximale, qui n'est pas maximale parmi les sous-algèbres compactes. Alors, d'après la classification de E. Cartan (*voir* [HN] ou [T]), il existe une sous-algèbre $\mathfrak{L}$ de dimension 1 de $\mathfrak{G}$ qui centralise $\mathfrak{H}$ et telle que $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} = \mathfrak{K}$ soit maximale parmi les sous-algèbres compactes. On sait que si K est le sous-groupe connexe de G engendré par $\mathfrak{K}$, alors G/K est un espace symétrique *hermitien* irréductible. Soit $\mathfrak{Q}$ un supplémentaire ad (K)-invariant de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{G}$. Alors $\mathfrak{P} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{Q}$ est un supplémentaire ad (H)-invariant de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$. La représentation ad (K) de K dans $\mathfrak{Q}$ est irréductible et naturellement complexe, donc la représentation induite φ de H dans $\mathfrak{Q}$ est également une représentation complexe, qui est irréductible comme représentation complexe, mais pas forcément comme représentation réelle. On a les cas suivants :

$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{H}$	φ
(1) $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$	0	
(2) $\mathfrak{so}(n, 2)$ $(n \geqq 3)$	$\mathfrak{so}(n)$	*n* impair : $\overset{1}{\circ}-\circ-\circ\cdots\circ\Rightarrow\circ$ *n* pair : $\overset{1}{\circ}-\circ-\circ\cdots\circ<^{\circ}_{\circ}$
(3) $\mathfrak{su}(p, q)$ $(p \geqq q \geqq 1$ et $(p, q) \neq (1, 1)$ et $(2, 2))$	$\mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q)$	$\overset{1}{\circ}-\circ\cdots\circ-\circ \quad \oplus \quad \overset{1}{\circ}-\circ\cdots\circ-\circ$
(4) $\mathfrak{so}^*(2n)$ $(n \geqq 5)$	$\mathfrak{su}(n)$	$\circ-\overset{1}{\circ}-\circ\cdots\circ-\circ$
(5) $\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ $(n \geqq 3)$	$\mathfrak{su}(n)$	$\overset{2}{\circ}-\circ\cdots\circ-\circ$
6) $E_6^{(-14)}$	$\mathfrak{so}(10)$	$\circ-\circ-\circ<^{\overset{1}{\circ}}_{\circ}$
(7) $E_7^{(-25)}$	E_6	$\overset{1}{\circ}-\circ-\underset{\overset{\vert}{\circ}}{\circ}-\circ-\circ$

Dans cette énumération on a exclu certains cas de basse dimension pour éviter les répétitions. En effet, on a les isomorphismes canoniques :

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) = \mathfrak{su}(1, 1) = \mathfrak{so}(1, 2) = \mathfrak{sp}(1, \mathbf{R}); \ \mathfrak{so}(2, 2) = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R});$$
$$\mathfrak{su}(2, 2) = \mathfrak{so}(4, 2); \ \mathfrak{so}^*(2) = \mathbf{R}; \ \mathfrak{so}^*(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R});$$
$$\mathfrak{so}^*(6) = \mathfrak{su}(3, 1); \ \mathfrak{so}^*(8) = \mathfrak{so}(6, 2); \ \mathfrak{sp}(2, \mathbf{R}) = \mathfrak{so}(3, 2).$$

L'identification de φ peut se faire simplement en calculant sa dimension (ou bien directement sur le diagramme si on connaît une astuce secrète de J. Tits).

Dans le cas (1), on a simplement une métrique riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie localement isomorphe à Sl (2, **R**) et l'on sait dans ce cas que la courbure scalaire est négative.

Dans les cas (3) à (7), on constate, en consultant par exemple les tables de [T] que la représentation φ est *irréductible comme représentation réelle* : en effet, c'est une représentation complexe qui n'est pas de type réel [ce qu'elle est dans le cas (2), ce qui explique le traitement séparé]. En appliquant alors la proposition 4 du paragraphe 8, on voit que toute métrique riemannienne G-invariante de G/H s'obtient dans ce cas par la construction du paragraphe 8 à partir d'une métrique riemannienne G-invariante sur G/K (qui est à courbure scalaire négative, puisque G/K est symétrique irréductible de type non compact) et d'une métrique riemannienne K-invariante sur K/H, qui est de dimension 1. Donc la courbure scalaire de G/H est toujours strictement négative d'après la proposition 3 (*b*) du paragraphe 8.

