MICHEL DUFLO

Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 10, nº 2 (1977), p. 265-288
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_2_265_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4^e série, t. 10, 1977, p. 265 à 288.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS BI-INVARIANTS SUR UN GROUPE DE LIE

PAR MICHEL DUFLO

SUMMARY. — The main result is that every non-zero bi-invariant differential operator on a Lie group is locally solvable. The proof uses results on the center of an enveloping algebra and on some invariant distributions defined in some open subset of a Lie group, which have their own interest.

INTRODUCTION

Le *premier théorème* de cet article est que tout opérateur différentiel bi-invariant non nul sur un groupe de Lie est localement résoluble. Je renvoie le lecteur à l'exposé de S. Helgason [8] et à sa bibliographie qui sont une bonne introduction à ce problème. Rappelons simplement que le résultat est dû à L. Ehrenpreis et B. Malgrange (1954) pour un groupe abélien, M. Raïs (1971) [11] pour un groupe nilpotent, S. Helgason (1973) pour un groupe semi-simple, M. Raïs-M. Duflo (1976) [7] et F. Rouvière (1976) pour un groupe résoluble. Comme dans [7], la méthode employée ici pour construire une solution fondamentale locale est celle de M. Raïs [11].

Cette méthode demande une certaine connaissance de la structure de l'algèbre des opérateurs différentiels bi-invariants sur le groupe de Lie. Notons G ce groupe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ sa complexifiée, U $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ l'algèbre enveloppante et S $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, Z $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ le centre de U $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, I $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ l'algèbre des invariants de S $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Si G est connexe l'algèbre des opérateurs différentiels bi-invariants sur G est isomorphe à Z $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. J'ai construit dans [6] un isomorphisme γ de Z $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ sur I $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

Le *second théorème* [qui contient une partie des informations dont nous avons besoin sur Z $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$] donne une formule pour γ qui permet de comparer γ et l'isomorphisme (d'espaces vectoriels) de Poincaré-Birkhoff-Witt. Cette formule n'était connue que pour G semi-simple ou résoluble [5].

La démonstration de chacun de ces deux théorèmes utilise un même résultat. Dans [7], nous avons défini pour certaines orbites Ω de la représentation coadjointe de G des distri butions T_Ω dans un voisinage de 1 dans G. Lorsqu'il y a une représentation unitaire irréductible π de G naturellement associée à Ω, il arrive souvent que T_Ω soit proportionnelle à la restriction du caractère de π à ce voisinage. C'est la formule universelle de A. Kirillov [9]. C'est ce qui se passe lorsque G est résoluble ([1] chap. IX) et ce résultat sert dans la démonstration du théorème 1 donnée dans [7]. Ce qui remplace ceci dans le cas général est le *troisième théorème* qui entraîne en particulier que les distributions T_Ω sont vecteurs propres pour les opérateurs différentiels bi-invariants. Plus précisément, J'ai construit dans [6] un idéal primitif $I_{-i\Omega}$ de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Je montre ici que l'on a $u \bigstar T_\Omega = 0$ pour tout $u \in I_{-i\Omega}$.

Cet article est donc une application de la théorie des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ à un problème d'analyse sur G (le théorème 1). Il est indiqué dans l'introduction du livre de J. Dixmier [3] que cette théorie devrait être utile pour l'étude de l'ensemble $\hat{G}$ des classes de représentations unitaires irréductibles de G. On voit que pour aborder certains problèmes d'analyse elle permet encore plus simplement de ne pas faire l'étude de $\hat{G}$.

Le paragraphe 1 contient l'énoncé détaillé des résultats de cet article. La seule démonstration longue est celle du théorème 3. C'est une combinaison des méthodes de [6] et [9]. Il y a une récurrence avec plusieurs cas à considérer dont certains demandent quelques calculs. Cependant, pour démontrer le théorème 2, on n'a besoin que d'un cas particulier du théorème 3. Comme le théorème 2 a son intérêt propre, j'ai rédigé une démonstration directe de ce cas particulier (malgré le double emploi). Elle fait l'objet, avec son application au théorème 2, du deuxième paragraphe. Le troisième paragraphe contient la démonstration du théorème 3 et le quatrième celle du théorème 1.

1. Énoncé des résultats

1.1. Quelques notations. — Dans tout l'article k sera un corps de caractéristique 0. Si $\mathfrak{a}$ est un espace vectoriel sur k, on note $S(\mathfrak{a})$ son algèbre symétrique et $\mathfrak{a}^*$ son dual. Si $k = \mathbf{R}$, on note $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}$ le complexifié de $\mathfrak{a}$, et si $k = \mathbf{C}$, on note $\mathfrak{a}_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur k, on note $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante, $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$, $I(\mathfrak{g})$ la sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$ formée des éléments invariants et β l'isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt de $S(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g})$ (isomorphisme d'espaces vectoriels).

1.2. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et G le groupe de Lie simplement connexe correspondant. On note V l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que l'on ait $|\operatorname{Im} x| < \pi$ pour toute valeur propre x de ad X. L'application exponentielle induit un difféomorphisme de V sur un ouvert noté W de G. Pour toute variété différentiable M on note $\mathscr{D}(M)$ l'espace des fonctions différentiables à support compact sur M, et $\mathscr{D}'(M)$ l'espace des distributions sur M. Rappelons que $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ s'identifie naturellement à l'algèbre (pour le produit de convolution) des distributions sur G de support $\{1\}$. Une distribution sur V (resp. W) est dite invariante si elle est invariante par les automorphismes intérieurs. On note δ la masse de Dirac en 1 sur G (resp. en 0 sur $\mathfrak{g}$).

THÉORÈME 1. — *Soit* $u \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, $u \neq 0$. *Il existe une distribution* T *invariante sur* W *telle que* $u \bigstar T = T \bigstar u = \delta$.

Remarquons que ce théorème entraîne que tout opérateur différentiel bi-invariant non nul sur un groupe de Lie est localement résoluble (*cf.* [8]). Il en est de même de tout opérateur différentiel non nul semi-invariant (*cf.* [7]).

1.3. On note S (X) la série formelle $S(X) = \operatorname{sh}(1/2\,X)/1/2\,X$ et S′ (X) la série formelle $S'(X) = (1-e^{-X})/X$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur k. Pour $X \in \mathfrak{g}$ on pose $j(X) = (\det S(\operatorname{ad} X))^{1/2}$.

Si $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, j est une fonction analytique au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$; dans le cas général j est une série formelle. On note d_j l'opérateur différentiel (d'ordre infini en général) sur S ($\mathfrak{g}$) défini par j.

Si $u \in U(\mathfrak{g})$, on pose $a(u) = d_j^{-1}(\beta^{-1}(u))$. (Pour tout ceci, voir [5] p. 55.) L'application a induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de Z ($\mathfrak{g}$) sur I ($\mathfrak{g}$).

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. On note $\mathfrak{g}(f)$ le stabilisateur de f dans $\mathfrak{g}$. On dit que f est régulier si la dimension de $\mathfrak{g}(f)$ est minimale. Une polarisation $\mathfrak{h}$ en f est une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimension $1/2(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(f))$ telle que $f([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$. Notons k' la clôture algébrique de k et posons $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes k'$. Soit f un élément régulier de $\mathfrak{g}'^*$. Alors f admet une polarisation résoluble $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}'$. On note I_f le plus grand idéal (bilatère) de U ($\mathfrak{g}'$) contenu dans l'idéal à gauche engendré par les éléments de la forme $H - f(H) - 1/2 \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'/\mathfrak{h}} H$, où H parcourt $\mathfrak{h}$. On sait que I_f ne dépend pas de $\mathfrak{h}$ et que I_f est primitif (i. e. qu'il existe un $\mathfrak{g}'$-module simple d'annulateur I_f). (Pour tout ceci, voir [6], ou [3] chap. 10). Soit $u \in Z(\mathfrak{g}')$. L'image de u dans $U(\mathfrak{g}')/I_f$ est un élément de k' que nous notons $\chi_f(u)$. En faisant agir le groupe de Galois, et vu l'indépendance de I_f du choix de $\mathfrak{h}$, on voit que si $u \in Z(\mathfrak{g})$ et si $f \in \mathfrak{g}^*$ est régulier, on a $\chi_f(u) \in k$.

Soit $u \in Z(\mathfrak{g}')$. Il est montré dans [6] (*cf.* [3] chap. 10) qu'il existe un élément unique $\gamma(u) \in I(\mathfrak{g}')$ tel que $\gamma(u)(f) = \chi_f(u)$ pour tout élément régulier $f \in \mathfrak{g}'^*$, et que γ est un isomorphisme d'algèbres de Z ($\mathfrak{g}'$) sur I ($\mathfrak{g}'$). Il résulte de ce que nous venons de dire que γ induit un isomorphisme d'algèbres de Z ($\mathfrak{g}$) sur I ($\mathfrak{g}$).

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $u \in Z(\mathfrak{g})$ *on a* $a(u) = \gamma(u)$.

Il résulte de ce théorème que a induit un isomorphisme d'algèbres de Z ($\mathfrak{g}$) sur I ($\mathfrak{g}$).

Il devrait exister une démonstration algébrique du théorème 2, mais je n'en connais pas.

Lorsque cela sera utile, nous écrirons $a_{\mathfrak{g}}$, $j_{\mathfrak{g}}$ et $\gamma_{\mathfrak{g}}$ au lieu de a, j et γ.

1.4. Les notations sont celles de 1.2. La fonction j définie en 1.3 est analytique, non nulle et invariante dans V. Si $T \in \mathscr{D}'(W)$ on définit $a(T) \in \mathscr{D}'(V)$ par la formule

$$a(T)(j\varphi \circ \exp) = T(\varphi) \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathscr{D}(W).$$

Si on identifie U ($\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$) et les distributions de support { 1 } dans W, et S ($\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$) et les distributions de support { 0 } dans V, a coïncide sur U ($\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$) avec l'application $a_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}$ définie en 1.3.

On fixe une mesure de Haar dX sur $\mathfrak{g}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$ on pose

$$\hat{\varphi}(f) = \int \varphi(X) \exp(if(X))\, dX$$

pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$. On note df la mesure duale sur $\mathfrak{g}^*$ de sorte que

$$\varphi(0) = \int \hat{\varphi}(f)\, df.$$

Si $p \in S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, $p \neq 0$, est tel que $p(-if) \geqq 0$ pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$ on définit une distribution p^s dans $\mathfrak{g}$ pour tout $s \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} s \geqq 0$ par la formule

$$p^s(\varphi) = \int p(-if)^s \hat{\varphi}(f)\, df.$$

On sait que la fonction $s \mapsto p^s$ se prolonge en une fonction méromorphe de $\mathbf{C}$ à valeurs dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathfrak{g}$ (« théorème d'Atiyah-Bernstein »).

On note $u \mapsto u^*$ (resp. $u \mapsto \check{u}$) l'anti-automorphisme antilinéaire (resp. linéaire) de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ (resp. $S(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$) prolongeant l'application $X \mapsto -X$ de $\mathfrak{g}$.

Soit $u \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, $u \neq 0$. On pose $v = u^* \bigstar u$. Admettons le théorème 2. On a alors $a(v) = a(u^*) \bigstar a(u)$ (convolution sur le groupe abélien $\mathfrak{g}$) et comme $a(u^*) = a(u)^*$ on a $a(v)(-if) = |a(u)(-if)|^2 \geqq 0$. Nous poserons $v^s = a^{-1}(a(v)^s)$. La fonction $s \mapsto v^s$ est une fonction méromorphe définie dans $\mathbf{C}$ à valeurs dans l'espace des distributions invariantes sur W. On a $v^0 = \delta$. Il résulte du théorème 2 que l'on a $v^s = v^s \bigstar \ldots \bigstar v$ (s fois) lorsque s est entier $\geqq 0$. Cela rend plausible le résultat suivant.

