ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

Y. COLIN DE VERDIÈRE

Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de R

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 10, nº 4 (1977), p. 559-575
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_4_559_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 10, 1977, p. 559 à 576.

NOMBRE DE POINTS ENTIERS DANS UNE FAMILLE HOMOTHÉTIQUE DE DOMAINES DE R

PAR Y. COLIN DE VERDIÈRE

Soit D un domaine compact à bord C^∞ de $\mathbf{R}^n$; $R_a = a+\mathbf{Z}^n$ un réseau d'origine $a \in \mathbf{R}^n$. On cherche à estimer la différence :

$$R(\lambda) = N(\lambda) - \mathrm{vol}(D).\lambda^n \qquad \text{où} \quad N(\lambda) = \mathrm{Card}\{\lambda D \cap R_a\}.$$

Les motivations principales pour ce problème sont les suivantes :

(*a*) le cas où D est le disque $\{ x^2+y^2 \leqq 1 \}$ de $\mathbf{R}^2$ a été beaucoup étudié à cause de son importance en arithmétique : nombre de décompositions d'un entier en somme de deux carrés. Plus généralement le cas où D est un ellipsoïde de $\mathbf{R}^n$ a été étudié en relation avec des propriétés des formes quadratiques. Les résultats que nous allons décrire sont moins bons que ceux que l'on connaît dans ces cas particuliers;

(*b*) le cas où D est défini par une équation $D = \{ f \leqq 1 \}$ où $f : \mathbf{R}^n \setminus 0 \to \mathbf{R}_*^+$ est une fonction C^∞ homogène de degré $\mu > 0$ nous a motivé au départ, car on peut alors interpréter $N(\lambda)$ comme la fonction spectrale [H] de l'opérateur elliptique auto-adjoint P sur le tore $\mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z})^n$ défini par sa décomposition spectrale

$$P(\exp(i\langle \nu, x\rangle) = f(\nu).\exp(i\langle \nu, x\rangle) \qquad (\nu \in \mathbf{Z}^n).$$

P est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre μ et de symbole principal $f(\xi)$. Les opérateurs de ce type servent de modèle pour l'étude d'autres opérateurs elliptiques en utilisant les opérateurs intégraux de Fourier : par exemple, le laplacien d'une variété riemannienne dont le flot géodésique est complètement intégrable [CV 1]. Plus précisément, nous savons prouver que si g est une métrique riemannienne de révolution sur S^2 n'ayant qu'un seul équateur, il existe une fonction $f : \mathbf{R}^2 \setminus 0 \to \mathbf{R}_*^+$, C^∞ homogène de degré 2 et une bijection $j : \mathbf{N} \to \mathscr{R}$ avec

$$\mathscr{R} = \left\{ \left(p+\frac{1}{2}, q \right) \middle| (p, q) \in \mathbf{Z}^2, |q| \leqq p \right\}$$

telle que les valeurs propres λ_n du laplacien associé à g vérifient :

$$\lambda_n = f(j(n)) + 0(1) \quad \text{(voir [CV 2]);}$$

(*c*) on peut étudier de la même façon le problème suivant qui est une sorte de généralisation de la classique « méthode des trapèzes » à n dimensions, soient

$$f \in C^\infty(D; \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad N_f(\lambda) = \sum_{\nu \in \lambda D} f\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) \quad (\nu \in \mathbf{Z}^n).$$

Il s'agit d'estimer

$$R_f(\lambda) = N_f(\lambda) - \left(\int_D f\right) . \lambda^n.$$

Les résultats que je décris maintenant sont le prolongement de résultats de Van der Corput [L] ($n = 2$ et la courbure du bord ne s'annule pas) et de B. Randol ($n = 2$ et aussi le cas n quelconque et D strictement convexe) ([R 1], [R 2], [R 3] et [R 4]). La méthode utilisée ici est très différente : au lieu d'utiliser pour majorer les intégrales oscillantes des méthodes basées sur la monotonie ou la convexité ([R 3] et [R 4]), nous utilisons la classification d'Arnold des singularités des fonctions numériques et de leurs déploiements (*voir*, par exemple [A 1], [A 2], [A 3] et [D]).

Nous savons démontrer les deux théorèmes qui suivent :

THÉORÈME 1. — *Supposons $n = 2$ et soit k l'ordre maximal d'annulation de la courbure sur le bord* A *de* D *($k = 0$ si la courbure ne s'annule pas; $k = 1$ s'il n'y a que des points d'inflexion ordinaires,...). Alors si $k = 0$ ou 1 (c'est la situation « générique »), on a* $R(\lambda) = O(\lambda^{2/3})$. *Si $k \geqq 1$, on a*

$$R(\lambda) = O(\lambda^{1-[1/(k+2)]}).$$

De plus, si $k \geqq 2$, et que la direction normale en au moins un point où la courbure s'annule à l'ordre k est rationnelle, la majoration précédente est en général la meilleure possible (ce résultat est prouvé dans [R 1] *pour le cas où* $D = \{ x^{2k}+y^{2k} \leqq 1 \}$).

Par contre, si les directions normales au point où la courbure s'annule à un ordre $\geqq 2$, sont suffisamment irrationnelles, on a $R(\lambda) = O(\lambda^{2/3})$ (3.A). *Plus précisément, si D_θ est le domaine* D *tourné d'un angle θ et $R_\theta(\lambda)$ est le reste correspondant, on a*

$$|R_\theta(\lambda)| \leqq \varphi(\theta)\lambda^{2/3} \qquad \text{où} \quad \varphi(\theta) \in L^2(S^1),$$

en particulier, pour presque toutes les valeurs de θ, on a

$$|R_\theta(\lambda)| = O(\lambda^{2/3}).$$

(B. Randol m'a informé qu'une de ses élèves M. Tarnopolska-Weiss a obtenu récemment des résultats voisins [W].)

THÉORÈME 2. — *Supposons $n \leqq 7$ et soit* X *une variété compacte orientable* C^∞ *de dimension $n-1$, il existe un ouvert dense Ω de l'ensemble des plongements de* X *dans* $\mathbf{R}^n$ *muni de la topologie* C^∞ *tel que si $j \in \Omega$ et si* D *est le domaine de* $\mathbf{R}^n$ *de bord* $j(X)$, *on a*

$R(\lambda) = O(\lambda^{n-2+2/n+1})$ *ce résultat « générique » est le même que celui qu'on obtient lorsqu'on fait l'hypothèse que la courbure de Gauss du bord* A *de* D *ne s'annule pas.* (Ce résultat est alors le meilleur possible en général pour $n = 2$, *cf.* [L], p. 303.)