Remarque. — Toujours dans les cas (3) à (7), on peut remarquer en appliquant les formules de O'Neill que, puisque toute métrique riemannienne G-invariante de G/H est « fibrée », la courbure de Ricci d'un vecteur unitaire vertical pour la submersion riemannienne $G/H \to G/K$ à fibres totalement géodésiques est strictement positive (on peut vérifier que c'est $\| A \|^2$). Donc dans les cas (3) à (7), G/H ne possède pas de métrique riemannienne G-invariante à courbure de Ricci négative ou nulle, contrairement aux cas (1) et (2), que l'on va examiner maintenant.

PROPOSITION 6. — *Si* $\mathfrak{G} = \mathfrak{so}(n, 2)$ *et* $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(n)$, *alors on a les propriétés suivantes pour les métriques riemanniennes* G-*invariantes sur* G/H :

(*a*) *la courbure scalaire est strictement négative;*

(*b*) *la courbure de Ricci n'est jamais constante;*

(*c*) *il y a des métriques à courbure de Ricci négative si* $n \geqq 2$;

(*d*) *il y a des métriques à courbure de Ricci négative ou nulle;*

(*e*) *la courbure sectionnelle prend des valeurs positives et des valeurs négatives.*

Démonstration. — Si $n = 1$, on a $\mathfrak{so}(1, 2) = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ et l'on connaît la courbure dans ce cas : voir [M] (l'existence de métriques invariantes sur $\mathrm{Sl}(2, \mathbf{R})$ à courbure de Ricci négative ou nulle a également été annoncée par D. V. Alekseevski dans [A], p. 300 en bas). On suppose désormais $n \geqq 2$. On peut représenter $\mathfrak{G}$ comme l'algèbre de Lie des matrices réelles $(n+2, n+2)$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & X & Y \\ {}^tX & 0 & b \\ {}^tY & -b & 0 \end{pmatrix}$$

où A est une matrice (n, n) antisymétrique, X et Y des vecteurs de $\mathbf{R}^n$ [vus comme matrices $(n, 1)$] et b un réel. On choisit la sous-algèbre $\mathfrak{H} = \mathfrak{so}(n)$ caractérisée par $X = Y = b = 0$. Alors la sous-algèbre $\mathfrak{L}$ caractérisée par $A = X = Y = 0$ centralise $\mathfrak{H}$. On introduit les sous-espaces $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ caractérisés respectivement par $A = Y = b = 0$ et $A = X = b = 0$. Alors $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ sont ad (H)-invariants et l'action de H sur $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ s'identifie avec l'action ordinaire de SO (n) sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On note $\mathfrak{P} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{Q}_1 \oplus \mathfrak{Q}_2$: c'est un supplémentaire ad (H)-invariant de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$. Puisque $\mathfrak{L}$ centralise $\mathfrak{H}$, pour tout produit scalaire ad (H)-invariant sur $\mathfrak{P}$, on a $\mathfrak{L}$ orthogonale à $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 \oplus \mathfrak{Q}_2$. Puisque la représentation de H dans $\mathfrak{Q}$ est deux fois la représentation ordinaire de SO (n), quitte à faire une rotation sur les deux dernières coordonnées dans la représentation de $\mathfrak{G}$, on peut supposer que $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ sont orthogonaux pour le produit scalaire considéré. Alors la restriction à $\mathfrak{Q}_1$ et $\mathfrak{Q}_2$ de ce produit scalaire est proportionnelle au produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^n$ (dans l'identification ci-dessus). On note E l'élément de $\mathfrak{L}$ défini par $b=1$, X_i l'élément de $\mathfrak{Q}_1$ défini par $X=e_i$ et Y_i l'élément de $\mathfrak{Q}_2$ défini par $Y=e_i$, où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$:

$$e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$$

(avec le 1 à la i-ième place). Quitte à tout multiplier par un scalaire, le produit scalaire considéré est donc caractérisé par deux réels positifs a et b (avec par exemple $a \leqq b$) tels que E, $(1/a)\,X_i$ et $(1/b)\,Y_i$ forment une base orthonormée de $\mathfrak{P}$. On calcule alors les crochets de ces éléments; on a

$$[E, X_i]=-Y_i,\quad [E, Y_i]=X_i,\quad [X_i, Y_i]=E,\quad [X_i, Y_j]=0 \qquad \text{si} \quad i\neq j.$$