PROPOSITION 1. — *On a* $v^{s+1} = v^s \bigstar v$ (*égalité de fonctions méromorphes*).

Rappelons comment, d'après M. Raïs, la proposition 1 entraîne le théorème 1. Notons S le coefficient du terme constant de la série de Laurent de v^s au voisinage de $s = -1$. La distribution $T = u^* \bigstar S$ vérifie les conditions du théorème 1 (*cf.* [11]).

1.5. Les notations sont celles de 1.2. Soit $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ une G-orbite. Rappelons qu'une telle orbite porte une mesure invariante. Nous noterons $d\beta_\Omega$ la mesure invariante normalisée comme en [1], II.2.6. L'orbite Ω est dite tempérée s'il existe une norme $f \mapsto \|f\|$ sur $\mathfrak{g}^*$ et un nombre $M \geqq 0$ tels que $\int_\Omega (1+\|f\|)^{-M}\, d\beta_\Omega(f) < \infty$. D'autre part, il est équivalent de dire que Ω est de dimension maximale ou que les éléments de Ω sont réguliers.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(W)$, on note $\varphi \circ \exp$ l'élément de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ qui a son support contenu dans V et tel que $\varphi \circ \exp(X) = \varphi(\exp(X))$ pour tout $X \in V$. C'est un abus de notation car il se peut que l'on ait $\varphi \circ \exp(X) \neq \varphi(\exp(X))$ si $X \notin V$.

Soit Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ tempérée et de dimension maximale. On définit une distribution T_Ω dans W par la formule :

$$T_\Omega(\varphi) = \int_\Omega (j\,\varphi \circ \exp)^\wedge\, d\beta_\Omega \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(W).$$

THÉORÈME 3. — *Soit* Ω *une orbite de* G *dans* $\mathfrak{g}^*$ *fermée, tempérée, de dimension maximale. Soit* $f \in \Omega$ *et soit* $u \in \mathrm{I}_{-if}$ (*cf.* 1.3). *On a* $u \bigstar \mathrm{T}_\Omega = 0$.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est résoluble le théorème 3 est essentiellement démontré dans [1] chapitre IX. Lorsque $\mathfrak{g}$ est réductive, c'est essentiellement un cas particulier d'un théorème d'Harish-Chandra (*cf.* 3.5 ci-dessous). On peut considérer le théorème 3 comme une forme plus faible, plus générale, et plus précise de la formule universelle pour le caractère des représentations unitaires irréductibles de G donnée par A. Kirillov dans [9]. Elle est plus faible car il n'y a plus de représentation de G (et encore moins de caractère !) mais seulement une espèce de représentation locale : ici une représentation irréductible de $\mathfrak{g}$, ou plutôt l'idéal primitif de U $(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ qu'elle définit. Plus générale, car il y a plus de telles représentations locales que de vraies représentations. Plus précise, car la correspondance entre représentations locales et orbites est explicite, ainsi que la fonction j qui intervient dans la définition de T_Ω.

2. Démonstration du théorème 2

2.1. Les notations sont celles de 1.2. On note Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ qui est tempérée et de dimension maximale. On note f un point de Ω. On note G (f) le stabilisateur de f dans G.

LEMME 1. — *On suppose que* G *est localement isomorphe au groupe des points réels d'un groupe algébrique réel et qu'il existe une polarisation résoluble* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *en* f *vérifiant la condition de Pukanszky. Alors on a* $u \bigstar \mathrm{T}_\Omega = 0$ *pour tout* $u \in \mathrm{I}_{-if}$.

Démonstration. — On note $\mathrm{G}(f)_1$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G (f). Comme $\mathfrak{h}$ est une polarisation $\mathrm{G}(f)_1$ est ouvert dans G (f). Il est aussi d'indice fini. En effet, soit $\tilde{\mathrm{G}}$ le groupe des points réel d'un groupe algébrique connexe réel, localement isomorphe à G. On définit de même $\tilde{\mathrm{G}}(f)$ et $\tilde{\mathrm{G}}(f)_1$. Comme $\tilde{\mathrm{G}}(f)$ est le groupe des points réels d'un groupe algébrique réel, et comme $\tilde{\mathrm{G}}(f)_1$ est ouvert dans $\tilde{\mathrm{G}}(f)$, il est d'indice fini dans $\tilde{\mathrm{G}}(f)$. Il en résulte qu'il en est de même pour $\mathrm{G}(f)_1$ dans G (f).

Notons H_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{h}$, et posons $\mathrm{H} = \mathrm{G}(f)_1 \mathrm{H}_0$. Notons $\mathfrak{h}^\perp$ l'orthogonal dans $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{h}$. Rappelons que puisque $\mathfrak{h}$ est une polarisation, $\mathrm{H}_0 f$ est un ouvert de $f+\mathfrak{h}^\perp$, et que la condition de Pukanszky signifie que l'on a $\mathrm{H}_0 f = f+\mathfrak{h}^\perp$. Le groupe H est fermé, et sa composante connexe est H_0, car H_0 est la composante connexe du stabilisateur de $f+\mathfrak{h}^\perp$ dans G.

Nous noterons n l'indice de $\mathrm{G}(f)_1$ dans G (f). On munit G de la mesure de Haar à gauche qui correspond à dX. On choisit une mesure de Haar à gauche sur H. D'autre part, sur l'espace des fonctions φ sur G vérifiant $\varphi(gh) = \chi(h)\varphi(g)$ pour $g \in \mathrm{G}$, $h \in \mathrm{H}$, où $\chi(h) = |\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(h)|$, il y a une « mesure » G-invariante $\varphi \mapsto \int_{\mathrm{G/H}} \varphi(g)\, dg$ telle que l'on ait

$$\int_{\mathrm{G}} \alpha(g)\, dg = \int_{\mathrm{G/H}} \int_{\mathrm{H}} \alpha(gh)\chi(h)^{-1}\, dh\, dg,$$

pour toute fonction α intégrable sur G (*cf.* [1], chap. V).

Nous allons démontrer pour commencer la formule suivante :

$$(1)\qquad T_\Omega(\varphi)=n^{-1}\int_{G/H}\left\{\,|\det(\operatorname{Ad} g)|\int_{H'}\varphi(ghg^{-1})\chi(h)^{-1/2}\theta_f(h)\,dh\right\}dg,$$

où l'on a posé $H'=\exp(\mathfrak{h}\cap V)$ et $\theta_f(\exp H)=\exp(if(H))$ pour tout $H\in\mathfrak{h}\cap V$, pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(W)$.

On identifie $\mathfrak{h}^\perp$ au dual de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. On munit $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ de la mesure de Haar qui correspond à la « mesure » sur G/H, et $\mathfrak{h}^\perp$ de la mesure duale. Dans ces conditions, pour toute fonction intégrable α sur Ω on a

$$(2)\qquad \int_\Omega \alpha\,d\beta_\Omega=n^{-1}\int_{G/H}dg\int_{\mathfrak{h}^\perp}\alpha(g(f+l))\,dl.$$

Ceci est démontré par exemple en [1] IX, 3.3.4 lorsque $G(f)=G(f)_1$, et dans le cas général la démonstration est identique.

Soit $\varphi\in\mathscr{D}(W)$. Notons ψ l'élément $\varphi\circ\exp$ de $\mathscr{D}(V)$. Compte tenu de (2) il suffit pour prouver (1) de montrer que pour tout $g\in G$ l'intégrale $I=\int_{\mathfrak{h}^\perp}(j\psi)^\wedge(g(f+l))\,dl$ est égale à la quantité entre les signes { } dans (1). La formule d'inversion de Fourier montre que l'on a

$$I=|\det(\operatorname{Ad} g)|\int_{\mathfrak{h}} j(H)\,\psi(\operatorname{Ad} g\,H)\exp(if(H))\,dH,$$

(*cf.* 3.2, lignes suivant la formule (4) pour un raisonnement analogue). Supposons que l'on ait établi la formule :

$$(3)\qquad j(H)=\det\left[\exp(-(1/2)\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}H)\right]\det(S'(\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}}H))\qquad\text{(notations 1.3)}$$

pour tout $H\in\mathfrak{h}$. La formule bien connue pour $d(\exp H)/dH$ donne alors la formule (1).

On note $\tilde{H}$ le groupe des points réels du sous-groupe algébrique connexe de $\tilde{G}$ d'algèbre $\mathfrak{h}$. Il existe un tel sous-groupe car il est égal au stabilisateur connexe de la variété algébrique $f+\mathfrak{h}^\perp$. On note N le groupe des points réels du radical unipotent de $\tilde{H}$ et $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N. Soit T le groupe des points réels d'un tore maximal de $\tilde{H}$, de sorte que l'on a $\tilde{H}=TN$. Le groupe $\tilde{H}$, et donc son sous-groupe T, opèrent comme groupes de transformations affines de $f+\mathfrak{h}$. Comme T est le groupe des points réels d'un tore, il a un point fixe $f'\in f+\mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky, $\tilde{H}$ opère transitivement dans $f+\mathfrak{h}$, et l'on peut supposer, quitte à remplacer T par un de ses conjugués, que l'on a $T\subset\tilde{G}(f)$. Il en résulte que l'on a $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(f)+\mathfrak{n}$. Il suffit donc de prouver la formule (3) pour H dans $\mathfrak{g}(f)$. Les espaces $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}/\mathfrak{g}(f)$ sont en dualité par la forme déduite de la forme

$$(X,Y)\mapsto f([X,Y])\qquad (X\in\mathfrak{g},\ Y\in\mathfrak{h})$$

et pour cette dualité les endomorphismes $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}H$ et $\operatorname{ad}_{\mathfrak{h}/\mathfrak{g}(f)}H$ sont adjoints si $H\in\mathfrak{g}(f)$. D'autre part, $\mathfrak{g}(f)$ est commutatif (*cf.* [3] 1.11.7). La formule (3) en résulte pour $H\in\mathfrak{g}(f)$, ce qui termine la démonstration de la formule (1).

Soient $u \in \mathrm{I}_{-if}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{W})$. On a $u \bigstar \mathrm{T}_\Omega(\varphi) = \mathrm{T}_\Omega(\check{u} \bigstar \varphi)$. Il résulte de la formule (1) que pour prouver le lemme 1 il suffit de montrer que pour tout $g \in \mathrm{G}$ on a

$$\int_{\mathrm{H}'} \check{u} \bigstar \varphi(ghg^{-1})\chi(h)^{-1/2}\theta_f(h)\,dh = 0. \tag{4}$$

Notons ${}^g\varphi(x) = \varphi(gxg^{-1})$. On a $\check{u} \bigstar \varphi(gxg^{-1}) = (g^{-1}\check{u}) \bigstar {}^g\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{G}$. Par définition de I_{-if}, $g^{-1}\check{u}$ appartient à l'idéal à droite de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ engendré par les éléments $-\mathrm{H}+if(\mathrm{H})-1/2\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\,\mathrm{H}$ où H parcourt $\mathfrak{h}$. Remplaçant φ par des fonctions de la forme $v \bigstar {}^g\varphi$ (où $v \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$) on voit que (4) résulte de ce que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{H}')$ on a

$$\int_{\mathrm{H}'} (-\mathrm{H}+if(\mathrm{H})-1/2\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\mathrm{H}) \bigstar \varphi(h)\chi(h)^{-1/2}\theta_f(h)\,dh = 0.$$

ceci termine la démonstration du lemme 1.

Exemple. — Soit $\tilde{\mathrm{G}}$ un groupe algébrique complexe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note G le revêtement simplement connexe de $\tilde{\mathrm{G}}$. On le considère comme groupe de Lie réel. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\mathbf{R}$. Soit Ω une orbite fermée, tempérée, de dimension maximale de G dans $(\mathfrak{g}_\mathbf{R})^*$. Alors les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées.

