ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE
JEAN-JACQUES SANSUC

La R-équivalence sur les tores

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 10, nº 2 (1977), p. 175-229
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1977_4_10_2_175_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 10, 1977, p. 175 à 230.

LA R-ÉQUIVALENCE SUR LES TORES

PAR JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE et JEAN-JACQUES SANSUC

Introduction

Les tores algébriques appartiennent à la classe générale des variétés algébriques *rationnelles*, i. e. rationnelles sur la clôture algébrique du corps de définition k. Cette classe contient plus généralement les groupes algébriques linéaires connexes; elle contient aussi les surfaces cubiques lisses. Soit X une telle variété définie sur le corps k. Dans le cas où l'on connaît l'existence d'un point rationnel de X, l'étude des points rationnels de X peut s'ordonner autour de deux types de questions connexes :

(i) des questions *birationnelles* : la variété X est-elle k-unirationnelle, k-rationnelle, ...?

(ii) des questions sur l'existence et la nature précise de divers paramétrages possibles de l'ensemble $X(k)$ de *tous* les points rationnels de X : peut-on trouver un nombre fini de k-morphismes $X_i \to X$ de variétés k-rationnelles X_i dans X, tels que $X(k)$ soit la réunion des images des $X_i(k)$, peut-on en trouver un seul $X_0 \to X$ tel que $X(k)$ soit l'image de $X_0(k)$, ...?

Les questions du type (i) ont été considérées en particulier par B. Segre [27] qui a étudié de façon précise le cas des surfaces cubiques lisses sur un corps parfait. Le cas général des surfaces rationnelles, définies sur un corps parfait, a été ensuite traité par Manin et Iskovskih. Pour les tores algébriques, qui sont k-unirationnels, le premier exemple non k-rationnel est dû à Chevalley [6] et plusieurs auteurs ont, à sa suite, étudié les problèmes du type (i) sur les tores, en introduisant divers invariants k-birationnels et en formulant quelques critères de k-rationalité (*cf.* [34]).

Le deuxième type de questions a conduit Manin [20] à introduire plusieurs relations d'équivalence sur $X(k)$. La relation fondamentale, qui formalise en partie les questions du type (ii), est la R-*équivalence*, engendrée par la relation élémentaire suivante : deux points x et y de $X(k)$ sont dits directement R-équivalents, ce qu'on note $x \sim y$, lorsqu'il existe une k-application rationnelle φ de $\mathbf{P}_k^1$ dans X telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(\infty) = y$. En raison des difficultés d'un calcul direct de la R-équivalence, en particulier sur les surfaces cubiques, Manin a introduit la notion d'*équivalence de Brauer*, qu'on peut définir par l'accouplement des points rationnels avec les classes d'algèbres d'Azumaya sur X, et, plus généralement, la notion de B-équivalence : il s'agit là d'équivalences plus grossières que la R-équivalence; leur avantage est d'être plus faciles à calculer et de fournir ainsi une approximation par défaut de la R-équivalence. En outre, dans le cas des surfaces de Châtelet ([5], [20]), l'équivalence de Brauer coïncide avec la R-équivalence, ce qui donne, sur un corps de nombres k, des exemples de variétés rationnelles, pour lesquelles l'ensemble des points rationnels est partagé en un nombre fini de classes pour la R-équivalence, chacune d'elles étant paramétrée, de façon multivoque, par les points rationnels d'une même variété k-rationnelle (de dimension 4). Manin observe dans son livre sur les surfaces cubiques ([20], chap. II, remarque 14.5) que c'est là la seule classe (non triviale) de variétés rationnelles (ou, du moins, de surfaces cubiques) pour laquelle on parvienne à des résultats relativement explicites pour la R-équivalence.

L'objet de cet article est l'étude des questions du type (ii) dans le cas des tores, cas qui ne semble pas avoir été considéré en dehors d'une tentative de F. Châtelet sur un exemple particulier [4]. Le calcul de la R-équivalence sur un tore se révèle encore plus explicite que pour les surfaces de Châtelet : la méthode est directe et parfaitement effective. On obtient en particulier, pour un tore T défini sur le corps k, les résultats suivants :

(*a*) si T est déployé par une extension métacyclique, $T(k)/R = \{ 0 \}$;

(*b*) si k est de type fini sur le corps premier, $T(k)/R$ est fini;

(*c*) chaque R-classe est paramétrée par les points rationnels d'une même variété k-rationnelle;

(*d*) pour le tore T des éléments de norme 1 d'une extension galoisienne finie K/k de groupe G, la surjection évidente $H^{-1}(G, K^*) \to T(k)/R$ est une bijection.

En outre, la R-équivalence coïncide avec l'équivalence rationnelle. Mais, contrairement au cas des surfaces de Châtelet, elle diffère en général de l'équivalence de Brauer. On trouve ainsi des exemples de **Q**-variétés projectives, lisses et rationnelles, pour lesquelles la R-équivalence n'est pas triviale, alors que l'équivalence de Brauer l'est, et d'autres, non **Q**-rationnelles, pour lesquelles la R-équivalence est triviale.

La méthode utilisée pour la détermination de $T(k)/R$ repose sur la considération de torseurs sous des tores particuliers, les tores *flasques*, dont l'étude fait, en partie, l'objet des paragraphes 1-3 et qui sont étroitement liés à des notions introduites par Swan [31], Voskresenskiĭ [33], Lenstra [18] et Endo-Miyata [12] dans l'étude des questions birationnelles sur les tores.

Voici, en bref, comment on est amené à introduire ces notions dans l'étude de $T(k)/R$. On observe d'abord qu'étant donné, en caractéristique 0, une k-compactification lisse $T \to X$, la suite exacte de modules galoisiens

$$(B) \qquad 0 \to \hat{T} \to \mathrm{Div}_{\overline{X}-\overline{T}}\overline{X} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X} \to 0,$$

mise en valeur initialement par Voskresenskiĭ [33] dans l'étude des problèmes birationnels, définit, par dualité, un torseur sur T, sous le tore dual de Pic $\overline{X}$, torseur qui se prolonge à X et « donne » ainsi la R-équivalence sur $T(k)$ (*cf.* [7], proposition 6 et théorème 2). Puis, en vue de s'affranchir de l'hypothèse de caractéristique et du recours à une k-compactification lisse X et au calcul du module galoisien Pic $\overline{X}$, on repère une propriété algébrique de (B) qui suffit pour l'étude du problème : (B) est une *résolution flasque* du module galoisien $\hat{T}$ et toute résolution flasque de $\hat{T}$ définit, par dualité, un torseur sur T qui se prolonge à une k-compactification lisse éventuelle et, en tout cas, « donne » la R-équivalence sur $T(k)$. Il suffit donc, pour le calcul de $T(k)/R$, de considérer *a priori* une résolution flasque quelconque de $\hat{T}$: on dispose d'une procédure effective pour calculer une telle résolution et, même en caractéristique 0, cette procédure est bien plus simple que celle consistant à calculer une suite du type (B). Cette méthode permet aussi le calcul effectif de l'invariant k-birationnel $p(T)$ considéré par Voskresenskiĭ [35]. Ceci ne semble pas avoir été noté par Voskresenskiĭ qui, cependant, comme nous l'a signalé le rapporteur, a observé indépendamment [36] ([1]), à propos des problèmes birationnels, le caractère flasque d'une suite du type (B).

L'étude de la R-équivalence sera reprise dans [8] dans un cadre non limité à celui des tores, suivant la méthode indiquée en [7]. Le plan de l'article est le suivant :

1. Modules et résolutions flasques;
2. Lien avec les problèmes birationnels;
3. Les tores flasques;
4. R-équivalence et équivalence rationnelle;
5. La R-équivalence sur un tore;
6. Quelques calculs explicites de R-équivalence;
7. L'équivalence de Brauer sur un tore;
8. Comparaison de quelques critères de rationalité;

Annexe;

Bibliographie.

1. Modules et résolutions flasques

Les résultats de ce paragraphe sont essentiellement dus, moyennant parfois quelques traductions (*voir* à ce sujet § 2, R 6), à Lenstra [18], Endo-Miyata [12] et Voskresenskiĭ ([33], [35]), mais la présentation et les démonstrations (notamment celle figurant à la proposition 3) sont parfois différentes. La présentation adoptée ici, strictement algébrique, a l'avantage d'être complètement dégagée de considérations géométriques ou birationnelles. Le lien avec les problèmes birationnels est établi au paragraphe 2 (*cf.* prop. 5 et 6 et R 6).

L'objet de ce paragraphe est d'introduire la notion de *résolution flasque* d'un G-module, d'en assurer l'existence (lemme 3), le caractère essentiellement unique (lemme 5) et (uni)versel (lemme 4), puis d'entreprendre, au moins dans des cas particuliers, l'étude du monoïde F_G des classes de similitude de G-modules flasques (prop. 1-4, coroll. et R 5).

([1]) Nous n'avons pu prendre connaissance des démonstrations, publiées, semble-t-il, dans *Études de théorie des nombres,* Université de Saratov, nos 5 et 6, 1975, p. 14-21 et 18-33.

Soit G un groupe profini. *Sauf mention du contraire*, on se place dans la catégorie $\mathscr{L}_G$ des G-modules (à gauche) continus *Z-libres de rang fini*. Si M et N sont deux tels modules, on désigne par Hom (M, N) le G-module $\mathrm{Hom}_Z(M, N)$, par $M \otimes N$ le G-module $M \otimes_Z N$ et par M^0 le G-module dual Hom (M, Z). On a de multiples isomorphismes canoniques : $M = (M^0)^0$, $\mathrm{Hom}(M, N) = \mathrm{Hom}(N^0, M^0) = M^0 \otimes N$, $\mathrm{Hom}(M, N)^0 = \mathrm{Hom}(N, M)$ et, si H est un sous-groupe ouvert de G, $Z[G/H]^0 = Z[G/H]$. L'application duale de l'augmentation $\varepsilon_{G/H} : Z[G/H] \to Z$ est la norme $N_{G/H} : Z \to Z[G/H]$ définie par $N_{G/H}(1) = \sum_{G/H} gH$. On note $I_{G/H}$ le noyau de l'augmentation $\varepsilon_{G/H}$ et $J_{G/H}$ le conoyau de la norme $N_{G/H}$: $J_{G/H} = I^0_{G/H}$. Si M est un G-module, le sous-groupe G_M des éléments de G agissant trivialement sur M est un sous-groupe ouvert invariant de G et $\mathscr{L}_G$ est ainsi la réunion des $\mathscr{L}_{G/H}$ pour tous les sous-groupes ouverts invariants H de G. Si G est *fini* et si $i \in Z$, on note $H^i(G, M)$ le i-ième groupe de cohomologie à la Tate, groupe noté $\hat{H}^0(G, M)$ si i vaut explicitement 0. On sait ([3], chap. XII, § 6) que le cup-produit met en dualité les groupes finis $H^i(G, M)$ et $H^{-i}(G, M^0)$. Pour G profini, M étant sans Z-torsion, on peut encore considérer, outre les groupes de cohomologie ordinaires, le groupe $H^{-1}(G, M)$ défini par exemple comme $\varinjlim_H H^{-1}(G/H, M^H)$, pour H sous-groupe ouvert invariant quelconque de G, avec pour morphismes de transition les inclusions naturelles : pour H inclus dans G_M et invariant dans G, ce groupe coïncide avec $H^{-1}(G/H, M)$.

Un G-module est dit *de permutation* s'il admet une Z-base permutée par G. Il est donc isomorphe à son dual. Si G est fini, un module à la fois projectif et de permutation est libre. Un facteur direct d'un module de permutation est dit *inversible*. On dit que deux modules sont *semblables* lorsqu'on obtient des modules isomorphes par addition de modules de permutation convenables. Un module semblable à 0 est dit *stablement de permutation*. Les classes de similitude forment, pour la somme directe, un monoïde commutatif S_G. Soit [M] la classe de similitude du G-module M : c'est la classe neutre 0 lorsque M est stablement de permutation, c'est un élément du sous-groupe U_G des éléments inversibles de S_G lorsque M est un module inversible. La dualité $M \mapsto M^0$ induit sur S_G une involution qui conserve U_G. Les groupes $H^1(G, M)$ et $H^{-1}(G, M)$ ne dépendent que de [M].

Remarque.

R 1. Un module stablement de permutation n'est pas nécessairement de permutation. C'est déjà le cas pour $G = \mathfrak{S}_3 = \langle s, t \rangle$ avec $s^2 = t^3 = 1$ et $sts = t^2$: le noyau M de l'application $Z[G] \xrightarrow{\omega} Z[G/s]$ définie par $\omega(1) = 1-t$ n'est pas de permutation, car $\hat{H}^0(G, M) = 0$ (si M était de permutation, il serait donc libre) et $H^2(G, M) = Z_3$, et pourtant $M \oplus Z = Z[G/s] \oplus Z[G/t]$ (*cf.* § 6, *d* 1). Voici un autre exemple [30] pour G le groupe quaternionien d'ordre 8 : l'idéal $I = \langle 3, N_G \rangle$ de Z[G] n'est pas de permutation, car projectif, mais non libre; pourtant, $I \oplus Z = Z[G] \oplus Z$. □

Soit $i \in Z$. Dans le cas où G est fini, le G-module M est dit H^i-trivial lorsque $H^i(G', M) = 0$ pour tout sous-groupe G′ de G : pour vérifier cette condition, il suffit de considérer les sous-groupes des sous-groupes de Sylow et, parmi eux, un seul sous-groupe par classe de conjugaison. Pour $i = -1$, on dit que M est *flasque* et, pour $i = 1$, que M est *coflasque*. Ces deux dernières définitions s'étendent au cas où G est profini, en se limitant aux sous-groupes ouverts G′ de G : il revient au même [*cf.* lemme 2 (vii) et (viii)] de considérer M dans $\mathscr{L}_{G/H}$ pour H contenu dans G_M et invariant ouvert dans G. On note F_G (resp. F_G^0) le sous-monoïde de S_G formé des classes de similitude de G-modules flasques (resp. coflasques). Un module inversible est à la fois flasque et coflasque : $F_G \cap F_G^0$ contient donc le sous-groupe U_G. On note

$$F_G^1 = F_G/F_G \cap F_G^0 \qquad \text{et} \qquad F_G^2 = F_G \cap F_G^0/U_G;$$

ce sont deux monoïdes commutatifs sans torsion. On appelle *résolution flasque* d'un G-module M toute suite exacte de G-modules

$$0 \to M \to P \to F \to 0,$$

où P est de permutation et F flasque. On appelle *résolution coflasque* de M toute suite exacte de G-modules

$$0 \to Q \to R \to M \to 0,$$

où R est de permutation et Q coflasque.

LEMME 1. — *Soit* M *dans* $\mathscr{L}_G$. *Les conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(i) M *est flasque;*

(ii) M^0 *est coflasque;*

(iii) $H^{-1}(G', M) = 0$ *pour tout sous-groupe ouvert* G′ *de* G;

(iv) $H^1(G', M^0) = 0$ *pour tout sous-groupe ouvert* G′ *de* G;

(v) $H^1[G, \mathrm{Hom}(M, P)] = 0$ *pour tout module de permutation* P;

(vi) $H^1(G, M^0 \otimes P) = 0$ *pour tout module de permutation* P;

(vii) $\mathrm{Ext}_G^1(M, P) = 0$ *pour tout module de permutation* P;

(viii) $\mathrm{Ext}_G^1(P, M^0) = 0$ *pour tout module de permutation* P. □

Les conditions (v)′, ..., (viii)′ obtenues en remplaçant dans (v), ..., (viii) l'expression « pour tout module de permutation » par « pour tout module inversible » sont encore équivalentes aux précédentes.

Ainsi, toute résolution flasque de M définit par dualité une résolution coflasque de M^0 et la dualité induit un isomorphisme $F_G \xrightarrow{\approx} F_G^0$.

LEMME 2. — *Soient* M *un* G-*module et* H *un sous-groupe invariant fermé de* G :

(i) *si* M *est de permutation dans* $\mathscr{L}_G$, M^H *est de permutation dans* $\mathscr{L}_{G/H}$;

(ii) *si* M *est* G-*coflasque*, M^H *est* G/H-*coflasque;*

(iii) *si* $0 \to Q \to R \to M \to 0$ *est une résolution coflasque de* M *dans* $\mathscr{L}_G$, $0 \to Q^H \to R^H \to M^H \to 0$ *est une résolution coflasque de* M^H *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$.

Soient M *et* N *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$. *Il est équivalent,* pour M et N, *de posséder la propriété* $\mathscr{P}$ *dans* $\mathscr{L}_G$ *ou dans* $\mathscr{L}_{G/H}$, *pour chacune des propriétés* $\mathscr{P}$ *ci-dessous :*

(iv) M *est de permutation;*

(v) M *est stablement de permutation;*

(vi) M *est inversible;*

(vii) M *est flasque;*

(viii) M *est coflasque;*

(ix) M *et* N *sont semblables.*

Enfin, pour M *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$ *:*

(x) *toute résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$ *est une résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_G$*;*

(xi) *toute résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_G$ *définit,* via *le foncteur* points fixes sous H, *une résolution flasque* (*resp. coflasque*) *de* M *dans* $\mathscr{L}_{G/H}$.

COROLLAIRE. — *Si* H *est un sous-groupe invariant fermé de* G, $S_{G/H}$ *est un sous-monoïde de* S_G *et* $U_{G/H} = U_G \cap S_{G/H}$, $F_{G/H} = F_G \cap S_{G/H}$, $F^0_{G/H} = F^0_G \cap S_{G/H}$. *En outre,* S_G *est la réunion des sous-monoïdes* $S_{G/H}$, *pour* H *parcourant l'ensemble des sous-groupes invariants ouverts de* G.

Notons que, d'après le lemme, les diverses propriétés (iv) à (ix) se vérifient toutes à un niveau fini, i. e. dans $\mathscr{L}_{G/H}$ pour H invariant ouvert convenable. Les assertions du lemme se vérifient aisément : on commence par (i) et (iv), d'où (v), (vi) et (ix); on prouve (ii) par inflation, d'où (iii), puis (viii) par inflation-restriction, d'où (vii) par dualité (en supposant G fini, ce qui est possible, vu la définition de « flasque »). Pour (x) et (xi), montrons simplement que, si $0 \to M \to P \to F \to 0$ est une résolution flasque dans $\mathscr{L}_G$ d'un G/H-module M, alors la suite exacte $0 \to M \to P^H \to F^H \to 0$ est une résolution flasque de M dans $\mathscr{L}_{G/H}$. Pour voir que F^H est flasque, on peut supposer G fini. Pour tout sous-groupe G′ de G, on obtient la suite exacte $0 \to H^{-1}(G', F^H) \to \hat{H}^0(G', M) \xrightarrow{i} \hat{H}^0(G', P^H)$. Or, l'hypothèse $H^{-1}(G', F) = 0$ implique l'injectivité de $\hat{H}^0(G', M) \to \hat{H}^0(G', P)$, donc celle de i, soit $H^{-1}(G', F^H) = 0$. □

Remarques.