Enfin $[X_i, X_j]$ et $[Y_i, Y_j]$ sont dans $\mathfrak{H}$ et vérifient :

$$[[X_i, X_j], X_j]=X_i \qquad \text{et} \qquad [[Y_i, Y_j], Y_j]=Y_i.$$

On définit alors

$$U:\ \mathfrak{P}\times\mathfrak{P}\to\mathfrak{P} \qquad \text{par} \quad \langle U(X, Y), Z\rangle=\frac{1}{2}(\langle X, [Y, Z]_{\mathfrak{P}}\rangle+\langle Y, [X, Z]_{\mathfrak{P}}\rangle).$$

On obtient facilement :

$$U(E, E)=0, \qquad U(X_i, X_i)=0, \qquad U(Y_i, Y_i)=0,$$

$$U(E, X_i)=\frac{a^2+1}{2b^2}Y_i, \qquad U(E, Y_i)=-\frac{b^2+1}{2a^2}X_i, \qquad U(X_i, X_j)=0, \qquad U(Y_i, Y_j)=0,$$

$$U(X_i, Y_j)=0 \qquad \text{si} \quad i\neq j \qquad \text{et} \qquad U(X_i, Y_i)=\frac{b^2-a^2}{2}E.$$

En utilisant la formule déjà citée de [C-E], on peut calculer les courbures sectionnelles suivantes :

$$\left\langle R\left(E, \frac{1}{a}X_i\right)E, \frac{1}{a}X_i\right\rangle=\frac{1}{4a^2b^2}((a+1)^2+2a^2b^2-3b^4-2b^2),$$

$$\left\langle R\left(E, \frac{1}{b}Y_i\right)E, \frac{1}{b}Y_i\right\rangle=\frac{1}{4a^2b^2}((b+1)^2+2a^2b^2-3a^4-2a^2),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left\langle R\left(\frac{1}{a}X_i, \frac{1}{a}X_j\right)\frac{1}{a}X_i, \frac{1}{a}X_j\right\rangle=-\frac{1}{a^2}\\
&\left\langle R\left(\frac{1}{b}Y_i, \frac{1}{b}Y_j\right)\frac{1}{b}Y_i, \frac{1}{b}Y_j\right\rangle=-\frac{1}{b^2}\\
&\left\langle R\left(\frac{1}{a}X_i, \frac{1}{b}Y_j\right)\frac{1}{a}X_i, \frac{1}{b}Y_j\right\rangle=0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{si} \quad i\neq j.$$

$$\left\langle R\left(\frac{1}{a}X_i, \frac{1}{b}Y_i\right)\frac{1}{a}X_i, \frac{1}{b}Y_i\right\rangle=\frac{1}{4a^2b^2}((b^2-a^2)^2-2(a^2+b^2)-3).$$

D'où les courbures de Ricci suivantes :

$$\mathrm{Ric}(\mathrm{E}) = \frac{n}{2a^2b^2}(1-(b^2-a^2)^2),$$

$$\mathrm{Ric}\left(\frac{1}{a}\mathrm{X}_i\right) = \frac{1}{2a^2b^2}(a^4-b^4-2nb^2-1),$$

$$\mathrm{Ric}\left(\frac{1}{b}\mathrm{Y}_i\right) = \frac{1}{2a^2b^2}(b^4-a^4-2na^2-1)$$

et la courbure scalaire vaut :

$$\tau = -\frac{n}{2a^2b^2}(1+2n(a^2+b^2)+(b^2-a^2)^2),$$

toujours strictement négatif.

On remarque également que E, $(1/a)\,\mathrm{X}_i$ et $(1/b)\,\mathrm{Y}_i$ diagonalisent la courbure de Ricci. Pour cela à cause de la ad (H)-invariance de la forme quadratique Ric, il suffit de montrer que $\mathrm{Ric}\,((1/a)\,\mathrm{X}_i, (1/b)\,\mathrm{Y}_j)) = 0$, ce qui s'obtient facilement en calculant

$$\left\langle \mathrm{R}\left(\frac{1}{a}\mathrm{X}_i, \mathrm{Z}\right)\frac{1}{b}\mathrm{Y}_j, \mathrm{Z}\right\rangle \qquad \left(\text{pour } \mathrm{Z} = \mathrm{E}, \frac{1}{a}\mathrm{X}_i, \frac{1}{b}\mathrm{Y}_j\right)$$