1. La méthode de la formule de Poisson (Van der Corput, Randol)

Soient χ la fonction caractéristique de D et $\chi_\lambda = \chi(./\lambda)$ celle de λ D, on a

$$N(\lambda) = N(\lambda; D) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \chi_\lambda(\nu + a).$$

On voudrait appliquer la formule de sommation de Poisson, mais auparavant on doit régulariser χ; pour cela, on choisit une fonction $\rho \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, [0, 1])$ à support dans la boule de rayon 1 et d'intégrale 1. On pose

$$\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \qquad \text{et} \qquad N_\varepsilon(\lambda; D) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} (\chi_\lambda \bigstar \rho_\varepsilon)(\nu + a) = \mathrm{vol}(D)\,\lambda^n + R_\varepsilon(\lambda; D).$$

Soit, pour $\rho \geqq 0$, $D_\rho = B(D, \rho)$ et pour $\rho < 0$, $D_\rho = \mathbf{R}^n \setminus B(\mathbf{R}^n \setminus D, -\rho)$ où $B(A, \alpha)$ est la boule euclidienne de centre A et de rayon α. Pour ρ assez petit, le bord A_ρ de D est une variété C^∞ parallèle au bord $A = A_0$ de D. On a les encadrements

$$N_\varepsilon(\lambda, D_{-\varepsilon/\lambda}) \leqq N(\lambda; D) \leqq N_\varepsilon(\lambda; D_{\varepsilon/\lambda}).$$

On pose alors $\varepsilon = \lambda^{-\alpha}$ avec $\alpha = (n-1)/(n+1)$, en utilisant l'estimation

$$\mathrm{vol}(D_\rho) = \mathrm{vol}(D) + O(\rho^{n-1}),$$

on voit que

$$|R(\lambda)| \leqq \sup\left[|R_\varepsilon(\lambda; D_{-\varepsilon/\lambda})|, |R_\varepsilon(\lambda, D_{\varepsilon/\lambda})|\right] + O(\lambda^{n-2+[2/(n+1)]}).$$

On est donc ramené au problème d'obtenir des majorations uniformes pour $R_\varepsilon(\lambda, D_\rho)$ avec $\varepsilon = \lambda^{-\alpha}$ et $|\rho| \leqq C$. Remplaçant D_ρ par D et appliquant la formule de Poisson, il vient :

$$N_\varepsilon(\lambda; D) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n} \lambda^n \hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\,\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)\, e^{-2\pi i\langle a, \nu\rangle}.$$

Et donc

$$R_\varepsilon(\lambda; D) = \sum_{\nu \in \mathbf{Z}^n \setminus 0} \lambda^n \hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\,\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)\, e^{-2\pi i\langle a, \nu\rangle}. \tag{1.1}$$

On est donc ramené au problème d'étudier la transformée de Fourier $\hat{\chi}(\tau x)$ ($\tau \in \mathbf{R}_*^+$, $x \in S^{n-1}$) de la fonction caractéristique du domaine D (ou D_ρ). Utilisant la formule de Stokes. il vient :

$$\hat{\chi}(\tau x) = \frac{i}{\tau}\int_A e^{-i\tau[x, \alpha]}\, x \;\lrcorner\; d\alpha_1 \wedge \ldots \wedge d\alpha_n.$$

Cette intégrale est une intégrale oscillante de la forme

$$I_\tau(x) = \int_A e^{i\tau\varphi\langle x, \alpha\rangle}\, a(x, \alpha)\, d\alpha,$$

où φ, $a \in C^\infty(S^{n-1} \times A)$. On sait que, dans la théorie des intégrales oscillantes la phase φ joue le rôle essentiel. Faisons quelques remarques à son sujet : (*a*) φ est non dégénérée au sens de [H 2] et [D] et $C_\varphi = \{(x, \alpha) \mid x \text{ est normal en } \alpha \text{ à } A\}$; si $N : A \to S^{n-1}$ est l'application de Gauss (normale extérieure), $C_\varphi = \{(\pm N(\alpha), \alpha) \mid \alpha \in A\}$ et donc les singularités de la projection $\pi : C_\varphi \to S^{n-1}$ sont les singularités de l'application N de Gauss, ainsi qu'on le voit sur le diagramme commutatif suivant où $F^\pm = \pm N \times \mathrm{Id}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F\pm"] \arrow[dr, "\pm N"'] & & C_\varphi \arrow[dl, "\pi"] \\ & S^{n-1} & \end{tikzcd}$$

En particulier si la courbure de Gauss ne s'annule pas, π est de rang maximal et on obtient par la méthode de la phase stationnaire

$$\hat{\chi}(\tau x) = O(\tau^{-(n+1)/2}).$$

(*b*) Le bord A_ρ de D_ρ est défini par $A_\rho = \{\alpha + \rho N(\alpha) \mid \alpha \in A\}$, on voit alors facilement que la variété lagrangienne Λ_ρ associée à φ_ρ est égale à Λ_0 :

$$\Lambda_0 = \{(\pm N(\alpha), \langle \alpha, . \rangle \restriction T_{\pm N(\alpha)} S^{n-1}) \mid \alpha \in A\}.$$

On en déduit ([H 2], pp. 138-142) que φ_ρ et $\varphi(x, \alpha) = \langle x, \alpha \rangle$ sont des fonctions phases équivalentes et donc que l'on peut écrire :

$$\hat{\chi}_\rho(\tau x) = \left[\int_A e^{-i\tau\langle x, \alpha\rangle} a(x, \alpha, \rho)\, d\alpha\right] e^{-i\tau\rho} \qquad \text{où} \quad a \in C^\infty(S^{n-1} \times A \times]-C, +C[);$$

on n'aura donc pas de difficultés pour majorer $\hat{\chi}_\rho$ si on sait majorer $\hat{\chi}_0$: il suffira d'avoir des estimations uniformes dans les intégrales oscillantes quand l'amplitude varie de façon C^∞.

2. Majorations d'intégrales oscillantes

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats d'Arnold ([A 1], [A 2], [A 3]) et de Duistermaat [D] pour obtenir des majorations d'intégrales oscillantes associées à des déploiements de singularités simples ou paraboliques (A_{n+1} ($n \geqq 1$), D_{n+1} ($n \geqq 3$), E_6, E_7, E_8, P_8, X_9, J_{10} avec les notations de [A 3]).

Rappelons ([D], p. 254) que si $f(\alpha)$ est un germe de *singularité isolée* en 0 et $f_j(\alpha)$ ($j = 1, \ldots, n$) une base d'un supplémentaire de l'idéal jacobien J_f de f dans l'idéal maximal $\mathcal{M}(0)$, un déploiement universel de f est donné par

$$\varphi(x, \alpha) = f(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\alpha);$$

n s'appelle la codimension de la singularité, $\mu = n+1$ est le nombre de Milnor. On peut choisir f polynôme en α et f_j monômes en α. Soit

$$\mathrm{I}_\tau(x) = \int_{\mathbf{R}^k} e^{i\tau\varphi(x,\alpha)} a(x,\alpha)\, d\alpha \qquad \text{où} \quad a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k);$$

on rappelle qu'on montre, en utilisant le théorème de préparation de Malgrange, que

$$\mathrm{I}_\tau(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j(x,\tau)\, \mathrm{I}_{\tau,j}(x),$$

où les a_j sont des symboles classiques de degré 0 en τ et $\mathrm{I}_{\tau,j}(x) = \int e^{i\tau\varphi(x,\alpha)} f_j(\alpha)\, d\alpha$ (avec $f_0 = 1$). Ces intégrales sont bien définies au sens des intégrales oscillantes [D], ou bien par passage dans le complexe ([M], p. 247). Pour majorer $\mathrm{I}_\tau(x)$, il suffit donc de majorer ces dernières intégrales. Pour cela, on utilise dans le cas où $f(\alpha)$ est *simple* ou *parabolique* les propriétés de *quasi-homogénéité* étudiées par exemple par Saito [S] : il existe des nombres r_i, $0 < r_i < 1$, tels que $f(\theta^{r_1}\alpha_1, \ldots, \theta^{r_k}\alpha_k) = \theta f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ et comme les f_j sont des monômes en α : $f_j(\theta^{r_1}\alpha_1, \ldots, \theta^{r_k}\alpha_k) = \theta^{s_j} f_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. On a les inégalités $0 < s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq s_n < 1$ si $f(\alpha)$ est simple; $0 < s_1 \leqq s_2 \leqq \ldots \leqq s_{n-1} < s_n = 1$ si $f(\alpha)$ est parabolique [la déformation $f(\alpha) + x_n f_n(\alpha)$ correspond à la déformation à $\mu = \mathrm{Cte}$ de la singularité parabolique qui est unimodulaire]. Nous aurons besoin des deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 3. — *Supposons que $\varphi(x,\alpha) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k)$ n'admette comme fonction de α que des singularités simples ou paraboliques et soit $\mathrm{I}_\tau(x)$ une intégrale oscillante associée à φ, alors :*

$$|\mathrm{I}_\tau(x)| \leqq \mathrm{C}.\tau^{-k/2}. \sum_{(x,\alpha) \in \mathrm{C}_\varphi \cap \operatorname{supp}(a)} |\det(d^2_{\alpha,\alpha}\varphi(x,\alpha)|^{-1/2}.$$

