ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

T. JEULIN
M. YOR

# Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 11, n° 3 (1978), p. 429-443
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_3_429_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*
4$^e$ série, t. 11, 1978, p. 429 à 443.

# NOUVEAUX RÉSULTATS SUR LE GROSSISSEMENT DES TRIBUS

PAR T. JEULIN (*) et M. YOR (*)

## Introduction

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace de probabilité complet sur lequel on suppose données deux sous-filtrations $(\mathscr{G}_t)$ et $(\mathscr{F}_t)$, telles que pour tout $t$, $\mathscr{G}_t$ soit contenue dans $\mathscr{F}_t$.

On sait, d'après Stricker [9], que si un processus $(\mathscr{G}_t)$-adapté est une $(\mathscr{F}_t)$-semi-martingale, c'est également une $(\mathscr{G}_t)$-semi-martingale.

Inversement, le problème du grossissement des tribus consiste à étudier les couples de filtrations $(\mathscr{G}, \mathscr{F})$ telles que :

$(\mathscr{H}')$ *toute* $(\mathscr{G}_t)$*-semi-martingale est une* $(\mathscr{F}_t)$*-semi-martingale.*

La propriété $(\mathscr{H}')$ est *a fortiori* vérifiée lorsque l'hypothèse $(\mathscr{H})$ suivante est en vigueur :

$(\mathscr{H})$ *toute* $(\mathscr{G}_t)$*-martingale est une* $(\mathscr{F}_t)$*-martingale.*

L'étude de cette hypothèse a été menée en [2]. On montre ici, au paragraphe A, comment l'on passe de $(\mathscr{H})$ à $(\mathscr{H}')$ par changement équivalent de probabilités. On y caractérise ensuite les filtrations $(\mathscr{G}_t)$ telles que $(\mathscr{H})$ soit vraie pour toute probabilité Q équivalente à P. Ceci permet de résoudre un problème posé par Dellacherie et Stricker en [5].

Au paragraphe B, on donne des inégalités générales concernant les normes $H^p$ de processus qui sont à la fois des semi-martingales par rapport à $(\mathscr{F}_t)$ et à $(\mathscr{G}_t)$.

Revenons à l'hypothèse $(\mathscr{H}')$. Il a été montré, (*cf.* Barlow [1] et Yor [11]), que si L est la fin d'un ensemble $(\mathscr{G}_t)$-optionnel, et pour tout $t$, $\mathscr{F}_t$ est la tribu engendrée par $\mathscr{G}_t$ et $(t < L)$, le couple $((\mathscr{G}_t), (\mathscr{F}_t))$ vérifie $(\mathscr{H}')$. On donne, au paragraphe C, une démonstration tout à fait simple et rapide de la démonstration canonique d'une $(\mathscr{G}_t)$-martingale en tant que $(\mathscr{F}_t)$-semi-martingale spéciale.

(*) Laboratoire de Calcul de Probabilités, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, Tour 56, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

De plus, à l'aide de B, il s'avère que, pour tout $1 \leqq p < \infty$, la topologie induite par l'espace $H^p$ [relatif à $(\mathscr{F}_t)$] sur l'espace $H^p$ [relatif à $(\mathscr{G}_t)$] équivaut à la topologie naturelle sur ce dernier espace.

### A. Un exemple simple de grossissement « raisonnable » d'une filtration

Conservons les notations de l'introduction : $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est un espace probabilisé complet, muni de deux sous-filtrations $(\mathscr{G}_t)$ et $(\mathscr{F}_t)$ de $\mathscr{F}$, vérifiant les conditions habituelles, ainsi que : pour tout $t$, $\mathscr{G}_t$ est contenue dans $\mathscr{F}_t$.

On a montré en [2] le :

THÉORÈME 1. — *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\mathscr{H})$ *toute* $(\mathscr{G}_t)$-*martingale (bornée) est une* $(\mathscr{F}_t)$-*martingale;*

(ii) *pour tout* $t$, *les tribus* $\mathscr{F}_t$ *et* $\mathscr{G}_\infty$ *sont conditionnellement indépendantes par rapport à* $\mathscr{G}_t$.

L'hypothèse $(\mathscr{H})$ permet de comparer aisément les calculs stochastiques relatifs aux filtrations $(\mathscr{F}_t)$ et $(\mathscr{G}_t)$ (pour plus de précisions, *voir* [2]).

Toutefois, d'après le théorème 1, l'hypothèse $(\mathscr{H})$ est très « rigide », et une façon de l'assouplir est d'étudier les probabilités Q équivalentes à P sur la tribu $\mathscr{F}$.

On suppose désormais l'hypothèse $(\mathscr{H})$ en vigueur pour la probabilité P. On a alors la :

PROPOSITION 2. — *Soit* Q *une probabilité équivalente à* P (*sur* $\mathscr{F}$). *Alors la propriété :*
$(\mathscr{H}')$ *toute* $(\mathscr{G}_., Q)$-*semi-martingale est une* $(\mathscr{F}_., Q)$-*semi-martingale*
*est vérifiée.*

*Démonstration.* — D'après le théorème de Girsanov, on sait que l'espace des $(\mathscr{G}_., Q)$ [resp. $(\mathscr{F}_., Q)$] semi-martingales est identique à celui des $(\mathscr{G}_., P)$ [resp. $(\mathscr{F}_., P)$] semi-martingales. Or l'hypothèse $(\mathscr{H})$ entraîne, *a fortiori*, $(\mathscr{H}')$ pour P, et donc pour Q.

Nous allons maintenant établir la décomposition d'une $(\mathscr{G}_., Q)$-martingale en somme d'une $(\mathscr{F}_., Q)$-martingale locale, et d'un processus $(\mathscr{F}_t)$-adapté, à variation bornée.

Pour cela, introduisons les notations suivantes :

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{G}_t} = R_t; \qquad \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathscr{F}_t} = R'_t.$$

(Nous choisissons, bien entendu ici, pour $R_t$ (resp. $R'_t$) une version càd làg de la $(\mathscr{G}_., P)$-martingale $E_P(dQ/dP \mid \mathscr{G}_t)$ [resp. de la $(\mathscr{F}_., P)$-martingale $E_P(dQ/dP \mid \mathscr{F}_t)$].

Remarquons ici que, en conséquence de l'hypothèse $(\mathscr{H})$, on a

$$R_t = E_P(R'_t \mid \mathscr{G}_t) = E_P(R'_t \mid \mathscr{G}_\infty).$$

Notons $Y = dQ/dP$. Un calcul élémentaire montre que la propriété $(\mathscr{H})$ est réalisée sous Q si, et seulement si

$$(\star) \qquad \forall X \geqq 0, \quad X \in \mathscr{G}_\infty, \qquad \frac{E_P(XY \mid \mathscr{F}_t)}{R'_t} = \frac{E_P(XY \mid \mathscr{G}_t)}{R_t}.$$

En particulier, si $dQ/dP$ est $\mathcal{G}_\infty$-mesurable, $R_t = R'_t$, et la propriété $(\mathcal{H})$ est vérifiée sous Q. En outre, on donne plus loin une caractérisation de la propriété $(\star)$ en termes du couple $((\mathcal{G}_t), (\mathcal{F}_t))$.