en polarisant la formule employée pour la courbure sectionnelle :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})\mathrm{Y}, \mathrm{Z}\rangle = &-\frac{3}{4}\langle [\mathrm{X}, \mathrm{Z}]_{\mathfrak{P}}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]_{\mathfrak{P}}\rangle - \frac{1}{4}\langle [\mathrm{Y}, [\mathrm{X}, \mathrm{Z}]], \mathrm{Z}\rangle \\ &-\frac{1}{4}\langle [\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]], \mathrm{Z}\rangle - \frac{1}{4}\langle [\mathrm{Z}, [\mathrm{Z}, \mathrm{X}]], \mathrm{Y}\rangle - \frac{1}{4}\langle [\mathrm{Z}, [\mathrm{Z}, \mathrm{Y}]], \mathrm{X}\rangle \\ &+\langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Z}), \mathrm{U}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})\rangle - \langle \mathrm{U}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \mathrm{U}(\mathrm{Z}, \mathrm{Z})\rangle.\end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir : $1+a^2 < b^2 < \sqrt{1+2na^2+a^4}$ (ce qui est possible si $n \geqq 2$) pour avoir (*c*), et on a (*d*) en prenant $b^2 = 1+a^2$. Pour avoir (*b*), il suffit de voir que $\mathrm{Ric}\,((1/a)\,\mathrm{X}_i) = \mathrm{Ric}\,((1/b)\,\mathrm{Y}_i))$ implique $a = b$ et alors Ric (E) est positif tandis que $\mathrm{Ric}\,((1/a)\,\mathrm{X}_i))$ est alors négatif. Enfin pour (*e*), on voit que

$$\left\langle \mathrm{R}\left(\mathrm{E}, \frac{1}{b}\mathrm{Y}_i\right)\mathrm{E}, \frac{1}{b}\mathrm{Y}_i\right\rangle$$

est positif si $b \geqq a$, tandis que

$$\left\langle \mathrm{R}\left(\frac{1}{a}\mathrm{X}_i, \frac{1}{a}\mathrm{X}_j\right)\frac{1}{a}\mathrm{X}_i, \frac{1}{a}\mathrm{X}_j\right\rangle$$

est négatif.

Et le théorème 2 est donc démontré.

11. Remarques sur le cas plat

On va classer dans ce paragraphe les espaces homogènes G/H qui admettent une métrique riemannienne G-invariante plate et parmi eux ceux dont toutes les métriques riemanniennes G-invariantes sont plates. On remarque d'abord que les groupes de Lie admettant une métrique plate sont connus par le théorème 3. Parmi eux, on remarque que toutes les métriques invariantes sur G sont plates si et seulement si G est abélien. En effet, avec les notations du théorème 3, si K n'est pas trivial, il suffit de prendre un produit scalaire sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ de H qui n'est pas ad (K)-invariant (ce qui est possible puisque K opère effectivement), et de le compléter en un produit scalaire sur $\mathfrak{G}$ par un produit scalaire quelconque sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{K}$ de K et par $\langle \mathfrak{H}, \mathfrak{K} \rangle = 0$. La métrique riemannienne invariante correspondante sur G n'est pas plate.

D'autre part, si G/H est compact, on a déjà vu qu'il n'admet une métrique riemannienne G-invariante plate que si G est abélien et H trivial. Dans le cas non compact, on déduit du paragraphe 9 que le plus grand sous-groupe distingué nilpotent connexe G_1 de G doit être abélien et que H doit contenir un sous-groupe semi-simple maximal de G. On a alors la décomposition de l'algèbre de Lie de G : $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{S}$, où $\mathfrak{G}_1$ est l'algèbre de Lie (abélienne) de G_1 et aussi le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{G}$; puis $\mathfrak{S}$ est une sous-algèbre semi-simple maximale; $\mathfrak{C}$ est le centre de $\mathfrak{H} = \mathfrak{C} \oplus \mathfrak{S}$; et $\mathfrak{B}$ est une sous-algèbre abélienne commutant à $\mathfrak{H}$. On peut donc prendre $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{B}$ comme supplémentaire ad (H)-invariant de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$. En appliquant les formules de O'Neill à la situation du paragraphe 9 pour G_1, on voit facilement que la métrique riemannienne G-invariante sur G/H associée à un produit scalaire ad (H)-invariant sur $\mathfrak{P}$ est plate si et seulement si on a $A = T = 0$ dans les formules du lemme 15 avec $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ l'orthogonal de $\mathfrak{P}_1$ dans $\mathfrak{P}$ pour le produit scalaire donné.