Démonstration. — A tout $f \in \mathfrak{g}^*$ on associe l'élément $\mathrm{X} \mapsto 2\,\mathrm{Re}\,f(\mathrm{X})$ de $(\mathfrak{g}_\mathbf{R})^*$. Cette application permet d'identifier $(\mathfrak{g}_\mathbf{R})^*$ et $(\mathfrak{g}^*)_\mathbf{R}$. Soit alors $f \in \Omega$. Alors f, considéré comme élément de $\mathfrak{g}^*$, est régulier et il admet une polarisation résoluble $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ([3] 1.12.16). L'algèbre $\mathfrak{h}_\mathbf{R}$ est une polarisation résoluble pour f, considéré comme élément de $(\mathfrak{g}_\mathbf{R})^*$. La polarisation $\mathfrak{h}_\mathbf{R}$ vérifie la condition de Pukanszky car Ω est fermée.

2.2. Ce numéro ne sera pas utilisé dans la suite. Il donne dans un cas particulier une interprétation de T_Ω en terme de caractères de représentations unitaires de G.

On suppose dans ce numéro que G est localement isomorphe au groupe des points réels $\tilde{\mathrm{G}}$ d'un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbf{R}$. On note Ω une orbite de G dans $\mathfrak{g}^*$ qui est tempérée et de dimension maximale. Soit $f \in \Omega$. On suppose qu'il existe une polarisation résoluble $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ en f vérifiant la condition de Pukanszky. On suppose qu'il existe un caractère de la composante neutre de $\mathrm{G}(f)$ dont la différentielle est la restriction de if à $\mathfrak{g}(f)$.

PROPOSITION 2. — (i) *Il existe un sous-groupe* $\mathrm{G}(f)_2$ *de* $\mathrm{G}(f)$ *et un caractère unitaire* η *de* $\mathrm{G}(f)_2$ *tels que* $\mathrm{G}(f)_2$ *soit d'indice fini dans* $\mathrm{G}(f)$ *et normalise* $\mathfrak{h}$, *et* η *ait pour différentielle la restriction de if à* $\mathfrak{g}(f)$.

(ii) *Soient* $\mathrm{G}(f)_2$ *et* η *comme dans* (i). *Soit* H_0 *le sous-groupe analytique de* G *d'algèbre* $\mathfrak{h}$. *Le groupe* $\mathrm{H}_2 = \mathrm{G}(f)_2\,\mathrm{H}_0$ *est fermé. Il a un unique caractère unitaire* $\tilde{\eta}$ *qui prolonge* η *et dont la différentielle est la restriction de if à* $\mathfrak{h}$. *Soit* π *la représentation de* G *induite par* $\tilde{\eta}$. *La représentation* π *est traçable et la restriction du caractère de* π *à* W *est égale à* $m\,\mathrm{T}_\Omega$, *où* m *est l'indice de* $\mathrm{G}(f_2)$ *dans* $\mathrm{G}(f)$.

Remarque. — On peut démontrer que π est somme finie de représentations irréductibles de G et que π ne dépend que de $\mathrm{G}(f)_2$ et η, mais pas de $\mathfrak{h}$. Cela se fait de manière standard par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — (i) Notons Z le centre de G et $G(f)_0$ la composante neutre de $G(f)$. On voit comme dans la démonstration du lemme 1 que $Z\,G(f)_0$ est d'indice fini dans $G(f)$. Il est évident d'autre part qu'il normalise $\mathfrak{h}$ et que le caractère de $G(f)_0$ de différentielle if se prolonge à $Z\,G(f)_0$, de sorte que le groupe $Z\,G(f)_0$ convient.

(ii) On garde les notations du lemme 1 et de sa démonstration. Le groupe H_2 est fermé pour la même raison que H. Notons N' le sous-groupe analytique de H_0 d'algèbre $\mathfrak{n}$ (il est fermé, simplement connexe et isomorphe à N). On a $H_0 = G(f)_0\,N'$ et donc $H_2 = G(f)_2\,N'$. Notons η' le caractère de N' dont la différentielle est la restriction de *if* à $\mathfrak{n}$. Si $X \in W$ est tel que $\exp X \in G(f)$, on a $X \in \mathfrak{g}(f)$ (*cf.* [1] démonstration du lemme 1.3.3). Il en résulte que l'on a $G(f) \cap N' = \exp(\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{n}')$ et donc que η et η' coïncident sur $G(f)_2 \cap N'$. Si $g = hn$ avec $g \in G(f)_2$ et $n \in N'$, on pose

$$\tilde{\eta}(g) = \eta(h)\,\eta'(n).$$

On définit ainsi un caractère unitaire de H_2.

On a $H \cap W = \exp(\mathfrak{h} \cap V)$. En effet, soit $X \in V$ tel que $\exp X \in H$. Écrivons $X = S+Y$ où S et Y sont les composantes semi-simples et nilpotentes de X. En conjuguant par un élément convenable de H_0, on voit comme dans la démonstration du lemme 1 que l'on peut supposer que l'on a $\exp S \in G(f)$. Il résulte de la démonstration de [1] lemme 1.3.3 que $S \in \mathfrak{g}(f)$. D'autre part, comme Y est nilpotent, on a $\exp Y \in N'$ et il existe $Y' \in \mathfrak{n}$ tel que $\exp Y' = \exp Y$. Comme l'application exponentielle est injective sur l'ensemble des éléments nilpotents, on a $Y' = Y$ et $Y \in \mathfrak{n}$. Donc $X \in \mathfrak{h}$.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(W)$. Il résulte de ce qui précède et de la formule (1) de la démonstration du lemme 1 que l'on a

$$T_\Omega(\varphi) = m^{-1}\int_{G/H_2}\int_{H_2} |\det(\operatorname{Ad} g)|\,\varphi(ghg^{-1})\,\chi(h)^{-1/2}\,\tilde{\eta}(h)\,dh\,dg.$$

La proposition 2 (ii) s'en déduit par exemple comme en [1] IX.3.

2.3. Ce numéro est consacré à la démonstration du théorème 2. Dans toute la suite de ce paragraphe $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie sur **C**. On note $\mathfrak{k}$ une enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{l}$ l'idéal de $\mathfrak{k}$ intersection des noyaux des poids des éléments semi-invariants de $U(\mathfrak{k})$. On note $\tilde{L}$ un groupe algébrique connexe d'algèbre $\mathfrak{l}$ et L le revêtement simplement connexe de $\tilde{L}$. On considérera L comme un groupe de Lie réel. Son algèbre de Lie est $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}$.

LEMME 2. — *Il existe un ouvert de Zariski non vide de* $\mathfrak{l}^*$ *qui est réunion de* $\tilde{L}$*-orbites fermées de dimension maximale.*

Démonstration. — Soit V la réunion des L-orbites de dimension maximale dans $\mathfrak{l}$ et V' son image réciproque dans $\mathfrak{k}^*$. L'ensemble V' est un ouvert de Zariski invariant sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{k}$. L'idéal dans $S(\mathfrak{k})$ de la variété $\mathfrak{k}^* - V'$ contient un élément $p \neq 0$ semi-invariant ([4] théorème 2.2). On a $p \in I(\mathfrak{l})$ (lemme de Borho, *cf.* [4] 4.5). Comme dans la démonstration de [4] 2.1, on voit que toute orbite de L dans $\mathfrak{l}^*$ sur laquelle p ne s'annule pas est fermée et de dimension maximale, ce qui démontre le lemme.

Il résulte du lemme 2 et de l'exemple du paragraphe 2.1 qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U' de $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^*$ qui est réunion de L-orbites fermées de dimension maximale, et que tout élément f appartenant à l'une de ces orbites admet une polarisation résoluble $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}_{\mathbf{R}}$ vérifiant la condition de Pukanszky. Le groupe L est unimodulaire ([4] théorème 1.11). On note U le sous-ensemble de U' qui est réunion des orbites contenues dans U' qui sont tempérées. Nous poserons $\Xi = \mathrm{L}\backslash\mathrm{U}$. On choisit une mesure de Haar sur $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}$ et la mesure duale sur $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^*$ (*cf.* 1.4).

Comme dans [7] 5.1.7 et 5.1.9 on voit que le complémentaire de U est négligeable dans $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^*$ et qu'il existe sur Ξ une mesure μ telle que l'on ait

$$(5)\qquad \int_{\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^*} \alpha(f)\,df = \int_{\Xi}\left\{\int_{\Omega} \alpha(f)\,d\beta_{\Omega}(f)\right\} d\mu(\Omega),$$

pour toute fonction intégrable α sur $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^*$. On utilise les notations du paragraphe 1 (avec L et $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}$ au lieu de G et $\mathfrak{g}$). Dans $\mathscr{D}'(\mathrm{W})$ on a

$$(6)\qquad \delta = \int_{\Xi} \mathrm{T}_{\Omega}\,d\mu(\Omega),$$

et dans $\mathscr{D}'(\mathrm{V})$ on a

$$(7)\qquad \delta = \int_{\Xi} a(\mathrm{T}_{\Omega})\,d\mu(\Omega).$$

Il résulte du lemme 1 et de la définition de $\gamma_{\mathfrak{l}_{\mathbf{R}\mathrm{C}}}$ (paragraphe 1.3) que l'on a (en notant $\gamma = \gamma_{\mathfrak{l}_{\mathbf{R}\mathrm{C}}}$)

$$(8)\qquad u \bigstar \mathrm{T}_{\Omega} = \gamma(u)(-i\Omega)\mathrm{T}_{\Omega}, \quad \text{pour tout } \Omega \in \Xi.$$

LEMME 3. — *On a*

$$a_{\mathfrak{l}_{\mathbf{R}\mathrm{C}}}(u) = \gamma_{\mathfrak{l}_{\mathbf{R}\mathrm{C}}}(u), \quad \textit{pour tout } u \in \mathrm{Z}(\mathfrak{l}_{\mathbf{R}\mathrm{C}}).$$

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{W})$ et posons $\psi = j\,\varphi \circ \exp$. Soit $u \in \mathrm{Z}(\mathfrak{l}_{\mathbf{R}\mathrm{C}})$. On a

$$\gamma(u)(\psi) = \int_{\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^*} \gamma(u)(-if)\,\hat{\psi}(f)\,df,$$

(par la formule d'inversion de Fourier). Il résulte de (5) que l'on a

$$\gamma(u)(\psi) = \int_{\Xi} \gamma(u)(-i\Omega)\,\mathrm{T}_{\Omega}(\varphi)\,d\mu(\Omega).$$

D'autre part, on a

$$a(u)(\psi) = u(\varphi) = \delta(\check{u} \bigstar \varphi) = \int_{\Xi} \mathrm{T}_{\Omega}(\check{u} \bigstar \varphi)\,d\mu(\Omega)$$

[d'après (6)]. Il résulte de (8) que l'on a

$$a(u)(\psi) = \int_{\Xi} \gamma(u)(-i\Omega)\,\mathrm{T}_{\Omega}(\varphi)\,d\mu(\Omega).$$

Donc $a(u) = \gamma(u)$.

LEMME 4. — *Soient* $\mathfrak{b}$ *une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps* k *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathfrak{b}$. *Soit* $u \in Z(\mathfrak{b}) \cap U(\mathfrak{a})$. *On a* $a_{\mathfrak{b}}(u) = a_{\mathfrak{a}}(u)$ *et* $\gamma_{\mathfrak{b}}(u) = \gamma_{\mathfrak{a}}(u)$.