Voici le résultat de décomposition annoncé plus haut :

THÉORÈME 3. — *Si* $(X_t)$ *est une* $(\mathcal{G}_., Q)$*-martingale locale, alors le processus :*

$$I_X(t) = X_t + \int_0^t \frac{R'_{s-}}{R'_s}\left(\frac{1}{R_{s-}}d[X, R]_s - \frac{1}{R'_{s-}}d[X, R']_s\right) \tag{1}$$

*est une* $(\mathcal{F}_., Q)$*-martingale locale.*

*Remarque.* — Avant de démontrer le théorème, soulignons que la formule proposée a bien un sens; en effet, X est une Q- (et donc P-) semi-martingale par rapport aux filtrations $(\mathcal{G}_t)$ et $(\mathcal{F}_t)$, ce qui permet bien de définir les crochets $[X, R]$ et $[X, R']$. D'autre part, ces expressions sont intrinsèques, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la probabilité P ou Q, ni de la filtration $(\mathcal{G}_t)$ ou $(\mathcal{F}_t)$, par rapport auxquelles elles sont calculées.

*Démonstration.* — On a

$$\left.\frac{dP}{dQ}\right|_{\mathcal{G}_t} = \frac{1}{R_t} \quad ;$$

autrement dit, $1/R$ est une $(\mathcal{G}_., Q)$-martingale. D'après le théorème de Girsanov :

$$Y_t = X_t - \int_0^t R_s\, d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s$$

est une $(\mathcal{G}_., P)$-martingale locale.

L'hypothèse $(\mathcal{H})$ étant vérifiée par P, Y est donc une $(\mathcal{F}_., P)$-martingale locale. En appliquant à nouveau le théorème de Girsanov, on trouve que

$$I_X(t) = Y_t - \int_0^t \frac{1}{R'_s}d[Y, R']_s,$$

est une $(\mathcal{F}_., Q)$-martingale locale. Développons $I_X$; il vient

$$\begin{aligned}
I_X(t) &= X_t - \int_0^t R_s\, d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s - \int_0^t \frac{1}{R'_s}d[X, R']_s + \int_0^t \frac{R_s}{R'_s}d\left[\left[X, \frac{1}{R}\right], R'\right]_s \\
&= X_t + \int_0^t R_s\left(\frac{\Delta R'_s}{R'_s} - 1\right)d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s - \int_0^t \frac{1}{R'_s}d[X, R']_s \\
&= X_t - \int_0^t \frac{R_s R'_{s-}}{R'_s}d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s - \int_0^t \frac{1}{R'_s}d[X, R']_s.
\end{aligned}$$

Or à l'aide de la formule d'Ito, on a

$$R_s\, d\left[X, \frac{1}{R}\right]_s = -\frac{R_s}{R_s R_{s-}}d[X, R]_s = -\frac{1}{R_{s-}}d[X, R]_s.$$

Finalement, on trouve pour $I_X$ la formule (1) proposée.

*Remarque.* — Il existe une écriture condensée du processus $I_X$, à savoir

$$I_X(t) = X_t + \int_0^t \frac{1}{\pi_{s-}} d[X, \pi]_s, \tag{2}$$

où $\pi_t = R_t/R'_t$ est une $(\mathscr{F}_., Q)$-martingale.

La formule (2) se vérifie aisément en utilisant la formule d'Ito (relativement à $(\mathscr{F}_t)$ et P) pour développer $R/R'$.

Nous donnons dans la suite (th. 6) une condition, portant sur la filtration $(\mathscr{G}_t)$, qui est caractéristique du cas où la propriété $(\mathscr{H})$ est vérifiée pour toute probabilité Q équivalente à P. Auparavant, nous établissons deux lemmes techniques.

LEMME 4. — *Soient* $(A, \mathscr{F}, P)$ *un espace probabilisé complet,* $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{H}$ *deux sous-tribus de* $\mathscr{F}$ *(supposées* $(\mathscr{F}, P)$*-complètes). Notons* T *l'opérateur* [*défini sur* $L^1(\mathscr{F}, P)$] *d'espérance conditionnelle par rapport à* $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$, *sous* P; *les assertions suivantes sont équivalentes :*

($\alpha$) $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{H}$ *sont conditionnellement indépendantes par rapport à* $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$, *sous toute probabilité* Q *équivalente à* P;

($\beta$) *pour toute* $f \in L^1_+(\mathscr{G} \vee \mathscr{H}, P)$, *pour toutes* $g \in b\mathscr{G}$, $h \in b\mathscr{H}$,

$$T(fgh)\,T(f) = T(fg)\,T(fh)\,;$$

($\gamma$) *pour toutes* $g \in b\mathscr{G}$ *et* $h \in b\mathscr{H}$, $(g - T(g)) \,.\, (h - T(h)) = 0$ P-p. s;

($\delta$) $\mathscr{G}$ *et* $\mathscr{H}$ *sont conditionnellement indépendantes par rapport à* $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$, *sous* P *et pour toutes* $g \in b\mathscr{G}$ *et* $h \in b\mathscr{H}$, $(g - T(g))\,(h - T(h)) \in b\mathscr{G}$.

*Démonstration.* — ($\alpha$) est équivalente à : pour toute $f \in L^1(\mathscr{F}, P)$ telle que $P(f \leqq 0) = 0$ et pour $g \in b\mathscr{G}$ et $h \in b\mathscr{H}$, $T(fgh)\,T(f) = T(fg)\,T(fh)$.

On peut remplacer $f$ par $E_P(f \mid \mathscr{G} \vee \mathscr{H})$, puis oter la condition $f > 0$ en changeant $f$ en $f + \varepsilon$ et en faisant tendre $\varepsilon$ vers $0^+$. D'où l'équivalence des points ($\alpha$) et ($\beta$).

Supposons ($\beta$) vérifiée; notons $g$ (resp. $h$) l'élément générique de $b\mathscr{G}$ (resp. $b\mathscr{H}$); appliquons ($\beta$) à $f = 1 + g_1 h_1$ ($g_1 \in b\mathscr{G}$, $h_1 \in b\mathscr{H}$); on obtient :

$$\begin{aligned}&(T(g)T(h) + T(g_1 g)T(h_1 h))(1 + T(g_1)T(h_1))\\ &\quad = (T(g) + T(h_1)T(g_1 g)).(T(h) + T(g_1)T(h_1 h)),\end{aligned}$$

soit

$$(T(g_1 g) - T(g)T(g_1)).(T(h_1 h) - T(h)T(h_1)) = 0.$$

Soit, pour $g = g_1$ et $h = h_1$,

$$0 = T((g - Tg)^2).T((h - Th)^2) = T((g - Tg)^2.(h - Th)^2),$$

soit

$$(g - T(g)).(h - T(h)) = 0 \quad \text{P-p. s.},$$

d'où ($\gamma$).