Si la dimension de $\mathfrak{B}$ est supérieure ou égale à 2, puisque $\mathfrak{B}$ agit sur $\mathfrak{G}_1$, on peut choisir Z_1 et Z_2 indépendants dans $\mathfrak{B}$ et V dans $\mathfrak{G}_1$ tels que $[Z_2, V]$ soit non nul. On forme alors $Y_1 = Z_1 + V$ et $Y_2 = Z_2$. Il est possible de choisir un produit scalaire ad (H)-invariant sur $\mathfrak{P}$ tel que Y_1 et Y_2 soient dans $\mathfrak{P}_2$. Alors $[Y_1, Y_2]$ est non nul et dans $\mathfrak{P}_1$, donc $A_{Y_1} Y_2 \neq 0$.

Par contre si $\mathfrak{B}$ est de dimension un, on a évidemment par antisymétrie que A est nul pour tout produit scalaire sur $\mathfrak{P}$. Si $\mathfrak{B}$ est nul, on voit facilement que toute métrique riemannienne G-invariante sur G/H est plate. Reste à étudier T lorsque $\mathfrak{B}$ est de dimension un. Soit Y un générateur unitaire de $\mathfrak{P}_2$. Alors on a

$$\langle T_{X_1} X_2, Y \rangle = \langle S(Y) X_1, X_2 \rangle \qquad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{P}_1,$$

où S (Y) est la partie symétrique de l'action ad (Y) sur $\mathfrak{P}_1$. Donc toutes les métriques riemanniennes G-invariantes de G/H sont plates si et seulement si tous les produits scalaires ad (H)-invariants sur $\mathfrak{G}_1$ sont également ad (Y)-invariants, ou encore ad (Z)-invariants pour Z un générateur de $\mathfrak{B}$. Voici un exemple montrant que ce cas peut se produire : on considère pour G le produit semi-direct de U (n) et $\mathbf{C}^n$ pour l'action usuelle de U (n) dans $\mathbf{C}^n$, et on prend $H = SU(n)$. Dans cette situation, on a $\mathfrak{G}_1$ abélienne de dimension réelle $2n$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{B} \oplus \mathfrak{H} = \mathfrak{u}(n)$ et l'action adjointe de H sur $\mathfrak{G}_1$ est encore la représentation usuelle de SU (n) dans $\mathbf{C}^n$. Donc tout produit scalaire SU (n)-invariant sur $\mathfrak{G}_1$ est également U (n)-invariant et donc ad $(\mathfrak{B})$-invariant. Donc toutes les métriques riemanniennes G-invariantes de G/H sont plates. On peut résumer cette étude dans le

THÉORÈME 9. — *L'espace homogène* G/H (*avec* G *connexe effectif et* H *compact*) *admet une métrique riemannienne* G-*invariante à courbure sectionnelle identiquement nulle si et seulement si le plus grand sous-groupe distingué connexe nilpotent* G_1 *de* G *est abélien et si* H *contient un sous-groupe semi-simple connexe maximal de* G.

De plus, toutes les métriques riemanniennes G-*invariantes de* G/H *sont à courbure sectionnelle nulle si et seulement si : ou bien* G *est abélien* (*et* H *trivial*), *ou bien* G *est le produit semi-direct de* G_1 *par* H, *ou bien* $\dim(G) = \dim(G_1)+\dim(H)+1$ *et tout produit scalaire sur l'algèbre de Lie* $\mathfrak{G}_1$ *de* G_1 *qui est* ad (H)-*invariant est également* ad (G)-*invariant.*

12. Espaces homogènes non compacts dont toutes les métriques invariantes ont une courbure scalaire positive

Pour terminer l'étude du signe de la courbure scalaire des espaces homogènes, on va démontrer le

THÉORÈME 10. — *Si toutes les métriques riemanniennes* G-*invariantes sur l'espace homogène* G/H (*avec* G *connexe, effectif et non compact et* H *compact*) *ont une courbure scalaire positive, alors il existe un sous-groupe compact maximal* K *de* G *contenant* H *tel que :*

(*a*) *toutes les métriques riemanniennes* G-*invariantes sur* G/K *sont plates;*