Remarque 2.1. — Cette majoration a déjà été établie par Randol pour les fonctions phases associées à un domaine analytique réel de dimension 2 ou convexe de dimension quelconque ([R 3], [R 4]) par des méthodes très différentes. Il serait intéressant de généraliser la classe de fonctions à laquelle elle s'applique. Cette majoration est optimale en un certain sens en dehors de la caustique, comme on le voit en utilisant la méthode de la phase stationnaire pour des points critiques non dégénérés.

Pour énoncer l'autre théorème, faisons quelques rappels sur les déploiements universels : si $\varphi(x,\alpha)$ est le déploiement universel d'une singularité simple ou parabolique, on note W_r la sous-variété de $\mathbf{R}^n$ formée des x tels que $\varphi(x, .)$ admette une singularité de codimension r ; W_r est de codimension r, sauf si $f(\alpha)$ est parabolique et $r = n$, auquel cas W_n est de dimension 1, ce qui correspond encore une fois à la déformation à $\mu = \mathrm{Cte}$ de la singularité parabolique. Rappelons d'autre part qu'une singularité σ' est dite subordonnée à σ si σ' apparaît dans tout voisinage de $x = 0$ dans le déploiement universel de σ [D]. On appelle indice de singularité $\varepsilon(\sigma)$ de σ la borne inférieure de ε tels que

$$\int e^{i\tau f(\alpha)} a(\alpha)\, d\alpha = \mathrm{O}(\tau^{-k/2+\varepsilon}) \quad \text{pour tout} \quad a \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^k);$$

on a ici :

$$\varepsilon(\sigma)=\frac{k}{2}-\sum_1^k r_i.$$

Pour σ singularité simple ou parabolique, on pose $\beta_j = 1/(1-s_j)$ ($j \neq n$ si σ parabolique). On a le tableau suivant [D] :

σ	A_{n+1}	D_{n+1}	E_6	E_7	E_8	P_8	X_9	J_{10}
n	n	n	5	6	7	7	8	9
ε	$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$	$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$n-\sum s_j$	$\frac{n(n+3)}{2(n+2)}$	$\frac{n^2+1}{2n}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{26}{9}$	$\frac{49}{15}$	3	$\frac{7}{2}$	4
$\sup \beta_j$	$\frac{n+2}{2}$	n	6	9	15	3	4	6
$\inf \beta_j$	$\frac{n+2}{n+1}$	$\frac{n}{n-1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{5}$

THÉORÈME 4. — *Soit* $I_\tau(x) = \int e^{i\tau\varphi(x,\alpha)}\, a(x,\alpha)\, d\alpha$ *où* φ *est le déploiement universel d'une singularité simple ou parabolique* σ. *Alors si le support de a est suffisamment proche de* 0 *en* x, $I_\tau(x)$ *admet la majoration suivante :*

$$|I_\tau(x)| \leqq \varphi_p(x)\,\tau^{-k/2+\varepsilon_p(\sigma)},$$

où

$$\varepsilon_p(\sigma) = \operatorname{Max}\{\varepsilon(\sigma') \mid \sigma' \text{ de codimension } p \text{ subordonnée à } \sigma\}$$

et

$$\varphi_p(x) = C\, d(x, W_{p+1})^{-\mu^p_{p+1}} \ldots d(x, W_n)^{-\mu^p_n};$$

d est une distance riemannienne arbitraire, les μ^p_n *vérifient :*

$$\nu_p = \mu^p_{p+1} + \ldots + \mu^p_n = \sup(\beta_j)(\varepsilon(\sigma)-\varepsilon_p(\sigma))$$

et peuvent se calculer par récurrence sur la codimension des singularités subordonnées à σ. *En particulier (sauf pour* $p = 0$, $\sigma = E_7$ *ou* X_8 *et* $p = 0$ *ou* 1, $\sigma = E_9$ *ou* J_{10}), *on a*

$$\int_{\{d(x, W_p)\leqq\eta\}\sigma \cap \operatorname{supp}(a)} |\varphi_p(x)|\, dx = O(\eta^{\alpha_p}) \qquad et \qquad \varphi_0(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n),$$

où les $\alpha_p(\sigma)$ *sont donnés par la formule*

$$\alpha_p(\sigma) = \inf[\alpha'_p(\sigma), \inf\{\alpha_p(\sigma') \mid \sigma' \textit{ de codimension } n-1 \textit{ subordonnée à } \sigma\}]$$

et

$$\alpha'_p(\sigma) = (\inf \beta_j)(n-\textstyle\sum s_j) - \nu_p;$$

si σ *de codimension* p, $\alpha_p = p$. *On a donc le tableau suivant des* α'_p :

σ	α'_p	σ	α'_p
A_{n+1}	$\dfrac{n(n+5)}{4(n+1)}+\dfrac{n+2}{2}\varepsilon_p$	E_8	$-\dfrac{35}{12}+15\varepsilon_p$
D_{n+1}	$\dfrac{n}{n-1}+n\varepsilon_p$	P_8	$3(1+\varepsilon_p)$
E_6	$\dfrac{5}{6}+6\varepsilon_p$	X_9	$\dfrac{8}{3}+4\varepsilon_p$
E_7	$-\dfrac{2}{7}+9\varepsilon_p$	J_{10}	$\dfrac{9}{5}+6\varepsilon_p$

Remarque 2.2. — Le théorème 4 s'applique pour les singularités paraboliques aux déploiements transverses à W_n de la forme

$$\varphi(x, \alpha) = f(\alpha)+\lambda(x_1, \ldots, x_{n-1})f_n(\alpha)+\sum_{j=1}^{n-1} x_j f_j(\alpha)$$

(même démonstration et utiliser le fait que

$$s_n = 1 \qquad \text{et} \qquad n-1-\sum_{1}^{n-1} s_j = n-\sum_{1}^{n} s_j;$$

considérer λ comme un paramètre indépendant par rapport auquel on fait les majorations uniformément).

Remarque 2.3. — Les majorations sont uniformes par rapport à des paramètres dont peut dépendre $a(x, \alpha)$: cela résulte de la linéarité de $I_\tau(x)$ en a et du théorème du graphe fermé.

Remarque 2.4. — Dans le cas $p = n$, on obtient $|I_\tau(x)| = O(\tau^{-k/2+\varepsilon(\sigma)}$; majoration qui s'étend immédiatement aux déploiements non universels ([D] p. 266).