Supposons maintenant ($\gamma$) vérifiée et montrons ($\beta$). On a

$$gh = g.\mathrm{T}(h)+h.\mathrm{T}(g)-\mathrm{T}(g).\mathrm{T}(h), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{T}(gh)=\mathrm{T}(g).\mathrm{T}(h).$$

$\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\mathscr{G} \cap \mathscr{H}$ sous P. On peut aussi remonter les calculs précédents pour montrer que l'ensemble des variables aléatoires $f \in b(\mathscr{G} \vee \mathscr{H})$ vérifiant : pour toutes $g \in b\,\mathscr{G}$ et $h \in b\,\mathscr{H}$,

$$(\star\star) \qquad \mathrm{T}(fgh)\mathrm{T}(f)-\mathrm{T}(fg)\mathrm{T}(fh)=0$$

contient l'espace vectoriel E engendré par les produits $g_1.h_1$ ($g_1 \in b\,\mathscr{G}$, $h_1 \in b\,\mathscr{H}$).

Si $f \in b(\mathscr{G} \vee \mathscr{H})$, on pose

$$\varphi(f;g,h)=\mathrm{T}(fgh)\mathrm{T}(f)-\mathrm{T}(fg)\mathrm{T}(fh);$$

d'après ($\gamma$), $\varphi(.\,;g,h)$ est une forme quadratique en $f$, dont on note la forme polaire (symétrique en $(f,f')$) $\mathrm{S}(f,f';g,h)$.

Pour $f' \in \mathrm{E}$, l'espace vectoriel $\{f \in b(\mathscr{G} \vee \mathscr{H}),\ \mathrm{S}(f,f';g,h)=0\}$ contient E, puis, par classe monotone $b(\mathscr{G} \vee \mathscr{H})$; une nouvelle application du théorème de classe monotone montre que $\varphi(f;g,h)=0$ pour toute $f \in b(\mathscr{G} \vee \mathscr{H})$. Ceci entraîne ($\beta$) par convergence dominée. L'équivalence de ($\gamma$) et ($\delta$) est immédiate.

Lemme 5. — *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P}, \mathscr{F}_t)$ *un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Soit*

$$\mathscr{T}=(\mathrm{T},\ (\mathscr{F}_t)\text{-temps d'arrêt},\ \mathscr{F}_\mathrm{T}=\mathscr{F}_\infty)$$

*et soit* $\tau = \operatorname{ess\,inf} \mathscr{T}$. $\tau$ *est un* $(\mathscr{F}_t)$*-temps d'arrêt*, $\mathscr{F}_\tau=\mathscr{F}_\infty$ *et pour tout* $t \in \mathrm{R}^+$,

$$(t<\tau)=\operatorname{ess\,sup}(\{f-\mathrm{E}(f \mid \mathscr{F}_t)\neq 0\},\ f \in b\,\mathscr{F}_\infty).$$

*Démonstration.* — $\mathscr{T}$ est filtrant décroissant, d'où les premières propriétés énoncées pour $\tau$.

Pour $f \in b\,\mathscr{F}_\infty$,

$$f-\mathrm{E}(f \mid \mathscr{F}_t)=1_{(t<\tau)}(f-\mathrm{E}(f \mid \mathscr{F}_t));$$

par suite, si $\mathrm{A}_t$ désigne ess sup $(\{f-\mathrm{E}(f \mid \mathscr{F}_t)\neq 0\},\ f \in b\,\mathscr{F}_\infty)$, $\mathrm{A}_t$ est inclus P-p. s. dans $(t<\tau)$.

En outre, sur $\mathrm{A}_t^c$, $f=\mathrm{E}(f \mid \mathscr{F}_t)$ ($f \in b\,\mathscr{F}_\infty$), d'où

$$\mathrm{E}(f;\mathrm{A}_t^c)=\mathrm{E}(\mathrm{E}(f \mid \mathscr{F}_t);\mathrm{A}_t^c)=\mathrm{E}(f.\mathrm{E}(1_{\mathrm{A}_t^c} \mid \mathscr{F}_t)), \qquad \text{soit} \quad \mathrm{A}_t \in \mathscr{F}_t.$$

$$\tilde{\tau}=\tau \quad \text{sur } (\tau \leqq t)\cup \mathrm{A}_t,$$
$$\tilde{\tau}=t \quad \text{sur } (t<\tau)\cap \mathrm{A}_t^c,$$

définit un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt; par définition de $\mathrm{A}_t$, $\tilde{\tau}$ appartient à $\mathscr{T}$. Cela nécessite $\mathrm{P}(\mathrm{A}_t^c \cap (t<\tau))=0$, d'où le lemme.

Voici maintenant la caractérisation annoncée :

THÉORÈME 6. — *Pour tout* $\mathscr{F}_t$*-temps d'arrêt* T, *notons* $\tilde{\mathscr{F}}_{T-}$ *la tribu engendrée par les ensembles* $f_t \cap (t < T)$ (*où* $f_t \in \mathscr{F}_t$, $t \in \mathbf{R}_+$). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(j) ($\mathscr{H}$) *est vérifiée pour toute probabilité* Q *équivalente à* P;

(jj) *il existe un* $(\mathscr{F}_t)$*-temps d'arrêt* T *tel que* $\tilde{\mathscr{F}}_{T-} \subset \mathscr{G}_\infty \subset \mathscr{F}_T$ *et* $\mathscr{G}_t = \mathscr{G}_\infty \cap \mathscr{F}_t$.

*Remarque.* — Si $\mathscr{F}_0$ est P-triviale, $\tilde{\mathscr{F}}_{T-} = \mathscr{F}_{T-}$.

*Démonstration.* — Supposons (jj) vérifiée; T, étant $\tilde{\mathscr{F}}_{T-}$-mesurable, est un $(\mathscr{G}_t)$-temps d'arrêt; en outre, si $g \in \mathscr{G}_\infty$, alors $g \in \mathscr{F}_T$, donc

$$g\, 1_{(T \leq t)} \in \mathscr{F}_t \cap \mathscr{G}_\infty = \mathscr{G}_t$$

et

$$g - \mathrm{E}(g \mid \mathscr{G}_t) = (g - \mathrm{E}(g \mid \mathscr{G}_t))\, 1_{(t<T)} \;;$$

si $f_t \in b\,\mathscr{F}_t$, $f_t\, 1_{(t<T)}$ est $\tilde{\mathscr{F}}_{T-}$-mesurable, donc $\mathscr{G}_\infty$-mesurable; $f_t\, 1_{(t<T)}$ est donc $\mathscr{G}_t$-mesurable, d'où

$$f_t - \mathrm{E}(f_t \mid \mathscr{G}_t) = (f_t - \mathrm{E}(f_t \mid \mathscr{G}_t))\, 1_{(T \leq t)}.$$

On a donc

$$(g - \mathrm{E}(g \mid \mathscr{G}_t)).(f_t - \mathrm{E}(f_t \mid \mathscr{G}_t)) = 0,$$

pour $g \in b\,\mathscr{G}_\infty$ et $f_t \in b\,\mathscr{F}_t$; il suffit d'appliquer le lemme 4, (γ), avec $\mathscr{G} = \mathscr{G}_\infty$ et $\mathscr{H} = \mathscr{F}_t$ pour obtenir (j), d'après le théorème 1.