R 2. Soient H un sous-groupe fermé de G et Res la restriction usuelle $\mathscr{L}_G \to \mathscr{L}_H$. Soit $\mathscr{P}$ l'une quelconque des propriétés (iv) à (ix) du lemme 2, ou même la propriété (j) : M est H^j-trivial ($j \in \mathbf{Z}$ et, pour G infini, $j \geqq -1$). Il est immédiat que, si M (*ou* M et N) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{L}_G$, il en est de même pour Res (M) [*ou* Res (M) et Res (N)] dans $\mathscr{L}_H$. La restriction $\mathscr{L}_G \to \mathscr{L}_H$ induit donc des morphismes de restriction $\Phi_G \to \Phi_H$ pour $\Phi = S, U, F, F^0, F^1$ et F^2. Plus généralement, cette remarque et le lemme 2 montrent le caractère fonctoriel contravariant de S, U, F, F^0, F^1 et F^2. □

R 3. Soient H un sous-groupe d'indice fini de G et Ind l'induction usuelle $\mathscr{L}_H \to \mathscr{L}_G$. Soit $\mathscr{P}$ l'une des propriétés (iv) à (ix) ou (j). On voit aisément que, si M (*ou* M et N) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{L}_H$, il en est de même pour Ind (M) [*ou* Ind (M) et Ind (N)] dans $\mathscr{L}_G$ [*via* le lemme de Shapiro pour (j)]. On obtient donc des morphismes d'induction $\Phi_H \to \Phi_G$ pour $\Phi = S, U, F, F^0, F^1$ et F^2.

Si M est dans $\mathscr{L}_H$, le H-module Res $\circ$ Ind (M) contient M comme facteur direct. Un facteur direct d'un module flasque (resp. coflasque, inversible) est du même type. On en déduit que l'application Res $\circ$ Ind : $\Phi_H \to \Phi_H$ est injective pour $\Phi = F^1$ et F^2. Les inductions $F^1_H \to F^1_G$ et $F^2_H \to F^2_G$ sont donc injectives. □

Le lemme 3 ci-dessous, facile, mais important pour la suite, est déjà utilisé par Lenstra [18] (démonstration de la proposition 1.2).

LEMME 3 [12]. — *Tout* G-*module admet une résolution flasque et une résolution coflasque.*

Il suffit, bien sûr (argument de dualité), de prouver l'existence d'une résolution coflasque. On peut supposer G fini. Une surjection $R \to M$ avec R de permutation, ou simplement coflasque, a un noyau coflasque, si et seulement si, pour tout sous-groupe G' de G, l'application $R^{G'} \to M^{G'}$ est encore surjective. Pour obtenir une résolution coflasque de M, il suffit donc de prendre la somme, pour tous les sous-groupes G' de G, des morphismes $\mathbf{Z}[G/G'] \otimes M^{G'} \to M$, où l'on considère $M^{G'}$ comme G-module trivial. □

LEMME 4. — *Soient* $0 \to M \xrightarrow{i} N \to F \to 0$ *une résolution flasque du* G-*module* M *et* $0 \to Q \to R \xrightarrow{j} M \to 0$ *une résolution coflasque. Si* P *est un module de permutation, tout morphisme de* M *dans* P *se factorise par* i, *tout morphisme de* P *dans* M *se factorise par* j.

On peut ainsi dire que l'injection i est « verselle » parmi tous les morphismes $M \to P$ avec P de permutation. Prouvons simplement l'assertion relative à j : le produit fibré de R et P au-dessus de M définit une extension de P par Q, qui, d'après le lemme 1 (viii), est triviale. □

On a ensuite un « lemme de Schanuel », énoncé indépendamment par Voskresenskiĭ [36]; ce lemme assure qu'une résolution flasque d'un module M est essentiellement unique :

LEMME 5. — *Soient* $0 \to M \to P \to F \to 0$ *une résolution flasque du* G-*module* M *et* $0 \to Q \to R \to M \to 0$ *une résolution coflasque. Les classes de similitude de* F *et* Q *ne dépendent que de la classe de* M : *on les note respectivement* $\rho(M)$ *et* $\varsigma(M)$.

On devrait les noter, pour plus de précision, $\rho_G(M)$ et $\varsigma_G(M)$, mais il n'y a pas d'inconvénient à « oublier » G, car, si H est un sous-groupe invariant fermé de G agissant trivialement sur M, alors $\rho_{G/H}(M)$ coïncide avec $\rho_G(M)$ *via* le plongement naturel de $S_{G/H}$ dans S_G et, de même, $\varsigma_{G/H}(M)$ coïncide avec $\varsigma_G(M)$; de plus [*cf.* lemme 2 (xi)], avec les notations de l'énoncé, $\rho(M) = [F] = [F^H]$ et $\varsigma(M) = [Q] = [Q^H]$.

Prouvons le lemme pour les résolutions coflasques. Si $0 \to Q' \to R' \to M \to 0$ est une autre résolution coflasque de M, le produit fibré de R et R' au-dessus de M est extension de R par Q' et de R' par Q; or, ces extensions sont triviales d'après le lemme 1 (viii), d'où $[Q] = [Q']$. □

LEMME 6. — *Les applications* ρ *et* ς *sont additives et duales l'une de l'autre :* $\rho(a)^0 = \varsigma(a^0)$. *L'application* ρ *est un épimorphisme de* S_G *sur* F_G *et* ς *est un épimorphisme de* S_G *sur* F^0_G.

La restriction de ρ *à* F_G^0 *est un isomorphisme de* F_G^0 *sur* F_G *: son inverse est la restriction de* ς *à* F_G. *Sur le sous-groupe* U_G, ρ *et* ς *coïncident avec la symétrie* $a \mapsto -a$.

Il suffit de noter que, si la suite $0 \to M \to P \to N \to 0$ est exacte, avec P de permutation, M coflasque et N flasque, alors $[N] = \rho(M)$ et $[M] = \varsigma(N)$. □

Observons que, si la suite $0 \to M \to P \to N \to 0$ est exacte, avec simplement P de permutation, on trouve $\rho(M) = \rho\varsigma(N)$ et $\varsigma(N) = \varsigma\rho(M)$.

LEMME 7. — *Si la suite* $0 \to M \to N \to Q \to 0$ *est exacte et si* Q *est inversible, alors* $\rho(M) = \rho(N) + [Q]$. *En particulier, si* Q *est de permutation,* $\rho(M) = \rho(N)$.

Noter que la première égalité s'écrit encore $\rho(N) = \rho(M) + \rho(Q)$ et qu'elle résulte aisément de la seconde assertion.

Introduisons une résolution flasque $0 \to N \to P \to F \to 0$ de N. La suite $0 \to Q \to \operatorname{coker}(M \to P) \to F \to 0$ est exacte et, comme Q est inversible et que F est flasque, elle est scindée [lemme 1 (vii)']. Le terme médian est donc flasque et sa classe, qui vaut $[Q] + [F] = [Q] + \rho(N)$, n'est autre que $\rho(M)$. □

Modulo traduction (*cf.* § 2, R 6), ce lemme est simplement une forme faible de la proposition 1.5 de [18], proposition qui, en termes de tores, est un corollaire direct du théorème 90 : un torseur sous un tore facteur direct d'un tore quasi trivial est localement (Zariski) trivial.

LEMME 8. — *Soient* M *et* N *deux* G-*modules. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\rho(M) = \rho(N)$;

(ii) *il existe deux suites exactes* $0 \to M \to E \to P \to 0$ *et* $0 \to N \to E \to R \to 0$ *avec* P *et* R *de permutation.*

L'implication (ii) ⇒ (i) résulte du lemme 7. Inversement, l'égalité (i) implique l'existence de deux suites exactes $0 \to M \to P \to F \to 0$ et $0 \to N \to R \to F \to 0$ avec P et R de permutation. Il suffit alors de considérer le produit fibré E de P et R au-dessus de F. □

Noter que, modulo traduction (*cf.* R 6), ce lemme 8 n'est autre que la proposition 2 de [35] (*cf.* déjà [31], lemmes 7 et 8).

LEMME 9 (Lenstra [18]). — *Soit* G *un groupe fini. Pour* M *dans* $\mathscr{L}_G$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) M *est inversible;*

(ii) M *est* G_p*-inversible pour chaque sous-groupe de Sylow* G_p;

(iii) $\operatorname{Ext}_G^1(M, Q) = 0$ *pour tout* G-*module coflasque* Q;

(iv) $\operatorname{Ext}_G^1(F, M) = 0$ *pour tout* G-*module flasque* F.

Précisons que, dans (ii), il suffit de considérer un seul p-sous-groupe de Sylow G_p par nombre premier p divisant l'ordre de G. Ce lemme revient à affirmer que la restriction $F_G^2 \to \bigoplus_p F_{G_p}^2$ est injective. Notons que la restriction $F_G^1 \to \bigoplus_p F_{G_p}^1$ est également injective, mais c'est là un résultat immédiat.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente (*cf.* R 2). D'après le lemme 1 (viii)', la condition (ii) implique la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{G_p}(M, Q)$ pour chaque nombre premier p, d'où (iii). Si M vérifie (iii), considérons une résolution coflasque de M : elle se décompose et M est donc inversible. Le même argument appliqué à une résolution flasque de M prouve l'implication (iv) $\Rightarrow$ (i) et le lemme 1 (vii)' prouve la réciproque. □

PROPOSITION 1. — *Soient* G *un groupe fini et* ε *l'augmentation* $\mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$ *:*

(i) *toute suite exacte de* G-*modules* $0 \to Q \to L \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$, *où* L *est un* G-*module libre donne*

$$\varsigma(I_G) = [Q] \qquad \textit{et} \qquad \rho(J_G) = [Q^0];$$

(ii) *en particulier, pour tout sous-groupe* G' *de* G *:*

$$H^1[G', \rho(J_G)] = H^3(G', \mathbf{Z}).$$

On peut, par exemple, prendre pour ω l'application $\mathbf{Z}[G \times G] \to \mathbf{Z}[G]$ définie par $\omega(g_0, g_1) = g_1 - g_0$. Rappelons que I_G est le noyau de ε et que $J_G = I_G^0$. *Remarque* : la définition même de I_G montre que $\rho(I_G) = 0$; plus généralement, si H et H' sont deux sous-groupes de G tels que $H \subset H'$, ρ vaut 0 sur le noyau de l'augmentation, notée encore ε, $\mathbf{Z}[G/H] \to \mathbf{Z}[G/H']$.

Il est immédiat que, pour tout sous-groupe G' de G et tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite exacte de l'énoncé définit un isomorphisme $H^n(G', Q) \xleftarrow{\approx} H^{n-2}(G', \mathbf{Z})$. On en déduit, pour $n = 1$, que Q est coflasque, d'où (i). L'isomorphisme ci-dessus pour $n = -1$ donne (ii) par dualité : modulo R 6, cette assertion (ii) est déjà dans [33], mais sous une apparence quelque peu restrictive. □

Cette proposition 1, quoique facile, est très intéressante pour la suite : le calcul précis (i) de l'invariant $\rho(J_G)$ intervient dans les démonstrations des propositions 2 et 3 et dans les calculs explicites de R-équivalence sur les tores $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ pour K/k galoisienne finie (§ 6, prop. 15 et coroll.); la proposition ci-dessus est également utilisée pour le calcul de l'équivalence de Brauer sur ces tores [§ 7, coroll. 2 (prop. 17)] et pour les corollaires ci-dessous, mais alors (ii) suffit.

COROLLAIRE 1. — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *tout sous-groupe de Sylow de* G *est cyclique ou quaternionien généralisé;*

(ii) *tout sous-groupe abélien de* G *est cyclique;*

(iii) $H^3(G', \mathbf{Z}) = 0$ *pour tout sous-groupe* G' *de* G*;*

(iv) $\rho(J_G)$ *est coflasque.*

Cette dernière condition s'écrit encore $\rho(J_G) \in F_G \cap F_G^0$ ou, par dualité, $\varsigma(I_G) \in F_G$. L'équivalence de (iii) et (iv) est un corollaire immédiat de la proposition 1 (ii). L'équivalence de (i), (ii) et (iii) est bien connue : (iii) $\Rightarrow$ (ii) car $H^3(\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_p$; pour (ii) $\Rightarrow$ (i), *voir* [3] (chap. XII, § 11, th. 11.6) et pour (i) $\Rightarrow$ (iii), *voir* [3] (chap. XII, § 7). Il résulte de ce corollaire que si G ne vérifie pas l'une des conditions ci-dessus, alors $F_G^1 \neq 0$, puisque $\rho(J_G)$ est flasque et non coflasque. Ce résultat est déjà dans [35] (th. 3) modulo traduction par R 6. □

COROLLAIRE 2. — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est métacyclique, i. e. a ses sous-groupes de Sylow cycliques;*

(ii) $F_G^1 = 0$, *i. e. tout* G-*module flasque est coflasque.*

L'implication (i) ⇒ (ii) est évidente pour G cyclique. Comme F_G^1 se plonge dans la somme directe des $F_{G_p}^1$ pour les divers sous-groupes de Sylow G_p, l'assertion (ii) pour G métacyclique en résulte. Supposons inversement $F_G^1 = 0$: la condition (iv) du corollaire 1 est donc vérifiée et tout sous-groupe de Sylow de G est cyclique sauf éventuellement G_2 qui peut être quaternionien généralisé. Or, on aurait alors (*cf.* R 3 et le corollaire du lemme 2) $F_G^1 \supset F_{G_2}^1 \supset F_{V_4}^1$, car un groupe quaternionien généralisé admet V_4 ($= \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$) pour quotient. Mais V_4 ne vérifie pas les conditions du corollaire 1, d'où $F_{V_4}^1 \neq 0$ et cette éventualité est à exclure. □

La proposition 6 du paragraphe 2 (*cf.* R 6) montre qu'il y a coïncidence entre la relation d'équivalence $\underset{(r)}{\sim}$ définie par Endo-Miyata [12] sur $\mathscr{L}_G$ et celle définie par l'application $\rho : \mathscr{L}_G \to F_G$. On peut ainsi traduire les résultats de [12] au moyen de ρ et ς. En particulier, le monoïde noté T (G) en [12] s'identifie à F_G *via* ρ et le sous-groupe T^g (G) au groupe U_G.

PROPOSITION 2 (Endo-Miyata [12]). — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est métacyclique;*

(ii) F_G *est un groupe, i. e. tout module flasque est inversible;*

(iii) $\rho(J_G) \in U_G$, *i. e.* $\rho(J_G)$ *est inversible.*

La condition (ii) s'écrit encore $F_G = U_G$ et la condition (iii) équivaut, par dualité, à $\varsigma(I_G) \in U_G$. On vient de voir [corollaire 2 (ii) de la proposition 1] une quatrième condition équivalente : $F_G = F_G^0$, condition *a priori* plus faible que la condition (ii) (l'implication $F_G = F_G^0 \Rightarrow F_G = U_G$ est déjà dans [35], théorème 4, mais la démonstration contient un argument faux).

Montrons d'abord l'implication (iii) ⇒ (i). Soit Q comme dans la proposition 1. S'il existe N tel que Q ⊕ N soit un module de permutation P, alors, pour tout sous-groupe G' de G, $H^2(G', Q) = \hat{H}^0(G', \mathbf{Z})$ se plonge dans $H^2(G', P)$ et ce dernier contient donc un élément d'ordre celui de G'; or cela n'est possible, dans le cas où G' est un *p*-groupe, que s'il est cyclique.

Pour montrer l'implication (i) ⇒ (ii), il suffit, d'après le lemme 9 (ii), de traiter le cas d'un *p*-groupe cyclique G. La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre p^a de G. Soit $f(X) = X^{p^a} - 1/X^{p^{a-1}} - 1$ le polynôme cyclotomique d'indice p^a. Soient s un générateur de G, M un G-module, M' le noyau de $f(s) : M \to M$ et M" l'image. Supposons M flasque : comme G est cyclique, M est aussi coflasque. Comme M' est sans **Z**-torsion, $s^{p^{a-1}}$ a pour seul point fixe 0 dans M', qui est donc $\hat{H}^0$-trivial. On en déduit, au moyen de la suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, que M" est flasque. Comme M" est un $G/\langle s^{p^{a-1}} \rangle$-module, l'hypothèse de récurrence s'applique à M", qui est donc inversible [*cf.* lemme 2 (vii) et (vi)]. Ainsi (lemme 7), $\rho(M) = \rho(M') - [M'']$ et $\rho(M)$ inversible ⇔ $\rho(M')$ inversible.

Comme (lemme 6), M étant déjà coflasque, M inversible $\Leftrightarrow \rho(\mathrm{M})$ inversible, il reste simplement à prouver que $\rho(\mathrm{M}')$ est inversible. Or M′ est un $\mathbf{Z}[\zeta]$-module pour ζ une racine primitive p^a-ième de 1. C'est un module sans torsion sur $\mathbf{Z}$, donc sur $\mathbf{Z}[\zeta]$: comme $\mathbf{Z}[\zeta]$ est de Dedekind, M′ est donc un $\mathbf{Z}[\zeta]$-module projectif. Ainsi suffit-il de traiter le cas de $\mathbf{Z}[\zeta]$ qui n'est autre que M'_0 pour $\mathrm{M}_0 = \mathbf{Z}[\mathrm{G}]$. Or, les raisonnements initiaux appliqués à M_0 au lieu de M montrent que $\rho(\mathrm{M}'_0) = [\mathrm{M}''_0]$ est inversible. □

COROLLAIRE. — *Soit* G *un* 2-*groupe quaternionien généralisé : les monoïdes* $\mathrm{F}^1_{\mathrm{G}}$ *et* $\mathrm{F}^2_{\mathrm{G}}$ *sont tous les deux non triviaux.*

Ajoutons que pour le groupe quaternionien d'ordre 8 le groupe U_{G} est trivial (*cf.* R 5). Le résultat pour $\mathrm{F}^1_{\mathrm{G}}$ est déjà connu (corollaire 2 de la proposition 1). D'après le corollaire 1 de la proposition 1, $\rho(\mathrm{J}_{\mathrm{G}})$ est flasque et coflasque; mais, d'après la proposition 2, il n'est pas inversible, d'où $\mathrm{F}^2_{\mathrm{G}} \neq 0$. □

Notons que ce corollaire contredit l'assertion $\mathrm{F}^2_{\mathrm{G}} = 0$ indiquée en [36], i. e., avec les notations de [36] et modulo R 6, le fait que, pour L/k galoisienne finie quelconque, $\mathrm{Z}^0(\mathrm{L}/k)$ soit un groupe : il n'en est pas toujours ainsi, même pour k p-adique (considérer sur $\mathbf{Q}_2$ l'exemple C du paragraphe 8).

PROPOSITION 3 (Endo-Miyata [12]). — *Soit* G *un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{G} = \langle s, t \rangle$ *avec* $t^m = s^{2^n} = 1$ *et* $sts^{-1} = t^r$, *pour* m *impair et* $r^2 \equiv 1 \bmod m$;

(ii) $\rho(\mathrm{J}_{\mathrm{G}}) = 0$;

(iii) $\rho(\mathrm{J}_{\mathrm{G}})$ *d'ordre fini.*

On peut, en (ii) et (iii), remplacer $\rho(\mathrm{J}_{\mathrm{G}})$ par $\varsigma(\mathrm{I}_{\mathrm{G}})$. Notons d'abord que la condition (i) équivaut à la condition

(iv) G *est métacyclique et* $\mathrm{H}^4(\mathrm{G}, \mathbf{Z}) = \hat{\mathrm{H}}^0(\mathrm{G}, \mathbf{Z})$.