Démonstration. — La première égalité résulte de ce que la restriction de $j_{\mathfrak{b}}$ à $\mathfrak{a}$ est égale à $j_{\mathfrak{a}}$. Pour démontrer la seconde on peut supposer k algébriquement clos. Si $f \in \mathfrak{b}^*$ on note f' sa restriction à $\mathfrak{a}$. L'ensemble des f tels que f et f' soient réguliers est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{b}^*$. Il suffit donc de démontrer que pour un tel f on a $Z(\mathfrak{b}) \cap I_{f'} \subset I_f$. Remarquons qu'il existe une polarisation résoluble $\mathfrak{h}$ en f telle que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$ soit une polarisation résoluble en f'. Notons en effet $\mathfrak{t}$ le centralisateur de f' dans $\mathfrak{b}$ et f'' la restriction de f à $\mathfrak{t}$. L'algèbre $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{a}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{t}$, car il est égal à $\mathfrak{a}(f')$ et f' est régulier. On a $\dim \mathfrak{t}(\lambda) \geqq \dim \mathfrak{t}(f'')$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ qui a même restriction que f à $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{t}$. Il existe donc une polarisation résoluble $\mathfrak{h}''$ pour f'' ([3] 1.12.14). Notons V la variété des polarisations résolubles en f'. Elle est non vide, car f' est régulier, et complète. Le plus petit groupe algébrique d'endomorphisme de $\mathfrak{b}$ dont l'algèbre de Lie contient l'image de $\mathfrak{h}''$ est résoluble. Il admet un point fixe $\mathfrak{h}'$ dans V ([2] p. 252). L'algèbre $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{h}''$ convient. Si $H \in \mathfrak{h}'$, on a $\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}} H = \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{h}'} H$. Soit $u \in I_{f'} \cap Z(\mathfrak{b})$. Par définition de $I_{f'}$, il appartient à l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{a})$ engendré par les $H - f(H) - 1/2 \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{h}} H$ où H parcourt $\mathfrak{h}'$. Il appartient à l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{b})$ engendré par les mêmes éléments. Comme il est invariant par le groupe algébrique adjoint de $\mathfrak{b}$, il appartient à I_f. Ceci termine la démonstration du lemme 4.

LEMME 5. — *On a* $a_{\mathfrak{l}}(u) = \gamma_{\mathfrak{l}}(u)$ *pour tout* $u \in Z(\mathfrak{l})$.

Démonstration. — On note J l'endomorphisme de $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}$ qui définit la multiplication par i dans $\mathfrak{l}$. Pour $X \in \mathfrak{l}$ on pose $\theta(X) = 1/2(X - iJX)$. Alors θ est un isomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur un idéal de $\mathfrak{l}_{\mathbf{RC}}$. On prolonge θ en des isomorphismes de $U(\mathfrak{l})$ et de $S(\mathfrak{l})$ dans $U(\mathfrak{l}_{\mathbf{RC}})$ et $S(\mathfrak{l}_{\mathbf{RC}})$. Compte tenu du lemme 3 il suffit de démontrer que pour tout $u \in Z(\mathfrak{l})$ on a

$$a_{\mathfrak{l}_{\mathbf{RC}}}(\theta(u)) = \theta(a_{\mathfrak{l}}(u)), \qquad \text{et} \qquad \gamma_{\mathfrak{l}_{\mathbf{RC}}}(\theta(u)) = \theta(\gamma_{\mathfrak{l}}(u)).$$

Ceci résulte du lemme 4 appliqué à $\mathfrak{l}_{\mathbf{RC}}$ et $\theta(\mathfrak{l})$.

Fin de la démonstration du théorème 2. — Il résulte du lemme de Borho (*cf.* [4] 4.5) que l'on a $Z(\mathfrak{k}) \subset Z(\mathfrak{l})$. Il résulte des lemmes 5 et 4 que l'on a $a_{\mathfrak{k}} = \gamma_{\mathfrak{k}}$. Comme $\mathfrak{k}$ est une enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$, on a $Z(\mathfrak{g}) \subset Z(\mathfrak{k})$. Il résulte du lemme 4 et de la ligne qui précède que l'on a $a_{\mathfrak{g}} = \gamma_{\mathfrak{g}}$.

Le théorème est donc démontré pour toutes les algèbres de Lie de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Comme toute algèbre de Lie de dimension finie sur k peut être définie sur un sous-corps de k isomorphe à un sous-corps de $\mathbf{C}$, on en déduit facilement le théorème pour toute algèbre de Lie de dimension finie sur k.

3. Démonstration du théorème 3

3.1. Dans ce paragraphe les notations sont celles de 1.2 et 1.4. On note Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ fermée, tempérée, de dimension maximale, et f un point de Ω.

La démonstration du théorème 3 se fait par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le théorème est facile à vérifier si $\mathfrak{g}$ est de dimension 1. On suppose désormais que la dimension de $\mathfrak{g}$ est > 1 et que le théorème est établi pour les algèbres de Lie de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$. Nous aurons, comme dans [9], à considérer plusieurs cas.

Nous emploierons les notations suivantes. Si $\mathfrak{b}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie B, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{b}$ et $m \in \mathfrak{a}^*$, nous noterons B (m) et $\mathfrak{b}$ (m) les stabilisateurs de m dans $\mathfrak{b}$ et B respectivement.

3.2. *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *contient un idéal abélien* $\mathfrak{a}$ *tel que, notant m la restriction de f à* $\mathfrak{a}$, *on ait* $\dim \mathfrak{g}(m)/\operatorname{Ker} m < \dim \mathfrak{g}$.

Pour démontrer le théorème dans ce cas, nous utiliserons les deux lemmes suivants.

LEMME 6. — *Soient* $\mathfrak{b}$ *une algèbre de Lie réelle de dimension finie*, B *le groupe de Lie simplement connexe correspondant*, ω *une orbite tempérée et fermée de* B *dans* $\mathfrak{b}^*$, f *un point de* ω, $\mathfrak{k}$ *un idéal de* $\mathfrak{b}$ *contenant* $\mathfrak{b}(f)$. *On choisit une mesure de Haar sur* $\mathfrak{b}$. *Soit* $\psi \in \mathscr{D}(\mathfrak{b})$ *une fonction dont la restriction à* $\mathfrak{k}$ *est nulle. On a* $\int_\omega \hat{\psi}\, d\beta_\omega = 0$.

Démonstration. — Notons f_1 la restriction de f à $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{b}$. Comme $\mathfrak{k}$ est un idéal contenant $\mathfrak{g}(f)$, B $(f_1)f$ est ouvert dans $f+\mathfrak{k}^\perp$. Comme ω est fermée, on a $B(f_1)f = f+\mathfrak{k}^\perp$.

Posons $\chi(g) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{k}}\, g$ pour tout $g \in B$. Soit $g \in B(f_1)$. Écrivons $\operatorname{Ad} g = sn$ où s et n sont les composantes semi-simples et unipotentes de $\operatorname{Ad} g$. L'endomorphisme s induit dans $f+\mathfrak{k}^\perp$ une transformation affine qui a un point fixe. Comme B (f_1) agit transitivement dans $f+\mathfrak{k}^\perp$, on voit qu'il existe $b \in B(f_1)$ tel que, notant s' et n' les composantes semi-simples et unipotentes de Ad (bgb^{-1}), on ait $s'f = f$. La forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto f([X, Y])$ induit sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{k} \times \mathfrak{b}(f_1)/\mathfrak{b}(f)$ une forme bilinéaire non dégénérée invariante sous l'action de tout automorphisme de $\mathfrak{b}$ laissant $\mathfrak{k}$ invariant et f fixe, en particulier s'. On a donc $\det s'_{\mathfrak{b}/\mathfrak{k}} = (\det s'_{\mathfrak{b}(f_1)/\mathfrak{b}(f)})^{-1}$. Comme $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}(f)$ porte une forme bilinéaire alternée non dégénérée s'-invariante, on a $\det s'_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}(f)} = 1$. On a donc $\det s'_{\mathfrak{b}/\mathfrak{k}} = \det s'_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}(f_1)}$. Il en résulte que l'on a

$$\chi(g) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}/\mathfrak{b}(f_1)}\, g, \qquad \text{si} \quad g \in B(f_1).$$

Soit α une fonction borélienne positive sur $f+\mathfrak{k}^\perp$. La fonction $g \mapsto \alpha(gf)\,\chi(g)^{-1}$ sur B (f_1) se transforme suivant la translation à droite par un élément h de B (f) par la multiplication par $\det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{b}(f_1)/\mathfrak{b}(f)}\, h$. On peut donc poser

$$\mu(\alpha) = \int_{B(f_1)/B(f)} \alpha(gf)\,\chi(g)^{-1}\, dg,$$

où dg est une « mesure » B (f_1)-invariante sur B (f_1)/B (f) ([1] chap. V). Ceci définit une mesure μ sur $f+\mathfrak{k}^\perp$.

La mesure μ sur $f+\mathfrak{k}^{\perp}$, considéré comme espace homogène de $B(f_1)$, est semi-invariante de poids χ. Il en est de même de la mesure de Lebesgue sur $f+\mathfrak{k}^{\perp}$. Il en résulte que pour un choix convenable de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{k}$ on a

$$\mu(\alpha)=\int_{\mathfrak{k}^{\perp}}\alpha(f+\lambda)\,d\lambda.$$

Il existe une mesure B-invariante sur $B/B(f)$ telle que l'on ait

$$\int_{\omega}\theta\,d\beta_{\omega}=\int_{B/B(f)}\theta(gf)\,dg,$$

pour toute fonction intégrable θ sur ω, et une mesure G invariante sur $B/B(f_1)$ telle que l'on ait

$$\int_{B/B(f)}\gamma(g)\,dg=\int_{B/B(f_1)}\left\{\int_{B(f_1)/B(f)}\gamma(gh)\,\chi(h)^{-1}\,dh\right\}dg,$$

pour toute fonction intégrable γ sur $B/B(f)$ ([1] chap. V).

Soit θ une fonction intégrable sur ω. On obtient :

$$\int_{\omega}\theta\,d\beta_{\omega}=\int_{B/B(f_1)}\left\{\int_{\mathfrak{k}^{\perp}}\theta(g(f+\lambda))\,d\lambda\right\}dg,$$

et donc

$$\int_{\omega}\theta\,d\beta_{\omega}=\int_{B/B(f_1)}\left\{\chi(g)\int_{\mathfrak{k}^{\perp}}\theta(gf+\lambda)\,d\lambda\right\}dg.$$

Soit $\psi\in\mathcal{D}(\mathfrak{b})$. On choisit sur $\mathfrak{b}/\mathfrak{k}$ la mesure duale de $d\lambda$, et sur $\mathfrak{k}$ la mesure de Haar compatible avec les mesures choisies sur $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}/\mathfrak{k}$. Appliquons la formule d'inversion de Fourier à $\mathfrak{b}/\mathfrak{k}$. Pour tout $f'\in\mathfrak{b}^*$ on a

$$\int_{\mathfrak{k}^{\perp}}\left\{\int_{\mathfrak{b}}\psi(X)\exp(i(f'+\lambda)(X))\,dX\right\}d\lambda=\int_{\mathfrak{k}}\psi(X)\exp(if'(X))\,dX.$$

On a donc, en notant ψ_1 la restriction de ψ à $\mathfrak{k}$,

$$\int_{\omega}\hat{\psi}\,d\beta_{\omega}=\int_{B/B(f_1)}\chi(g)\,\hat{\psi}_1(gf_1)\,dg.$$

Le lemme en résulte.