Supposons maintenant (j) vérifiée; d'après le lemme 4, pour $g \in b\,\mathscr{G}_\infty$ et $f_t \in b\,\mathscr{F}_t$,

$$(g - \mathrm{E}(g \mid \mathscr{G}_t)).(f_t - \mathrm{E}(f_t \mid \mathscr{G}_t)) = 0 \quad \text{P-p.s.};$$

si on applique le lemme 5 à la filtration $(\mathscr{G}_t)$, on obtient un $(\mathscr{G}_t)$-temps d'arrêt τ tel que, pour tout $t$ de $\mathbf{R}_+$,

$$(t < \tau) = \operatorname{ess\,sup}(\{g - \mathrm{E}(g \mid \mathscr{G}_t) \neq 0\},\ g \in b\,\mathscr{G}_\infty);$$

on a donc

$$(f_t - \mathrm{E}(f_t \mid \mathscr{G}_t))\, 1_{(t<\tau)} = 0, \qquad \text{pour} \quad f_t \in b\,\mathscr{F}_t,$$

d'où $f_t\, 1_{(t<\tau)} \in \mathscr{G}_\infty$ dans les mêmes conditions, soit $\tilde{\mathscr{F}}_{\tau-} \subset \mathscr{G}_\infty$. En outre, τ est un $\mathscr{F}_t$-temps d'arrêt et $\mathscr{G}_\infty = \mathscr{G}_\tau \subset \mathscr{F}_\tau$; on a donc (jj).

Nous appliquons maintenant le théorème 6 à l'étude d'un problème posé par Dellacherie et Stricker en [5] (p. 373). De quoi s'agit-il? Le cadre initial est constitué d'un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, \mathrm{P})$; les auteurs de [5] demandent de caractériser les sous tribus $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$, supposées $(\mathscr{F}, \mathrm{P})$-complètes et telles que l'opérateur d'espérance conditionnelle $\mathrm{E}^{\mathscr{G}}$ [défini sur $\mathrm{L}^2(\mathscr{F}, \mathrm{P})$] soit un opérateur d'intégrale stochastique, c'est-à-dire :

Il existe un processus prévisible borné φ, tel que

$$\forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{L}^2(\mathscr{F}, \mathrm{P}), \quad \mathrm{E}^{\mathscr{G}}(\mathrm{X}) = \int_0^\infty \varphi_s\, d\mathrm{X}_s \;; \tag{3}$$

où $(\mathrm{X}_s, s \in \mathbf{R}_+)$ désigne la $(\mathscr{F}_s)$-martingale de variable terminale X.

On a alors le :

COROLLAIRE 7. — *Si $\mathscr{G}$ est une sous-tribu de $\mathscr{F}$ telle que* $E^{\mathscr{G}}$ *soit un opérateur d'intégrale stochastique, il existe un* $(\mathscr{F}_t)$*-temps d'arrêt* T, *tel que* $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{F}_T$.

*Démonstration.* — Posons $\mathscr{G}_t = \mathscr{G} \cap \mathscr{F}_t$.

Remarquons que, d'après (3), on a

$$E^{\mathscr{F}_t} E^{\mathscr{G}} = E^{\mathscr{G}} E^{\mathscr{F}_t} = E^{\mathscr{G}_t}. \tag{4}$$

On en déduit que $\bigvee_t \mathscr{G}_t = \mathscr{G}$ (ce qui n'était pas évident *a priori*!). La filtration $(\mathscr{G}_t)$ a donc pour tribu terminale $\mathscr{G}$. On peut donc appliquer le théorème 6, et il suffit de montrer l'assertion (j).

D'après (4), $(\mathscr{H})$ est vérifiée sous P. D'après le lemme 4, (δ), il reste à montrer : pour toute $g \in b\,\mathscr{G}$ et $f_t \in b\,\mathrm{F}_t$, la variable $I_t = (g - E(g \mid \mathscr{G}_t)).(f_t - E(f_t \mid \mathscr{G}_t))$ est $\mathscr{G}$-mesurable.

Or, d'après (3), on a

$$I_t = \left(\int_t^\infty \varphi_s\, dg_s\right)\left(\int_0^t (1-\varphi_s)\, df_s\right).$$

Notons

$$N_u = \int_0^{t\wedge u} (1-\varphi_s)\, df_s \qquad \text{et} \qquad M_u = \int_{t\wedge u}^u \varphi_s\, dg_s.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} I_t = M_\infty N_\infty &= \int_0^\infty N_{u-}\, dM_u + \int_0^\infty M_{u-}\, dN_u + [M, N]_\infty \\ &= \int_t^\infty \varphi_u N_{u-}\, dg_u + \int_0^t M_{u-}\, dN_u + \int_0^t d[M, N]_u. \end{aligned}$$

Or, pour $u \in [0, t]$, on a $M_u = 0$, d'où

$$I_t = \int_t^\infty \varphi_u N_{u-}\, dg_u$$

est $\mathscr{G}$-mesurable, car d'après (3),

$$I_t = E(X \mid \mathscr{G}), \qquad \text{où} \quad X = \int_t^\infty N_{u-}\, dg_u.$$

$\mathscr{G}_0$ étant égale à $\mathscr{F}_0$ [d'après (3)], le corollaire est démontré.

En particulier, il découle du corollaire 7 que, si toute $(\mathscr{F}_\cdot, P)$-martingale est continue, une sous-tribu $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$ induit un opérateur d'intégrale stochastique (au moyen de $E^{\mathscr{G}}$) si, et seulement si $\mathscr{G} = \mathscr{F}_T$, où T est un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt prévisible.

La proposition suivante donne la caractérisation cherchée :

PROPOSITION 8. — *Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$, supposée* $(\mathscr{F}, P)$*-complète. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $E^{\mathscr{G}}$ *est un opérateur d'intégrale stochastique;*

(ii) *il existe un* $(\mathscr{F}_t)$*-temps d'arrêt* T, *un ensemble* $B \in \mathscr{F}_{T-}$, *tels que* : $T_B$ *est prévisible, et*

(5) $$\mathscr{G} = \{ C \in \mathscr{F}_T, \exists C_{T-} \in \mathscr{F}_{T-}, C \cap B = C_{T-} \cap B \}.$$

*Démonstration.* — En suivant Dellacherie et Stricker [5], on dira que deux processus prévisibles bornés $u$ et $v$ sont indistinguables pour les martingales, si pour toute martingale bornée X, on a

$$\int_0^\infty u_s \, dX_s = \int_0^\infty v_s \, dX_s.$$

On écrit alors $u \doteq v$.

(*a*) Supposons que $\mathscr{G}$ vérifie (i). Il existe alors un processus $\varphi$ prévisible borné, tel que

(3) $$\forall X \in L^2(\mathscr{F}, P), \quad E(X \mid \mathscr{G}) = \int_0^\infty \varphi_s \, dX_s \; ;$$

$E^{\mathscr{G}}$ étant idempotent, on a

$$\varphi \doteq \varphi^2 \doteq 1_{(\varphi = 1)}.$$

En outre, d'après le corollaire 7, il existe un $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt T tel que $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{F}_T$.