En effet, un groupe métacyclique G est le produit semi-direct $\mathrm{G}' \rtimes \Gamma$ d'un groupe cyclique invariant $\mathrm{G}' = \langle t \rangle$, d'ordre m, et d'un groupe cyclique $\Gamma = \langle s \rangle$, d'ordre l premier à m ([37], p. 145). Soit $\mathbf{Z}_r$ l'image de $\Gamma \xrightarrow{\mathrm{Int}} \mathrm{Aut}(\mathrm{G}')$. Ainsi, s agit sur G′ *via* r et sur $\mathrm{H}^4(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$ *via* r^2. Comme $\mathrm{H}^4(\mathrm{G}, \mathbf{Z}) = \mathrm{H}^4(\mathrm{G}', \mathbf{Z})^{\Gamma} \oplus \mathrm{H}^4(\Gamma, \mathbf{Z})$, l'égalité $\mathrm{H}^4(\mathrm{G}, \mathbf{Z}) = \hat{\mathrm{H}}^0(\mathrm{G}, \mathbf{Z})$ équivaut à la condition $r^2 \equiv 1 \bmod m$. Ainsi (i) $\Rightarrow$ (iv). Inversement, $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$ avec Γ' d'ordre impair et Γ'' 2-primaire; comme l'image de $\Gamma \to \mathrm{Aut}\,\mathrm{G}'$ est d'ordre 2 au plus, Γ' est central dans G et $\mathrm{G} = (\mathrm{G}' \times \Gamma') \rtimes \Gamma''$, d'où (i), en prenant pour « nouveaux » s et t des générateurs respectifs de Γ'' et $\mathrm{G}' \times \Gamma'$. Rappelons ([3], chap. XII, § 11) que la condition $\mathrm{H}^4(\mathrm{G}, \mathbf{Z}) = \hat{\mathrm{H}}^0(\mathrm{G}, \mathbf{Z})$ signifie que la cohomologie de G admet 4 pour période.

Pour (i) $\Rightarrow$ (ii), *voir* [12] (th. 2.3) : le cas cyclique ($r \equiv 1 \bmod m$) est immédiat puisqu'alors $\mathrm{J}_{\mathrm{G}} = \mathrm{I}_{\mathrm{G}}$ [$\rho(\mathrm{I}_{\mathrm{G}})$ vaut toujours 0]; le cas $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_3$ est explicité au paragraphe 6, *b*. Montrons l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i), i. e. (iii) $\Rightarrow$ (iv). Si $\rho(\mathrm{J}_{\mathrm{G}})$ est d'ordre fini, il est *a fortiori* inversible et G est métacyclique (prop. 2). Soit Q comme dans la proposition 1. Il existe, par hypothèse, deux modules de permutation P et R et un entier

$n > 0$, tels que $(Q^0)^n \oplus P = R$. On en déduit $Q^n \oplus P = R$ et, par simplification (dans les groupes abéliens finis), $H^i(G, Q) = H^i(G, Q^0)$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. En particulier, $\hat{H}^0(G, \mathbf{Z}) = H^2(G, Q) = H^2(G, Q^0) = H^4(G, \mathbf{Z})$. □

Remarque.

R 4. Supposons *a priori* le groupe G produit semi-direct $G' \rtimes \Gamma$ de deux groupes cycliques $G' = \langle t \rangle$, invariant, et $\Gamma = \langle s \rangle$, d'ordres respectifs p^m et 2^n avec p premier impair. Pour un tel groupe G, les conditions de la proposition 3 sont encore équivalentes aux suivantes :

(v) $\rho(J_{G/\Gamma}) = 0$;

(vi) $\rho(J_{G/\Gamma})$ *d'ordre fini.*

Quitte à diviser G et Γ par le noyau du morphisme $\Gamma \xrightarrow{\text{Int}} \text{Aut } G'$, on peut, pour la démonstration, supposer ce morphisme injectif (corollaire du lemme 2). Cela impose $n = 0$ ou 1 dans la condition (i). L'implication (i) ⇒ (v) est déjà connue pour $n = 0$ (proposition ci-dessus); elle est prouvée pour $n = 1$ au paragraphe 6, d 1. Inversement, la suite exacte $0 \to Q \to \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G/\Gamma] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$ définie par $\omega(1) = 1 - t$ donne une résolution coflasque de $I_{G/\Gamma}$, i. e. $\rho(J_{G/\Gamma}) = [Q^0]$ (§ 6, d2). On trouve ainsi

$$H^2(G, Q) = H^1(G, I_{G/\Gamma}) = \mathbf{Z}_{p^m} \quad \text{et} \quad H^2(G, Q^0) = H^3(G, J_{G/\Gamma});$$

or $H^3(G, J_{G/\Gamma})$ est le noyau de la restriction $H^4(G, \mathbf{Z}) \to H^4(\Gamma, \mathbf{Z})$, noyau qui s'identifie, par la restriction, à $H^4(G', \mathbf{Z})^\Gamma$. La condition (vi) implique, comme (iii) précédemment, l'égalité $H^2(G, Q) = H^2(G, Q^0)$, ce qui impose que Γ agisse trivialement sur $H^4(G', \mathbf{Z})$, i. e. Γ d'ordre 1 ou 2. □

PROPOSITION 4. — *Pour* $G = V_4$ *le monoïde* F_G^1 *est non trivial, mais* $F_G \cap F_G^0 = 0$.

Autrement dit, tout module flasque et coflasque est stablement de permutation, i. e. $F_G^2 = U_G = 0$. Montrons d'abord que, si M est flasque, $\rho(M) = 0$, i. e. il existe une suite exacte $0 \to M \to P_1 \to P_2 \to 0$ avec P_1 et P_2 de permutation. Le groupe G est engendré par deux éléments s et t d'ordre 2 qui commutent. Soient M′ le noyau de la multiplication par $1+s$ dans M et M″ son image. Comme $H^{-1}(G, M) = H^0(G, M') = 0$, la suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ donne $H^{-1}(G, M'') = 0$. Le G/s-module M″ est donc de permutation (les seuls $\mathbf{Z}[\langle t \rangle]$-modules indécomposables sont $\mathbf{Z}$, $I_{\langle t \rangle}$ et $\mathbf{Z}[\langle t \rangle]$) et, d'après le lemme 7, $\rho(M) = \rho(M')$. Comme s vaut $-\text{id}$ sur M′, la décomposition de M′ en somme de $\langle t \rangle$-modules indécomposables est stable par s et montre que le G-module M′ est somme de facteurs $I_{G/t}$, $I_{G/st}$ et $\ker(\mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}[G/s])$. Or, ρ vaut 0 sur chacun de ces modules. En conclusion, $\rho(M) = 0$. Si, en outre, M est coflasque, $[M] = \varsigma\rho(M) = 0$. □

Remarque.

R 5. *L'étude*, pour G fini, *du monoïde* F_G peut se décomposer en celles des monoïdes sans torsion F_G^1 et F_G^2 et du groupe U_G. Nous avons donné quelques résultats fort minces sur F_G^1 et F_G^2 et on peut se demander, par exemple, s'ils sont de type fini. Le groupe U_G en revanche est assez bien connu. C'est un groupe abélien de type fini (Jacobinski, *cf.* [12],

[10]), mais non nécessairement fini. En effet, si G est métacyclique, mais si sa cohomologie n'a pas pour période 4, $\rho(J_G)$ est, d'après les propositions 2 et 3, un élément d'ordre infini de U_G : on peut prendre pour G le groupe d'ordre 20 défini par $t^5 = s^4 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$ ou le groupe d'ordre 21 défini par $t^7 = s^3 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$. Le rang du groupe U_G a d'ailleurs été calculé de façon précise par A. W. M. Dress [10] (U_G y est désigné sous le nom de *permutation class group*). En particulier, U_G est un groupe fini lorsque G est un *p*-groupe. Endo et Miyata ont même énuméré de nombreux cas (*cf.* [11] et [12], th. 3.2 et 3.3), où U_G est égal au groupe $C(\Omega_{\mathbf{Z}[G]})$ des classes d'un ordre maximal de $\mathbf{Q}[G]$ contenant $\mathbf{Z}[G]$: il en est ainsi pour un *p*-groupe abélien, pour un *p*-groupe d'ordre impair, pour le groupe diédral D_{p^c} (pour *p* premier $\neq 2$), pour le groupe quaternionien H_2 d'ordre 8, ... Ainsi, pour *p* premier $\neq 2$, si $\zeta = \sqrt[p]{1}$, $F_{\mathbf{Z}_p} = C(\mathbf{Z}[\zeta])$ et $F_{D_p} = C(\mathbf{Z}[\zeta+\zeta^{-1}])$; pour H_2, l'anneau des quaternions d'Hurwitz étant principal, $U_{H_2} = 0$. □

2. Lien avec les problèmes birationnels

Fixons d'abord quelques notations et terminologies. Étant donné un corps k, on note $\bar{k}$ une clôture *séparable* et $\mathfrak{g}$ le groupe de Galois de $\bar{k}/k$. On appelle *k-variété* un *k*-schéma algébrique, géométriquement intègre. Etant donné une *k-variété* X et une extension K/*k*, on note $X_K = X \times_k K$, $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$, K [X] l'anneau des fonctions régulières sur X_K, K (X) le corps des fonctions rationnelles sur X_K. Soit en outre Y un fermé de X. On note Div X (resp. $\mathrm{Div}_Y X$) le groupe des diviseurs de Cartier (resp. à support dans Y) de X, Pic X le groupe de Picard de X, $Z^1(X)$ [resp. $Z^1_Y(X)$] le groupe des diviseurs de Weil (resp. à support dans Y), i. e. des cycles de codimension 1, de X et Cl X le groupe des classes de tels cycles pour l'équivalence rationnelle. Deux *k*-variétés X et Y sont dites *k*-birationnellement équivalentes si *k* (X) et *k* (Y) sont *k*-isomorphes, i. e. s'il existe des ouverts non vides U dans X et V dans Y qui sont *k*-isomorphes. On dit que X et Y sont *k-stablement birationnellement équivalentes* si, $\mathbf{A}^n_k$ désignant Spec $k[T_1, \ldots, T_n]$, les variétés $X \times_k \mathbf{A}^r_k$ et $Y \times_k \mathbf{A}^s_k$ sont *k*-birationnellement équivalentes pour *r* et *s* convenables. On dit que X est K-*rationnelle* si K (X) est transcendant pur sur K. On appelle *k-compactification lisse* de X une *k*-immersion ouverte de X dans une variété complète et lisse : il en existe en caractéristique 0 d'après Hironaka [15].

Soit $\mathbf{G}_m$ le groupe multiplicatif Spec $\mathbf{Z}[T, T^{-1}]$. Soit $\mathcal{T}_k$ (resp. $\mathcal{T}_{K/k}$) la catégorie des *k*-tores algébriques (resp. la sous-catégorie de ceux déployés par l'extension K/*k*). Étant donné un *k*-tore algébrique T, on note $\hat{T}$ le $\mathfrak{g}$-module **Z**-libre de type fini formé de ses caractères, i. e. l'ensemble des morphismes de groupes algébriques Hom $(\bar{T}, \mathbf{G}_{m,\bar{k}})$. Inversement, si M est dans $\mathcal{L}_\mathfrak{g}$, on note D(M) le *k*-tore Spec $\bar{k}[M]^\mathfrak{g}$. On obtient ainsi une dualité entre $\mathcal{T}_k$ et $\mathcal{L}_\mathfrak{g}$ qui induit, pour toute sous-extension galoisienne K/*k* de groupe G, une dualité entre $\mathcal{T}_{K/k}$ et $\mathcal{L}_G$. On dit que T est trivial, ou déployé, si $\mathfrak{g}$ agit trivialement sur $\hat{T}$, *quasi trivial* si $\hat{T}$ est un $\mathfrak{g}$-module de permutation, *anisotrope* si $H^0(\mathfrak{g}, \hat{T}) = 0$, *flasque* (resp. *coflasque*) si $\hat{T}$ est un $\mathfrak{g}$-module flasque (resp. coflasque). Si K/*k* est une sous-extension finie de $\bar{k}/k$, correspondant au sous-groupe ouvert $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, on note $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ le tore obtenu à partir de $\mathbf{G}_{m,K}$ par restriction des scalaires (à la Weil) de K à k : son module des caractères est $\mathbf{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$. Un tore trivial est k-isomorphe à une puissance de $\mathbf{G}_{m,k}$, un tore quasi trivial à un produit de tores du type $R_{K/k}\mathbf{G}_m$. Tout tore quasi trivial est une variété k-rationnelle : c'est un ouvert d'un espace affine. Soient $R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ le noyau de la norme $N_{K/k} : R_{K/k}\mathbf{G}_m \to \mathbf{G}_m$ et $R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$ le conoyau de l'inclusion naturelle de $\mathbf{G}_{m,k}$ dans $R_{K/k}\mathbf{G}_m$: leurs modules des caractères sont respectivement $J_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ et $I_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

Si k est un corps *global*, i. e. un corps de nombres ou de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini, une extension galoisienne K/k de groupe G définit une distribution $(G^v)_{v \in \Omega_k}$ de (classes de conjugaison de) sous-groupes G^v (groupe de décomposition d'un prolongement de v à K) de G, indexée par l'ensemble Ω_k des places v de k. Si M est un G-module continu *quelconque* (non nécessairement dans $\mathscr{L}_G$), on note, pour $i \in \mathbf{N}$, ou même $i \in \mathbf{Z}$ si G est fini, $Ш^i(K/k, M)$, ou par abus $Ш^i(G, M)$, le noyau de la restriction $H^i(G, M) \to \prod_{v \in \Omega_k} H^i(G^v, M)$. Si M est dans $\mathscr{L}_G$, ou si M et i vérifient $H^i(G^v, M) = 0$ pour presque toute place v, on note $Ч^i(K/k, M)$, ou par abus $Ч^i(G, M)$, le conoyau de cette même application de restriction. Ces notations seront utilisées ultérieurement pour les calculs sur les corps globaux. Notons que, pour un k-tore quasi trivial E, $Ш^2(k, E) = 0$ (principe de Hasse pour le groupe de Brauer d'un corps global) et, que, pour T dans $\mathscr{T}_{K/k}$ avec K/k galoisienne, $Ш^2(k, T) = Ш^2(K/k, T)$ d'après le théorème 90 et la remarque précédente. Enfin, pour un G-module de permutation M, on trouve $Ш^2(G, M) = 0$ par réduction au cas $M = \mathbf{Z}$ et application du théorème de Čebotarev à des sous-extensions finies convenables de K/k. On en déduit que, si L/k est la sous-extension galoisienne de K/k définie par le sous-groupe invariant H et si M est dans $\mathscr{L}_{G/H}$, alors $Ш^2(K/k, M) = Ш^2(L/k, M)$.

LEMME 10 (Rosenlicht [24]). — *Si* X *est une k-variété,* $U_k(X) = k[X]^*/k^*$ *est un groupe abélien* **Z**-*libre de rang fini. Le foncteur contravariant* $X \mapsto U_k(X)$ *est additif sur la catégorie des k-variétés :* $U_k(X) \oplus U_k(Y) \xrightarrow{\approx} U_k(X \times_k Y)$.

Pour la première assertion, on peut se restreindre à un ouvert affine normal Y de X, car $U_k(X) \subsetneq U_k(Y)$. Une k-compactification normale $Y \to Y'$ plonge $U_k(Y)$ dans le groupe abélien libre de rang fini $Z^1_{Y'-Y}(Y')$. L'additivité de U_k est bien connue (*cf.* [24]) pour des variétés ayant des points rationnels. On s'y ramène par descente galoisienne, car $X(\bar{k}) \neq \varnothing$ ($\bar{k}$ clôture séparable!) et, d'autre part, $H^0[\mathfrak{g}, U_{\bar{k}}(\bar{X})] = U_k(X)$ d'après le théorème 90. □

LEMME 11. — *Si* X *et* Y *sont deux k-variétés lisses et si* Y *est k-rationnelle, le morphisme canonique* $\operatorname{Pic} X \oplus \operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X \times_k Y$ *est un isomorphisme.*

Montrons d'abord que, pour deux k-variétés quelconques X et Y, le morphisme ci-dessus est injectif : c'est évident si X et Y ont des points rationnels; comme c'est le cas sur $\bar{k}$, on s'y ramène par descente galoisienne *via* la suite exacte

$$0 \to H^1(\mathfrak{g}, \bar{k}[\bar{X}]^*) \to \operatorname{Pic} X \to H^0(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X}),$$

en utilisant l'injection $H^1(\mathfrak{g}, \bar{k}[X]^* \oplus \bar{k}[Y]^*) \to H^1(\mathfrak{g}, \bar{k}[X\times Y]^*)$ (lemme 10 et th. 90). Soient désormais X et Y lisses et V un ouvert non vide de Y. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Div}_{X\times Y - X\times V}\, X\times Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\, X\times Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\, X\times V & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow{\scriptstyle\approx} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_Y} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi_V} & & \\ \mathrm{Div}_{Y-V}\, Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathrm{Pic}\, Y & \longrightarrow & \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathrm{Pic}\, V & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

La flèche de gauche est un isomorphisme, d'où φ_Y surjective $\Leftrightarrow$ φ_V surjective. Par triple application de cette remarque, on est ramené, lorsque Y est k-rationnelle, au cas où X est affine (= Spec A) et Y l'espace affine, ou même la droite affine Spec $k[t]$, auquel cas l'assertion $\mathrm{Pic}\, A \xrightarrow{\approx} \mathrm{Pic}\, A[t]$ est bien connue (pour A régulier). □

Les deux propositions ci-dessous permettent de faire le lien entre les considérations purement algébriques du paragraphe 1 et les problèmes birationnels, spécialement pour les tores. A la terminologie près, elles sont dues essentiellement à Swan [31] et Voskresenskiĭ ([33], [35]) : *cf.* pour plus de détails la remarque R 6.

PROPOSITION 5. — *Soient* X *une k-variété lisse et* K/k *une extension galoisienne de groupe* G. *On suppose* $\mathrm{Pic}\, X_K$ *de type fini. Si* U *est un ouvert non vide de* X *tel que* $\mathrm{Pic}\, U_K = 0$, *l'élément* $\rho(K[U]^*/K^*)$ *de* F_G *ne dépend que de la classe de k-équivalence birationnelle stable de* X. *On le note* $\rho_{K/k}(X)$, *ou simplement* $\rho(X)$ *s'il n'y a pas d'ambiguïté. Cet invariant vaut* 0 *pour* X *k-rationnelle.*

Tout d'abord, X étant lisse et $\mathrm{Pic}\, X_K$ de type fini, il existe des ouverts non vides U tels que $\mathrm{Pic}\, U_K = 0$ et, si U est l'un deux, il en est de même de tout ouvert non vide qu'il contient. Il suffit donc, pour prouver l'indépendance vis-à-vis de U, de considérer le cas de deux ouverts emboîtés $U \supset V$ de ce type : la suite exacte de G-modules $0 \to U_K(U) \to U_K(V) \to \mathrm{Div}_{Y_K} U_K \to 0$, où $Y = U - V$, donne le résultat en vertu du lemme 7, puisque, X étant lisse, le terme de droite est un module de permutation. L'invariance par k-isomorphisme birationnel se déduit de l'existence d'ouverts k-isomorphes. Si W est k-rationnelle, l'invariance $\rho(X\times_k W) = \rho(X)$ se déduit des lemmes 10 et 11. □

PROPOSITION 6. — *Soient* T *un k-tore algébrique et* $\rho(T) = \rho_{\bar{k}/k}(T)$. *L'invariant* $\rho(T)$ *caractérise les classes de k-équivalence birationnelle stable dans* $\mathscr{T}_k$. *Il est trivial pour* T *k-stablement rationnelle, additif et coïncide avec* $\rho(\hat{T})$. *Si* T *est déployé par l'extension galoisienne* K/k *de groupe* G, *l'invariant* $\rho(T)$ *est dans* F_G*; il coïncide avec* $\rho_{K/k}(T)$ *et, en caractéristique* 0, *avec* $[\mathrm{Pic}\, X_K]$, X *désignant un k-compactifié lisse de* T.