LEMME 7. — *Soient* $\mathfrak{b}$ *une algèbre de Lie réelle de dimension finie et* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{b}$. *On note B le groupe simplement connexe d'algèbre* $\mathfrak{b}$, A *le sous-groupe analytique d'algèbre* $\mathfrak{a}$. *On pose* $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *et* $B'=B/A$. *On note* V, V′, W, W′ *les ouverts de* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, B *et* B′ *respectivement définis comme en* 1.2. *On choisit de manière compatible des mesures de Haar sur* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}$ *et* A. *Soit* p' *une fonction* C^{∞} *dans* V′. *Si* $X\in V$, *on pose*

$$p(X)=p'(X')\det(S'(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}X)),$$

où X′ *est l'image de* X *dans* $\mathfrak{b}'$. *Soit* ω *une* B′*-orbite tempérée dans* $\mathfrak{b}'^*$. *On définit une distribution* T *dans* W *et une distribution* T′ *dans* W′ *par les formules :*

$$T(\varphi) = \int_{\omega} (p\ \varphi \circ \exp)^{\wedge}\, d\beta_{\omega} \qquad (\varphi \in \mathcal{D}(W)),$$

$$T'(\psi) = \int_{\omega} (p'\, \psi \circ \exp)^{\wedge}\, d\beta_{\omega} \qquad (\psi \in \mathcal{D}(W')).$$

(*Dans la première formule* ω *est considéré comme sous-ensemble de* $\mathfrak{b}^*$ *contenu dans l'orthogonal de* $\mathfrak{a}$.) *Si* $\varphi \in \mathcal{D}$ (W) *on définit un élément* φ' *de* $\mathcal{D}$ (W′) *par la formule*

$$\varphi'(g) = \int_{A} \varphi(ga)\, da.$$

Alors on a $T(\varphi) = T'(\varphi')$ *pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(W)$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'on a $WA \subset W$ et que l'image de W dans B′ est un ouvert de W′, de sorte que la définition de φ' est sensée. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ (W). Pour tout $f \in \omega$ on a

$$(p\varphi \circ \exp)^{\wedge}(f) = \int_{\mathfrak{b}'} \left\{ p(X) \exp(if(X)) \int_{\mathfrak{a}} \varphi(\exp(X+Y))\, dY \right\} dX.$$

Comme $\mathfrak{a}$ est abélien, on a $\exp(X+Y) = \exp X \exp(S'(\operatorname{ad} X)\, X)$.

En faisant le changement de variable convenable en Y, on obtient :

$$(p\varphi \circ \exp)^{\wedge}(f) = \int_{\mathfrak{b}'} p'(X) \exp(if(X)) \int_{\mathfrak{a}} \varphi(\exp X \exp Y)\, dY\, dX,$$

$$= \int_{\mathfrak{b}'} p'(X) \exp(if(X))\, \varphi'(\exp X)\, dX.$$

Le lemme en résulte aussitôt.

Reprenons les notations du début de 3.2. Nous poserons $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}(m)$. Nous noterons f_1 la restriction de f à $\mathfrak{g}_1$, G_1 la composante neutre de $G(m)$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_1/\ker m$, G′ le groupe de Lie simplement connexe correspondant, $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}^*$. Nous choisissons une mesure de Haar sur $\mathfrak{g}_1$ et une mesure de Haar sur ker m. On en déduit des mesures de Haar sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ et sur $\mathfrak{g}'$. Sur $\mathfrak{g}_1^{\perp}$ nous choisissons la mesure duale de celle sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$. On note A le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{a}$. On note ω l'orbite de f_1 sous l'action de G_1. On identifiera l'orthogonal de ker m dans $\mathfrak{g}_1'^*$ au dual de $\mathfrak{g}'^*$. Alors ω est aussi une G′-orbite dans $\mathfrak{g}'^*$. Nous poserons $G_2 = G(f)\, G_1$. C'est un sous-groupe ouvert de $G(m)$.

On sait que l'on a $Af = f + \mathfrak{g}_1^{\perp}$ et que A agit dans $f + \mathfrak{g}_1^{\perp}$ par translations ([9] lemme 4). L'ensemble $G_1 f = G_2 f$ est la composante connexe de f dans l'image réciproque $G(m) f$ de f_1 dans Ω. Comme Ω est fermée, il en est de même de $G_2 f$. Comme $G_2 f$ est égal à l'image réciproque de ω dans $\mathfrak{g}^*$, on voit que ω est fermée.

Soit α une fonction intégrable sur Ω. On a

$$(1) \qquad \int_{\Omega} \alpha \, d\beta_{\Omega} = \int_{G/G_2} \left\{ \int_{\omega} \left\{ \int_{\mathfrak{g}_1^{\perp}} \alpha(g(\gamma'+\lambda))\, d\lambda \right\} d\beta_{\omega}(\gamma) \right\} dg.$$

Dans cette formule, on a noté, pour tout $\gamma \in \omega$, γ' un représentant de γ dans $\mathfrak{g}^*$. La mesure invariante sur G/G_2 (au sens de [1] chap. V) est choisie de la manière suivante. On munit G_2 de la mesure invariante à gauche correspondant à la mesure choisie sur $\mathfrak{g}_1$. La mesure sur G/G_2 est telle que l'on ait

$$\int_{G} \gamma(g)\, dg = \int_{G/G_2} \left\{ \int_{G_2} \gamma(gh) (\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1} h)^{-1}\, dh \right\} dg;$$

pour toute fonction intégrable γ sur G.

La formule (1) est due à A. Kirillov ([9] lemme 7).

Comme l'orbite Ω est tempérée il résulte de (1) et du théorème de Fubini qu'il existe une norme $\| \, . \, \|$ sur $\mathfrak{g}^*$ et un nombre $M \geqq 0$ tels que l'on ait

$$\int_{\omega} \left\{ \int_{\mathfrak{g}_1^{\perp}} (1+\|\gamma'+\lambda\|)^{-M}\, d\lambda \right\} d\beta_{\omega}(\gamma) < \infty.$$

De la formule $1+\|x+y\| \leqq (1+\|x\|)(1+\|y\|)$ il résulte qu'il existe une norme $\| \, . \, \|$ sur $\mathfrak{g}_1^*$ telle que l'on ait

$$\int_{\omega} (1+\|\gamma\|)^{-M}\, d\beta_{\omega}(\gamma) < \infty.$$

L'orbite ω est donc tempérée.

On a $\dim \omega = \dim \Omega - 2 \dim \mathfrak{g}_1^{\perp}$. Comme $\mathfrak{g}_1$ ne dépend que de $\ker m$, on voit que ω, considéré comme élément de $\mathfrak{g}'^*$, est de dimension maximale. Nous pourrons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à G' et ω.

Nous notons V, V_1, V', W, W_1, W' les ouverts de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}'$, G, G_1, G' respectivement définis comme en 1.2. La distribution T_{Ω} est définie dans W et la distribution T_{ω} est définie dans W'. Nous noterons f' l'élément f_1 considéré comme élément de $\mathfrak{g}'^*$ et (conformément aux notations de 1.3), $I_{-if'}$ l'idéal de $U(\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}})$ correspondant. Nous noterons (par abus de notations) I_{-if_1} l'idéal de $U(\mathfrak{g}_{1\mathbb{C}})$ image réciproque de $I_{-if'}$. Si $X \in \mathfrak{g}$, on pose

$$t(X) = |\det S(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{a}} X)|^{1/2} \qquad \text{et} \qquad q(X) = \det S'(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}} X).$$

On définit une distribution T_1 dans W_1 par la formule :

$$T_1(\varphi_1) = \int_{\omega} (tq\, \varphi \circ \exp)\hat{}\; d\beta_{\omega}, \quad \text{pour tout } \varphi_1 \in \mathscr{D}(W_1).$$

Si $\varphi_1 \in \mathscr{D}(W_1)$ on définit un élément φ'_1 de $\mathscr{D}(W')$ par la formule :

$$\varphi'_1(g) - \int_{\ker m} \varphi_1(g \exp X)\, dX.$$

Il résulte de la définition de T_ω et du lemme 7 que l'on a $T_1(\varphi_1) = T_\omega(\varphi'_1)$ pour tout $\varphi_1 \in \mathscr{D}(W_1)$. Comme on a $u \bigstar T_\omega = 0$ pour tout $u \in I_{-if'}$ par l'hypothèse de récurrence, il en résulte que l'on a

(2) $$u \bigstar T_1 = 0, \quad \text{pour tout } u \in I_{-if_1}.$$

Le sous-espace $\mathfrak{t} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}(f)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_1$. En effet, soient $X \in \mathfrak{t}$, $Y \in \mathfrak{g}_1$ et $Z \in \mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{a}$ est un idéal, on a $[X, Y] \in \mathfrak{a}$. D'autre part, on a

$$f([Z, [X, Y]]) = f([[Z, X], Y]) + f([X, [Z, Y]]).$$

Le deuxième terme de cette somme est nul car $X \in \mathfrak{g}(f)$. Le premier est nul car $[X, Z] \in \mathfrak{a}$ et $Y \in \mathfrak{g}_1$. Donc $[X, Y] \in \mathfrak{g}(f)$.

La forme $(X, Y) \mapsto f([X, Y])$ induit sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{a}/\mathfrak{t}$ une forme bilinéaire non dégénérée. Elle est $\mathfrak{g}_1$-invariante. En effet, si $X \in \mathfrak{g}_1$, $Y \in \mathfrak{g}$ et $Z \in \mathfrak{a}$, on a

$$f([[X, Y], Z]) + f([Y, [X, Z]]) = f([X, [Y, Z]]),$$

et ceci est nul car $[Y, Z] \in \mathfrak{a}$.

Rappelons que l'on a

$$j(X) = (\det S(\operatorname{ad}_\mathfrak{g} X))^{1/2}, \qquad \text{si} \quad X \in V.$$

Posons

$$w(X) = (\det S(\operatorname{ad}_\mathfrak{t} X))^{1/2}, \qquad \text{pour} \quad X \in V \cap \mathfrak{g}_1.$$

Si $g \in G_1$, on pose

$$\chi(g) = \det \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1} g.$$

Soit $X \in \mathfrak{g}_1 \cap V$. Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned}
&(\det S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1} X))^{1/2} (\det S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{t}} X))^{1/2}\\
&\quad = \det S(\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{t}} X) = \det(S'(\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{t}} X) \exp(1/2 \operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{t}} X))\\
&\quad = \det(S'(\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{t}} X) \exp(-1/2 \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1} X))\\
&\quad = \chi(\exp X)^{-1/2} q(X) v(X),
\end{aligned}$$

où l'on a posé $v(X) = \det S'(\operatorname{ad}_\mathfrak{t} X)^{-1}$. On obtient donc :

(3) $$j(X) = \chi(\exp)^{-1/2} t(X) q(X) v(X) w(X), \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}_1 \cap V.$$

Le centralisateur $\mathfrak{g}_1(f_1)$ est égal à $\mathfrak{g}(f) + \mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{g}(f)$ est commutatif (car Ω est de dimension maximale, *cf.* [3] 1.11.7), $\mathfrak{g}_1(f_1)$ centralise $\mathfrak{t}$. Notons $\mathfrak{k}$ le centralisateur de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}_1$. C'est un idéal de $\mathfrak{g}_1$ qui contient $\mathfrak{g}_1(f_1)$. Remarquons de plus que $v(X) = w(X) = 1$ si $X \in \mathfrak{k} \cap V$ et que, posant $G'_1 = \exp(\mathfrak{g}_1 \cap V)$, G'_1 est un ouvert de W_1. Il résulte du lemme 6 et de (3) que l'on a

(4) $$T_1(\chi^{-1/2} \varphi_1) = \int_\omega (j \varphi_1 \circ \exp)\hat{}\, d\beta_\omega, \quad \text{pour tout } \varphi_1 \in \mathscr{D}(G'_1).$$

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{W})$. Nous allons calculer $\mathrm{T}_\Omega(\varphi)$ en utilisant la formule (1). Posons $\psi = j\varphi \circ \exp$. Si $\gamma \in \omega$, $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\int_{\mathfrak{g}_1^\perp} \hat{\psi}(g(\gamma'+\lambda))\,d\lambda = \int_{\mathfrak{g}_1^\perp} \left\{ \int_{\mathfrak{g}} \psi(\mathrm{X}) \exp(ig(\gamma'+\lambda)(\mathrm{X}))\,d\mathrm{X} \right\} d\lambda.$$

En remplaçant $g(\gamma'+\lambda)(\mathrm{X})$ par $(\gamma'+\lambda)(\mathrm{Ad}\,g^{-1}\mathrm{X})$ puis X par $\mathrm{A}d\,g\,\mathrm{X}$, on trouve que cette intégrale est égale à

$$\int_{\mathfrak{g}_1^\perp} \int_{\mathfrak{g}} \det(\mathrm{Ad}\,g)\,\psi(\mathrm{Ad}\,g\,\mathrm{X}) \exp(i(\gamma'+\lambda)(\mathrm{X}))\,d\mathrm{X}\,d\lambda.$$