(*b*) *l'espace homogène* K/H *est de type normal non abélien;*

(*c*) *tout produit scalaire* ad (H)-*invariant sur l'algèbre de Lie* $\mathfrak{G}$ *de* G *est* ad (K)-*invariant.*

Démonstration. — Soit K un sous-groupe compact maximal de G contenant H. On applique la proposition 3 (*d*) à la fibration $G/H \to G/K$ en fibre K/H. On en déduit aussitôt (*b*) grâce au théorème 8, et (*a*) grâce au théorème 2, puisque G/K a son revêtement universel difféomorphe à un espace euclidien. En appliquant toujours la construction du paragraphe 8, on voit que la courbure scalaire d'une métrique riemannienne de la forme $g_3(t)$ sur G/H vaut $\tau_3(t) = (1/t)\,\tau_2 - t\,\|A\|^2$ (puisque $\tau_1 = 0$ ici). On voit donc que l'on doit avoir également $A = 0$. On choisit comme au paragraphe 8 un supplémentaire ad (K)-invariant $\mathfrak{M}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{K}$ de K dans $\mathfrak{G}$ et un supplémentaire ad (H)-invariant $\mathfrak{N}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ de H dans $\mathfrak{K}$. La condition $A = 0$ devient alors $[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$. On note alors $\mathfrak{G}_1$ le plus petit idéal de $\mathfrak{G}$ contenant $\mathfrak{M}$ (i. e. $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{M}+[\mathfrak{M}, \mathfrak{M}]$), qui est contenu dans $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{M}$. On va alors utiliser les calculs du paragraphe 9 pour cet idéal $\mathfrak{G}_1$. On choisit $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$, un supplémentaire ad (H)-invariant $\mathfrak{P}_1$ de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{G}_1$, un supplémentaire ad (H)-invariant $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$ et on note $\mathfrak{G}_2$ le quotient de $\mathfrak{G}$ par $\mathfrak{G}_1$ et $\mathfrak{H}_2$ un idéal supplémentaire de $\mathfrak{H}_1$ dans $\mathfrak{H}$. Pour retrouver les notations ci-dessus, on peut prendre $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$. Une métrique riemannienne G-invariante sur G/H correspond à un produit scalaire ad (H)-invariant sur $\mathfrak{P}$ (mais $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ne sont pas supposés *a priori* orthogonaux). Avec les calculs du paragraphe 9 et les notations des lemmes 15 et 16, $\tau(G/H)$ s'exprime en fonction de $\tau(G_1/H_1)$, de $\tau(G_2/H_2)$ et de termes dépendants de A et T qui sont tous négatifs ici (lemme 17). De plus G_1/H_1 est plat ici puisque c'est G/K, donc $\tau(G_1/H_1) = 0$. On va montrer qu'il faut également $A = T = 0$. Pour montrer que A est nul, on remarque que ad (H) respecte la décomposition orthogonale $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \oplus \mathfrak{P}_2$. On peut donc changer le produit scalaire en le multipliant par une constante positive t sur $\mathfrak{P}_1$, en le laissant fixe sur $\mathfrak{P}_2$ et en gardant $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ orthogonaux. Dans les calculs des lemmes 15 et 16, il suffit de remplacer la base orthonormée (X_i) par $((1/\sqrt{t})\, X_i)$ et de changer le produit scalaire sur $\mathfrak{P}_1$. Si on exprime la courbure scalaire de la nouvelle métrique riemannienne invariante obtenue en fonction des quantités qui apparaissaient pour l'ancienne, on voit facilement que $\tau(G_2/H_2)$ et les termes en T ne changent pas, tandis que le terme $-\| A \|^2$ est multiplié par t. Il faut donc $A = 0$, soit encore $[\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_2] \subset \mathfrak{K}$ (et on pouvait donc prendre $\mathfrak{N} = \mathfrak{P}_2$). Maintenant, si T n'est pas nul, cela signifie que le produit scalaire sur $\mathfrak{P}_1$ n'est pas ad (K)-invariant. Dans ce cas, il existe donc deux sous-espaces orthogonaux irréductibles ad (H)-invariants $\mathfrak{E}_1$ et $\mathfrak{E}_2$ de $\mathfrak{P}_1$ tels que $\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$ soit ad (K)-invariant et il existe un élément Y de $\mathfrak{K}$ tel que la restriction de ad (Y) à $\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$ s'exprime, dans un repère orthonormé formé de bases de $\mathfrak{E}_1$ et de $\mathfrak{E}_2$, sous la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ -{}^tC & D \end{pmatrix}$ avec $C \neq 0$. On considère alors le produit scalaire obtenu en multipliant le produit scalaire donné par t sur $\mathfrak{E}_1$ et en le gardant fixe ailleurs. Il est encore ad (H)-invariant; on calcule alors la courbure scalaire associée en fonction des termes de l'ancienne. Ici encore $\tau(G_2/H_2)$ ne change pas. Par contre, la restriction à $\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$ de la forme bilinéaire symétrique $\langle T_{\cdot}\cdot, Y \rangle$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & (t-1)\, C \\ (t-1)\, {}^tC & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\| T \|^2 \geqq (t-1)^2 \| C \|^2$. Comme le coefficient de $\| T \|^2$ est négatif, on en déduit donc qu'il faut $T = 0$. Donc tout produit scalaire ad (H)-invariant sur $\mathfrak{P}_1$ est ad (K)-invariant. La même chose est vraie pour $\mathfrak{P}_2$ puisque K/H est de type normal. Enfin l'invariance de $\mathfrak{P}$ tout entier vient du fait que l'on doit toujours avoir $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$ orthogonaux pour tous les produits scalaires invariants.