Posons alors

$$A = \{(T < +\infty) \cap (\varphi_T = 1)\} \cup (T = +\infty) \in \mathscr{F}_{T-} \qquad \text{et} \qquad B = A^c.$$

On a alors, pour tout $X \in b\,\mathscr{F}$ :

$$E(X \mid \mathscr{F}_{T-}) = E\left( \int_0^\infty \varphi_s \, dX_s \mid \mathscr{F}_{T-} \right) = (\varphi . X)_{T-} + 1_A E(\Delta X_T \mid \mathscr{F}_{T-});$$

on a également :

$$E(X \mid \mathscr{F}_{T-}) = X_{T-} + E(\Delta X_T \mid \mathscr{F}_{T-}).$$

En comparant ces deux expressions, il vient :

— sur $B = A^c$, $(\varphi . X)_{T-} = E(X_T \mid \mathscr{F}_{T-})$;

— sur A, $(\varphi . X)_{T-} = X_{T-}$.

Ce calcul permet de donner une expression explicite de $E^{\mathscr{G}}$, à savoir :

$$E(X \mid \mathscr{G}) = 1_A X_T + 1_{A^c} E(X_T \mid \mathscr{F}_{T-}).$$

Cette expression de $E^{\mathscr{G}}$ donne en particulier (5). Nous allons montrer qu'en fait $T_{A^c}$ est prévisible; on aura alors :

$$1_{A^c} E(X_T \mid \mathscr{F}_{T-}) = 1_{A^c} X_{T-}.$$

Soit donc $a_t$ la projection duale prévisible de $1_{(T \leqq t)}$ et $M_t$ la martingale $1_{(T \leqq t)} - a_t$.

Remarquons que pour U prévisible borné U.M est $(\mathscr{G}_t)$-adapté; pour tout $X \in b\,\mathscr{F}$, on a alors :

$$\begin{aligned} E(X((1-\varphi).M)_t) &= E((\varphi . X)_t ((1-\varphi).M)_t) \\ &= E\left( \int_0^t \varphi_s (1-\varphi_s) \, d[X, M]_s \right) = 0. \end{aligned}$$

Par suite, $(1-\varphi).M = 0$, ce qui donne

$$(\eta) \qquad ((1-\varphi).a)_{T-} = 0$$

et

$$(\varepsilon) \qquad (1-\varphi_T)(1-\Delta a_T)\,1_{(T<+\infty)} = 0.$$

Désignons par Z la surmartingale $1_{[0,T[}$ et par $\dot{Z}$ sa projection prévisible; $Z_- = \dot{Z}+\Delta a$.

$a$ est constant après T, d'où $(\Delta a = 1) = (\dot{Z} = 0) \cap [0, T]$; si $\tau$ est le début de $(\Delta a = 1)$, $\Delta a_\tau = 1$ sur $(\tau < +\infty)$; en outre $\tau$ est prévisible et $P(\tau < T) = E(\dot{Z}_\tau, \tau < +\infty) = 0$. $\tau$ est donc le temps d'arrêt prévisible $T_{(\Delta a_T = 1)}$ (*cf.* Yoeurp [10]).

La condition $(\varepsilon)$ donne alors $A^c \subset (\Delta a_T = 1)$; par suite, $A^c \in \mathscr{F}_{\tau-}$ et $T_{A^c} = \tau_{A^c}$ est prévisible. On a bien (ii).

(*b*) Réciproquement, supposons (ii) vérifiée. Il suffit alors de prendre

$$\varphi = 1_{[0,T]} - 1_{[T_B]}.$$

*Remarques.* — Il découle immédiatement de la proposition 8 que :

— si T est prévisible, toute tribu $\mathscr{G}$ définie par (5) $(B \in \mathscr{F}_{T-})$ induit un opérateur d'intégrale stochastique au moyen de $E^{\mathscr{G}}$ ;

— si T est totalement inaccessible, et si la tribu $\mathscr{G}$ vérifie $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{F}_T$ et induit un opérateur d'intégrale stochastique, alors $\mathscr{G} = \mathscr{F}_T$;

— de façon générale, si T est un $(\mathscr{F}_t)$ temps d'arrêt, alors les tribus $\mathscr{G}$ vérifiant $\mathscr{F}_{T-} \subseteqq \mathscr{G} \subseteqq \mathscr{F}_T$, et induisant un opérateur d'intégrale stochastique, sont exactement les tribus $\mathscr{G} = \mathscr{G}_B$ [formule (5)], indexées par les ensembles $B \in \mathscr{F}_{T-}$, $B \subseteqq A = \text{ess sup}$ $(C \in F_{T-}$ ; $T_C$ est prévisible). En effet, d'après Dellacherie [14] (t. 48, p. 61), $T_A$ est prévisible (et mérite le nom de « partie prévisible de T »). De plus, on montre aisément que, pour tout ensemble $B \in \mathscr{F}_{T-}$, $B \subseteqq A$, $T_B$ est prévisible. D'où le résultat annoncé.

Il résulte en outre de la démonstration de la proposition 8 que, avec nos notations

$$\begin{aligned} A &= (\Delta a_T = 1) \cap (T < \infty) + (T = \infty) \\ &= (\dot{Z}_T = 0) \cap (T < \infty) + (T = \infty). \end{aligned}$$

## B. Quelques résultats généraux

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathscr{F}_t)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Rappelons, en suivant Meyer [8], que l'espace $H^p(\mathscr{F}.)$ de semi-martingales, est constitué des $(\mathscr{F}_t)$-semi-martingales spéciales Y, dont la décomposition canonique $Y = X+B$ (X désigne toujours ici la partie martingale locale de Y, et B sa partie processus prévisible à variation bornée, nul en 0) vérifie :

$$(6) \qquad \left\| [X, X]_\infty^{1/2} + \int_0^\infty |dB_s| \right\|_p < +\infty.$$

(6) définit sur $H^p(\mathscr{F}.)$ une norme, que l'on notera $\| Y \|_{H^p(\mathscr{F}.)}$, ou simplement $\| Y \|_{H^p}$ s'il n'y a pas de risque de confusion. On prolonge cette notation, en posant pour toute semi-martingale Y, qui n'appartient pas à $H^p(\mathscr{F}.)$ (par exemple, toute semi-martingale qui n'est pas spéciale...), $\| Y \|_{H^p(\mathscr{F}.)} = +\infty$.