La formule d'inversion de Fourier sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ montre que ceci est égal à

$$\det(\mathrm{Ad}\,g) \int_{\mathfrak{g}_1} \psi(\mathrm{Ad}\,g\,\mathrm{X}) \exp(i\gamma(\mathrm{X}))\,d\mathrm{X}.$$

On notera ${}^g\varphi$ la fonction $h \mapsto \varphi(ghg^{-1})$ et $({}^g\varphi)_1$ la restriction de ${}^g\varphi$ à G_1' (qui est une sous-variété fermée de W). Il résulte de ce qui précède et des formules (1) et (4) que l'on a

$$\mathrm{T}_\Omega(\varphi) = \int_{\mathrm{G}/\mathrm{G}_2} \det(\mathrm{Ad}\,g),\ \mathrm{T}_1(\chi^{-1/2}({}^g\varphi)_1)\,dg. \tag{5}$$

L'idéal I_{-if} est le plus grand idéal de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathrm{C})$ contenu dans l'idéal à gauche engendré par $\tilde{\mathrm{I}}_{-if_1}$. On a noté $u \mapsto \tilde{u}$ l'automorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{1\mathrm{C}})$ tel que $\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X} - 1/2\,\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1}\mathrm{X}$ si $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}_1$. Pour le prouver, on choisit une polarisation résoluble $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}_\mathrm{C}'$ pour f'. L'image réciproque $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{g}_{1\mathrm{C}}$ est une polarisation résoluble pour f. L'idéal $\mathrm{I}_{-if'}$ est le noyau de la représentation de $\mathfrak{g}_\mathrm{C}'$ induite tordue par la restriction de f' à $\mathfrak{h}'$, par définition de $\mathrm{I}_{-if'}$. L'idéal I_{-if_1} est le noyau de la représentation de $\mathfrak{g}_{1\mathrm{C}}$ induite tordue par la restriction de f à $\mathfrak{h}$. D'après le théorème d'induction par étage les représentations de $\mathfrak{g}_\mathrm{C}$ induites tordues par cette représentation et par la restriction de f à $\mathfrak{h}$ sont équivalentes et ont donc même noyau dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathrm{C})$. Ceci prouve notre assertion. (Pour les représentations induites tordues, *cf.* [3] chap. 5 § 2.)

Soient $u \in \mathrm{I}_{-if}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\mathrm{W})$. Nous voulons démontrer que l'on a $\mathrm{T}_\Omega(\check{u} \bigstar \varphi) = 0$. Compte tenu de (5), il suffit de démontrer que pour tout $g \in \mathrm{G}$ on a

$$\mathrm{T}_1(\chi^{-1/2}({}^g(\check{u} \bigstar \varphi))_1) = 0.$$

Soit donc $g \in \mathrm{G}$. On peut écrire $\mathrm{Ad}\,g^{-1}u$ comme somme d'éléments de la forme $w \bigstar \tilde{v}$ avec $w \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}_\mathrm{C})$ et $v \in \mathrm{I}_{-if_1}$. Posant $\psi_1 = ({}^g(\mathrm{Ad}\,g\check{w} \bigstar \varphi))_1$, on est ramené à prouver que l'on a $\mathrm{T}_1(\chi^{-1/2}(\check{\tilde{v}} \bigstar \psi_1)) = 0$. Comme on a

$$\mathrm{T}_1(\chi^{-1/2}(\check{\tilde{v}} \bigstar \psi_1)) = \mathrm{T}_1(\check{v} \bigstar (\chi^{-1/2}\psi_1)) = v \bigstar \mathrm{T}_1(\chi^{-1/2}\psi_1),$$

cela résulte de la formule (2).

Ceci termine la démonstration du théorème 3 dans ce cas.

3.3. *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *contient un idéal* $\mathfrak{n}$ *qui est une algèbre d'Heisenberg de dimension* $2p+1$ (*avec* $p > 0$). *On suppose de plus que le centre* $\mathfrak{z}$ *de* $\mathfrak{n}$ *est égal au centre de* $\mathfrak{g}$ *et que la restriction* m *de* f *à* $\mathfrak{z}$ *est non nulle.*

Nous noterons f_1 la restriction de f à $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} = \ker f_1$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}(f_1)$, f' la restriction de f à $\mathfrak{s}$, N le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{n}$, Z celui d'algèbre $\mathfrak{z}$, $S = G(f_1)$.

Si $X, Y \in \mathfrak{m}$, on pose $b(X, Y) = f([X, Y])$. La forme b est bilinéaire alternée non dégénérée. On choisit sur $\mathfrak{m}$ la mesure définie par la forme différentielle $(2\pi)^{-p} b \wedge \ldots \wedge b$ (p facteurs). On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{m}$ ([10] lemme 2). On choisit sur $\mathfrak{s}$ la mesure de Haar compatible avec celles déjà choisies sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{m}$. On choisit une mesure de Haar sur $\mathfrak{z}$, et comme $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{z}$, on munit $\mathfrak{n}$ de la mesure de Haar produit de celles de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{z}$. On munit les groupes S, N et Z des mesures de Haar à gauche correspondantes.

Le groupe S est simplement connexe ([10], corollaire du lemme 2). Nous noterons ω l'orbite de f' dans $\mathfrak{s}^*$ sous l'action de S. On peut identifier $\mathfrak{s}^*$ et l'orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{g}$. Dans ce cas ω s'identifie à l'orbite de f dans $\mathfrak{g}^*$ sous l'action de S et l'on a $\omega = \Omega \cap \mathfrak{s}^*$. En particulier, ω est fermée. D'autre part on a $\dim \Omega = \dim \omega + 2p$. Il en résulte que ω est une S orbite de dimension maximale dans $\mathfrak{s}^*$. L'application $(X, \gamma) \mapsto \exp(X)\gamma$ de $\mathfrak{m} \times \omega$ dans Ω est un difféomorphisme, et l'on a

$$\int_{\Omega} \alpha \, d\beta_{\Omega} = \int_{\omega} \int_{\mathfrak{m}} \alpha(\exp(X)\gamma) \, dX \, d\beta_{\omega}(\gamma), \tag{6}$$

pour toute fonction intégrable α sur Ω ([10] lemme 8). Appliquons cette formule à la fonction $(1+\| \cdot \|)^{-M}$ où $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathfrak{g}^*$ et M un réel assez grand. Il résulte du théorème de Fubini que l'orbite ω est tempérée. Nous noterons V' l'ouvert de $\mathfrak{s}$ et W' l'ouvert de S définis comme en 1.2. La distribution T_ω est définie dans W'. L'hypothèse de récurrence s'applique et l'on a

$$u \star T_{\omega} = 0 \quad \text{pour tout } u \in I_{-if'}. \tag{7}$$

On note $Sp(b)$ le groupe des automorphismes de b et $\widetilde{Sp}(b)$ son revêtement simplement connexe. Il agit naturellement dans $\mathfrak{n}$ (resp. N) par des automorphismes. On choisit une représentation irréductible unitaire W' de N dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ dont la restriction à Z est un multiple du caractère de différentielle im (la classe de W' est uniquement déterminée). Il existe une unique représentation unitaire de $\widetilde{Sp}(b)$ dans $\mathscr{H}$ que nous noterons W telle que $W(s) W'(n) W(s^{-1}) = W'(s(n))$ pour tout $s \in \widetilde{Sp}(b)$ et tout $n \in N$ (W est la « représentation de Shale-Weil »). Il y a un homomorphisme naturel de S dans $\widetilde{Sp}(b)$. Composant W avec cet homomorphisme, on obtient une représentation (que nous noterons encore W) de S dans $\mathscr{H}$.

Soit $\mathfrak{sp}(b)$ l'algèbre de Lie de $Sp(b)$. Il existe un unique homomorphisme θ de $\mathfrak{sp}(b)$ dans $U(\mathfrak{n})$ tel que l'on ait $[\theta(Y), X] = Y(X)$ pour tout $X \in \mathfrak{n}$ et tout $Y \in \mathfrak{sp}(b)$. En composant avec l'homomorphisme naturel de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{sp}(b)$ on obtient un homomorphisme, encore noté θ, de $\mathfrak{s}$ dans $U(\mathfrak{n})$. On note $\mathscr{H}^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ pour W' et W' la représentation de $U(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathscr{H}^\infty$ obtenue par différentiation. Si $Y \in \mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{sp}(b)$) le domaine de $W(Y)$ contient $\mathscr{H}^\infty$ et la restriction de $W(Y)$ à $\mathscr{H}^\infty$ est égale à $W'(\theta(Y))$ ([10] lemme 6). Rappelons que l'ordre de $\theta(Y)$ est $\leqq 2$ pour tout $Y \in \mathfrak{s}$.

Si $Y \in \mathfrak{s}$, on pose $\xi(Y) = Y - \theta(Y)$. L'application ξ est un homomorphisme de $\mathfrak{s}$ dans $U(\mathfrak{g})$. On prolonge ξ en un homomorphisme, encore noté ξ, de $U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$.

Soient $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ et $s \in S$. On pose

$$F(\varphi)(s) = \operatorname{tr}\left(\int_N \varphi(sn)\, W(s)\, W'(n)\, dn\right).$$

LEMME 8. — *La fonction* $F(\varphi)$ *est partout définie sur* S. *Elle est* C^∞ *et à support compact modulo* Z. *On a* $F(\varphi)(s \exp X) = \exp(-\operatorname{im}(X))\, F(\varphi)(s)$ *pour tout* $s \in S$ *et tout* $X \in \mathfrak{z}$. *On a* $u \bigstar F(\varphi) = F(\xi(u) \bigstar \varphi)$ *pour tout* $u \in U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$.

Démonstration. — Si α est une fonction intégrable sur N on pose

$$W'(\alpha) = \int_N \alpha(n)\, W'(n)\, dn.$$

On définit de manière analogue $W(\beta)$ pour toute fonction β intégrable sur S. Pour tout entier $q \geqq 0$ on note $C_c^q(N)$ l'espace des fonctions à support compact de classe C^q sur N. Il existe un entier $q_0 \geqq 0$ tel que l'application $\alpha \mapsto W'(\alpha)$ soit continue de $C_c^{q_0}(N)$ dans l'espace des opérateurs à trace sur $\mathscr{H}$. Il en résulte en particulier que $F(\varphi)$ est partout définie sur S et est continue. Il est évident que $F(\varphi)$ est à support compact modulo Z et que l'on a $F(\varphi)(s \exp X) = \exp(-\operatorname{im}(X))\, F(\varphi)(s)$ pour tout $s \in S$ et tout $X \in \mathfrak{z}$.

Soit $Y \in \mathfrak{s}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on pose $s_t = \exp(tY)$. Nous allons démontrer que la fonction $t \mapsto F(\varphi)(s_t s)$ est dérivable et que sa dérivée pour $t = 0$ est égale à $F(\xi(-Y) \bigstar \varphi)(s)$. Cette formule permet de démontrer par récurrence sur q que $F(\varphi)$ est de classe C^q pour tout q, et donc de classe C^∞. De même, la formule

$$u \bigstar F(\varphi) = F(\xi(u) \bigstar \varphi)$$

s'en déduit par récurrence sur l'ordre de $u \in U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$.

Soit q un entier. On peut écrire φ comme somme de deux fonctions de la forme $\alpha \bigstar \psi$, avec $\alpha \in C_c^q(N)$ et $\psi \in \mathscr{D}(G)$ (ceci se démontre comme en [1] p. 252). On a identifié α à une distribution sur G de support N. Il suffit donc de prouver notre assertion pour des fonctions de la forme $\varphi = \alpha \bigstar \psi$, où q est un entier arbitrairement grand. En particulier, on peut supposer $q \geqq q_0$.