Preuve des théorèmes 3 *et* 4. — 1^re^ *étape* : On introduit la sphère (resp. le cylindre) Σ d'équation $\sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta_j} = 1$ $\left(\text{resp. } \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{\beta_j} = 1\right)$ associée à la singularité simple (resp. parabolique). Soit X le point de Σ associé à x ($x \notin W_n$) de coordonnées : $X_j = x_j\,\rho^{-1/\beta}$ avec $\rho = \sum x_j^{\beta_j}$. Alors en utilisant la quasi-homogénéité, on obtient, par exemple, pour l'intégrale $I_{\tau,0} = J_\tau$ en faisant le changement de variables $\alpha_i = \rho^{r_i}\alpha'_i$:

$$(\bigstar) \qquad J_\tau(x) = \rho^{\Sigma r_i}.J_{\tau\rho}(X) \qquad (x \notin W_n).$$

On utilise alors le fait que pour $X \in \Sigma$, il n'apparaît dans φ que des singularités subordonnées à Σ de codimension strictement plus petite et de type simple [S] pour lesquelles on peut supposer par hypothèse de récurrence que les théorèmes sont déjà prouvés.

2^e *étape : preuve du théorème* 3. — Il suffit de prouver ce théorème pour un déploiement universel. Pour $x \in W_n$, il n'y a rien à prouver; pour $x \notin W_n$, on utilise la relation ($\bigstar$) et l'hypothèse de récurrence donne

$$|I_\tau(x)| \leqq C.(\tau\rho)^{-k/2}.\rho^{\Sigma r_i}.\sum_{(X,\alpha)\in C_\varphi} |\det d^2_{\alpha,\alpha}\varphi(X,\alpha)|^{-1/2}.$$

Or, l'application $F : (x, \alpha) \mapsto (\rho^{1/\beta_j} x_j, \rho^{r_i}\alpha_i)$ qui laisse φ invariante à un facteur près, laisse C_φ invariant; donc

$$|I_\tau(x)| \leqq C.\tau^{-k/2}.\rho^{-\varepsilon}.\sum_{(x,\alpha)\in C_\varphi} |\det d^2_{\alpha,\alpha}\varphi(F(x,\alpha))|^{-1/2}.$$

Pour montrer que

$$\rho^{-\varepsilon}.|\det d^2_{\alpha,\alpha}\varphi(F(x,\alpha))|^{-1/2} = |\det(d^2_{\alpha,\alpha}\varphi(x,\alpha))|^{-1/2},$$

on utilise le développement asymptotique de $I_\tau(x)$ par la méthode de la phase stationnaire qu'on peut obtenir soit directement, soit en utilisant ($\bigstar$) : par identification, on obtient l'égalité précédente.

3^e *étape : Majorations métriques associées à la quasi-homogénéité.*

LEMME 2.5. — *Soit* $\tilde{W}_k = W_k \cap \Sigma$, *on a au voisinage de* $x = 0$ *les inégalités*

$$C\rho^{1/\inf(\beta_j)}.d(X, \tilde{W}_k) \leqq d(x, W_k) \leqq C'\rho^{1/\sup(\beta_j)}.d(X, \tilde{W}_k) \qquad \textit{et} \qquad \rho \geqq C d(x, W_n)^{\sup \beta_j}.$$

Preuve. — Comme W_k est transverse à Σ, on a d'abord :

$$d(X, W_k) \leqq d(X, \tilde{W}_k) \leqq C d(X, W_k).$$

On utilise ensuite le difféomorphisme $G : \mathbf{R}^n \setminus W_n \to \mathbf{R}^n \setminus W_n$ défini par $G(x_j) = (x_j \rho^{-1/\beta_j})$ (ρ fixe) qui multiplie les distances par un facteur compris entre $\inf(\rho^{-1/\beta_j})$ et $\sup(\rho^{-1/\beta_j})$. La seconde inégalité est évidente.

LEMME 2.6. — *Soit* $H : \Sigma \times]0, 1[\to \mathbf{R}^n$ *défini par*

$$H : \quad (X_1, \ldots, X_n; \rho) \mapsto (X_1\rho^{1-s_1}, \ldots, X_n\rho_n^{1-s_n}).$$

Si $J(X, \rho)$ *est le jacobien de* H, *on a*

$$J(X, \rho) = O(\rho^{n-1-\sum_1^n s_j}).$$

Dans le cône $\|X\| \leqq C|X_i|$, on peut prendre $(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)$ comme coordonnées locales sur Σ; si $X_i = F(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n)$, H est donné en coordonnées locales par

$$(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n, \rho) \to (X_1\rho^{1-s_1}, \ldots, F(X_1, \ldots, X_n)\rho^{1-s_i}, \ldots, X_n\rho^{1-s_n}).$$

donc :

$$\mathrm{J}(\mathrm{X}, \rho)=\rho^{n-1-\sum_1^n s_j}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & (1-s_1)\mathrm{X}_1 \\ 0 & 1 & 0 & (1-s_2)\mathrm{X}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}_2} & \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{X}_n} & (1-s_i)\mathrm{F} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & (1-s_n)\mathrm{X}_n \end{vmatrix}.$$

On en tire la majoration voulue.

4e *étape : preuve du théorème* 4.

(*a*) *Pour* $x\in \mathrm{W}_n$, il y a seulement à prouver (par exemple dans le cas parabolique que

$$\mathrm{J}_\tau(0, x_n)=\int e^{i\tau(f(\alpha)+x_n f_n(\alpha))}\,d\alpha=\mathrm{O}(\tau^{-k/2+\varepsilon(\sigma)}).$$

En utilisant la relation (★), on obtient :

$$\mathrm{J}_\tau(0, x_n)=\tau^{-\Sigma r_i}.\mathrm{J}_1(0, x_n);$$

comme $-\sum r_i=-k/2+\varepsilon(\sigma)$, il suffit de prouver que $\mathrm{J}_1(0, x_n)$ est localement uniformément majorée comme fonction de x_n, ce qui est évident, quelle que soit la définition de cette intégrale oscillante.

(*b*) *Pour* $x\notin \mathrm{W}_n$, on obtient en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$|\mathrm{J}_\tau(x)|\leqq \rho^{-(\varepsilon-\varepsilon_p)}.\tilde{\varphi}_p(\mathrm{X}).\tau^{-k/2+\varepsilon_p}$$

où

$$\tilde{\varphi}_p(\mathrm{X})=\mathrm{C}.d(\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{W}}_{p+1})^{-\mu_{p+1}^p}\dots d(\mathrm{X}, \tilde{\mathrm{W}}_{n-1})^{-\mu_{n-1}^p}.$$

On utilise alors le lemme 2.5 et on obtient :

$$\varphi_p(x)=\mathrm{C}\,d(x, \mathrm{W}_{p+1})^{-\mu_{p+1}^p}\dots d(x, \mathrm{W}_{n-1})^{-\mu_{n-1}^p}.d(x, \mathrm{W}_n)^{-\mu_n^p}$$

avec

$$\mu_n^p=\sup(\beta_j)(\varepsilon-\varepsilon_p)-(\mu_{p+1}^p+\dots+\mu_{n-1}^p).$$

Ce qui est la relation de récurrence annoncée.