Ce paragraphe a pour but de donner des conséquences du théorème suivant, démontré en [13] à propos de la construction des intégrales stochastiques optionnelles :

THÉORÈME 9. — *Soit $\Lambda^p$ l'espace des processus $(\mathscr{F}_t)$-optionnels minces tels que*

$$\| Z \|_{\Lambda^p} = \| (\sum_s Z_s^2)^{1/2} \|_p \quad \textit{est fini.}$$

*$\hat{Z}$ désignant la projection $(\mathscr{F}_t)$-prévisible de Z, il existe une constante universelle $c_p$ finie telle que*

$$\| \hat{Z} \|_{\Lambda^p} \leqq c_p \| Z \|_{\Lambda^p} \qquad (1 \leqq p < +\infty). \tag{7}$$

Une première conséquence du théorème 9 est la :

PROPOSITION 10. — *Soit* Y *une $(\mathscr{F}_t)$-semi-martingale spéciale, de décomposition canonique* $Y = X+B$. *Alors, pour tout $p$, $1 \leqq p < +\infty$, on a*

$$\| \Delta B \|_{\Lambda^p} \leqq c_p \| \Delta Y \|_{\Lambda^p} \leqq c_p \| [Y, Y]_\infty^{1/2} \|_p, \tag{8}$$

$$\| [X, X]_\infty^{1/2} \|_p \leqq (1+c_p) \| [Y, Y]_\infty^{1/2} \|_p. \tag{8'}$$

*Démonstration.* — (8) traduit (7), puisque $\Delta B = \widehat{(\Delta Y)}$; (8′) s'en déduit aisément : $[X, X]_\infty^{1/2}$ est majoré par

$$[Y, Y]_\infty^{1/2} + [B, B]_\infty^{1/2} = [Y, Y]_\infty^{1/2} + (\sum_s (\Delta B_s)^2)^{1/2};$$

en outre, $\| \Delta Y \|_{\Lambda^p}$ est majoré par $\| [Y, Y]_\infty^{1/2} \|_p$.

On déduit encore du théorème 9 la :

PROPOSITION 11. — *Notons $\mathscr{J}$ l'ensemble des processus prévisibles* J *tels que* $|J| \leqq 1$. *Pour tout $p$, $1 \leqq p < +\infty$, et toute semi-martingale* Y, *on pose*

$$\sigma_p(Y) = \sup_{t \in \mathbf{R}_+, \mathscr{J}} \left\| \int_0^t J_s \, dY_s \right\|_p. \tag{9}$$

*Il existe deux constantes universelles $0 < c'_p \leqq c''_p < +\infty$ telles que*

$$c'_p \| Y \|_{H^p} \leqq \sigma_p(Y) \leqq c''_p \| Y \|_{H^p}. \tag{10}$$

Pour la démonstration, on renvoie à [12].

Examinons maintenant les applications de ces résultats au grossissement des tribus. Soit $(\mathscr{G}_t)$ une seconde filtration, vérifiant les conditions habituelles et $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$ pour tout $t$. On suppose en outre vérifiée l'hypothèse $(\mathscr{H}')$ :

$(\mathscr{H}')$ *toute $(\mathscr{G}_t)$-semi-martingale est une $(\mathscr{F}_t)$-semi-martingale.*

On peut alors énoncer la :

PROPOSITION 12. — (i) *pour tout* $p$, $1 \leqq p < \infty$, *il existe une constante universelle finie* $K_p$, *telle que, pour toute* $(\mathscr{G}_t)$*-semi-martingale* Y, *on ait*

$$\|Y\|_{H^p(\mathscr{G}.)} \leqq K_p \|Y\|_{H^p(\mathscr{F}.)}; \tag{11}$$

(ii) *soit* X *une* $(\mathscr{G}_t)$*-martingale locale et soit* $X = \overline{X}+A$ *sa décomposition canonique en somme d'une* $(\mathscr{F}_t)$*-martingale locale* $\overline{X}$ *et d'un processus* $(\mathscr{F}_t)$*-prévisible à variation finie* A. *Alors :*

$$\|\overline{X}\|_{H^p(\mathscr{F}.)} \leqq (1+c_p)\|X\|_{H^p(\mathscr{G}.)}. \tag{12}$$

*Démonstration.* — (i) est une conséquence directe de la proposition 11, tandis que (ii) découle de la proposition 10 et des définitions des diverses noımes.

### C. Fins d'optionnels et grossissement

Soient $[\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{G}_t)]$ un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles, et L la fin d'un ensemble $(\mathscr{G}_t)$-optionnel. On définit la filtration (continue à droite) $(\mathscr{F}_t)$, où $\mathscr{F}_t$ est la tribu engendrée par $\mathscr{G}_t$ et $(t < L)$. On a alors :

*l'hypothèse* $(\mathscr{H}')$ *est vérifiée par* $(\mathscr{G}_t)$ *et* $(\mathscr{F}_t)$.

Ce résultat a été établi indépendamment par Barlow [1] et Yor [11]. X étant une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale, le problème s'est en outre posé d'expliciter la décomposition canonique de la $(\mathscr{F}_t)$-semi-martingale spéciale X. Il a été résolu par Barlow [1] et Jeulin-Yor [6]. Nous allons en donner un peu plus loin une solution plus rapide (et sans doute plus « intuitive ») que celle exposée en [6].

Dans la situation envisagée, ce qui rend les choses particulièrement agréables est la forme des processus $(\mathscr{F}_t)$-prévisibles :

LEMME 13 ([4], [6]). — *Soit* H *un processus* $(\mathscr{F}_t)$*-prévisible borné; il existe alors* J *et* K, $(\mathscr{G}_t)$*-prévisibles bornés tels que*

$$H = J\,1_{[0,L]} + K\,1_{]L,+\infty[}.$$

On a alors la :

PROPOSITION 14. — *Pour tout* $p$, $1 \leqq p < \infty$, *il existe deux constantes universelles* $0 < k_p \leqq K_p < +\infty$, *telles que, pour toute* $(\mathscr{G}_t)$*-semi-martingale* Y, *on ait :*

$$k_p\|Y\|_{H^p(\mathscr{F}.)} \leqq \|Y\|_{H^p(\mathscr{G}.)} \leqq K_p\|Y\|_{H^p(\mathscr{F}.)}. \tag{13}$$

*Démonstration.* — L'existence de $K_p$ a été l'objet de (11). Soit alors $Y \in H(\mathscr{G}^p.)$, de $(\mathscr{G}_t)$-décomposition canonique $Y = X+B$, avec B $(\mathscr{G}_t)$-prévisible à variation finie et X $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale; B est $(\mathscr{F}_t)$-prévisible, d'où

$$\|B\|_{H^p(\mathscr{F}.)} = \|B\|_{H^p(\mathscr{G}.)} \leqq \|Y\|_{H^p(\mathscr{G}.)}.$$

Si $X = \overline{X}+A$ est la $(\mathscr{F}_t)$-décomposition canonique de X, on a d'après la proposition 12,

$$\|[\overline{X},\overline{X}]_\infty^{1/2}\|_p \leqq (1+c_p)\|[X,X]_\infty^{1/2}\|_p \leqq (1+c_p)\|Y\|_{H^p(\mathscr{G}.)}.$$

Reste à traiter le cas de A; il existe un processus $(\mathscr{F}_t)$-prévisible $a$, à valeurs dans

$$\{-1, +1\}, \qquad \text{tel que} \quad \int_0^{\cdot} |dA_s| = \int_0^{\cdot} a_s \, dA_s.$$

D'après le lemme 13, il existe $j$ et $k$, processus $(\mathscr{G}_t)$-prévisibles, bornés par 1, vérifiant :

$$a_s = j_s 1_{(s \leqq L)} + k_s 1_{(L < s)}.$$

On a alors :

$$\int_0^{\infty} |dA_s| = ((j-k).X)_L + (k.X)_{\infty} - (a.\overline{X})_{\infty};$$

les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy impliquent alors :