En faisant le changement de variable $n \mapsto (s_t s)^{-1} n s_t s$, on obtient :

$$\begin{aligned} F(\varphi)(s_t s) &= \operatorname{tr}\left(\int_N \varphi(n s_t s)\, W'(n)\, W(s_t)\, W(s)\, dn\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\int_N \psi(n s_t s)\, W'(\alpha)\, W'(n)\, W(s_t)\, W(s)\, dn\right), \\ &= \int_N \psi(s_t n s)\, \operatorname{tr}(W'(\alpha)\, W(s_t)\, W'(n)\, W(s))\, dn. \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait démontré l'assertion suivante : il existe un entier $q_1 \geqq q_0+2$ tel que pour tout $\alpha \in C_c^{q_1}(N)$ et tout opérateur borné A sur la fonction

$$t \mapsto \operatorname{tr}(W'(\alpha)\, W(s_t)\, A),$$

soit dérivable et de dérivée égale à $\operatorname{tr}(W'(\alpha \bigstar \theta(Y))\, W(s_t)\, A)$.

Soit $q \geqq q_1$. On peut alors calculer la dérivée de $F(\varphi)(s_t s)$ en dérivant sous le signe somme. La valeur en 0 de cette dérivée est égale à

$$\int_N \{ -Y \bigstar \psi(ns) \operatorname{tr}(W'(\alpha)\, W'(n)\, W(s)) + \psi(ns) \operatorname{tr}(W'(\alpha \bigstar \theta(Y))\, W'(n)\, W(s)) \}\, dn,$$

ce qui est encore égal à $F(\alpha \bigstar \xi(-Y) \bigstar \psi)(s)$. Comme $\xi(-Y)$ commute avec $\mathfrak{n}$, on a $\alpha \bigstar \xi(-Y) = \xi(-Y) \bigstar \alpha$, et l'on trouve que la dérivée en 0 de $F(\varphi)(s_t s)$ est égale à $F(\xi(-Y) \bigstar \varphi)$, ce qu'il fallait démontrer.

Il reste à étudier la fonction $t \mapsto \operatorname{tr}(W'(\alpha)\, W(s_t)\, A)$. Si q_1 est assez grand, on peut écrire $\alpha \in C_c^{q_1}(N)$ comme somme de deux fonctions de la forme $\alpha' \bigstar \alpha''$ avec $\alpha', \alpha'' \in C_c^{q_0+2}(N)$ (*cf.* [1], p. 252). Pour prouver notre assertion, il suffit de démontrer que l'opérateur $t^{-1} W'(\alpha'')(W(s_t) - \mathrm{Id})$ tend fortement vers $W'(\alpha'' \bigstar \theta(Y))$ en restant borné lorsque t tend vers 0. Soient $h \in \mathscr{H}^\infty$ et $u \in \mathbf{R}$. On a

$$\frac{d}{du} W(s_u)\, h = W(Y)\, W(s_u)\, h = W'(\theta(Y))\, W(s_u)\, h,$$

et donc

$$\frac{d}{du} W'(\alpha'')\, W(s_u)\, h = W'(\alpha'' \bigstar \theta(Y))\, W(s_u)\, h.$$

On en déduit :

$$t^{-1} W'(\alpha'')(W(s_t) - \mathrm{Id})\, h = t^{-1} \int_0^t W'(\alpha'' \bigstar \theta(Y))\, W(s_u)\, h\, du.$$

Par continuité cette égalité reste vraie pour tout $h \in \mathscr{H}$, et notre assertion est établie. Le lemme 8 est donc démontré.

Nous noterons $\mathscr{D}(S, m)$ l'espace des fonctions ψ C^∞ sur S qui sont à support compact modulo Z et qui vérifient $\psi(s \exp X) = \exp(-im(X))\, \psi(s)$ pour tout $s \in S$ et tout $X \in \mathfrak{z}$. Nous noterons $\mathscr{D}(W', m)$ l'espace de celles qui sont à support dans W'. Si $\psi \in \mathscr{D}(W', m)$ nous poserons $T_\omega(\psi) = T_\omega(\psi')$ où ψ' est un élément de $\mathscr{D}(W')$ tel que

$$\psi(s) = \int_{\mathfrak{z}} \psi'(s \exp X) \exp(im(X))\, dX.$$

($T_\omega(\psi')$ ne dépend pas du choix de ψ').

LEMME 9. — *Soit* $\varphi \in \mathscr{D}(W)$. *On a* $F(\varphi) \in \mathscr{D}(W', m)$ *et* $T_\Omega(\varphi) = T_\omega(F(\varphi))$.

Démonstration. — L'ensemble $V' + \mathfrak{n}$ est l'ouvert de V formé des éléments $X \in V' + \mathfrak{n}$ tels que l'on ait $|\operatorname{Im} \lambda| < \pi$ pour toute valeur propre λ de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{n}} X$. Le support de $F(\varphi)$ est donc contenu dans W', et il résulte du lemme 8 que l'on a $F(\varphi) \in \mathscr{D}(W', m)$.

L'égalité $T_\Omega(\varphi) = T_\omega(F(\varphi))$ est démontrée dans [10]. Je répète une partie de la démonstration de [10] pour rendre claire cette assertion.

Soient $\gamma \in \omega$, A, $B \in \mathfrak{m}$, $Y \in \mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{sp}(b)$). Nous écrirons indifféremment Y ou $\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}} Y$ si $Y \in \mathfrak{s}$. On a $(\exp A.\gamma)(Y+B) = (\gamma + A.\gamma + 1/2\, A^2.\gamma + \ldots)(Y+B)$. On trouve ([10] lemme 9) :

$$(\exp A.\gamma)(Y+B) = \gamma(Y) + b(B, A) + \frac{1}{2} b(Y.A, A). \tag{8}$$

On pose $\varphi_0(g) = \int_{\mathfrak{z}} \varphi(g \exp X) \exp(im(X))\, dX$. Il résulte des formules (6) et (8) que l'on a

$$T_\Omega(\varphi) = \int_\omega \left\{ \int_{\mathfrak{m}} \left\{ \int_{\mathfrak{s}/\mathfrak{z}} \left\{ \int_{\mathfrak{m}} j(Y) \exp\left(i\gamma(Y) + ib(B, A) + i\frac{1}{2} b(Y.A, A) \right) \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. \times \varphi_0(\exp(Y+B))\, dB \right\} dY \right\} dA \right\} d\beta_\omega(\gamma).$$

Comme b est bilinéaire non dégénérée, l'intégrale par rapport à B est une transformée de Fourier, et le résultat, comme fonction de $(Y, A) \in \mathfrak{s}/\mathfrak{z} \times \mathfrak{a}$, est à décroissance rapide. On peut donc intervertir les deux intégrales du milieu. Posons $p(Y) = (\det(S(Y))^{1/2}$, de sorte que l'on a $j(Y) = (\det S(\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}} Y))^{1/2} p(Y)$. Nous définissons un élément $F'(\varphi)$ de $\mathscr{D}(W', m)$ par la formule :

$$F'(\varphi)(\exp Y) = p(Y) \int_{\mathfrak{m}} \left\{ \exp i\frac{1}{2} b(Y.A, A) \int_{\mathfrak{m}} \exp ib(B, A)\, \varphi_0(\exp(Y+B))\, dB \right\} dA.$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a $T_\Omega(\varphi) = T_\omega(F'(\varphi))$. Pour prouver le lemme, il suffit de démontrer que l'on a $F(\varphi) = F'(\varphi)$.

On a $\exp(Y+B) = \exp Y \exp S'(Y) B \exp X(Y, B)$ où $X(Y, B)$ est un élément explicitement calculable de $\mathfrak{z}$ ([10] lemme 10). On a donc :

$$\varphi_0(\exp(Y+B)) = \exp(-im(X(Y, B)) \qquad \varphi_0(\exp Y \exp S'(Y).B).$$

Soit $\psi \in \mathscr{D}(\mathfrak{m})$. Pour tout $Y \in \mathfrak{sp}(b)$ tel que $p(Y) \neq 0$, on pose

$$\Phi_Y(\psi) = \mathrm{tr}\left(\int_{\mathfrak{m}} \psi(\exp A)\, W(\exp Y)\, W'(\exp A)\, dA \right),$$

$$\Phi'_Y(\psi) = p(Y) \int_{\mathfrak{m}} \left\{ \exp i\frac{1}{2} b(Y.A, A) \int_{\mathfrak{m}} \exp(ib(B, A) - \mathrm{im}(X(Y, B))\, \psi(S'(Y).B)\, dB \right\} dA.$$

Il est démontré dans ([10] formule (28)) que l'on a $\Phi_Y(\psi) = \Phi'_Y(\psi)$.

Appliquant cette égalité à la fonction $\psi(A) = \varphi_0(\exp Y \exp A)$, on obtient $F(\varphi) = F'(\varphi)$, ce qui prouve le lemme.

LEMME 10. — *L'idéal* I_{-if} *est égal à l'idéal à gauche de* $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ *engendré par les éléments de la forme* $\xi(u)$ *où* u *parcourt l'idéal* $I_{-if'}$ *de* $U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$ *et ceux de la forme* $X+im(X)$ *où* X *parcourt* $\mathfrak{z}$.

Démonstration. — Notons $\tilde{\mathfrak{g}}$ le produit semi-direct de $\mathfrak{s}$ et de $\mathfrak{n}$, et π l'application canonique de $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}$. L'image réciproque de f dans $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ est un élément $\tilde{f}$ régulier, et I_{-if} est l'image de $I_{-i\tilde{f}}$. Si $Y \in \mathfrak{s}$, on note $\tilde{\xi}(Y)$ l'élément $Y-\theta(Y)$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$. On prolonge $\tilde{\xi}$ en un homomorphisme de $U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$ dans $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbf{C}})$. L'image de $\tilde{\xi}(u)$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ est égale à $\xi(u)$. Il suffit donc de prouver que $I_{-i\tilde{f}}$ est engendré, comme idéal à gauche, par $\tilde{\xi}(I_{-if'})$ et par les éléments de la forme $X+im(X)$ (où X parcourt $\mathfrak{z}$ considéré comme contenu dans $\mathfrak{n}$). Posons

$$A = U(\mathfrak{n}_{\mathbf{C}})/I_{-if_1} \qquad \text{et} \qquad B = U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbf{C}})/U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbf{C}})\, I_{-if_1},$$

(Rappelons que I_{-if_1} (resp $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbf{C}})\, I_{-if_1}$) est égal à l'idéal à gauche de $U(\mathfrak{n}_{\mathbf{C}})$ (resp. $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbf{C}})$) engendré par les éléments de la forme $X+im(X)$ où X parcourt $\mathfrak{z}$). Si $u \in U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$ on note $\xi'(u)$ l'image de $\tilde{\xi}(u)$ dans B. Il est défini dans [3] 10.1.5 un isomorphisme r de B sur $U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}}) \otimes A$, et l'on a $\xi(u) = r^{-1}(u \otimes 1)$ pour tout $u \in U(\mathfrak{s}_{\mathbf{C}})$. Notre assertion résulte alors de [3] 10.1.8 (i) et 10.2.1 (iii).

Nous voulons démontrer que l'on a $u \bigstar T_\Omega = 0$ si $u \in I_{-if}$. D'après le lemme 10 il suffit de le faire soit lorsque $u = X+im(X)$ avec $X \in \mathfrak{z}$, auquel cas c'est trivial, soit lorsque $u = \xi(v)$ avec $v \in I_{-if'}$. Soit donc $v \in I_{-if'}$ et $\varphi \in \mathscr{D}(W)$. On a

$$\xi(v) \bigstar T_\Omega(\varphi) = T_\Omega(\xi(v) \bigstar \varphi) = T_\Omega(\xi(\check{v}) \bigstar \varphi).$$

D'après le lemme 9, ceci est égal à $T_\omega(F(\xi(\check{v}) \bigstar \varphi))$. D'après le lemme 8, ceci est égal à

$$T_\omega(\check{v} \bigstar F(\varphi)) = v \bigstar T_\omega(F(\varphi)).$$

Ceci est nul d'après (7).