Désignons, comme Voskresenskiĭ [35], par $Z(K/k)$ l'ensemble des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-tores déployés par l'extension galoisienne K/k de groupe G. L'énoncé ci-dessus affirme que l'application $\rho : \mathscr{T}_{K/k} \to F_G$ définie par $T \mapsto \rho(T)$ *via* la proposition 5 induit un isomorphisme de monoïdes

$$\rho : \ Z(K/k) \xrightarrow{\approx} F_G.$$

L'égalité $\rho(T) = \rho(\hat{T})$ résulte de la définition de $\rho(T)$: en effet, $\mathrm{Pic}\, \bar{T} = 0$ et $U_{\bar{k}}(T)$ s'identifie au $\mathfrak{g}$-module $\hat{T}$ (Rosenlicht [24]). De même, $\rho_{K/k}(T) = \rho_G(\hat{T})$ et $\rho_G(\hat{T})$

coïncide avec $\rho(\hat{T})$ dans $F_{\mathfrak{g}}$. Soient T et T′ dans $\mathscr{T}_k$, tels que $\rho(T) = \rho(T')$. L'égalité $\rho(\hat{T}) = \rho(\hat{T}')$ implique (*cf.* lemme 8) l'existence, dans $\mathscr{T}_k$, de deux suites exactes $1 \to S \to M \to T \to 1$ et $1 \to S' \to M \to T' \to 1$ avec S et S′ quasi triviaux. D'après le théorème 90, ces deux fibrations $M \to T$ et $M \to T'$ sont localement triviales, ce qui donne un k-isomorphisme birationnel de $T \times S$ sur $T' \times S'$; comme S et S′ sont k-rationnelles, les variétés T et T′ sont k-stablement birationnellement équivalentes.

En caractéristique 0, on sait, *via* Hironaka (*cf.* [33]), que Pic $\overline{X}$ est dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{g}}$ si X est $\bar{k}$-rationnelle et qu'en général la classe de similitude du $\mathfrak{g}$-module Pic $\overline{X}$ (non nécessairement dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{g}}$) est un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-variétés complètes et lisses, invariant nul pour les variétés k-stablement rationnelles. Soient X une k-compactification lisse de T, Y le fermé complémentaire et K/k comme dans l'énoncé. La suite exacte de G-modules

$$\text{(B)} \qquad 0 \to \hat{T} \to \operatorname{Div}_{Y_K} X_K \to \operatorname{Pic} X_K \to 0,$$

a pour terme médian un G-module de permutation, puisque X est lisse. L'assertion $\rho(T) = [\operatorname{Pic} X_K]$ équivaut donc au fait que Pic X_K est un G-module flasque. Quitte à passer au quotient par un sous-groupe ouvert de G agissant trivialement sur la suite (B) ci-dessus, on peut supposer G fini. Montrons simplement que $H^{-1}(G', \operatorname{Pic} X_K) = 0$ pour $G' = G$, la démonstration étant la même pour un autre sous-groupe G′ de G, à condition de remplacer k par l'extension k' correspondante. La suite exacte

$$0 = H^{-1}(G, \operatorname{Div}_{Y_K} X_K) \to H^{-1}(G, \operatorname{Pic} X_K) \to \hat{H}^0(G, \hat{T})$$

prouve le résultat pour T anisotrope. Pour T quelconque, il existe une suite exacte de k-tores $1 \to T' \to T \to T'' \to 1$ avec T′ trivial et T″ anisotrope. Soient X′ et X″ des k-compactifications lisses de T′ et T″ respectivement. La fibration $T \to T''$ est localement triviale (th. 90). Ainsi, X est k-birationnellement équivalente à $X' \times_k X''$. Comme X′ est k-rationnelle, $[\operatorname{Pic} \overline{X}] = [\operatorname{Pic} \overline{X}'']$. Si $G = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, le G-module Pic X_K n'est autre que $(\operatorname{Pic} \overline{X})^{\mathfrak{h}}$; de même pour X″, ce qui donne $[\operatorname{Pic} X_K] = [\operatorname{Pic} X''_K]$. Comme $H^{-1}(G, \operatorname{Pic} X''_K) = 0$ d'après l'étude du cas anisotrope, on a donc également $H^{-1}(G, \operatorname{Pic} X_K) = 0$. Ainsi, Pic X_K est un G-module flasque et, par suite, $\rho(T) = [\operatorname{Pic} X_K]$. Quitte à réduire $\mathfrak{h}$ pour qu'il agisse trivialement sur Pic $\overline{X}$, on obtient de même $\rho(T) = [\operatorname{Pic} \overline{X}]$. D'ailleurs, d'après le lemme 2 (xi), l'égalité $\rho(T) = [\operatorname{Pic} \overline{X}]$ implique $\rho(T) = [\operatorname{Pic} X_K]$. □

Remarque.

R 6. La proposition 6 ci-dessus montre que la relation d'équivalence $\underset{(r)}{=}$ définie sur $\mathscr{L}_G$ par Endo-Miyata [12] coïncide avec celle définie par l'application $\rho : \mathscr{L}_G \to F_G$, ce qui induit des isomorphismes $T(G) \xrightarrow{\approx} F_G$ et $T^g(G) \xrightarrow{\approx} U_G$. On voit de même que, pour K/k galoisienne de groupe G, l'application $T \mapsto \rho(T)$ coïncide avec l'application $p : \mathscr{T}_{K/k} \to S_G$ de Voskresenskiĭ [35] et induit des isomorphismes $Z(K/k) \xrightarrow{\approx} F_G$ et $Z^0(K/k) \xrightarrow{\approx} F_G \cap F_G^0$.

Comme déjà indiqué, les arguments utilisés dans les deux dernières propositions sont essentiellement dus à Swan [31] et Voskresenskiĭ [33] (*cf.* aussi Ono [21], prop. 4.5.1). Indiquons, en bref, la démarche de Voskresenskiĭ. Soit K/k galoisienne de groupe G : Voskresenskiĭ montre ([35], th. 1 et 2) qu'on peut définir une application injective $p : Z(K/k) \to S_G$ en posant $p(T) = [\operatorname{Pic} X_K]$ en caractéristique 0 (*cf.* déjà [33] pour $\bar{k}/k$) et, sinon, par transfert à partir d'une extension auxilaire K_0/k_0 de même groupe en caractéristique 0 *via* $\mathscr{T}_{K/k} \overset{\approx}{\to} \mathscr{T}_{K_0/k_0}$. L'image de p est caractérisée dans la note [36] (th. 1, 2, 3) : c'est F_G.

La représentation adoptée ici, purement algébrique, a l'avantage de fournir, *via* le lemme 3, une procédure effective (*cf.* § 6) pour le calcul de l'invariant $\rho(T)$ et d'éviter ainsi le calcul du $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic} \bar{X}$, pour une k-compactifiée lisse X de T, calcul qui se révèle fort compliqué, même avec l'aide de la théorie des éventails (Demazure) : cette facilité de calcul (non mentionnée dans [36]) est par exemple essentielle pour obtenir dans la proposition 1 la valeur précise de $[\operatorname{Pic} \bar{X}]$ pour $T = R^1_{K/k} \mathbf{G}_m$ avec K/k galoisienne [*cf.* (i)] et non seulement la valeur de $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X})$. La méthode géométrique de calcul de l'invariant $\rho(T)$ serait simplifiée par l'usage d'une k-compactification normale X, mais alors, ni $\operatorname{Pic} \bar{X}$, ni $\operatorname{Cl} \bar{X}$ ne donnent en général des $\mathfrak{g}$-modules convenables, comme on le voit déjà pour l'adhérence de $R^1_{K/k} \mathbf{G}_m$ dans $R_{K/k} \mathbf{P}^1$ avec K/k galoisienne cubique : pour les diviseurs de Cartier, $\operatorname{Div} \bar{X}$ n'est pas un module de permutation; pour les diviseurs de Weil, $\operatorname{Cl} \bar{X}$ a de la $\mathbf{Z}$-torsion. □

Voici un exemple d'application de la proposition 6 :

PROPOSITION 7. — *Soit* K/k *une extension galoisienne finie de groupe* G. *Soit* T *le tore* $R^1_{K/k} \mathbf{G}_m$. *Pour tout sous-groupe* G' *de* G, $H^1[G', \rho(T)] = H^3(G', \mathbf{Z})$.

C'est un corollaire immédiat des propositions 1 et 6. Ce résultat est démontré en [33] pour k de caractéristique 0 sous la forme $H^1(G', \operatorname{Pic} X_K) = H^3(G', \mathbf{Z})$ par une méthode assez détournée. □

COROLLAIRE. — *Soient* K *et* K' *deux extensions galoisiennes de degré* 4, *non cycliques, d'un corps* k. *Soient* $T = R^1_{K/k} \mathbf{G}_m$ *et* $T' = R^1_{K'/k} \mathbf{G}_m$. *Si* $K \neq K'$, *ces deux tores* T *et* T', *de dimension* 3, *sont* k*-birationnellement inéquivalents.*

Ils ne sont même pas k-stablement birationnellement équivalents. En caractéristique différente de 2, K est de la forme $k_{a,b} = k(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ pour a et b dans k : on note $T_{a,b}$ le tore $R^1_{K/k} \mathbf{G}_m$ correspondant. L'assertion ci-dessus répond à une question de Voskresenskiĭ [33] qui traitait uniquement le cas d'extensions $\mathbf{Q}_{a,b}/\mathbf{Q}$ ayant un groupe de décomposition non cyclique.

Soient L le corps engendré par K et K', k' leur intersection, G, H et H' les groupes de Galois respectifs de L/k, L/K et L/K', F un G-module H-trivial de classe $\rho(T)$ et F' un G-module H'-trivial de classe $\rho(T')$. Si $K \neq K'$, k'/k est de degré 1 ou 2. Dans le premier cas, $G = H \times H'$. D'après la proposition ci-dessus,

$$H^1(G/H, F) = H^3(G/H, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2 \qquad \text{puisque} \quad G/H = V_4.$$

Ainsi $H^1(H', F) = \mathbf{Z}_2$, alors que $H^1(H', F') = 0$. *A fortiori*, $\rho(T) \neq \rho(T')$ dans S_G et, d'après la proposition 6, T et T′ ne sont donc pas stablement *k*-birationnellement équivalents. Dans le second cas, G est le produit direct de H, H′ et d'un troisième sous-groupe H″ d'ordre 2. Comme ci-dessus, $H^1(G/H, F) = \mathbf{Z}_2$ et par suite $H^1(H' \times H'', F) = \mathbf{Z}_2$. Au contraire, π désignant la projection $G \to G/H'$, la proposition ci-dessus appliquée au sous-groupe cyclique $\pi(H'')$ de G/H' donne

$$H^1[\pi(H''), F'] = H^3[\pi(H''), \mathbf{Z}] = 0,$$

si bien que $H^1(H' \times H'', F') = 0$. On conclut alors comme dans le premier cas. □

3. Les tores flasques

Rappelons qu'un tore *flasque* est un *k*-tore S tel que $\hat{S}$ soit un $\mathfrak{g}$-module flasque. Si S est déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G, il revient au même [lemme 2 (vii)] de dire que $\hat{S}$ est G-flasque. Le premier résultat sur les tores flasques est une conséquence du théorème de finitude suivant :

Théorème (Roquette [23]). — *Soit* A *une* **Z**-*algèbre commutative réduite de type fini :*

(i) *le groupe des unités* A* *de* A *est de type fini;*

(ii) *si* A *est normale, le groupe* Cl A *des classes de diviseurs est de type fini.* □

Voir également [16] et, pour (i), [25]. Le résultat sur les unités généralise le théorème des unités de Dirichlet, celui sur Cl A utilise de façon essentielle le théorème de Mordell-Weil élargi par Néron au cas d'un corps de base de type fini sur le corps premier.

Corollaire. — *Soient k un corps de type fini sur le corps premier et* K/k *une extension galoisienne finie de groupe de Galois* G. *Il existe alors un anneau* A, *de type fini sur* **Z**, *de corps des fractions* K, *stable par* G, *régulier et tel que* Pic A = 0.

Soit B un sous-anneau de K, de corps des fractions K, de type fini sur **Z**, stable par G. Comme B est une **Z**-algèbre intègre, de type fini, l'ensemble Reg B des points réguliers de Spec B est, d'après Nagata (*cf.* [14] EGA IV 6.12.6), un ouvert non vide. Quitte à inverser une partie finie convenable, stable par G, on peut donc supposer l'anneau B régulier. D'après le théorème ci-dessus, Pic B est de type fini : il existe donc un ensemble fini Σ de points de codimension 1 de Spec B définissant des diviseurs dont les classes engendrent Pic B et on peut prendre Σ stable par G. Soit F son adhérence : il suffit d'inverser un système fini, stable par G, d'équations définissant F pour obtenir un anneau A ayant les propriétés requises. □

Théorème 1. — *Soit k un corps de type fini sur le corps premier. Si* S *est un k-tore flasque, le groupe* $H^1(k, S)$ *est fini.*

Soit K/k une extension galoisienne finie de groupe G déployant S. Soit A un sous-anneau de K ayant les propriétés indiquées dans le corollaire ci-dessus. La suite exacte de G-modules $0 \to A^* \to K^* \to \operatorname{Div} A \to 0$ reste exacte par tensorisation sur **Z** par S^0. Comme $S(K) = \hat{S}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} K^*$, on obtient ainsi la suite exacte

$$H^1(G, \hat{S}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} A^*) \to H^1(k, S) \to H^1(G, \hat{S}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} \operatorname{Div} A).$$

Or Div A est un G-module de permutation (non de type fini sur $\mathbf{Z}$, mais c'est sans importance ici) et $\hat{S}$ est flasque : le terme de droite est donc nul d'après le lemme 1 (vi). Le terme de gauche est fini, quel que soit S, car A^* est de type fini (théorème précédent). □

Remarques.

R 7. Si l'on suppose seulement A normal (au lieu de l'hypothèse « A régulier et Pic A = 0 »), la valeur de $H^1(k, S)$ est donnée par la suite exacte

$$N \to H^1(G, \hat{S}^0 \otimes_{\mathbf{Z}} A^*) \to H^1(k, S) \to Q,$$

avec pour définition de N et Q, la suite exacte

$$0 \to N \to \mathrm{Hom}_G(\hat{S}, \mathrm{Div}\, A) \to \mathrm{Hom}_G(\hat{S}, \mathrm{Cl}\, A) \to Q \to 0. \quad \square$$

R 8. Dans le cas d'un corps *global* (corps de nombres ou corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini), le résultat de finitude se déduit aussi de l'évaluation précise de $H^1(k, S)$ *via* le corps de classes [§ 5, coroll. 5 (th. 2)]. Il faut d'ailleurs noter que, dans ce cas, $H^1(k, S)$ peut être fini sans que S soit flasque (*cf.* § 6, *c*) : si S est un k-tore déployé par l'extension galoisienne finie K/k de groupe G, une condition nécessaire et suffisante de finitude de $H^1(k, S)$ est la nullité de $H^1(G', \hat{S})$ pour tout sous-groupe cyclique G' de G (§ 5, R 10). On en déduit, au moyen de la proposition 2, que, pour G métacyclique, $H^1(k, S)$ fini $\Leftrightarrow H^1(k, S) = 0$. Comme autre corollaire, on voit que le théorème 5 de [33] assure déjà que, pour une k-compactification lisse X d'un tore défini sur un corps de nombres k, $H^1[k, D(\mathrm{Pic}\, \bar{X})]$ est fini.

Dans le cas d'un corps *local* à corps résiduel fini, la finitude de $H^1(k, S)$ vaut pour un k-tore S quelconque. Le corps de classes en donne la valeur exacte, mais, pour la finitude, il suffit de connaître l'existence d'un sous-groupe ouvert du groupe A^* des unités de K qui soit cohomologiquement trivial : la même méthode de démonstration que pour le théorème ci-dessus s'applique encore. □

Étant donné un k-schéma X et un k-tore S, on désigne par $H^1(X, S)$ le premier groupe de *cohomologie étale* de X à valeurs dans S : ses éléments s'identifient aux classes d'isomorphisme d'espaces principaux homogènes (i. e. torseurs représentables) sur X sous S, classes qu'on appellera, par abus de langage, *torseurs* sur X sous S. Sauf mention du contraire, la cohomologie employée dans la suite est la cohomologie étale.

PROPOSITION 8. — *Soit* U *un ouvert de l'espace affine* $\mathbf{A}_k^n$ *contenant un point rationnel. Si* S *est un k-tore flasque, l'homomorphisme*

$$H^1(k, S) \to H^1(U, S),$$

déduit du morphisme structural $U \to k$, *est un isomorphisme.*

Autrement dit, *tout torseur sur* U *sous le tore flasque* S *est* « *constant* ». La démonstration utilise uniquement les propriétés suivantes de $X = \mathbf{A}_k^n$: X est lisse, $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$ et Pic $\bar{X} = 0$. Considérons en effet la suite spectrale de Leray :

$$H^p[k, H^q(\bar{U}, S)] \Rightarrow H^n(U, S),$$

relative au morphisme structural $U \to k$. Comme $\operatorname{Pic} \overline{X} = 0$ et que X est lisse, *a fortiori* $\operatorname{Pic} \overline{U} = 0$ et par suite $H^1(\overline{U}, S) = 0$. Le morphisme naturel

$$H^1[k, H^0(\overline{U}, S)] = H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)] \to H^1(U, S)$$

est donc bijectif. D'après les hypothèses faites sur $\overline{X}$, $\bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ s'identifie au $\mathfrak{g}$-module de permutation des diviseurs de $\overline{X}$ à support en dehors de $\overline{U}$; comme S est flasque, $H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*)]$ vaut 0 d'après le lemme 1 (v). L'application

$$H^1(k, S) = H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}^*)] \to H^1[k, \operatorname{Hom}(\hat{S}, \bar{k}[U]^*)]$$

est donc surjective; il en est de même de l'application composée $H^1(k, S) \to H^1(U, S)$. Si $U(k) \neq \emptyset$, cette même application est évidemment injective. □

Remarque.

R 9. Si X est une k-variété, non nécessairement lisse, l'application naturelle $H^1(k, S) \to H^1(X, S)$ est encore bijective, quel que soit le k-groupe de type multiplicatif S, pourvu que $\bar{k}[X]^* = \bar{k}^*$, $\operatorname{Pic} \overline{X} = 0$ et $X(k) \neq \emptyset$, ce qui est le cas pour $X = \mathbf{A}_k^n$ (*cf.* [8]). □

Indiquons une dernière propriété des tores flasques qui sera uniquement utilisée aux propositions 13 et 14, mais qui justifie la terminologie employée :

PROPOSITION 9. — *Soit* U *un ouvert d'une k-variété lisse* X. *Si* S *est un k-tore flasque, l'application naturelle de restriction*

$$H^1(X, S) \to H^1(U, S)$$

est surjective.