— le processus croissant optionnel associé à la $(\mathscr{F}_t)$-martingale locale $a.\overline{X}$ est $[\overline{X}, \overline{X}]$ et il existe une constante universelle finie $\alpha_p$ telle que

$$\| (a.\overline{X})_{\infty} \|_p \leqq \| (a.\overline{X})^*_{\infty} \|_p \leqq \alpha_p \| [\overline{X}, \overline{X}]^{1/2}_{\infty} \|_p \leqq \alpha_p (1+c_p) \| [X, X]^{1/2}_{\infty} \|_p$$

[prop. 12, (12)];

— $|((j-k).X)_L|$ est majoré par $\sup_s |((j-k).X)_s|$; sa norme dans $L^p$ est donc majorée par $2\alpha_p \| [X, X]^{1/2}_{\infty} \|_p$ (car $|j-k| \leqq 2$), et on a une majoration analogue pour $\| (k.X)_{\infty} \|_p$. Pour conclure, il suffit de prendre $1/k_p = (6+c_p)(1+\alpha_p)$.

*Remarque.* — L'inégalité de gauche de (13) a été établie, pour $p = 1$ par Dellacherie et Meyer [4]; et pour $p = 2$ par Barlow [1]. La proposition 14, valable pour tout $p$, $1 \leqq p < \infty$, est une réponse à la question posée à la fin de [6].

La proposition 14 va nous conduire tout naturellement à la $(\mathscr{F}_t)$-décomposition canonique d'une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale.

Rappelons quelques propriétés et notations : si Z désigne la ($(\mathscr{G}_t)$-sur-martingale) projection $(\mathscr{G}_t)$-optionnelle de $1_{[0,L]}$; $Z_-$ est la projection $(\mathscr{G}_t)$-prévisible de $1_{[0,L[}$; $\tilde{A}$ est la projection duale $(\mathscr{G}_t)$-optionnelle du processus croissant $1_{(L \leqslant t)}$. Si $\tilde{M}_t$ est la version continue à droite de la martingale $E(\tilde{A}_{\infty} | \mathscr{G}_t)$, on a

$$\| \tilde{M} \|_{BMO(\mathscr{G}.)} \leqq \sqrt{3} \quad (cf.\ [7]).$$

Les crochets étant relatifs à la filtration $(\mathscr{G}_t)$, on peut énoncer :

THÉORÈME 15 ([1], [6]). — *X étant une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale, soit* $X = \overline{X} + A$ *la décomposition canonique de la $(\mathscr{F}_t)$-semi-martingale spéciale* X *en somme d'une $(\mathscr{F}_t)$-martingale locale* $\overline{X}$ *et d'un processus $(\mathscr{F}_t)$-prévisible* A *à variation finie. Alors :*

$$A_s = \int_0^{L \wedge s} \frac{1}{Z_{u-}} d\langle X, \tilde{M} \rangle_u - \int_0^s 1_{(L<u)} \frac{1}{1-Z_{u-}} d\langle X, \tilde{M} \rangle_u. \tag{14}$$

*Démonstration.* — Par arrêt, on peut se limiter au cas où $X \in H^1(\mathscr{G}.)$ (et donc $X \in H^1(\mathscr{F}.)$ d'après la proposition 14). En outre, on peut supposer $X_0 = 0$.

Si H est un processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisible borné, on a, avec les notations du lemme 13,

$$E((H.A)_\infty) = E((H.X)_\infty) = E(((J-K).X)_L).$$

Or $Y \to E(Y_L)$ est une forme linéaire continue sur l'espace $H_m^1(\mathcal{G}.)$ des martingales appartenant à $H^1(\mathcal{G}.)$, et s'écrit donc sous la forme $E([Y, \tilde{M}]_\infty)$; en effet, l'égalité $E(Y_L) = E([Y, \tilde{M}]_\infty)$ est aisée si Y est une $(\mathcal{G}_t)$-martingale de carré intégrable et se prolonge par densité et continuité à $H_m^1(\mathcal{G}.)$. D'où

$$\begin{aligned} E((H.A)_\infty) &= E\left(\int_0^\infty (J_s - K_s)\, d[X, \tilde{M}]_s\right) \\ &= E\left(\int_0^\infty (J_s - K_s)\, d\langle X, \tilde{M}\rangle_s\right) \\ &= E\left(\int_0^L \frac{1}{Z_{s-}} J_s\, d\langle X, \tilde{M}\rangle_s\right) - E\left(\int_{L+}^\infty \frac{1}{1-Z_{s-}} K_s\, d\langle X, \tilde{M}\rangle_s\right). \end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée par les remarques suivantes :

– $\langle X, \tilde{M}\rangle$ commute avec la projection $(\mathcal{G}_t)$-prévisible;
– $(Z_- = 0)$ est inclus dans $]L, +\infty]$ et on peut donc supposer : $J = J\, 1_{(Z_- \neq 0)}$;
– $(Z_- = 1)$ est inclus dans $[0, L]$ et on peut donc supposer $K = K\, 1_{(Z_- \neq 1)}$.

Enfin on a

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^\infty |dA_s|\right) &\leqq 2E\left(\int_0^\infty |d\langle X, \tilde{M}\rangle_s|\right) \\ &\leqq 2\sqrt{2}\, \|X\|_{H^1(\mathcal{G}.)} \cdot \|\tilde{M}\|_{BMO(\mathcal{G}.)}, \end{aligned}$$

donc A est $(\mathcal{F}_t)$-prévisible, à variation intégrable, et la démonstration est achevée.

*Remarques.* – (*a*) les résultats de ce paragraphe sont encore valables si on grossit la filtration $(\mathcal{G}_t)$ à l'aide d'un nombre fini de fins d'ensembles $(\mathcal{G}_t)$-optionnels. La formule (14) doit bien sûr être remplacée par une formule plus compliquée, dont le calcul est possible grâce au résultat suivant de Dellacherie [3] :

soit M un fermé aléatoire gauche; alors $(\hat{1}_M) = 1$ est inclus dans M (en particulier, si M et $M^c$ sont fermés gauche, $(\hat{1}_M)$ n'est pas nul sur M);

(*b*) de même, si L est une variable aléatoire quelconque $[P(0 < L < +\infty) = 1)$ pour simplifier], on introduit la filtration $(\mathcal{F}_t^-)$ où

$$\mathcal{F}_t^- = (A \in \mathcal{F}, \exists A_t \in \mathcal{G}_t, A \cap (t < L) = A_t \cap (t < L)).$$

Alors, si X est une $(\mathcal{G}_t)$-martingale locale, $X^L$ est une $(\mathcal{F}_t^-)$-semi-martingale (*cf.* [11]), de décomposition canonique $\bar{X}^L + A^L$.