Pour majorer $\int_{d(x, \mathrm{W}_p)\leqq\eta}\varphi_p(x)\,dx$, on utilise les coordonnées polaires quasi homogènes, $(\rho, \mathrm{X})\in\,]0, 1[\,\times\Sigma$, le lemme 2.5 et le lemme 2.6, on obtient ainsi :

$$\int_{d(x, \mathrm{W}_p)\leqq\eta}\varphi_p(x)\,dx\leqq \mathrm{C}.\int_0^1 \rho^{n-1-\Sigma s_j-(1/\inf\beta_j)(\nu_p)}.\left(\int_{d(\mathrm{X}, \mathrm{W}_p)\leqq\eta_1}\tilde{\varphi}_p(\mathrm{X})\,d\mathrm{X}\right)dr.$$

Avec

$$\eta_1 = \inf(C', \eta\rho^{-1/\inf \beta_j}).$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence

$$\int_{d(X, \tilde{W}_p) \leqq \eta_1} \tilde{\varphi}_p(X)\, dX = O(\eta_1^{\alpha''})$$

et le :

LEMME 2.7 :

$$\int_0^1 \inf(C', \eta t^{-\lambda}).t^{\mu}\, dt = O(\sup(\eta, \eta^{(\mu+1)/\lambda})).$$

Il reste ensuite à vérifier qu'on obtient la formule annoncée dans le théorème 4 et à faire les calculs numériques pour obtenir le tableau.

PROPOSITION 2.8. — *Dans le cas où* $\sigma = E_7$, *on peut prendre*

$$\varphi_0(x) = C.d(x, W_1)^{-\mu_1^0} \ldots d(x, W_5)^{-\mu_5^0}.\rho^{-1/6}$$

avec $\mu_1^0 + \ldots + \mu_5^0 = \nu_0(E_6) = 5/2$ *et on a* $\varphi_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^6)$.

On utilise exactement la même technique, mais on évite pourtant de remplacer ρ en fonction de $d(x, W_6)$.

Avec cette modification, le théorème 4 s'applique aux fonctions phases génériques $\varphi(x, \alpha) \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k)$ avec $n \leqq 6$ (*cf.* [A 3]).

3. Preuve du théorème 1

A. MAJORATION DU RESTE.

PROPOSITION 3.1. — *Soit* $W_1 = \{ x = \pm N(\alpha) \mid K(\alpha) = 0 \}$ *et soit k l'ordre maximal des zéros de* $K(\alpha)$ *sur* $A = b\,D$. *Alors on a les deux majorations suivantes :*

(*a*) $\hat{\chi}(\tau x) = O(\tau^{-1-1/k+2})$ *uniformément en x;*

(*b*) $|\hat{\chi}(\tau x)| \leqq C\tau^{-3/2}.[d(x, W_1)]^{-k/2(k+1)}$ [R 3].

Preuve. — La majoration (*a*) est une conséquence du théorème 4 : si $K(\alpha)$ s'annule à l'ordre l, $\varphi(x, \alpha)$ est localement un déploiement de A_{l+1}, et donc localement $\hat{\chi}(\tau x) = O(\tau^{-1-1/l+2})$ (faire $p = l$ dans le théorème 4).

La majoration (*b*) déjà prouvée dans [R 3] peut également se démontrer en utilisant le théorème 3 qui donne

$$|\hat{\chi}(\tau x)| \leqq C.\tau^{-3/2}.\sum_{N(\alpha) = \pm x} |K(\alpha)|^{-1/2};$$

il est en effet facile de voir que si $N(\alpha) = \pm x$, $d^2_{\alpha,\alpha}\varphi(x, \alpha) = \pm K(\alpha)$. Il reste à minorer $K(\alpha)$ en fonction de la distance de x à W_1, ce qui se fait aisément à l'aide de développements limités au voisinage des points où la courbure K s'annule.

Pour obtenir des majorations de R (λ), on est amené dans le théorème 1 à faire l'une des deux hypothèses suivantes (non exclusives) :

(H 1) la courbure s'annule à l'ordre k au plus;

(H 2) soit m la pente de la tangente en un point où la courbure s'annule et $\pi = \inf(|m|, 1/|m|)$. Alors $\pi \notin \mathbf{Q}$ et satisfait des inégalités du type

$$\exists\, \omega > 0, \quad \forall\, p, q \in \mathbf{Z}, \qquad \left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{\omega}{q^{2+\eta}},$$

où $\eta > 0$ sera choisi en fonction de l'ordre maximal k d'annulation de la courbure.

Soient $b > 0$ donné et $A = \{ X \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \mid d(X; \mathbf{R}W_1) \leqq b \}$, $B = \mathbf{R}^2 \setminus \{\{0\} \cup A\}$. Pour majorer $R_\varepsilon(\lambda)$ donné par la formule 1.1, on sépare la somme $\sum_{\nu \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\}}$ en $\sum_{\nu \in A} + \sum_{\nu \in B}$.

3.2. *Majoration de* $\sum_{\nu \in B}$. — On utilise sous l'hypothèse (H 1) la majoration (*b*) précédente :

$$\Big|\sum_{\nu \in A}\Big| \leqq C.\sum_{\nu \in A} \lambda^2 (\lambda \|\nu\|)^{-3/2}.d\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}, W_1\right)^{-k/2(k+1)}.(1+\lambda^{-1/3}\|\nu\|)^{-1}.$$

Si $d(\nu, X) \leqq b/2$, on a

$$d\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}, W_1\right) \geqq \frac{1}{2} d\left(\frac{X}{\|X\|}, W_1\right),$$

on en déduit que

$$\|\nu\|^{-3/2}.d\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}, W_1\right)^{-k/2(k+1)}.(1+\lambda^{-1/3}\|\nu\|)^{-1}$$
$$\leqq C.\int_{B[\nu, (b/2)]} \|X\|^{-3/2}.d\left(\frac{X}{\|X\|}, W_1\right)^{-k/2(k+1)} (1+\lambda^{-1/3}\|X\|)^{-1} dX.$$

Si b est assez petit, pour $\nu \neq \nu'$, $B(\nu, b/2) \cap B(\nu', b/2) = \varnothing$, on peut donc majorer $\sum_{\nu \in B}$ par une intégrale

$$\Big|\sum_{\nu \in B}\Big| \leqq C.\lambda^{1/2} \int_{\{\|X\| \geqq b/2\}} \|X\|^{-3/2}.d\left(\frac{X}{\|X\|}, W_1\right)^{-k/2(k+1)}.(1+\lambda^{-1/3}\|X\|)^{-1} dX.$$

On passe en coordonnées polaires (ρ, x) et en séparant les variables, on a

$$\Big|\sum_{\nu \in B}\Big| \leqq C\lambda^{1/2}.\left(\int_{b/2}^{+\infty} \rho^{-1/2}(1+\lambda^{-1/3}\rho)^{-1} d\rho\right)\left(\int_{S^1} d(x, W_1)^{-k/2(k+1)} dx\right).$$

L'intégrale sur S^1 converge car $k/2(k+1) < 1$. Pour majorer l'intégrale en ρ, on utilise le :

LEMME 3.3 :

$$\int_C^{+\infty} t^\alpha (1+\lambda^{-\beta} t)^{-N} dt = O(\lambda^{\beta/\alpha+1}) \qquad (\alpha > -1,\ \beta > 0,\ N > \alpha+1).$$

On obtient ainsi $\left|\sum_{\nu\in B}\right| = O(\lambda^{2/3})$. Cette majoration est uniforme si on prend $D = D_\beta$ (β petit) une famille de domaines à frontières parallèles.

3.4. *Majoration de* $\sum_{\nu\in A}$. — Si on fait seulement l'hypothèse (H 1), on utilise la majoration (*a*) et $|\hat{\rho}| \leqq 1$, on a

$$\left|\sum_{\nu\in A}\right| \leqq C.\lambda^{1-1/k+2}.\sum_{\nu\in A}\|\nu\|^{-1-1/k+2}.$$

Cette dernière série converge, car $\operatorname{Card}\{\nu\in A \mid \|\nu\| \leqq \mu\} = O(\mu)$. On en déduit $\left|\sum_{\nu\in A}\right| = O(\lambda^{1-1/k+2})$ avec uniformité si $D = D_\beta$.