Autrement dit, *tout torseur sur* U *sous le tore flasque* S *s'étend à* X. Comme on le verra en [8], cette proposition permet aussi de faire le lien entre la méthode exposée ici pour l'étude de $T(k)/R$ et celle résumée en [7].

La démonstration utilise (il s'agit toujours de cohomologie étale) la suite exacte

$$H^1(X, S) \to H^1(U, S) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{g}}(\hat{S}, \operatorname{Div}_{\overline{Y}} \overline{X})$$

prouvée en [8] pour un k-tore S quelconque, U un ouvert d'une k-variété lisse X et Y le fermé complémentaire. Comme X est lisse, $\operatorname{Div}_{\overline{Y}} \overline{X}$ est un $\mathfrak{g}$-module de permutation. Ainsi, pour S flasque, le terme de droite de la suite exacte ci-dessus est nul [lemme 1 (vii)]. Noter que la proposition 8 résulte aussi de cette suite exacte et de R 9. □

4. R-équivalence et équivalence rationnelle

Rappelons la définition de la R-équivalence (*cf.* l'introduction et [20], chap. II, § 14). Soit X un schéma algébrique sur le corps k. On dit que deux points rationnels x et y de X sont *directement* R-*équivalents*, si on peut les joindre par un arc k-rationnel, i. e. s'il existe une k-application rationnelle φ de $\mathbf{P}_k^1$ dans X telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(\infty) = y$; on le note $x \sim y$. On dit que x et y sont R-*équivalents* lorsqu'on peut les joindre par un nombre fini d'arcs k-rationnels, i. e. s'il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans $X(k)$ tels que $x \sim x_1 \sim \ldots \sim x_n \sim y$. On note $X(k)/R$ l'ensemble des classes, pour la R-équivalence, de points rationnels du k-schéma X. Si K est une extension de k, on note simplement $X(K)/R$ l'ensemble $X_K(K)/R$ des classes pour le K-schéma X_K. Tout k-morphisme $X \to Y$ induit une application $X(k)/R \to Y(k)/R$. Si K/k est une extension finie séparable et si X est un K-schéma algébrique, la définition même du foncteur « descente » $R_{K/k}$ montre que $(R_{K/k} X)(k)/R = X(K)/R$. Pour deux k-schémas X et Y, l'application naturelle $(X \times_k Y)(k)/R \to X(k)/R \times Y(k)/R$ est une bijection. Notons enfin (*voir* [20]) que, si k est infini et si X est une k-variété spéciale, i. e. une k-variété dont tout point possède un voisinage ouvert k-isomorphe à un ouvert d'un espace affine, alors $X(k)/R = \{0\}$.

PROPOSITION 10. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Soient* X *et* Y *deux k-variétés complètes et lisses. Toute k-application rationnelle f de* X *dans* Y *définit une application* $f_R : X(k)/R \to Y(k)/R$ *qui coïncide avec l'application naturelle là où f est définie et qui dépend fonctoriellement de f. Tout k-isomorphisme birationnel induit une bijection* $X(k)/R \xrightarrow{\approx} Y(k)/R$, *i. e.* $X(k)/R$ *est un invariant k-birationnel des k-variétés complètes et lisses, invariant trivial pour* X *k-rationnelle.*

Comme cet invariant est « additif », c'est même un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable.

Montrons d'abord que l'éclatement $X \to Y$ d'un sous-k-schéma fermé Z de Y, lisse et de codimension $r+1$, induit une bijection $X(k)/R \to Y(k)/R$. Cette application est surjective, puisque la fibre d'un point rationnel de Y est un espace projectif sur k de dimension 0 ou r. Ainsi, dans une telle fibre tous les points rationnels sont R-équivalents et, pour montrer l'injectivité de f_R, il suffit de prouver le résultat suivant : tout arc k-rationnel joignant deux points y' et y'' de $Y(k)$ se relève dans X en une chaîne finie d'arcs k-rationnels joignant successivement des points rationnels $x', \ldots, x''$ avec x' au-dessus de y' et x'' au-dessus de y''. Comme Y est complète, un arc k-rationnel joignant y' et y'' est l'image d'un k-morphisme $\varphi : \mathbf{P}_k^1 \to Y$ tel que $\varphi(0) = y'$ et $\varphi(\infty) = y''$. Si cet arc n'est pas contenu dans Z, φ admet un k-relèvement unique $\psi : \mathbf{P}_k^1 \to X$, d'où l'assertion. Sinon, supposons d'abord que y' et y'' appartiennent à un même ouvert U de Z, tel que $U \times_Y X$ soit k-isomorphe à $U \times_k \mathbf{P}_k^r$: il suffit alors de considérer, pour z fixé dans $\mathbf{P}^r(k)$, le k-morphisme $\psi : \mathbf{P}_k^1 \to X$ défini, sur un ouvert, par $t \mapsto [\varphi(t), z]$. En général, Z étant lisse, il existe un recouvrement fini de Z par des ouverts ayant la propriété ci-dessus, ce qui permet d'obtenir le relèvement annoncé.

Montrons ensuite qu'un morphisme k-birationnel $X \to Y$ définit une bijection $X(k)/R \xrightarrow{\approx} Y(k)/R$. D'après [15], il existe un diagramme commutatif de morphismes k-birationnels

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \arrow[dl] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont composées d'un nombre fini d'éclatements du type étudié ci-dessus. D'après l'étude initiale, les deux verticales du diagramme

$$\begin{tikzcd} X'(k)/R \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & Y'(k)/R \arrow[d, "\approx"] \arrow[dl] \\ X(k)/R \arrow[r] & Y(k)/R \end{tikzcd}$$

sont bijectives; on en déduit que la diagonale l'est aussi, donc également les horizontales (type d'argument utilisé par Deligne).

Soit f une k-application rationnelle de X dans Y. Soit $\mathscr{B}_f$ la catégorie des triples (Z, π, g), où Z désigne une k-variété complète et lisse et π et g des k-morphismes rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

π étant supposé birationnel. Un tel triple définit une application $X(k)/R \to Y(k)/R$ par $g_R \circ \pi_R^{-1}$. Il est clair qu'un autre triple dominant le précédent définit la même application. Comme, d'après [15], la catégorie $\mathscr{B}_f$ est non vide et filtrante, la procédure indiquée permet de définir sans ambiguïté l'application f_R. □

COROLLAIRE. — *Soient k de caractéristique* 0 *et* X *une k-variété lisse :*

(i) *toute k-application rationnelle f de* X *dans une k-variété lisse et complète* Y *définit une application* $f_R : X(k)/R \to Y(k)/R$*;*

(ii) *soit* $X \xrightarrow{i} Y$ *une k-compactification lisse de* X*. Le fait que l'application* $i_R : X(k)/R \to Y(k)/R$ *soit bijective* (*resp. injective, surjective*) *ne dépend pas de la compactification choisie.*

Soit d'abord $\mathscr{C}_X$ la catégorie des k-compactifications lisses $i : X \to X'$ de X. Un objet de $\mathscr{C}_X$ définit f_R *via* $X(k)/R \to X'(k)/R \to Y(k)/R$ par application de la proposition à l'application rationnelle de X' dans Y définie par f. Comme, d'après [15], $\mathscr{C}_X$ est non vide et filtrante, on voit que f_R ne dépend pas du choix de la compactification.

Soient i et i' deux compactifications de X. Si i' domine i *via* $j : Y' \to Y$, on a $i_R = j_R \circ i'_R$ avec j_R bijective d'après la proposition. L'assertion (ii) résulte alors du fait que $\mathscr{C}_X$ est filtrante. □

Lorsque X est k-unirationnelle, il existe une R-classe partout dense, mais il n'est pas évident *a priori* que toute R-classe soit dense.

PROPOSITION 11. — *Soit k un corps infini. Soit* G *un k-groupe algébrique linéaire connexe, k-unirationnel* (*hypothèse toujours vérifiée pour k parfait ou* G *réductif*). *Si* U *est un ouvert non vide de* G*, l'application naturelle*

$$U(k)/R \to G(k)/R$$

est une bijection.

Par hypothèse, il existe un k-morphisme dominant φ d'un ouvert Ω de $\mathbf{P}_k^n$ dans G. Quitte à faire une translation par un élément de G (k), on peut supposer que l'élément neutre e de G (k) appartient à l'image de $\Omega(k)$ par φ. L'ensemble Z des points de G (k) directement R-équivalents à e contient $\varphi[\Omega(k)]$ et, comme k est infini, Z est donc Zariski-dense. Par translation, on en déduit que toute R-classe est dense. L'application $U(k)/R \to G(k)/R$ est donc surjective.

Soient x et y deux points de U (k) liés dans G (k) par une chaîne d'équivalences directes

$$x = x_0 \sim x_1 \sim \ldots \sim x_n \sim x_{n+1} = y.$$

Comme Z est dense, il rencontre l'intersection des ouverts Ux_i^{-1} pour $0 \leqq i \leqq n+1$. Soit g un élément de Z appartenant à cette intersection. Par définition de Z, $x \sim gx$ et $y \sim gy$, d'où la chaîne d'équivalences directes

$$x \sim gx = gx_0 \sim gx_1 \sim \ldots \sim gx_n \sim gx_{n+1} = gy \sim y,$$

avec, pour tout i, gx_i dans $U(k)$. Les points x et y sont donc R-équivalents dans U et l'application $U(k)/R \to G(k)/R$ est injective. □

COROLLAIRE. — *Soit k infini. Soient* G *et* G′ *deux k-groupes algébriques linéaires connexes, k-unirationnels. Si* G *et* G′ *sont k-birationnellement équivalents, alors il existe une bijection*

$$G(k)/R \xrightarrow{\approx} G'(k)/R.$$

C'est un corollaire immédiat de la proposition, puisqu'il existe dans G un ouvert non vide, k-isomorphe à un ouvert de G′. □

Un argument direct montre que la structure de groupe de $G(k)$ est compatible avec la R-équivalence. On peut, par translation, supposer que la bijection de $G(k)/R$ sur $G'(k)/R$ respecte les éléments neutres. Mais il n'est pas évident *a priori* qu'elle respecte alors les structures de groupe.

Pour une k-variété X quelconque, il est plus commode de considérer, au lieu de la R-équivalence sur $X(k)$, l'*équivalence rationnelle* sur le groupe $Z_0(X)$ des 0-cycles de X : c'est le groupe libre engendré par les points fermés de X et tout sous-k-schéma fermé fini Y de X définit un 0-cycle positif $[Y]$. On dit qu'un 0-cycle W est rationnellement équivalent à 0, s'il existe un ouvert U de $\mathbf{P}_k^1$, deux points rationnels a et b de U et un cycle Z de la k-variété $U \times_k X$, fini et plat sur U, tels que $W = Z_a - Z_b$, où l'on désigne par Z_a (resp. Z_b) le 0-cycle de X que définit, par projection sur X, la fibre de Z en a (resp. b). Les 0-cycles rationnellement équivalents à 0 forment un sous-groupe $Z_0^{\mathrm{rat}}(X)$ de $Z_0(X)$ et le quotient $A_0(X)$ est le groupe des 0-cycles de X modulo l'équivalence rationnelle. Notons que, dans la définition ci-dessus, on peut se limiter, lorsque X est complète, à $U = \mathbf{P}_k^1$, l'adhérence schématique $\bar{Z}$ de Z dans $\mathbf{P}_k^1 \times_k X$ étant encore un cycle fini et plat au-dessus de $\mathbf{P}_k^1$ ([14] EGA IV 2.8.5, 13.2.12 et 8.11.1).

L'application naturelle $X(k) \to A_0(X)$ définit l'équivalence rationnelle sur $X(k)$, *a priori* moins fine que la R-équivalence. Il revient au même de considérer, O étant fixé dans X (k), l'application de X (k) dans le sous-groupe des classes de 0-cycles de degré 0 donnée par $P \mapsto P - O$.

Soit S un k-tore quelconque. On peut prolonger l'accouplement (défini par fonctorialité) $X(k) \times H^1(X, S) \to H^1(k, S)$ en un accouplement

$$Z_0(X) \times H^1(X, S) \to H^1(k, S),$$

en prolongeant par linéarité l'accouplement ainsi défini pour un point fermé $P \subsetneq X$ de corps résiduel K : on considère l'application composée de la flèche $H^1(X, S) \to H^1(K, S)$ définie par fonctorialité et de la norme $N_{K/k} : H^1(K, S) \to H^1(k, S)$. Si l'on introduit la notion de trace d'un torseur ([9], SGA 4, XVII 6.3.21) $\mathrm{Tr}_u : H^1(Y', S) \to H^1(Y, S)$ pour u fini localement libre $Y' \to Y$, on trouve que, pour un 0-cycle défini par un sous-k-schéma fini $Y \subsetneq X$, l'accouplement ci-dessus s'obtient par composition de l'application naturelle $H^1(X, S) \to H^1(Y, S)$ et du morphisme trace $\mathrm{Tr}_{Y/k} : H^1(Y, S) \to H^1(k, S)$.

PROPOSITION 12. — *Soient* S *un tore défini sur le corps* k *et* X *une* k*-variété vérifiant au moins l'une des conditions suivantes :*

(i) S *est un* k*-tore flasque;*

(ii) X *est une* k*-variété complète.*

L'accouplement naturel entre les 0*-cycles de* X *et les torseurs sur* X *sous* S *passe alors au quotient par l'équivalence rationnelle et définit donc un accouplement*

$$A_0(X) \times H^1(X, S) \to H^1(k, S)$$

et, a fortiori, *un accouplement*

$$X(k)/R \times H^1(X, S) \to H^1(k, S).$$

Soient en effet U un ouvert de $\mathbf{A}_k^1$ contenant un point rationnel a et Z un sous-k-schéma fermé de $U \times_k X$, fini et plat sur U. En vertu de la compatibilité de la trace Tr au changement de base ([9], SGA 4, XVII 6.3.26), on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
H^1(X, S) & & \\
\downarrow & & \\
H^1(Z, S) & \longrightarrow & H^1(Z_a, S) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} \\
H^1(U, S) & \longrightarrow & H^1(a, S) = H^1(k, S)
\end{array}$$

qui donne précisément l'application $H^1(X, S) \to H^1(k, S)$ définie par $[Z_a]$. Si S est flasque, ou si $U = \mathbf{A}_k^1$, ce qui est loisible pour X complète, l'application naturelle $H^1(k, S) \to H^1(U, S)$ est bijective (prop. 8 et R 9), si bien que l'application $H^1(X, S) \to H^1(k, S)$ définie par $[Z_a]$ ne dépend pas de $a \in U(k)$. □

COROLLAIRE. — *On conserve les mêmes hypothèses sur* X *et* S. *Supposons qu'il existe un torseur sur* X *sous* S *tel que l'application* $X(k)/R \to H^1(k, S)$ *qu'il définit soit injective. Alors, l'équivalence rationnelle coïncide sur* X (k) *avec la* R*-équivalence.*

D'après la proposition ci-dessus, l'application $X(k) \to H^1(k, S)$ définie par le torseur se factorise par $X(k)/R \to X(k)/\mathrm{Rat} \to H^1(k, S)$, d'où l'assertion. □

5. La R-équivalence sur un tore

On appelle *résolution flasque* d'un k-tore T toute suite exacte de k-tores $1 \to S \to E \to T \to 1$ telle que E soit quasi trivial et S flasque et *résolution quasi triviale* une telle suite où S est quasi trivial. La dualité entre $\mathscr{T}_k$ et $\mathscr{L}_g$ établit une bijection entre les résolutions flasques de T et celles du g-module $\hat{T}$. Si T est déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G, la dualité établit une bijection entre les résolutions flasques de T dans $\mathscr{T}_{K/k}$ et celles de $\hat{T}$ dans $\mathscr{L}_G$. Il résulte des lemmes 3, 4 et 5 que T admet une résolution flasque (qu'on peut prendre dans $\mathscr{T}_{K/k}$) essentiellement unique et universelle. De façon précise, si $1 \to S \to E \to T \to 1$ et $1 \to S' \to E' \to T \to 1$ sont deux résolutions flasques de T, il existe deux k-tores quasi triviaux F et F′ tels que $S \times F$ et $S' \times F'$ soient k-isomorphes. On en déduit en particulier $H^1(k, S) \xrightarrow{\approx} H^1(k, S')$ et, lorsque k est un corps global, $Ш^2(k, S) \xrightarrow{\approx} Ш^2(k, S')$ et $Ш^2(G, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} Ш^2(G, \hat{S}')$: en effet, pour un tore quasi trivial E dans $\mathscr{T}_{K/k}$, $Ш^2(k, E) = Ш^2(G, \hat{E}) = 0$ (*cf.* § 2). Le caractère « versel » d'une résolution flasque (lemme 4) se traduit par l'énoncé suivant : *si* $1 \to S \to E \xrightarrow{p} T \to 1$ *est une résolution flasque de* T, *tout k-morphisme* $M \to T$ *d'un tore quasi trivial* M *dans* T *se factorise par p.*

THÉORÈME 2. — *Soit* T *un k-tore. Toute résolution flasque* $1 \to S \to E \to T \to 1$ *de* T *induit un isomorphisme de groupes*

$$T(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S).$$

Chaque R-*classe de* $T(k)$ *est paramétrée par l'ensemble* $E(k)$ *des points rationnels de la k-variété* E *qui est un ouvert d'un espace affine. Deux points de* $T(k)$ *qui sont* R-*équivalents le sont directement.*

La suite exacte $1 \to S \to E \to T \to 1$ définit un torseur E sur T sous S, localement trivial pour la topologie étale. Soit ζ sa classe dans $H^1(T, S)$. Le cobord $T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, S)$ déduit de la résolution flasque n'est autre que l'application $x \mapsto x^*(\zeta)$ obtenue par fonctorialité. Le tore S étant flasque, on sait déjà (prop. 12) que cette application $T(k) \to H^1(k, S)$, définie par le torseur E, est constante sur chaque R-classe : si U est un ouvert de $\mathbf{A}_k^1$ tel que $U(k) \neq \varnothing$ et si φ est un k-morphisme de U dans T, l'application composée $U(k) \to T(k) \to H^1(k, S)$ est l'application déduite, par fonctorialité, du torseur $E \times_T U$ sur U sous S; comme ce torseur est « constant » (prop. 8), l'application $U(k) \to H^1(k, S)$ qu'il définit est également constante. Ainsi, les R-classes de $T(k)$ sont contenues dans les fibres de l'application $T(k) \to H^1(k, S)$. Comme E est quasi trivial, $H^1(k, E) = 0$ (th. 90) et on a la suite exacte

$$E(k) \to T(k) \xrightarrow{\partial} H^1(k, S) \to H^1(k, E) = 0.$$

L'application ∂ est donc surjective. Chacune de ses fibres est translatée par un élément de T (k) de la fibre de l'élément neutre qui est l'image de E (k). Comme, E étant un ouvert d'un espace affine, tous les points de E (k) sont directement R-équivalents, il en est de même des points de la fibre de l'élément neutre de T (k) et aussi, par translation, des points de toute autre fibre de ∂. □

COROLLAIRE 1. — *Soient k un corps de caractéristique* 0 *et* T *un k-tore déployé par l'extension galoisienne* K/*k de groupe* G. *Soit* X *une k-compactification lisse de* T. *Alors, si* S *est le k-tore dual du* G-*module* Pic X_K, *on a un isomorphisme*

$$T(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S).$$

Précisons que le morphisme ci-dessus se déduit de la suite exacte de tores obtenue par dualité à partir de la suite exacte de G-modules

$$0 \to \hat{T} \to M \to \operatorname{Pic} X_K \to 0, \tag{B}$$

où M désigne le G-module de permutation des diviseurs de X_K à support hors de T_K. L'assertion est une conséquence immédiate du théorème ci-dessus et de la proposition 6 qui assure que la suite ci-dessus est une résolution flasque de $\hat{T}$. □

COROLLAIRE 2. — *Soit* T *un k-tore. Si k est de type fini sur le corps premier, ou un corps local à corps résiduel fini, l'ensemble des classes* $T(k)/R$ *est fini.*

En effet, $H^1(k, S)$ est fini dans le premier cas d'après le théorème 1, S étant flasque, et dans le second cas d'après R 8. □

Noter que, sur **R**, tout tore T est produit de $\mathbf{G}_m$, $R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\,\mathbf{G}_m$ et $R^1_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\,\mathbf{G}_m$: c'est donc un ouvert d'un $\mathbf{A}^n_{\mathbf{R}}$ et $T(\mathbf{R})/R = 0$. On a d'ailleurs le résultat suivant :

COROLLAIRE 3. — *Si* T *est déployé par une extension métacyclique,* $T(k)/R = 0$.