BIBLIOGRAPHIE

[A] D. V. Alekseevski, *Classification of Quaternionic Spaces with a Transitive Solvable Group of Motions* (*Math. of the USSR Izvestija*, vol. 9, 1975, p. 297-339).

[A-K] D. V. Alekseevski et B. N. Kimel'fel'd, *Structure of Homogeneous Riemann Spaces with zero Ricci Curvature* (*Funct. Analysis and Appl.*, vol. 9, 1975, p. 97-102).

[BB] L. Bérard Bergery, 1, *Sur certaines fibrations d'espaces homogènes riemanniens* (*Compositio Mathematica*, vol. 30, 1975, p. 43-61); 2, *Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexe de dimension impaire à courbure strictement positive* (*J. Math. pures et appl.*, vol. 55, 1976, p. 47-68).

[BE] M. Berger, *Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive* (*Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa*, vol. 15, 1961, p. 179-246).

[BS] A. Besse, *Manifolds all of whose Geodesics are closed* (*Ergebnisse des Mathematik* n° 93, Springer Verlag, 1978).

[BO] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 1, Hermann, 1971.

[C-E] J. Cheeger et D. G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, 1975.

[C-G] J. Cheeger et D. Gromoll. *The Splitting Theorem for Manifolds of nonnegative Ricci Curvature* *J. of diff. geom.* vol. 6, 1971, p. 119-128).

[HA] J. I. HANO, *On Kaehlerian Homogeneous Spaces of Unimodular Lie Groups* (*Amer. J. of Math.*, vol. 79, 1957, p. 885-900).

[HE] E. HEINTZE, *Riemannsche Solvmannigfaltigkeiten* (*Geom. Dedicata*, 1, 1972, p. 141-147).

[HN] S. HELGASON, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.

[HO] G. HOCHSCHILD, *The Structure of Lie groups*, Holden-Day, 1965.

[J] G. R. JENSEN, *The scalar curvature of left-invariant Riemannian metrics* (*Indiana Univ. Math. J*, vol. 20, 1971, p. 1125-1143).

[K-N] S. KOBAYASHI et K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry* (*Interscience Publishers*, vol. I, 1963, II, 1969).

[M] J. MILNOR, *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups* (*Adv. in Math.*, vol. 21, 1976, p. 293-329).

[O] B. O'NEILL, *The Fundamental Equations of a Submersion* (*Mich. Math. J.*, 13, 1966, p. 459-469).

[T] J. TITS, *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen* (*Lecture Notes*, 40, Springer Verlag 1967).

[WA] N. WALLACH, *Compact Homogeneous Riemannian Manifolds with Strictly Positive Curvature* (*Ann. of Math.*, vol. 96, 1972, p. 277-295).

]WO] J. A. WOLF, *The Geometry and Structure of Isotropy Irreducible Homogeneous Spaces* (*Acta Math.*, vol. 120, 1968, p. 59-148).

(Manuscrit reçu le 7 mars 1978,
révisé le 18 juin 1978.)

L. BÉRARD-BERGERY,
U.E.R. de Mathématiques,
Université de Nancy-I,
Case Officielle 140,
54037 Nancy Cedex.