Donc, utilisant le calcul du paragraphe 1, *on obtient sous l'hypothèse* (H 1) *seule :* $R(\lambda) = O(\lambda^{1-1/k+2})$.

3.5. Si on fait les hypothèses (H 1) et (H 2), on a $\mathbf{R}W_1 \cap \mathbf{Z}^2 = \varnothing$, on peut donc utiliser seulement la majoration (*b*). De l'hypothèse (H 2) on tire facilement :

$$d\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}, W_1\right) \geqq C\omega/\|\nu\|^{2+\eta};$$

on a alors :

$$\left|\sum_{\nu\in A}\right| \leqq C\lambda^{1/2}.\sum_{\nu\in A}\|\nu\|^{-3/2}.(\|\nu\|^{2+\eta}/\omega)^{k/2(k+1)}(1+\lambda^{-1/3}\|\nu\|)^{-1}.$$

On peut comme dans (3.2) remplacer cette somme par une intégrale sur

$$\{X \mid d(X, \mathbf{R}W_1) \leqq 2b\}$$

et on a

$$\left|\sum_{\nu\in A}\right| \leqq C\lambda^{1/2}.\omega^{-k/2(k+1)}.\int_1^{+\infty} t^{[(2+\eta)k/2(k+1)]-[3/2]}.(1+\lambda^{-1/3}t)^{-1}\,dt.$$

Pour obtenir $O(\lambda^{2/3})$, il suffit d'après le lemme 3.3 de prendre $\eta = 2/k$. On obtient alors (uniformément pour D_β) : $R(\lambda) \leqq C.\omega^{-k/2(k+1)}.\lambda^{2/3}$. Soit maintenant pour $x \in S^1$,

$$\pi(x) = \inf\left(\left|\frac{x_1}{x_2}\right|, \left|\frac{x_2}{x_1}\right|\right)$$

et $\omega(x)$ la plus grande constante telle que $\forall p,\ q \in \mathbf{Z}^2$, $|\pi(x)-p/q| \geqq \omega(x)/q^{2+2/k}$. [$\omega(x) = 0$ si $\pi(x)$ est rationnel].

PROPOSITION 3.6. — $\omega(x)$ *est* > 0 *pour presque tout* x *de* S^1. *Plus précisément :*

$$\frac{1}{\omega(x)} \in L^p(S^1), \qquad \forall p < 1.$$

En effet, dire que $\omega(x) \leqq \lambda$ équivaut à dire qu'il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ tels que

$$\left|\pi(x) - \frac{p}{q}\right| \leqq \lambda/q^{-2-2/k}.$$

Soit

$$A_{p,q} = \left\{ x \,\middle|\, \left| \pi(x) - \frac{p}{q} \right|^1 \leqq \lambda / q^{-2-2/k} \right\};$$

on voit facilement que

$$\mu(A_{p,q}) \leqq C \lambda / q^{2+2/k}$$

et donc

$$\mu\{\omega(x) \leqq \lambda\} = O(\lambda).$$

On a

$$\int_{S^1} |\omega(x)|^{-p}.dx \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} n^p.\mu\left(\frac{1}{n} \leqq \omega(x) \leqq \frac{1}{n-1}\right).$$

Utilisant la transformation d'Abel, on voit que cette série converge pour $p < 1$.

Soit maintenant $R_\theta(\lambda)$ le reste pour le domaine D tourné d'un angle θ et $W_1 = \{(x_1, \ldots, x_N) \in S^1\}$, alors $W_1(\theta) = \{\theta + x_1, \ldots, \theta + x_N\}$ et on peut prendre $\omega(\theta) = \inf(\omega(\theta + x_1), \ldots, \omega(\theta + x_N))$. On en déduit facilement que $1/\omega(\theta) \in L^p$, $\forall p < 1$ et donc $|R_\theta(\lambda)| \leqq \varphi(\theta)\lambda^{2/3}$ où $\varphi(\theta) \in L^{2+\varepsilon}(S^1)$, $\forall \varepsilon < 2/k$.

B. Minoration du reste. — On adapte simplement l'idée de [R 1].

Lemme 3.7 :

$$\int_{\mathbf{R}} e^{i\tau\alpha^{k+1}} a(\alpha)\, d\alpha = A_k\, a(O)\, \tau^{-1/k+1}.(1 + O(\tau^{-1/k+1}))$$

avec A_k *constante universelle non nulle* ($a \in C_0^\infty(\mathbf{R})$).

Faisons par exemple, pour simplifier l'hypothèse que la courbure s'annule à l'ordre maximal k en un seul point α_0 et que $N(\alpha_0)$ a une pente rationnelle. Soit $\nu_0 = (p_0, q_0)$ tels que $\nu_0 \in \mathbf{R}.N(\alpha_0)$ et (p_0, q_0) premiers entre eux. On peut choisir b tel que

$$(d(X, \mathbf{R}.N(\alpha_0)) \leqq b \text{ et } X \in \mathbf{Z}^2) \quad \text{implique } X = r\nu_0 \text{ avec } r \in \mathbf{Z}.$$

Utilisant les calculs précédents, on obtient :

$$R_\varepsilon(\lambda, D_\beta) = \lambda^{1-1/k+2}.\mathrm{Re}\left[A.\sum_{r=1}^{\infty} e^{-2\pi i[\lambda r\langle \nu_0, f(\alpha_0)\rangle + r\langle \nu_0, f(\alpha_0)\rangle]} r^{-1-1/k+2}.\hat{\rho}(2\pi\lambda r \nu_0)\right]$$
$$+ O(\lambda^{1-1/k+1}),$$

où $A \neq 0$ et indépendant de α. Utilisant la majoration

$$\hat{\rho}(X) = 1 + O\left(\frac{\|X\|}{1 + \|X\|}\right).$$

On obtient :

$$R_\varepsilon(\lambda, D_\beta) = \lambda^{1-1/k+2}.F(\lambda) + O(\lambda^{1-4/3(k+2)})$$

où $F(\lambda)$ est une fonction périodique en λ de période $\langle \nu_0, f(\alpha_0) \rangle$ et non nulle (sa série de Fourier n'est pas nulle). A partir des considérations du paragraphe 1, on a :

$R(\lambda) = \lambda^{1-1/k+2}.F(\lambda)+O(\lambda^{1-4/3(k+2)})$, et donc $R(\lambda)$ n'est pas mieux que $O(\lambda^{1-1/k+2})$. Remarquons que s'il y a plusieurs points où la courbure s'annule à l'ordre k avec une direction rationnelle, $F(\lambda)$ sera une somme finie de fonctions périodiques qui auront en général des périodes $\mathbf{Z}$-indépendantes et donc on aura le même résultat.

4. Preuve du théorème 2

DÉFINITION 4.1. — *Soient* $n \leqq 7$ *et* A *une variété compacte de dimension* $n-1$, *on dira qu'une immersion lagrangienne* $i : A \to T^*(S^{n-1})$ *est « générique » si elle peut être localement définie par une fonction phase équivalente au déploiement universel d'une singularité simple ou à un déploiement transverse à la strate* $\mu = \text{Cte}$ *de la singularité* P_8 (*lorsque* $n = 7$). *On définit de même la notion de fonction phase « générique »* $\varphi \in C^\infty(S^{n-1} \times A)$ *est générique si* φ *est non dégénérée et* $i_\varphi : C_\varphi \to T^* S^{n-1}$ *« générique ».*

Rappelons qu'il résulte des travaux d'Arnold et Duistermaat que si A est fixé, l'ensemble des immersions lagrangiennes génériques de A dans $T^*(S^{n-1})$ est un ouvert dense ainsi que l'ensemble des fonctions phases génériques dans $C^\infty(B \times S^{n-1})$ si B est compacte.