Comme $\hat{S}$ est un G-module flasque, il est inversible si G est métacyclique (prop. 2). Il existe donc un k-tore S′ avec $S \times S'$ quasi trivial, ce qui implique $H^1(k, S) = 0$. □

COROLLAIRE 4. — *Le groupe* $T(k)/R$ *est un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-tores* T. *C'est un groupe de torsion. Si* T *est déployé par l'extension galoisienne finie* K/*k de groupe* G, *le groupe* $T(k)/R$ *est annulé par la multiplication par n*/*e, où n est l'ordre de* G *et e son exposant.*

L'exposant e est le p.p.c.m. des ordres des éléments de G : il est égal à n, si et seulement si G est métacyclique. Pour prouver que n/e annule $T(k)/R$, il suffit de traiter le cas d'un p-groupe : en effet, si G′ est un p-sous-groupe de Sylow de G et k' le sous-corps des éléments de k fixes par G′, $n(G')/e(G')$ est la p-partie de $n(G)/e(G)$ et la restriction $H^1(k, S)(p) \to H^1(k', S)$ est injective. Si G est un p-groupe, il existe un sous-groupe cyclique d'ordre e. L'extension correspondante L/k est de degré n/e. L'application composée $T(k)/R \to T(L)/R \to T(k)/R$ correspondant à la composée de l'inclusion naturelle $T \to R_{L/k}T$ et de la norme $N_{L/k} : R_{L/k}T \to T$ est la multiplication par le degré n/e. Or elle vaut 0, car, d'après le corollaire précédent, $T(L)/R = 0$. Noter que ce même type d'argument donne directement que $T(k)/R$ est annulé par n, puisque, T_K étant trivial, $T(K)/R = 0$.

Le fait que le *groupe* $T(k)/R$ soit un invariant résulte aussitôt du théorème ci-dessus et de la proposition 6 : en effet, $H^1(k, S)$ ne dépend que de $[\hat{S}]$, puisque $H^1(k, E) = 0$ pour un tore E quasi trivial. Noter qu'il est évident *a priori* que $T(k)/R$ est un groupe. On sait également déjà que l'ensemble $T(k)/R$ est un invariant : pour k infini, *voir* le corollaire de la proposition 11 et, pour k fini, $T(k)/R = 0$ (conséquence directe d'un théorème de Lang, *cf.* corollaire 5). Mais le fait que le *groupe* $T(k)/R$ soit un invariant ne semble pas évident *a priori.* □

COROLLAIRE 5. — *Soit* T *un k-tore déployé par l'extension galoisienne* K/k *de groupe* G. *Soit* S *dans* $\mathscr{T}_{K/k}$ *tel que* $[\hat{S}] = \rho(\hat{T})$:

(i) *si k est un corps fini, ou, plus généralement, un corps de dimension cohomologique* $\leqq 1$:

$$T(k)/R = 0;$$

(ii) *si k est un corps local à corps résiduel fini,* $T(k)/R$ *s'identifie au dual du groupe fini* $H^1(G, \hat{S})$;

(iii) *si k est un corps de nombres, ou un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini, on a une suite exacte naturelle de groupes finis*

$$0 \to Ш^2(G, \hat{S})^{\sim} \to T(k)/R \to Ч^1(G, \hat{S})^{\sim} \to 0.$$

Pour les notations $Ш^i$ et $Ч^i$, *cf.* le paragraphe 2. Observons que, $\hat{S}$ étant flasque, $H^1(G^v, \hat{S}) = 0$ pour presque toute place v de k; ainsi, $Ч^1(G, \hat{S})$ est bien un groupe fini. Précisons que la notation $\tilde{A}$ désigne, pour un groupe abélien fini A, son dual $\mathrm{Hom}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Les résultats ci-dessus permettent le calcul explicite de $T(k)/R$ dans des cas particuliers (*cf.* § 6 et 8) : on choisit, en général, pour K/k la sous-extension finie de $\bar{k}/k$ correspondant à $\mathfrak{g}_{\hat{T}}$.

D'après le théorème, $T(k)/R = H^1(k, S) = H^1(K/k, S)$. La démonstration consiste donc à évaluer $H^1[G, S(K)]$. Soient H un sous-groupe invariant ouvert de G agissant trivialement sur $\hat{S}$ et $\hat{T}$ et L/k l'extension correspondante : l'inflation définit des isomorphismes $H^1[G/H, S(L)] \xrightarrow{\approx} H^1[G, S(K)]$, $H^1(G/H, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} H^1(G, \hat{S})$, $Ч^1(G/H, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} Ч^1(G, \hat{S})$, $Ш^2(G/H, \hat{S}) \xrightarrow{\approx} Ш^2(G, \hat{S})$ (*cf.* § 2), compatibles avec les accouplements définissant les morphismes « naturels » de l'énoncé (*cf.* ci-après). On peut donc supposer G *fini.*

L'assertion (i) résulte de la nullité de $H^1(k, S)$ pour un corps k de dimension cohomologique $\leqq 1$ et un k-tore S quelconque ([28], résultat dû à Lang [17] pour k fini). On peut prouver (i) sans le théorème, en considérant la norme $R_{K/k}T \xrightarrow{N_{K/k}} T$, qui reste surjective sur les points rationnels, son noyau N vérifiant $H^1(k, N) = 0$ d'après [28] (c'est un tore).

Pour k local, la composée $H^1[G, S(K)] \times H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\cup} H^2(G, K^*) \xrightarrow{\mathrm{inv}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ du cup-produit $\cup$ et de inv_k établit une dualité (de Tate-Nakayama [21]) entre les groupes finis $H^1[G, S(K)]$ et $H^1(G, \hat{S})$.

Dans le cas global, soient A_K (resp. I_K, C_K) l'anneau des adèles (resp. le groupe des idèles, celui des classes d'idèles) de K, $S(A_K)$ le G-module $\mathrm{Hom}(\hat{S}, I_K)$ et $S(C_K)$ le G-module $S(A_K)/S(K) = \mathrm{Hom}(\hat{S}, C_K)$. Soit $i \in \mathbf{Z}$. Pour une place v de k, on note w un prolongement à K et G^v son groupe de décomposition. Le morphisme φ : $H^i[G, S(A_K)] \to H^i[G, S(C_K)]$ s'écrit encore $\coprod_v H^i[G^v, S(K_w)] \to H^i[G, S(C_K)]$. Dans le diagramme commutatif ci-dessous (*cf.* [32]) :

$$\begin{array}{ccccccc}
[\coprod_v H^i(G^v, S(K_w))] & \times & [\prod_v H^{2-i}(G^v, \hat{S})] & \xrightarrow{\cup} & \coprod_v H^2(G^v, K_w^*) & \xrightarrow{\Sigma\, \mathrm{inv}_v} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \| \\
H^i[G, S(C_K)] & \times & H^{2-i}(G, \hat{S}) & \xrightarrow{\cup} & H^2(G, C_K) & \xrightarrow{\mathrm{inv}} & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}
\end{array}$$

on désigne par $\cup$ le cup-produit, par μ la restriction, par $\sum \mathrm{inv}_v$ la somme des invariants locaux et par inv l'invariant global. D'après Tate-Nakayama ([21], [32]), les deux applications composées horizontales sont des accouplements non dégénérés. Ainsi, l'application duale de φ est la restriction μ et la suite exacte

$$\hat{H}^0[G, S(A_K)] \to \hat{H}^0[G, S(C_K)] \to H^1[G, S(K)] \to H^1[G, S(A_K)] \to H^1[G, S(C_K)]$$

donne l'extension « naturelle »

$$0 \to Ш^2(G, \hat{S})^{\sim} \to H^1[G, S(K)] \to Ч^1(G, \hat{S})^{\sim} \to 0. \quad \square$$

Remarque.

R 10. Pour un tore S défini sur un corps global k et déployé par l'extension galoisienne finie K/k de groupe G, une condition nécessaire et suffisante de finitude de $H^1(k, S)$ est la nullité de $H^1(G', \hat{S})$ pour tout sous-groupe cyclique G' de G (c'est le cas pour S flasque et S coflasque). En effet, la finitude de $H^1(k, S)$ équivaut à celle de $Ч^1(G, \hat{S})$, i. e. à la nullité de $H^1(G^v, \hat{S})$ pour presque toute place v de k. Or, les places v telles que G^v soit non cyclique sont en nombre fini et celles pour lesquelles G^v est conjugué d'un sous-groupe cyclique G' donné sont en nombre infini, d'après Čebotarev. □

COROLLAIRE 6. — *Soit* G *un groupe algébrique linéaire connexe, défini sur un corps* k *fini ou, plus généralement, sur un corps parfait de dimension cohomologique* $\leqq 1$. *Alors*

$$G(k)/R = 0.$$

Le corps k étant parfait, le radical unipotent N de G est défini et déployé sur k. La fibration $G \to G/N$ est donc triviale sur k et, N étant un espace affine, $N(k)/R = 0$. On a donc une bijection $G(k)/R \xrightarrow{\approx} (G/N)(k)/R$, ce qui permet de supposer G réductif. Comme k est parfait de dimension $\leqq 1$, il résulte (par un argument de Serre) d'un théorème de Steinberg ([29], th. 1.9), dû à Lang [17] pour k fini, que G possède un sous-groupe de Borel B défini sur k. Soient T un tore maximal de B défini sur k, U le radical unipotent de B, défini et déployé sur k, et U^- l'unipotent opposé. D'après Borel-Tits

([2], prop. 6.25), l'application produit $U \times U^- \times B \to G$ est surjective sur les points rationnels. Or $U(k)/R = U^-(k)/R = 0$ et, comme $B = T \times U$, $B(k)/R = T(k)/R = 0$ d'après le corollaire 5 (i). Ainsi $G(k)/R = 0$. □

PROPOSITION 13. — *Soit* T *un tore défini sur le corps* k :

(i) *la* R-*équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur* $T(k)$;

(ii) *si* k *est de caractéristique* 0 *et si* $T \to X$ *est une* k-*compactification lisse de* T, *l'application*

$$T(k)/R \to X(k)/R$$

est bijective et la R-*équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur* $X(k)$.

L'assertion (i) résulte aussitôt du corollaire de la proposition 12, dont les hypothèses sont vérifiées d'après le théorème 2. Pour montrer que l'application $T(k)/R \to X(k)/R$ est bijective, on utilise le lemme suivant :

LEMME 12. — *Si* T *est anisotrope*, $X(k) = T(k)$.

Supposons connue une k-compactification particulière X_1, non nécessairement lisse, pour laquelle $X_1(k) = T(k)$. On sait [15] qu'étant donné X_1 et X, il existe, dans la catégorie des k-compactifications de T, une k-compactification lisse X' qui domine X et X_1; on peut même supposer le morphisme $X' \to X$ composé d'éclatements de sous-k-variétés lisses (ne rencontrant pas T). Comme X_1 n'a pas de point rationnel en dehors de T, il en est de même *a fortiori* pour X'. Si X avait un point rationnel hors de T, il en serait de même à chaque éclatement, la fibre d'un point rationnel étant un espace projectif $\mathbf{P}_k^r$.

Exhibons X_1. Le tore T est déployé par une extension galoisienne finie K/k de groupe G. Comme $\hat{T}$ est quotient d'un G-module libre de rang fini, T se plonge dans un $R_{K/k}\mathbf{G}_m^n$ et même dans le noyau de la norme $R_{K/k}\mathbf{G}_m^n \to \mathbf{G}_m^n$ puisqu'il est anisotrope. L'adhérence de $R_{K/k}^1\mathbf{G}_m$ dans $R_{K/k}\mathbf{P}^1$ n'a pas de point rationnel « à l'infini » : si $\{e_1, \ldots, e_d\}$ désigne une base de K sur k, cette adhérence est définie par l'équation $N_{K/k}(x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d) = t^d$ et, pour $(x_1, \ldots, x_d)$ dans k^d, cette norme n'est nulle que pour $x_1 = \ldots = x_d = 0$. Il en est donc de même pour l'adhérence X_1 de T dans $(R_{K/k}\mathbf{P}^1)^n$. □

Il résulte aussitôt de ce lemme que, pour T anisotrope, l'application $T(k)/R \to X(k)/R$ est bijective. Pour T quelconque, il existe une suite exacte de tores $1 \to T' \to T \to T'' \to 1$ avec T' trivial et T'' anisotrope. La fibration $T \to T''$ est localement triviale (th. 90). Soit X' (resp. X'') une k-compactification lisse de T' (resp. T''). Il existe donc un ouvert non vide U de T admettant pour k-compactification lisse $X' \times_k X''$: on peut prendre U de la forme $T' \times_k U''$ où U'' est un ouvert convenable de T''. Comme $T'(k)/R = X'(k)/R = 0$ (*cf.* prop. 10), l'application $U(k)/R \to (X' \times_k X'')(k)/R$ coïncide avec l'application $U''(k)/R \to X''(k)/R$. Elle est donc bijective, car il en est ainsi des applications $U''(k)/R \to T''(k)/R$ (prop. 11) et $T''(k)/R \to X''(k)/R$ (conséquence du lemme 12). Comme $U \to X$ est une autre k-compactification lisse de U, l'application

$$U(k)/R \to X(k)/R$$

est également bijective [corollaire de la proposition 10, (ii)]; il en est donc de même de l'application $T(k)/R \to X(k)/R$, puisque l'application $U(k)/R \to T(k)/R$ est bijective (prop. 11).

Considérons enfin une résolution flasque $1 \to S \to E \to T \to 1$ du tore T. Elle définit un torseur E sur T sous S qui se prolonge, S étant flasque (prop. 9), en un torseur $\tilde{E}$ sur X sous S. Celui-ci définit (prop. 12) une application $X(k)/R \to H^1(k, S)$ qui, composée avec la bijection $T(k)/R \to X(k)/R$, redonne l'application $T(k)/R \to H^1(k, S)$ définie par le torseur E. Comme cette dernière est bijective (th. 2), il en est de même de l'application $X(k)/R \to H^1(k, S)$ définie par le torseur $\tilde{E}$. Il en résulte que la R-équivalence et l'équivalence rationnelle coïncident sur $X(k)$ (corollaire de la proposition 12). □

PROPOSITION 14. — *Soit* G *un k-groupe algébrique linéaire connexe possédant un sous-groupe de Borel* B *défini sur k. On suppose k parfait ou* G *réductif :*

(i) *si* T *est un tore maximal de* B *défini sur k, l'application*

$$T(k)/R \to G(k)/R$$

est un isomorphisme de groupes. L'équivalence rationnelle et la R-*équivalence coïncident sur* G (k);

(ii) *si k est de type fini sur le corps premier,* $G(k)/R$ *est fini;*

(iii) *soit k de caractéristique* 0. *Si* $G \to X$ *est une k-compactification lisse de* G, *l'application* $G(k)/R \to X(k)/R$ *est bijective et l'équivalence rationnelle et la* R-*équivalence coïncident sur* X (k).

On va également prouver l'assertion suivante :

(i)′ *il existe un torseur sur* G *sous un tore flasque* S, *tel que l'application*

$$G(k)/R \to H^1(k, S)$$

qu'il définit soit un isomorphisme.

La question se pose de savoir si l'assertion (ii) est encore vraie sans l'hypothèse « G quasi déployé ».

Si k est parfait, on peut se ramener au cas où G est réductif en le divisant par son radical unipotent U, la fibration $G \to G/U$ étant triviale sur k et U étant un espace affine. On peut également supposer k infini, le cas fini étant trivial d'après le corollaire 6 du théorème 2. Soient B et T comme dans l'énoncé. Le radical unipotent N de B est défini et déployé sur k (*cf.* [2], 3.13 et 3.18). Il en est de même du sous-groupe unipotent opposé N^-. L'application produit $N^- \times T \times N \to G$ est une k-immersion ouverte ayant pour image la « grosse cellule » Ω. On en déduit aussitôt que l'application $T(k)/R \to G(k)/R$ est bijective (prop. 11). Pour obtenir (i)′, considérons le torseur E sur T défini par une résolution flasque $1 \to S \to E \to T \to 1$. Il se prolonge trivialement à $N^- \times T \times N$, donc à Ω. Puis, S étant flasque, il se prolonge en un torseur E_G sur G et, en caractéristique 0, en un torseur E_X sur X (prop. 9). Ces torseurs successifs définissent, S étant flasque (prop. 12), des applications de $T(k)/R$, $\Omega(k)/R$, $G(k)/R$ et $X(k)/R$ dans $H^1(k, S)$ compatibles avec les flèches naturelles $T(k)/R \to \Omega(k)/R \to G(k)/R \to X(k)/R$. Comme les applications $T(k)/R \to H^1(k, S)$ et $T(k)/R \to G(k)/R$ sont bijectives [th. 2 et (i)], il en est de même de l'application $G(k)/R \to H^1(k, S)$ définie par E_G, d'où (i)'. En caractéristique 0, on peut considérer comme k-compactification lisse de $N^- \times T \times N$ le produit de k-compactifications lisses des facteurs. On obtient ainsi une k-compactification lisse X_0 de Ω pour laquelle $\Omega(k)/R \to X_0(k)/R$ est bijective (prop. 13); il en est donc de même de $\Omega(k)/R \to X(k)/R$ (corollaire de la proposition 10). Ainsi, l'application $G(k)/R \to X(k)/R$ est bijective et le torseur E_X définit donc une bijection

$$X(k)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k, S).$$

La coïncidence entre l'équivalence rationnelle et la R-équivalence sur $G(k)$ et $X(k)$ résulte alors du corollaire de la proposition 12. □

COROLLAIRE. — *Soit k un corps de nombres ou un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini. Soit G un k-groupe algébrique linéaire connexe, supposé réductif en caractéristique non nulle. Alors, pour presque toute place v de k :*

$$G(k_v)/R = 0.$$

On peut se ramener au cas où G est réductif. Supposons d'abord G quasi déployé et soit K/k une extension galoisienne finie déployant G. D'après (i)', il existe un k-tore flasque S dans $\mathscr{T}_{K/k}$, tel que, pour toute extension k'/k, $G(k')/R$ soit égal à $H^1(k', S)$. Si Kk'/k' est cyclique, $S_{k'}$ est facteur direct d'un k'-tore quasi trivial (proposition 2, *voir* la démonstration du corollaire 3 au théorème 2), d'où $G(k')/R = H^1(k', S) = 0$. Ainsi, pour toute place v non ramifiée dans K/k, $G(k_v)/R = 0$.