Le théorème est donc démontré dans ce cas.

3.4. *On suppose que le centre de* $\mathfrak{g}$ *est non nul et facteur direct dans* $\mathfrak{g}$.

Il existe donc par hypothèse un idéal $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$. On note f' la restriction de f à $\mathfrak{g}'$, G' le groupe simplement connexe d'algèbre $\mathfrak{g}'$, ω l'orbite de f' dans $\mathfrak{g}'^*$ sous l'action de G'. Il est facile de voir que l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G' et ω, et d'en déduire le théorème dans ce cas.

3.5. *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

Il résulte d'un théorème d'Harish-Chandra (*cf.* [12] 8.2.4.3) que pour toute distribution invariante $T \in \mathscr{D}(W)$ et tout $u \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ on a $a(u \bigstar T) = a(u) \bigstar a(T)$. En particulier, on a $a(u \bigstar T_\Omega) = a(u)(-if)\, a(T_\Omega)$. Il en résulte que l'on a $u \bigstar T_\Omega = 0$ pour tout $u \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}) \cap I_{-if}$.

Pour achever la démonstration dans ce cas, il suffit de remarquer que I_{-if} est engendré, comme idéal à gauche, par son intersection avec $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. En effet, soit $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ une polarisation résoluble. C'est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. La représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ induite tordue par la restriction de f à $\mathfrak{h}$ est un module de Verma, et I_{-if} est son annulateur. Notre assertion est démontrée dans [6], théorème III.2.

3.6. Le théorème 3 est démontré, car si $\mathfrak{g}$ est de dimension > 1 et $f \in \mathfrak{g}^*$ on est dans l'un au moins des cas étudiés en 3.2, 3.3, 3.4 ou 3.5.

4. Démonstration de la proposition 1

Dans ce paragraphe, nous montrons comment le théorème 3 entraîne la proposition 1. Les notations sont celles de 1.2 et 1.4. On note $\mathfrak{k}$ une enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ l'idéal de $\mathfrak{k}$ intersection des noyaux des poids des semi-invariants de $U(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}})$, K et L les groupes de Lie simplement connexes correspondants. On considère G et L comme des sous-groupes fermés de K. On notera $V_{\mathfrak{g}}$ et $W_{\mathfrak{g}}$ les ouverts notés V et W en 1.2. De manière analogue on définit $V_{\mathfrak{l}}$, $W_{\mathfrak{l}}$, $V_{\mathfrak{k}}$ et $W_{\mathfrak{k}}$. Soit $u \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. Nous noterons $a_{\mathfrak{g}}(u)$ l'élément de $I(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ noté $a(u)$ en 1.4, et $s \mapsto v_{\mathfrak{g}}^s$ la fonction méromorphe à valeurs dans $\mathscr{D}'(W_{\mathfrak{g}})$ notée $s \mapsto v^s$ en 1.4. On définit de même $a_{\mathfrak{l}}(u)$ et $s \mapsto v_{\mathfrak{l}}^s$ si $u \in Z(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}})$ et $a_{\mathfrak{k}}(u)$ et $s \mapsto v_{\mathfrak{k}}^s$ si $u \in Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}})$.

LEMME 11. — *Soit* $u \in Z(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}})$, $u \neq 0$. *On a* $v_{\mathfrak{l}}^{s+1} = v \bigstar v_{\mathfrak{l}}^s$.

Démonstration. — Le groupe L est localement isomorphe au groupe $\tilde{L}$ des points réels d'un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbf{R}$. Nous noterons $\tilde{L}_{\mathbf{C}}$ le groupe de ses points complexes; il opère dans $\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}$. Il résulte du lemme 2 qu'il existe un ouvert de Zariski de $\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}^*$ qui est réunion de $\tilde{L}_{\mathbf{C}}$-orbites fermées de dimension maximale. Soit Ω une telle orbite qui rencontre $\mathfrak{l}^*$. Alors $\Omega \cap \mathfrak{l}^*$ est réunion d'un nombre fini d'orbites de $\tilde{L}$ dans $\mathfrak{l}^*$. Chacune d'elle est fermée et de dimension maximale. Chaque $\tilde{L}$-orbite dans $\mathfrak{l}^*$ est réunion d'un nombre fini de L-orbites. On a donc montré qu'il existe un ouvert de Zariski non vide dans $\mathfrak{l}^*$ qui est réunion de L-orbites fermées de dimension maximale. Il en résulte comme en [7] 5.1.7 qu'il existe un sous-ensemble borélien U de $\mathfrak{l}^*$ de complémentaire négligeable pour la mesure de Lebesgue qui est réunion d'orbites fermées, tempérées, de dimension maximale et une mesure μ sur l'espace $\omega = L \backslash \mathfrak{l}^*$ telle que l'on ait

$$\int_{\mathfrak{l}^*} \alpha(f)\,df = \int_{\omega} \left\{ \int_{\Omega} \alpha(f)\,d\beta_{\Omega}(f) \right\} d\mu(\Omega),$$

pour toute fonction intégrable α sur $\mathfrak{l}^*$. (On a choisi une mesure de Haar sur $\mathfrak{l}$ et la mesure duale sur $\mathfrak{l}^*$.) Soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 0$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(W_{\mathfrak{l}})$. Posons $\psi = j_{\mathfrak{l}}\,\varphi \circ \exp$. On a

$$v^s(\varphi) = a_{\mathfrak{l}}(v)^s(\psi) = \int_{\mathfrak{l}^*} a_{\mathfrak{l}}(v)(-if)^s\,\hat{\psi}(f)\,df.$$

Donc

$$v^s(\varphi) = \int_{\omega} a_{\mathfrak{l}}(v)(-i\Omega)^s\,T_{\Omega}(\varphi)\,d\mu(\Omega).$$

Calculons $v \bigstar v^s(\varphi)$. Ceci est égal à $v^s(\check{v} \bigstar \varphi)$ et donc, d'après ce qui précède appliqué à $\check{v} \bigstar \varphi$, à :

$$\int_{\omega} a_{\mathfrak{l}}(v)(-i\Omega)^s v \bigstar T_{\Omega}(\varphi)\, d\mu(\Omega).$$

Il résulte des théorèmes 2 et 3, appliqués à L, que l'on a

$$v \bigstar T_{\Omega} = a_{\mathfrak{l}}(v)(-i\Omega)\, T_{\Omega}.$$

On obtient donc $v^{s+1} = v \bigstar v^s$ pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. Le lemme s'en déduit par prolongement méromorphe.

LEMME 12. — *Soit* $u \in Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}})$. *On a* $v_{\mathfrak{k}}^{s+1} = v \bigstar v_{\mathfrak{k}}^s$.

Démonstration. — Remarquons que l'on a $V_{\mathfrak{l}} = V_{\mathfrak{k}} \cap \mathfrak{l}$. On peut donc considérer $W_{\mathfrak{l}}$ comme une sous-variété fermée de $W_{\mathfrak{k}}$. Si $T \in \mathscr{D}'(W_{\mathfrak{l}})$, on note $\theta(T)$ son image dans $\mathscr{D}'(W_{\mathfrak{k}})$. On a $u \in Z(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}})$ ([4] 4.5, lemme de Borho). Soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > 0$. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(W_{\mathfrak{k}})$. On a

$$v_{\mathfrak{k}}^s(\varphi) = \int_{\mathfrak{k}^*} a_{\mathfrak{k}}(v)(-if)^s (j_{\mathfrak{k}}\varphi \circ \exp)^{\wedge}(f)\, df.$$

On a $a_{\mathfrak{k}}(v) = a_{\mathfrak{l}}(v)$ (*cf.* la démonstration du lemme 4) de sorte que si f' est la restriction de $f \in \mathfrak{k}$ à $\mathfrak{l}$, on a $a_{\mathfrak{k}}(v)(-if) = a_{\mathfrak{l}}(v)(-if')$. Dans la formule qui définit $v_{\mathfrak{k}}^s$ intégrons d'abord sur l'orthogonal $\mathfrak{l}^{\perp}$ de $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{k}$. La formule d'inversion de Fourier pour $\mathfrak{k}/\mathfrak{l}$ montre que l'on a

$$v_{\mathfrak{k}}^s(\varphi) = \int_{\mathfrak{l}^*} a_{\mathfrak{l}}(v)(-if)^s \hat{\psi}(f)\, df,$$

où ψ est la restriction de $j_{\mathfrak{k}}\varphi \circ \exp$ à $V_{\mathfrak{l}}$. Comme la restriction de $j_{\mathfrak{k}}$ à $\mathfrak{l}$ est $j_{\mathfrak{l}}$, on obtient, en notant φ' la restriction de φ à $W_{\mathfrak{l}}$,

$$v_{\mathfrak{k}}^s(\varphi) = \int_{\mathfrak{l}^*} a_{\mathfrak{l}}(v)(-if)^s (j_{\mathfrak{l}}\varphi' \circ \exp)^{\wedge}(f)\, df = v_{\mathfrak{l}}^s(\varphi'),$$

et donc $v_{\mathfrak{k}}^s = \theta(v_{\mathfrak{l}}^s)$. Cette formule se prolonge analytiquement pour tout s. Le lemme 12 résulte donc du lemme 11.

Fin de la démonstration de la proposition 1

On a $V_{\mathfrak{g}} = V_{\mathfrak{k}} \cap \mathfrak{g}$ de sorte que $W_{\mathfrak{g}}$ est une sous-variété fermée de $W_{\mathfrak{k}}$. Si $T \in \mathscr{D}'(W_{\mathfrak{g}})$ on note $\theta(T)$ son image dans $\mathscr{D}'(W_{\mathfrak{k}})$. Soit $u \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$. On a alors $u \in Z(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}})$. Comme dans la démonstration du lemme 12 on montre que l'on a $\theta(v_{\mathfrak{g}}^s) = v_{\mathfrak{k}}^s$. La proposition 1 résulte alors du lemme 12.

Remarque. — Pour certains groupes G il suffit pour établir le lemme 11 (et donc la proposition 1 et le théorème 1) du cas particulier du théorème 3 contenu dans le lemme 1. On n'a pas besoin alors du paragraphe 3 de cet article. C'est le cas par exemple si G est un groupe de Lie complexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BERNAT, N. CONZE et coll., *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, Paris, 1972.

[2] A. BOREL, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York, 1969.

[3] J. DIXMIER, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[4] J. DIXMIER, M. DUFLO et M. VERGNE, *Sur la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie* (Compositio Mathematica, vol. 29, 1974, p. 309-323).

[5] M. DUFLO, *Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 3, 1970, p. 23-74).

[6] M. DUFLO, *Construction of Primitive Ideals in an Enveloping Algebra* (In *Lie Groups and their Representations*, Adam Hilger Ltd., London, 1975).

[7] M. DUFLO et M. RAÏS, *Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 9, 1976, p. 107-144).

[8] S. HELGASON, *Solvability of Invariant Differential Operators on Homogeneous Manifolds* (*In Differential Operators on Manifold, C.I.M.E.*, cremoneze, Rome, 1975).

[9] A. A. KIRILLOV, *The Characters of Unitary Representations of Lie Groups* (*Functional Analysis and its Applications*, vol. 2, 1968, p. 40-55).

[10] A. A. KIRILLOV, *Characters of Unitary Representations of Lie Groups. Reduction Theorems* (*Functiona Analysis and its Applications*, vol. 3, 1969, p. 36-47).

[11] M. RAÏS, *Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent* (*C.R. Acad. Sc.* Paris, t. 273, série A, 1971, p. 495-498).

[12] G. WARNER, *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups* II, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

Manuscrit reçu le 11 *janvier* 1977

Michel DUFLO,
U.E.R. de Mathématiques,
Université Paris VII,
2, place Jussieu,
75005 Paris.