Utilisant ces deux résultats, on peut prouver le :

THÉORÈME 5. — *Soient* A *une variété compacte connexe de dimension* $n-1$ ($n \leqq 7$), *et* $\mathscr{P}$ *l'ensemble des plongements (éventuellement* $\mathscr{P} = \text{O}$) *de* A *dans* $\mathbf{R}_n$). *L'ensemble* Ω *des* $f \in \mathscr{P}$ *telles que la fonction phase* $\varphi(x, \alpha) = \langle x, f(\alpha) \rangle$, $\varphi \in C^\infty(S^{n-1} \times A)$ *soit « générique » est un ouvert dense de* $\mathscr{P}$ *pour la topologie* C^∞.

Preuve. — Soit $\mathscr{L}_0$ l'ensemble des immersions lagrangiennes de A dans $T^* S_n^{-1}$ dont classe de Liouville est nulle et $F : \mathscr{P} \to \mathscr{L}_0$ l'application qui à f associe l'immersion lagrangienne $j_f : A \to T^* S^{n-1}$ définie par $j_f(\alpha) = (N(\alpha), \xi(\alpha))$ où $N(\alpha)$ est la normale extérieure en $f(\alpha)$ au domaine D tel que $f(A) = b\,D$ et $\xi(\alpha)$ est la restriction du produit scalaire $\langle f(\alpha), . \rangle$ à $T_{N(\alpha)} S^{n-1}$; $F(f)$ est l'une des deux composantes connexes de l'immersion lagrangienne associée à la fonction phase $\varphi(x, \alpha) = \langle x, f(\alpha) \rangle \in C^\infty(A \times S^{n-1})$. Je dis que F est une *submersion* (ouverte) dont la fibre de dimension 1 est constituée des plongements parallèles à un plongement donné [i. e. : $f(\alpha) = f(\alpha) + \rho\, N(\alpha)$; $\rho \in \mathbf{R}$ fixé tel que f soit encore un plongement]. La caractérisation de la fibre est immédiate : si f et f' sont deux tels plongements, on doit avoir $N(\alpha) = N'(\alpha)$ et $f(\alpha) - f'(\alpha)$ proportionnel à $N(\alpha)$: en dérivant, on voit que la fonction de proportionnalité est constante. Pour voir que c'est une submersion, il suffit de construire une section locale de F. Soit $j(\alpha) = (x(\alpha), \xi(\alpha))$ une immersion lagrangienne de $\mathscr{L}_0$. Si on veut que $j = j_f$, on doit nécessairement avoir $f(\alpha) = \xi(\alpha) + \mu(\alpha)\, x(\alpha)$, où μ est à déterminer. Pour cela, on exprime que $x(\alpha)$ est la normale à $f(A)$ en $f(\alpha)$: on trouve $d\mu = -x\,d\xi$. Cette forme est exacte car on a supposé $j \in \mathscr{L}_0$. On peut donc en choisir une primitive dépendant continûment de j; si j est suffisamment voisin de j_0, on aura encore un plongement. Pour vérifier que c'est bien une section, soit $j_f(\alpha) = (\tilde{x}(\alpha), \tilde{\xi}(\alpha))$; $\tilde{x}(\alpha)$ est normal en $f(\alpha)$ à $f(A)$ et donc : $\tilde{x}(\alpha) = \pm\, x(\alpha)$, par continuité, $\tilde{x}(\alpha) = x(\alpha)$; $\tilde{\xi}(\alpha) = \langle \xi(\alpha) + \mu\, x(\alpha), . \rangle_{\restriction T_{x(\alpha)} S^{n-1}}$ donc $\tilde{\xi}(\alpha) = \xi(\alpha)$.

La continuité de F prouve que Ω est un ouvert. Pour montrer que Ω est dense, il suffit de montrer que dans $\mathscr{L}_0$ l'ensemble des variétés lagrangiennes génériques est dense au voisinage de F ($\mathscr{P}$). Il suffit pour cela d'approcher la fonction phase $\varphi(x, \alpha) = \langle x, f(\alpha) \rangle$ par une fonction phase générique à laquelle est associée une immersion lagrangienne générique dont la classe de Liouville est nulle car définie par une fonction phase globale.

Pour prouver le théorème 2, nous allons prouver plus précisément le :

THÉORÈME 2'. — *Soit* $f: \mathrm{A} \to \mathbf{R}^n$ *un plongement d'une variété* C^∞ *compacte* A *de dimension* $n-1$ $(n \leqq 7)$ *tel que* $\varphi(x, \alpha) = \langle x, f(\alpha) \rangle$ *soit une fonction phase « générique », alors si* D *est tel que* $f(\mathrm{A}) = b\,\mathrm{D}$, *on a*

$$\mathrm{R}(\lambda; \mathrm{D}) = \mathrm{O}(\lambda^{n-2+[2/(n+1)]}).$$

Soit W_p l'ensemble des x de S^{n-1} tels que $\varphi(x, .)$ ait des singularités de codimension p, B_p (resp. B'_p) $= \{ y \in \mathbf{R}^n \mid d(y; \mathbf{R}^+ \mathrm{W}_p) \leqq 1$ [resp. $d(y, \mathbf{R}^+ \mathrm{W}_p) \leqq 3/2$] $\}$ et $\mathrm{A}_p = \mathrm{B}_p - \bigcup_{q>p} \mathrm{B}_q$; on prend ici pour d la distance définie par $d((y_j), (y'_j)) = \sup |y_j - y'_j|$. Pour $\nu \in \mathrm{A}_p$, on utilise la majoration du théorème 4 :

$$|\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)| \leqq (|\lambda| \, \|\nu\|)^{-[(n+1)/2]+\varepsilon_p} \varphi_p\left(\frac{\nu}{\|\nu\|}\right);$$

dans le cas $n = 7$, $p = 0$, on choisit φ_0 comme dans 2.8. Pour remplacer la série $\sum_{\nu \in \mathrm{A}_p \setminus \{0\}} |\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\,\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)|$ par une intégrale, on doit distinguer deux cas :

1^er^ *cas.* — $n = 7$, $p = 0$ et $\varphi(x, \alpha)$ est localement équivalente au déploiement universel de E_7.

Soit $x_0 \in \mathrm{S}^{n-1}$ tel que $\varphi(x_0, .)$ admette la singularité E_7 et $(x_j)_{1 \leqq j \leqq 6}$ des coordonnées locales sur S^6 au voisinage de x_0 telles que $\varphi(x, \alpha)$ soit équivalente localement au déploiement standard $f(\alpha) + \sum_1^6 x_j f_j(\alpha)$. Soit $x, x' \in \mathrm{S}^6$ tels que $\forall j$, $x'_j \leqq x_j$, alors $\rho(x') \leqq \rho(x)$ et donc $\varphi_0(x) \leqq \mathrm{C}\,\varphi_0(x')$ si on a

$$d(x, x') \leqq \frac{1}{2} d(x, \mathrm{W}_1).$$

Il est d'autre part clair qu'on a dans S^{n-1},

$$\mathrm{vol}\{x' \in \mathrm{B}(x, \varepsilon) \mid \forall j, x'_j \leqq x_j\} \geqq \mathrm{C}\,\mathrm{vol}[\mathrm{B}(x, \varepsilon)];$$

on en déduit que pour $\nu \in \mathrm{A}_0$:

$$|\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\,\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)| \leqq \mathrm{C}.\int_{\mathrm{B}(\nu, 1/2)} (\lambda \|y\|)^{-(n+1)/2} \varphi_0\left(\frac{y}{\|y\|}\right)(1+\lambda^{-\alpha}\|y\|)^{-\mathrm{N}} dy.$$

2^e^ *cas.* — tous les autres cas.