Si G est réductif quelconque, considérons le groupe quasi déployé G_0 dont G est une forme interne. Les formes internes de G_0 sont classées par $H^1(k, G_0^{ad})$, où G_0^{ad} désigne le groupe adjoint. Le groupe G étant connexe, G_0^{ad} l'est aussi et un k-espace principal homogène sous G_0^{ad} a donc un point à valeurs dans k_v pour presque tout v (*cf.* [1], prop. 7.6). Autrement dit, G est k_v-isomorphe à G_0 pour presque toute place v, ce qui permet de conclure. □

Remarque.

R 11. Dans son livre [20] sur les surfaces cubiques, Manin pose un certain nombre de questions à propos de la R-équivalence sur les surfaces cubiques. Les résultats de ce paragraphe montrent qu'on peut en général y répondre dans le cas des tores, cas qui se révèle nettement plus simple que celui des surfaces cubiques. En particulier :

(i) il y a un théorème de finitude pour $T(k)/R$ dans le cas global (problème 11.12) et même dans le cas d'un corps de type fini sur le corps premier;

(ii) il est possible de paramétrer toute R-classe par un nombre fini de paramètres (problème 11.13), toujours le même d'ailleurs (*voir* aussi problème 46.3) : chaque R-classe est paramétrée par un ouvert d'un espace affine et on peut prendre le même ouvert pour toutes les classes; les « variétés de première descente » sont toutes isomorphes à cet ouvert et ont donc toutes des points rationnels, ce qui n'est pas le cas pour les surfaces cubiques (*voir* la fin du paragraphe 45);

(iii) le *groupe* $T(k)/R$ est un invariant birationnel (*voir* remarque 14.4);

(iv) le calcul de $T(k)/R$ est parfaitement effectif (remarque 14.5);

(v) l'invariant $\rho(T)$, égal en caractéristique 0 à $[\operatorname{Pic} X_K]$, détermine la classe de k-équivalence birationnelle stable de T [*cf.* 23.13 (iii)];

(vi) pour un tore sur un corps de nombres, la R-équivalence est localement presque partout triviale (*cf.* 44.2.5). □

6. Quelques calculs explicites de R-équivalence

Le calcul explicite de la R-équivalence sur un tore T, défini sur le corps k et déployé par l'extension galoisienne finie K/k de groupe G, se décompose en plusieurs étapes. On doit successivement :

(i) exhiber une résolution flasque $0 \to \hat{T} \to \hat{E} \to \hat{S} \to 0$ du G-module $\hat{T}$;

(ii) calculer $H^1(k, S)$;

(iii) expliciter le paramétrage $E(k) \to T(k)$ de la classe de l'élément neutre de $T(k)$;

(iv) exhiber, s'il en existe, une résolution quasi triviale de T.

Les étapes (i) et (iii) sont parfaitement effectives (*cf.* lemme 3). Le calcul de $H^1(k, S)$ est facile dans le cas local, un peu plus délicat pour un corps global (corollaire 5 du théorème 2).

a. LE CAS DE $R^1_{K/k}\,\mathbf{G}_m$ POUR K/k GALOISIENNE. — C'est le cas le plus simple et le plus intéressant. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 15. — *Soit* K/k *une extension galoisienne finie de groupe* G, *engendré par* $\{s_i\}_{1 \leq i \leq r}$. *Si* T *est le tore* $R^1_{K/k}\,\mathbf{G}_m$, *on trouve*

$$T(k)/R = H^{-1}(G, K^*).$$

De façon précise, l'application

$$R_{K/k}\,\mathbf{G}_m^r \to R^1_{K/k}\,\mathbf{G}_m,$$

définie sur le i-ième facteur par $x \mapsto s_i(x)/x$, *fournit une résolution flasque de* T.

Le paramétrage de l'élément neutre de $T(k) = K^{*1}$, sous-groupe de K^* formé des éléments de norme 1, est donc donné par l'application

$$(K^*)^r \to K^{*1},$$

définie par

$$(x_i)_{1 \leq i \leq r} \mapsto \prod_{1 \leq i \leq r} [s_i(x_i)/x_i].$$

Le G-module $\hat{T}^0$ est le noyau I_G de l'augmentation $\mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}$. Il est facile de voir que le morphisme ω :

$$L = \coprod_{1 \leq i \leq r} \mathbf{Z}[G].e_i \to \mathbf{Z}[G]$$

défini par $\omega(e_i) = s_i - 1$, a pour image I_G. Il résulte alors de la proposition 1 que le noyau Q de ce morphisme ω est coflasque. Par la dualité $M \mapsto M^0$ on en déduit une résolution flasque de $I_G^0 = J_G = \hat{T}$; puis, par la dualité $M \mapsto D(M)$, on obtient, en changeant s_i en s_i^{-1}, la résolution flasque de T indiquée dans l'énoncé. □

COROLLAIRE 1. — *Soit* $T = R^1_{K/k} G_m$ *pour* K/k *galoisienne finie de groupe* G :

(i) *si k est un corps* $\mathfrak{p}$*-adique,* $T(k)/R = H^3(G, \mathbf{Z})^{\sim}$;

(ii) *si k est un corps de nombres, on a la suite exacte naturelle*

$$0 \to Ш^4(G, \mathbf{Z})^{\sim} \to T(k)/R \to Ч^3(G, \mathbf{Z})^{\sim} \to 0.$$

Cela résulte aussitôt du corollaire 5 au théorème 2, moyennant l'identification $H^i(G', \hat{S}) = H^{i+2}(G', \mathbf{Z})$ pour tout i et tout sous-groupe G' de G avec $\hat{S} = Q^0$ (*cf.* prop. 1). □

COROLLAIRE 2. — *Pour un tore* T *défini sur* $\mathbf{Q}$ *et de dimension* 3, *l'ordre de* $T(\mathbf{Q})/R$ *peut être arbitrairement grand. D'autre part, il existe de tels tores* T *pour lesquels l'ordre de* $T(k)/R$ *n'est pas borné lorsque* $[k : \mathbf{Q}]$ *tend vers l'infini.*

Considérons en effet $T = R^1_{K/k} G_m$ pour K/k extension de corps de nombres galoisienne de groupe $G = V_4$, i. e. T du type $T_{a,b}$ considéré au corollaire de la proposition 7. Désignons par s le nombre de places v de k telles que $G^v = G$. Comme $H^3(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2$, on trouve que $Ч^3(G, \mathbf{Z})$ vaut 0 si $s \leqq 1$ et $\mathbf{Z}_2^{s-1}$ si $s \geqq 1$. D'autre part, $H^4(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2^3$ et l'on voit, par exemple par Künneth, que les morphismes de restriction relatifs à chacun des trois sous-groupes cycliques non nuls de G s'identifient aux trois projections $\mathbf{Z}_2^3 \to \mathbf{Z}_2$, ce qui implique $Ш^4(G, \mathbf{Z}) = 0$. Ainsi, $T(k)/R$ vaut 0 si $s \leqq 1$ et $\mathbf{Z}_2^{s-1}$ sinon.

Comme $s(\mathbf{Q}_{a,b}/\mathbf{Q})$ est arbitrairement grand, l'ordre de $T_{a,b}(\mathbf{Q})/R$ l'est également : considérer par exemple $T_{a,b}$ pour $a = 2$ et $b = p_1 \ldots p_n$, où les p_i sont des nombres premiers 2 à 2 distincts et congrus à 3 mod 8; alors $s = n+1$ pour n impair et n pour n pair, soit, en posant $n = 2m$ ou $2m-1$, $T_{2,b}(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2^{2m-1}$.

Considérons $T = T_{-1,2}$ sur $\mathbf{Q}$. Ici $s = 1$, car 2 est le seul nombre premier p pour lequel $G^p = G$ dans l'extension $\mathbf{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbf{Q}$. On a donc $T(\mathbf{Q})/R = 0$. Soient $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ des nombres premiers 2 à 2 distincts et congrus à 1 mod 8 (ce sont des carrés dans $\mathbf{Q}_2$) et $k_n = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. On trouve $s[k_n(i, \sqrt{2})/k_n] = 2^n$. L'ordre de $T(k_n)/R$ n'est donc pas borné. □

b. LE CAS DE $R^1_{K/k} G_m$ POUR K/k GALOISIENNE DE GROUPE $\mathfrak{S}_3$. — Le groupe $G = \mathfrak{S}_3 = \langle s, t \rangle$ avec $s^2 = t^3 = 1$ et $sts = t^2$ est métacyclique diédral. Le tore $R^1_{K/k} G_m$ admet donc, d'après la proposition 3, une résolution quasi triviale : il en est d'ailleurs de même pour tout tore déployé par K/k, car $F_{\mathfrak{S}_3} = 0$ (*cf.* § 1, R 5). On doit donc exhiber une telle résolution quasi triviale de $R^1_{K/k} G_m$, afin d'obtenir un paramétrage $E(k) \to K^{*1}$ du groupe K^{*1} des éléments de K de norme 1 dont le noyau se décrive simplement. La proposition 15 fournit, par exemple, la suite exacte

$$0 \to Q \to \mathbf{Z}[G]^2 \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

définie par $\omega(1, 0) = s-1$ et $\omega(0, 1) = t^2-1$. Le module Q est coflasque, mais non de permutation, car $\hat{H}^0(G, Q) = \mathbf{Z}_2$ et $H^2(G, Q) = \mathbf{Z}_6$. Toutefois, par addition de $\mathbf{Z}$, on en déduit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}[G/s] \oplus \mathbf{Z}[G/st] \oplus \mathbf{Z}[G/t] \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}[G]^2 \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

définie par

$$\begin{aligned} &\iota(1, 0, 0) = (1+s, 0, 1), && \eta(1, 0, 0) = s-1, \\ &\iota(0, 1, 0) = (1+st, -1-st, 0), && \eta(0, 1, 0) = t^2-1, \\ &\iota(0, 0, 1) = (0, 1+t+t^2, 1), && \eta(0, 0, 1) = 0. \end{aligned}$$

On note K_u le sous-corps fixe par l'élément u de G. La suite exacte ci-dessus fournit, par la double dualité $M \mapsto D(M^0)$, une résolution quasi triviale de $R^1_{K/k}\, \mathbf{G}_m$, qui, sur les points rationnels, donne la présentation suivante de K^{*1} :

$$1 \to K_s^* \times K_{st}^* \times K_t^* \xrightarrow{\rho} K^* \times K^* \times k^* \xrightarrow{\pi} K^{*1} \to 1,$$

où

$$\rho(x, y, z) = \left[xy, \frac{z}{y}, N_{K_s/k}(x).N_{K_t/k}(z) \right],$$

$$\pi(a, b, c) = \frac{s(a).t(b)}{ab}.$$

On peut se demander si ce tore est une variété k-rationnelle.

c. LA NÉCESSITÉ D'UNE RÉSOLUTION FLASQUE. — Cherchons, sur un corps de nombres k, une suite exacte de tores $1 \to S \to E \to T \to 1$ avec E quasi trivial, $H^1(k, S)$ fini, mais $T(k)/R \neq H^1(k, S)$. Rappelons (R 10) que, pour S dans $\mathcal{T}_{K/k}$ et K/k galoisienne finie de groupe G,

$$H^1(k, S) \text{ fini } \Leftrightarrow H^1(G', \hat{S}) = 0 \text{ pour tout sous-groupe cyclique } G' \text{ de } G.$$

Considérons $T = \mathbf{G}_{m,k}$, puis une extension galoisienne finie K/k de groupe $G = V_4 = \langle s, t \rangle$ et la suite exacte

$$0 \to \hat{S}^0 \to \mathbf{Z}[G/s] \oplus \mathbf{Z}[G/t] \oplus \mathbf{Z}[G/st] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

où ε désigne la somme des augmentations. On vérifie aisément que $H^1(G', \hat{S}^0) = 0$ pour tout sous-groupe cyclique G'. Soient k_1, k_2, k_3 les sous-corps de K fixes par s, t et st respectivement et N_i la norme $N_{k_i/k}$ pour $i = 1, 2, 3$. On trouve

$$H^1(k, S) = k^*/N_1(k_1^*).N_2(k_2^*).N_3(k_3^*)$$

qui vaut $\mathbf{Z}_2$ sur un corps de nombres si, pour chaque place v, $G^v \neq G$ (et 0 sinon) : c'est par exemple le cas pour l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})/\mathbf{Q}$. Or, $T(k)/R = 0$.

d. LE TORE $R^1_{K/k}G_m$ EN GÉNÉRAL. — Le tore $R^1_{K/k}G_m$ est défini comme le noyau d'un k-épimorphisme de tores quasi triviaux, ce qui explique l'utilité du lemme ci-dessous pour reconnaître, dans ce genre de situation, si une résolution est flasque, ou non.

LEMME 13. — *Soit* $0 \to M \to P \to P_1 \to P_2 \to 0$ *une suite exacte de* G-*modules avec* P, P_1 *et* P_2 *de permutation. Le* G-*module* M *est coflasque, si et seulement si, pour tout sous-groupe* G' *de* G, *la suite*

$$\hat{H}^0(G', P) \to \hat{H}^0(G', P_1) \to \hat{H}^0(G', P_2)$$

est exacte. □

Pour savoir que M est coflasque, il suffit (*cf.* § 1) de vérifier la condition $H^{-1}(G', M) = 0$ pour un sous-groupe G' par classe de conjugaison, en se limitant aux p-sous-groupes. Il en est donc de même pour la condition du lemme.

Soit L/K une extension telle que L/k soit galoisienne finie de groupe G et soit H le groupe de Galois de L/K. Trouver une résolution flasque de $R^1_{K/k}G_m$ revient, d'après le lemme 13, à trouver un morphisme π, tel que la suite

$$P \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z}[G/H] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

soit exacte, avec P de permutation, et que, pour tout sous-groupe G' de G, la suite

$$\hat{H}^0(G', P) \to \hat{H}^0(G', \mathbf{Z}[G/H]) \to \hat{H}^0(G', \mathbf{Z})$$

soit exacte. On commence donc par exhiber un épimorphisme $P_0 \to I_{G/H}$ avec P_0 de permutation. Comme $I_{G/H}$ est engendré par les $1\text{-}\bar{g}$ pour g dans G et même dans une partie γ telle que γH engendre G, le morphisme

$$P_0 = \coprod_{s \in \gamma} \mathbf{Z}[G].e_s \to \mathbf{Z}[G/H],$$

défini par $e_s \mapsto \bar{s} - 1$ convient. Il se trouve que, pour H trivial (exemple *a*), le noyau de ce morphisme est coflasque, i. e. les conditions d'exactitude figurant au lemme 13 et relatives aux divers sous-groupes G' de G sont automatiquement vérifiées. Il n'en est rien en général. Nous allons juste considérer trois exemples particuliers du type $G = \langle s, t \rangle$ avec $H = \langle s \rangle$ et avec $\langle t \rangle$ invariant.

d 1. Soit *d'abord* $G = D_n$ avec *n impair* : $s^2 = t^n = 1$ et $sts = t^{-1}$. Ce cas est semblable à l'exemple *b*. La résolution fournie par P_0, à savoir

$$\mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

avec

$$\omega(1) = t - 1,$$

donne une résolution coflasque de $I_{G/s}$, i. e. le noyau de ω est coflasque : en effet, comme n est impair, il suffit de vérifier la condition du lemme 13 pour $G' = \langle s \rangle$ ou un sous-groupe de $\langle t \rangle$; dans ce deuxième cas, $\hat{H}^0(G', \mathbf{Z}[G/s]) = 0$, car, en tant que t-module, $\mathbf{Z}[G/s]$

est libre de rang 1; la condition relative à un tel sous-groupe G′ est donc automatiquement vérifiée; il en est de même pour $G' = \langle s \rangle$, car, en tant que s-module,

$$\mathbf{Z}[G/s] = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[s]^{(n-1)/2},$$

si bien que l'application $\hat{H}^0(s, \varepsilon)$ est injective. La résolution ci-dessus donne sur les points rationnels, par double dualité et changement de t en t^{-1}, l'application

$$\pi : \ L^* \to K^{*1},$$

définie par

$$\pi(x) = N_{L/K}[t(x)/x].$$

Comme G est métacyclique, on sait *a priori* (prop. 2) que le noyau de ω est inversible. Il est même stablement de permutation, car, par addition de **Z** à la résolution initiale, on trouve la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}[G/ts] \oplus \mathbf{Z}[G/t] \xrightarrow{\iota} \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

avec

$$\iota(1, 0) = (1+ts, 1), \qquad \eta(1, 0) = t-1,$$

$$\iota(0, 1) = \left(N_t, \frac{n-1}{2}\right), \qquad \eta(0, 1) = 0,$$

où $N_t = 1+t+ \ldots +t^{n-1}$. On peut ainsi préciser le paramétrage $\pi : L^* \to K^{*1}$ en indiquant la suite exacte

$$1 \to K'^* \times k'^* \xrightarrow{\rho} L^* \times k^* \xrightarrow{\pi} K^{*1} \to 1$$

définie par

$$\rho(x, y) = [xy, N_{K'/k}(x).N_{k'/k}(y^{(n-1)/2})],$$

$$\pi(a, b) = N_{L/K}[t(a)/a],$$

où $K' = L_{st}$ et $k' = L_t$. En fait, une étude directe montre que dans ce cas le tore $R^1_{K/k}\,G_m$ est une variété k-rationnelle.

d 2. Soit *ensuite* le cas où $G = \langle s, t \rangle$ avec s d'ordre 2^n, t d'ordre p^m pour *p premier impair* et $sts^{-1} = t^r$. Quitte à diviser G et H par le noyau du morphisme $H = \langle s \rangle \to \mathrm{Aut}(\langle t \rangle)$, ce qui n'altère pas $I_{G/H}$, on peut supposer que H opère fidèlement sur le sous-groupe $\langle t \rangle$. On vérifie alors aisément que $\mathbf{Z}[G/s]$ est isomorphe, en tant que s-module, à la somme directe de **Z** et d'un module libre. Ce résultat permet de reproduire l'argumentation utilisée dans le cas précédent pour prouver que la résolution fournie par P_0, à savoir

$$\mathbf{Z}[G] \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

avec

$$\omega(1) = t-1,$$

donne une résolution coflasque de $I_{G/s}$ (on se limite aux sous-groupes G′ de $\langle s \rangle$ ou de $\langle t \rangle$). On obtient ainsi une surjection (G étant métacyclique)

$$\pi : \quad L^* \to K^{*1},$$

où

$$\pi(x) = N_{L/K}[t(x)/x].$$

Noter que, si $H \to \mathrm{Aut}(\langle t \rangle)$ a un noyau non nul H_0, il suffit de remplacer dans l'application ci-dessus le corps L par le sous-corps L_0 fixe par H_0. Le groupe G étant métacyclique, on sait *a priori* (prop. 2) que le noyau de ω est inversible, d'où $T(k)/R = 0$. Mais, comme on l'a noté en R 4, ce noyau n'est stablement de permutation que si l'image du morphisme $H \to \mathrm{Aut}(\langle t \rangle)$ est triviale ou d'ordre 2, ce qui nous ramène au cas où G est cyclique ou diédral métacyclique (exemple précédent).