On a alors :

$$A_s^L = \int_0^{s \wedge L} \frac{1}{Z_{u-}} d\langle X, \tilde{M}\rangle_u$$

et

(13′) $$k_p \|X^L\|_{H^p(\mathcal{F}_\cdot^-)} \leqq \|X\|_{H^p(\mathcal{G}.)}, \quad \text{pour tout } p, \quad 1 \leqq p < \infty;$$

(*c*) X étant une $(\mathcal{G}_t)$-martingale locale, notons

$$V(\mathcal{F}_., X) = \sup \Sigma_i E(|E(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i})|),$$

le sup étant pris sur les subdivisions finies $\delta = (0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n)$ de $\mathbf{R}_+$.

On a alors :

$$V(\mathcal{F}_., X) \leqq K_1 \| X \|_{H^1(\mathcal{G}_.)}. \tag{15}$$

En effet, seul le cas $X \in H^1(\mathcal{G}_.)$ est à considérer; avec les notations du théorème 15, on a

$$E(|E(X_{t+s} - X_t \mid \mathcal{F}_t)|) = E(|E(A_{t+s} - A_t \mid \mathcal{F}_t)|)$$
$$\leqq E\left(\int_t^{t+s} |dA_u|\right),$$

soit

$$V(\mathcal{F}_., X) \leqq E\left(\int_0^\infty |dA_s|\right) \leqq \| X \|_{H^1(\mathcal{F}_.)} \leqq K_1 \| X \|_{H^1(\mathcal{G}_.)}.$$

Remarquons que, quitte à changer la constante $K_1$, l'inégalité (15) s'étend aisément à toute $(\mathcal{G}_t)$-semi-martingale.

D'après les inégalités de Doob et de Burkholder-Davis-Gundy, pour tout $p$, $1 < p < \infty$, il existe donc une constante universelle finie $K'_p$ telle que

$$V(\mathcal{F}_., X) \leqq K'_p \| X_\infty \|_p. \tag{15-$p$}$$

(*d*) L'énoncé suivant constitue une réciproque aux inégalités du type (15-*p*) :

PROPOSITION 16. — *Soient* $(\mathcal{G}_t)$ *et* $(\mathcal{H}_t)$ *deux filtrations. Soit en outre* $1 < p < \infty$, *et* $q$ *son conjugué. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une constante* $D_p$ *ne dépendant que de* $(\mathcal{G}_t)$ *et* $(\mathcal{H}_t)$ *telle que : pour toute* $(\mathcal{G}_t)$-*martingale de puissance p-ième-intégrable* X, *on a*

$$V(\mathcal{H}_., X) \leqq D_p \| X_\infty \|_p.$$

(ii) *il existe une constante* $D'_q$ *telle que, pour tout n, pour tout n-uplet*

$$0 \leqq t_0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n < +\infty,$$

*pour tout ensemble de variables* $(a^i)_{0 \leqq i \leqq n}$, *telles que* $a^i$ *soit* $\mathcal{H}_{t_i}$-*mesurable et bornée par* 1, *on a*

$$\left\| \left[ \sum_{i=0}^{n-1} (E(a^i \mid \mathcal{G}_{t_{i+1}}) - E(a^i \mid \mathcal{G}_{t_i}))^2 \right]^{1/2} \right\|_q \leqq D'_q \tag{16}$$

*Démonstration.* — Notons $\mathcal{A}$ la donnée d'une subdivision $0 \leqq t_0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n < +\infty$ et d'une famille de variables aléatoires $(a^i)_{0 \leqq i \leqq n}$, vérifiant : pour tout $i$, $a^i$ est $\mathcal{H}_{t_i}$-mesurable; notons $Z.(\mathcal{A})$ la $(\mathcal{G}_{t_i})_{0 \leqq i \leqq n}$-martingale discrète, nulle en 0, dont l'accroissement entre $t_i$ et $t_{i+1}$ est $E(a^i \mid \mathcal{G}_{t_{i+1}}) - E(a^i \mid \mathcal{G}_{t_i})$.

Pour X $(\mathscr{G}_t)$-martingale uniformément intégrable, soit

$$S(\mathscr{A}, X) = \sum_{i=0}^{n-1} E(a^i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})).$$

On a alors

$$V(\mathscr{H}_{\cdot}, X) = \sup_{\mathscr{A}} S(\mathscr{A}, X)$$

et

$$S(\mathscr{A}, X) = \sum_{i=0}^{n-1} E((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Z_{t_{i+1}}(\mathscr{A}) - Z_{t_i}(\mathscr{A})))$$
$$= E(X_{t_n} Z_{t_n}(\mathscr{A})).$$

(i) équivaut donc à : pour tout $\mathscr{A}$, $\| Z_{t_n}(\mathscr{A}) \|_q \leqq D_p$, et équivaut donc à (ii) par application des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy relatives aux filtrations $(\mathscr{G}_{t_i})_{0 \leqq i \leqq n}$.

*N.B.* — La croissance en $t$ des tribus $(\mathscr{H}_t)$ n'a pas été utilisée.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. BARLOW, *Study of a Filtration Expanded to Include an Honest Time* (à paraître).

[2] P. BRÉMAUD and M. YOR, *Changes of Filtrations and of Probability Measures* (soumis pour publication au *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 1977).

[3] C. DELLACHERIE, *Supports optionnels et prévisibles d'une* P-*mesure et applications* [*Séminaire de Probabilités* XII (*Lecture Notes in Math.*, n° 649, 1978, Springer)].

[4] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER, *A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus* [*Séminaire de Probabilités* XII (*Lecture Notes in Math.*, n° 649, 1978 Springer)].

[5] C. DELLACHERIE et C. STRICKER, *Changements de temps et intégrales stochastiques* [*Séminaire de Probabilités* XI (*Lecture Notes in Math.*, n° 581, 1977, p. 365-375, Springer, Berlin-Heidelberg-New York)].

[6] T. JEULIN et M. YOR, *Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites* [*Séminaire de Probabilités XII* (*Lecture Notes in Math.*, n° 649, 1978, Springer)].

[7] P. A. MEYER, *Un cours sur les intégrales stochastiques* [*Séminaire de Probabilités* X (*Lecture Notes in Math.*, n° 511, 1976, p. 246-400, Springer, Berlin-Heidelberg-New York)].

[8] P. A. MEYER, *Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques* [*Séminaire de Probabilités* XII (*Lecture Notes in Math.*, n° 649, 1978, Springer)].

[9] C. STRICKER, *Quasimartingales, martingales locales, semi-martingales et filtrations naturelles* (*Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, vol. 39, 1977, p. 55-64).

[10] Ch. YOEURP, *Décompositions des martingales locales et formules exponentielles* [*Séminaire de Probabilités* X (*Lecture Notes in Math.*, n° 511, 1976, p. 432-480, Springer, Berlin-Heidelberg-New York)].

[11] M. YOR, *Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux* [*Séminaire de Probabilités* XII (*Lecture Notes in Math.*, n° 649, 1978, Springer)].

[12] M. YOR, *Quelques interactions entre mesures vectorielles et intégrales stochastiques*, 1978 (à paraître).

[13] M. YOR, *En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles*, 1978 (à paraître).

[14] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*, 1972, Springer Verlag.


(Manuscrit reçu le 27 février 1978,
révisé le 31 mai 1978.)

T. JEULIN et M. YOR,
63, rue de la Liberté,
92220 Bagneux.