Pour $y \in \mathrm{A}_p$ et $d(y, y') \leqq 1/2$, on a

$$\varphi_p\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \leqq \mathrm{C}\,\varphi_p\left(\frac{y'}{\|y'\|}\right);$$

on en déduit :

$$|\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)| \leqq C\int_{B(\nu,\,1/2)} (\lambda\|y\|)^{-[(n+1)/2]+\varepsilon_p}.\varphi_p\left(\frac{y}{\|y\|}\right).(1+\lambda^{-\alpha}\|y\|)^{-N}dy.$$

Regroupant ces termes et utilisant le fait que si $\nu \in A_p$, $B(\nu, 1/2) \subset B'_p$, on a

$$\sum_{\nu\in A_p} |\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)| \leqq C\int_{B'_p} (\lambda\|y\|)^{-[(n+1)/2]+\varepsilon_p}.\varphi_p\left(\frac{y}{\|y\|}\right)(1+\lambda^{-\alpha}\|y\|)^{-N}dy.$$

On évalue cette intégrale en passant en coordonnées polaires (r, x) et en utilisant le théorème 4 : d'abord si $p = 0$, on a $\varphi_0(x) \in L^1(S^{n-1})$ et donc :

$$\lambda^n \sum_{\nu\in A_0} |\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)| \leqq C\lambda^{(n-1)/2}.\int_{1/2}^{+\infty} r^{(n-3)/2}.(1+\lambda^{-\alpha}r)^{-N}dr \times \int_{S^{n-1}} \varphi_0(x)\,dx.$$

Utilisant le lemme 3.3, il vient :

$$\lambda^n.\sum_{\nu\in A_0} |\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)| = O(\lambda^{n-2+2/n+1}).$$

Pour $p \neq 0$, on obtient :

$$\lambda^n \sum_{\nu\in A_p} |\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)|$$
$$\leqq C\lambda^{[(n-1)/2]+\varepsilon_p}.\int_{1/2}^{+\infty}\left(\int_{d(x,\,W_p)\leqq 3/2r} \varphi_p(x)\,dx\right) r^{[(n-3)/2]+\varepsilon_p}.(1+\lambda^{-\alpha}r)^{-N}dr.$$

Utilisant le théorème 4, il vient :

$$\lambda^n \sum_{\nu\in A_p} |\hat{\chi}(2\pi\lambda\nu)\hat{\rho}(2\pi\varepsilon\nu)| \leqq C\lambda^{[(n-1)/2]+\varepsilon_p}.\int_{1/2}^{+\infty} r^{[(n-3)/2]+\varepsilon_p-\alpha_p}.(1+\lambda^{-\alpha}r)^{-N}dr.$$

Avec le lemme 3.3, on voit que la condition à satisfaire pour avoir $O(\lambda^{n-2+2/n+1})$ est

$$\varepsilon_p \leqq \frac{n-1}{2n}\alpha_p.$$

Soit, si n représente maintenant la codimension de la singularité :

LEMME 4.2. — *Soient σ une singularité simple ou parabolique de codimension $n \leqq 6$, ε_p le* sup *des indices de singularité des singularités de codimension p ($p > 0$) subordonnés à σ, alors si α_p est la constante numérique du théorème* 4, *on a*

$$\varepsilon_p \leqq \frac{n}{2(n+1)}\alpha_p.$$

Comme $n/2(n+1)$ est une fonction croissante de n, il suffit de prouver la formule pour α'_p au lieu de α_p : on vérifie sur la formule du tableau qui donne α'_p en fonction de ε_p l'inégalité du lemme.

On conclut la démonstration du théorème 2', en utilisant une remarque d'uniformité des estimations précédentes si $D = D_\rho$, ρ petit.

Remarque 4.3. — Le théorème 2 est vrai pour tout domaine D tel que les seules singularités qui apparaissent soient des déploiements universels de A_{m+1}, D_{m+1}, E_6, E_7, P_8; mais pour $n > 7$, ce n'est pas la situation générique. Pour $n = 8$, apparaît la singularité P_9 qui n'est plus quasihomogène et que je ne sais pas comment étudier.

BIBLIOGRAPHIE

[A 1] V. I. ARNOLD, *Integrals of Rapidly Oscillating Functions and Singularities of the Projections of Lagrange Manifolds* (*Funct. Anal. and Appl.*, vol. 6, 1972, p. 61-62).

[A 2] V. I. ARNOLD, *Normal Forms of Functions with Simple Crtitical Points, the Weyl Groups* A_k, D_k, E_k *and Lagrange manifolds* (*Funct. Anal. and Appl.*, vol. 6, 1972, p. 3-25).

[A 3] V. I. ARNOLD, *Remarks on the Stationary Phase and Coxeter Numbers* (*Russ. Math. Surveys*, vol. 28, 1973, p. 19-48).

[CV 1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Quasi-modes sur les variétés riemanniennes* (*Inventiones Math.* Vol. 43, 1977, p. 15-52).

[CV 2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Sur le spectre des surfaces dont le flot géodésique est complètement intégrable ou presque* (en préparation).

[D] J. J. DUISTERMAAT, *Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities* (*Comm. Pure and Appl. Math.*, vol. 27, 1974, p. 207-281).

[H 1] L. HÖRMANDER, *The Spectral Function of an Elliptic Operator* (*Acta. Math.*, vol. 121, 1968, p. 193-218).

[H 2] L. HÖRMANDER, *Fourier Integral Operators*, I (*Acta Math.*, vol. 127, 1971, p. 79-183).

[L] E. LANDAU, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Chelsea, New York, 1969.

[M] B. MALGRANGE, *Intégrales asymptotiques et monodromie* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série, t. 7. 1974, p. 405-430).

[R 1] B. RANDOL, *A Lattice Point Problem*, I. (*Trans. A.M.S.*, vol. 121, 1966, p. 257-268).

[R 2] B. RANDOL, *A Lattice Point Problem*, II (*Trans. A.M.S.*, vol. 125, 1966, p. 101-113).

[R 3] B. RANDOL, *On the Fourier Transform of the Indicator Function of a Planar Set* (*Trans. A.M.S.*, vol. 139, 1969, p. 271-278).

[R 4] B. RANDOL, *On the Asymptotic Behaviour of the Fourier Transform of the Indicator Function of a Convex Set* (*Trans. A.M.S.*, vol. 139, p. 279-285).

[S] K. SAITO, *Quasi-homogene isolierte Singularitaten von Hyperflëchen* (*Inv. Math.*, vol. 14, 1971 p. 123-142).

[W] M. TARNOPOLSKA-WEISS, *On the Number of Lattice Points in Planar Domains* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 20 octobre 1977.)

Y. COLIN DE VERDIÈRE,
Laboratoire de Mathématiques pures,
Institut Fourier
dépendant de l'Université
scientifique et médicale de Grenoble,
associé au C.N.R.S.,
B.P. n° 116,
38402 Saint-Martin-d'Hères.