Notons que, pour $G = \langle s, t \rangle$ avec $s^4 = t^{15} = 1$ et $sts^{-1} = t^2$, la résolution fournie par P_0 n'est plus coflasque. En revanche, la suite exacte

$$\mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G/s^2] \xrightarrow{\eta} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

définie par

$$\eta(1, 0) = t-1 \qquad \text{et} \qquad \eta(0, 1) = t^5 - 1,$$

fournit une résolution coflasque de $I_{G/s}$.

d 3. Soit *enfin* le cas, plus instructif, où $G = D_4 : s^2 = t^4 = 1$ et $sts = t^{-1}$. Dans ce cas, K/k est donc de degré 4, sa clôture galoisienne L/k a pour groupe D_4 et $K = L_s$. La résolution donnée par P_0 est loin de convenir. On vérifie que la résolution

$$\mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\omega} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

définie par

$$\omega(1, 0) = t-1 \qquad \text{et} \qquad \omega(0, 1) = t^2 - 1,$$

a un noyau presque coflasque, i. e. $H^1(G', .) = 0$ pour tout sous-groupe cyclique G′ de G, mais non coflasque, car la condition relative au sous-groupe $\langle s, t^2 \rangle$ n'est pas vérifiée. On doit donc considérer la suite exacte

$$\mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G/s] \oplus \mathbf{Z}[G/\langle s, t^2 \rangle] \xrightarrow{\chi} \mathbf{Z}[G/s] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0,$$

définie par

$$\chi = \omega \quad \text{sur les deux premiers facteurs,}$$

$$\chi(0, 0, 1) = (1+t^2)(t-1),$$

pour obtenir un noyau coflasque. Par double dualité et changement de t en t^{-1}, ces deux résolutions donnent respectivement, sur les points rationnels, les applications

$$L^* \times K^* \xrightarrow{\pi} K^{*1},$$

$$L^* \times K^* \times k'^* \xrightarrow{\lambda} K^{*1},$$

définies par

$$\lambda(a, b, c) = N_{L/K}[t(a)/a].[t^2(b)/b].[t(c)/c],$$

$$\pi(a, b) = \lambda(a, b, 1),$$

k' désignant le sous-corps L_{s, t^2} d'indice 2 dans K. Soient M et N les conoyaux respectifs de χ^0 et ω^0. Soit G'_0 le sous-groupe $\langle st, t^2 \rangle$. On trouve $H^1(G', M) = \mathbf{Z}_2$ pour $G' = G'_0$ et 0 sinon. Cela implique $[M] \neq 0$ et, comme $[M] = \rho(T)$, le tore T n'est pas k-stablement rationnel (prop. 6). D'autre part, la restriction $H^2(G, M) \to \prod_{g \in G} H^2(\langle g \rangle, M)$ est injective. On obtient les mêmes résultats pour N (ces calculs demandent une analyse précise de divers morphismes d'inflation et de restriction). En résumé :

ASSERTION. — *Soit* K/k *une extension séparable de degré* 4, *dont la clôture galoisienne ait pour groupe* $G = D_4$. *Alors, le tore* $T = R^1_{K/k} \mathbf{G}_m$, *de dimension* 3, *n'est pas k-rationnel. Si en outre k est un corps de nombres, les applications* π *et* λ *ont la même image, à savoir la* R-*classe de l'élément neutre, et pour conoyau commun* $T(k)/R$: *si r désigne le nombre de places v de k telles que* $G^v = G'_0$, *on obtient* $T(k)/R = \mathbf{Z}_2^r$.

7. L'équivalence de Brauer sur un tore

L'objet de ce paragraphe est le calcul précis, au moins sur un corps de nombres, de l'équivalence de Brauer sur un tore, en vue de la comparer, dans ce cas, à la R-équivalence.

a. QUELQUES RAPPELS. — Soit X une k-variété. On note Br X le *groupe de Brauer étale* $H^2(X, \mathbf{G}_m)$. Si K est une extension de k, on désigne par Br (X, K) le noyau de $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, X_K$. On pose $\mathrm{Br}_1 X = \mathrm{Br}(X, \bar{k})$, $\mathrm{Br}_0 X = \mathrm{Im}(\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, X)$ et $\mathrm{Br}_a X = \mathrm{Br}_1 X/\mathrm{Br}_0 X$.

DÉFINITION. — *Soit* X *une k-variété lisse et complète. On appelle* Br-*équivalence, ou équivalence de Brauer, sur* X(*k*) *la relation d'équivalence définie par l'accouplement*

$$X(k) \times \mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, k.$$

Si X *est une k-variété lisse et si k est de caractéristique* 0, *on désigne ainsi la restriction à* X(*k*) *de la* Br-*équivalence sur l'ensemble des points rationnels d'une k-compactification lisse de* X.

On note X(*k*)/Br *l'ensemble des classes d'équivalence pour la* Br-*équivalence.*

Pour X non complète, l'hypothèse sur la caractéristique de k sert à assurer l'existence d'une k-compactification lisse de X; mais elle sert aussi à montrer que, lorsqu'il en existe, la définition adoptée pour la Br-équivalence sur X (k) ne dépend pas de la k-compactification lisse choisie : cela résulte de la k-invariance birationnelle du groupe de Brauer en caractéristique 0 ([13], « Brauer III », coroll. 7.3). Les B-équivalences, introduites par Manin ([19], [20]) et *a priori* moins fines, s'obtiennent de la même façon, en considérant, au lieu de Br X tout entier, certains sous-groupes B particuliers, tels que Br (X, K) ou $\mathrm{Br}_1 X$.

PROPOSITION 16. — *Soit* X *une k-variété lisse, supposée complète si k est de caractéristique non nulle. L'équivalence de Brauer sur* $X(k)$ *est moins fine que la* R-*équivalence. Si k est de caractéristique* 0, *l'ensemble* $X(k)/\mathrm{Br}$ *est un invariant k-birationnel des k-variétés lisses et complètes : cet invariant est trivial pour* X *k-rationnelle.*

L'application naturelle $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, \mathbf{P}_k^1$ est un isomorphisme : en effet, d'après le lemme 15 (i), $\mathrm{Br}_1\, \mathbf{P}_k^1 = 0$ et, d'après « Brauer III » ([13], coroll. 5.8), $\mathrm{Br}\, \mathbf{P}_{\bar{k}}^1 = 0$. Cela prouve la première assertion et définit donc une surjection canonique $X(k)/R \to X(k)/\mathrm{Br}$. Soit k de caractéristique 0. Un morphisme k-birationnel $X \to Y$ induit une application $X(k)/\mathrm{Br} \to Y(k)/\mathrm{Br}$ qui est injective, d'après l'invariance k-birationnelle du groupe de Brauer $\mathrm{Br}\, Y \xrightarrow{\approx} \mathrm{Br}\, X$, et surjective, par réduction, comme dans la proposition 10, au cas d'un éclatement d'une sous-k-variété lisse; on peut aussi bien utiliser la surjectivité, déjà connue, de $X(k)/R \to Y(k)/R$. On voit enfin, par le même argument que dans la proposition 10, qu'une k-application rationnelle de X dans Y induit une application naturelle $X(k)/\mathrm{Br} \to Y(k)/\mathrm{Br}$. Ainsi, un k-isomorphisme birationnel induit une bijection $X(k)/\mathrm{Br} \to Y(k)/\mathrm{Br}$. □

Rappelons le résultat suivant [19], dû à Lichtenbaum dans le cas des courbes :

LEMME 14. — *Soient* X *une k-variété lisse et complète et* K/k *une extension galoisienne de groupe* G. *On a la suite exacte naturelle*

$$0 \to \mathrm{Br}(X, K) \to H^2[G, K(X)^*] \to H^2(G, \mathrm{Div}\, X_K).$$

Soient, en topologie étale, $\mathscr{M}_X^*$ le faisceau des fonctions rationnelles sur X et $\mathscr{D}iv_X$ le faisceau quotient $\mathscr{M}_X^*/\mathbf{G}_{m,X}$ des diviseurs de Cartier sur X. D'après « Brauer II » ([13], lemme 1.9), X étant lisse, $H^1(X, \mathscr{D}iv_X) = 0$, ce qui donne la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}\, X \to H^2(X, \mathscr{M}_X^*) \to H^2(X, \mathscr{D}iv_X).$$

On a la suite analogue sur X_K. Comme, d'après « Brauer II » ([13], lemmes 1.6 et 1.9), $H^1(X_K, \mathscr{M}_{X_K}^*) = H^1(X_K, \mathscr{D}iv_{X_K}) = 0$, les deux suites spectrales d'Hochschild-Serre relatives au revêtement galoisien $X_K \to X$ de groupe G et aux faisceaux $\mathscr{M}_X^*$ et $\mathscr{D}iv_X$ donnent les deux suites exactes horizontales du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & H^2[G, K(X)^*] & \to & H^2(X, \mathscr{M}_X^*) & \to & H^2(X_K, \mathscr{M}_{X_K}^*) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & H^2(G, \mathrm{Div}\, X_K) & \to & H^2(X, \mathscr{D}iv_X) & \to & H^2(X_K, \mathscr{D}iv_{X_K})
\end{array}$$

d'où le résultat *via* la suite exacte des noyaux. □

LEMME 15. — *Soit* K/k *une extension galoisienne de groupe* G :

(i) *si* X *est une k-variété lisse et complète, telle que* $X(k) \neq \emptyset$, *on a la suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Br}(k, K) \to \mathrm{Br}(X, K) \to H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K) \to 0$$

et tout point rationnel de X *en définit un scindage;*

(ii) *si* X *est une k-variété telle que* Pic $X_K = 0$ *:*

$$\mathrm{Br}(X, K) = H^2(G, K[X]^*);$$

(iii) *soit* X *une k-variété lisse et complète. On suppose qu'il existe un ouvert* U *de* X *possédant un point rationnel* O *et tel que* Pic $U_K = 0$*; soit* Y *le fermé complémentaire. Considérons le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(k, K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Br}(X, K) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"] & H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K) \arrow[r] \arrow[d, "-\mathfrak{d}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}(k, K) \arrow[r] & \mathrm{Br}(U, K) \arrow[r, "\beta"] & H^2(G, K[U]^*/K^*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, λ *désigne la restriction de* X *à* U, $\mathfrak{d}$ *est le cobord déduit de la suite exacte de* G*-modules*

$$0 \to K[U]^*/K^* \to \mathrm{Div}_{Y_K} X_K \to \mathrm{Pic}\, X_K \to 0$$

et la seconde ligne provient de l'égalité $\mathrm{Br}(U, K) = H^2(G, K[U]^*)$. *Ce diagramme est commutatif;*

(iv) *considérons, sous les hypothèses* (iii), *le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
X(k) \times & H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K) \arrow[r] \arrow[d, hook, "-\mathfrak{d}"] & \mathrm{Br}(k, K) \arrow[d, equal] \\
U(k) \times \arrow[u, hook] & H^2(G, K[U]^*/K^*) \arrow[r] & \mathrm{Br}(k, K)
\end{tikzcd}$$

Les flèches horizontales sont définies respectivement par les accouplements avec Br (X, K) *et* Br (U, K) via *les sections de* α *et* β *définies par le point* O. *Ce diagramme est commutatif. La seconde flèche horizontale est la composée*

$$U(k) \times H^2(G, K[U]^*/K^*) \to U(k) \times H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\cup} \mathrm{Br}(k, K)$$

de la flèche induite par la section définie par O *et du cup-produit.*

Notons que $\mathrm{Br}(k, K) = H^2(G, K^*)$. Ces diverses assertions proviennent simplement de la suite spectrale d'Hochschild-Serre relative au revêtement galoisien $X_K \to X$ de groupe G et au faisceau $\mathbf{G}_m$, à savoir

$$H^p[G, H^q(X_K, \mathbf{G}_m)] \Rightarrow H^n(X, \mathbf{G}_m).$$

Les assertions (i) et (ii) en sont des conséquences immédiates : la suite exacte (i) est la suite $0 \to E_2^{2,0} \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1} \to 0$ qui est exacte en raison de l'existence d'un point rationnel définissant, X étant complète, des rétractions $E^2 \to E_2^{2,0}$ et $E^3 \to E_2^{3,0}$; pour X quelconque, l'edge $E_2^{2,0} \to E^2$ induit le morphisme naturel $H^2(G, K[X]^*) \to \mathrm{Br}\, X$ et l'isomorphisme (ii) est donné par la flèche $E_2^{2,0} \to \ker(E^2 \to E_2^{0,2})$, l'hypothèse Pic $X_K = 0$ impliquant $E_2^{0,1} = E_2^{1,1} = 0$. Notons que, pour X quelconque, le cup-produit $X(k) \times H^2(G, K[X]^*) \xrightarrow{\cup} H^2(G, K^*)$ et l'accouplement $X(k) \times \mathrm{Br}(X, K) \to \mathrm{Br}(k, K)$ sont compatibles *via* le morphisme naturel $H^2(G, K[X]^*) \to \mathrm{Br}(X, K)$. En (iii), l'hypothèse (ii) est vérifiée pour U et la suite inférieure du diagramme résulte de l'isomorphisme $H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\approx} \operatorname{Br}(U, K)$ et de la suite exacte de G-modules

$$0 \to K^* \to K[U]^* \to K[U]^*/K^* \to 0,$$

suite exacte dont le point rationnel O définit un scindage. La première ligne provient de (i). Pour la commutativité du diagramme, *voir* **annexe**. L'assertion (iv) résulte aussitôt des précédentes, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X(k) \times \operatorname{Br}(X, K) \arrow[r] \arrow[d, hook', "\lambda"] & \operatorname{Br}(k, K) \arrow[d, equal] \\
U(k) \times \operatorname{Br}(U, K) \arrow[r] \arrow[u, hook] & \operatorname{Br}(k, K)
\end{tikzcd}$$

étant évidemment commutatif : on a déjà noté que le second accouplement n'est autre que le cup-produit $U(k) \times H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\cup} H^2(G, K^*)$ *via* l'identification $H^2(G, K[U]^*) \xrightarrow{\approx} \operatorname{Br}(U, K)$. □

LEMME 16. — *Soit* X *une* k*-variété lisse et complète sur un corps* k *de caractéristique* 0, k*-rationnelle et telle que* $X(k) \neq \emptyset$. *Soit* K/k *une extension galoisienne de groupe* $G = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, *telle que* $H^1(\mathfrak{h}, \operatorname{Pic} \overline{X}) = 0$. *Alors* $\operatorname{Br} X = \operatorname{Br} k + \operatorname{Br}(X, K)$ *et la* Br*-équivalence coïncide sur* $X(k)$ *avec la* $\operatorname{Br}(X, K)$*-équivalence. Elle coïncide aussi avec l'équivalence donnée par l'accouplement*

$$X(k) \times H^1(G, \operatorname{Pic} X_K) \to \operatorname{Br} k,$$

défini par un point O *de* $X(k)$.

Notons d'abord que, X étant $\bar{k}$-rationnelle, $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est dans $\mathscr{L}_{\mathfrak{g}}$. Il existe donc K/k finie telle que $H^1(\mathfrak{h}, \operatorname{Pic} \overline{X}) = 0$: il suffit que $\operatorname{Pic} \overline{X}$ soit $\mathfrak{h}$-trivial, ou simplement $\mathfrak{h}$-stablement de permutation. D'autre part $\operatorname{Br} \overline{X} = 0$ en vertu de l'invariance birationnelle du groupe de Brauer ([13], « Brauer III », coroll. 7.3) et de sa nullité pour l'espace projectif $(B_2 - \rho = 0)$. Par suite, d'après le lemme 15 (i), $\operatorname{Br} X_K = \operatorname{Br}_1 X_K = \operatorname{Br} K$. Si π_O est la projection $\operatorname{Br} X \to \operatorname{Br} k$ définie par O, $A - \pi_O(A) \in \operatorname{Br}(X, K)$ pour A dans $\operatorname{Br} X$, d'où $\operatorname{Br} X = \operatorname{Br} k + \operatorname{Br}(X, K)$. L'accouplement $X(k) \times H^1(G, \operatorname{Pic} X_K) \to \operatorname{Br}(k, K)$ se déduit, par définition, de l'accouplement de $X(k)$ avec $\operatorname{Br}(X, K)$ *via* la section $H^1(G, \operatorname{Pic} X_K) \to \operatorname{Br}(X, K)$ définie par O. □

b. LE CAS DES TORES. — Soit T un tore défini sur un corps k de caractéristique 0 et déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G. Soient $T \to X$ une k-compactification lisse de T et S le k-tore dual du G-module $\operatorname{Pic} X_K$. Les hypothèses des lemmes 15 (iii) et 16 sont vérifiées pour X, K/k et $U = T$. Par définition de S, les G-modules $\hat{S}$ et $\operatorname{Pic} X_K$ coïncident. La section $K[T]^*/K^* \to K[T]^*$ définie par l'élément neutre de $T(k)$ s'identifie (*cf.* prop. 6 ou [24]) au plongement naturel de $\hat{T}$ dans $K[T]^*$. Considérons les applications

$$T(k) \times H^1(G, \hat{S}) \to T(k) \times H^2(G, \hat{T}) \xrightarrow{\cup} \operatorname{Br}(k, K),$$

définies respectivement par $\mathrm{id}_{\mathrm{T}(k)}$, par le cobord tiré de la suite exacte de G-modules $0 \to \hat{\mathrm{T}} \to \mathrm{M} \to \hat{\mathrm{S}} \to 0$, où M désigne le G-module des diviseurs de X_K à support hors de T_K, et, enfin, par le cup-produit $\cup$. Il résulte des lemmes 15 (iv) et 16 que l'application composée définit sur T (k) l'équivalence de Brauer. La bilinéarité du cup-produit implique aussitôt la compatibilité de l'équivalence de Brauer avec la structure de groupe de T (k), mais cela est évident directement pour tout groupe algébrique et toute relation d'équivalence compatible avec les k-isomorphismes (ce qui est le cas pour l'équivalence de Brauer). Notons enfin que, d'après le lemme 5, on peut remplacer la résolution de $\hat{\mathrm{T}}$ ci-dessus par n'importe quelle autre résolution flasque.

PROPOSITION 17. — *Soient* T *un tore défini sur un corps k de caractéristique* 0, *déployé par l'extension galoisienne* K/k *de groupe* G, $0 \to \hat{\mathrm{T}} \to \mathrm{M} \to \hat{\mathrm{S}} \to 0$ *une* G-*résolution flasque du* G-*module* $\hat{\mathrm{T}}$ *et* $\partial : \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{S}}) \hookrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{T}})$ *le monomorphisme qu'elle définit :*

(i) *soit* $\beta : \mathrm{T}(k) \times \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{S}}) \to \mathrm{Br}(k, \mathrm{K})$ *l'accouplement bilinéaire induit*, via ∂, *par le cup-produit* $\mathrm{T}(k) \times \mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{T}}) \xrightarrow{\cup} \mathrm{Br}(k, \mathrm{K})$. *Cette application* β *définit sur* T (k) *l'équivalence de Brauer;*

(ii) *le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(k)/\mathrm{R} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\delta"', "\approx"] & \mathrm{T}(k)/\mathrm{Br} \arrow[d, hook, "\gamma"] \\
\mathrm{H}^1(k, \mathrm{S}) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Hom}\left[\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{S}}), \mathrm{Br}(k, \mathrm{K})\right]
\end{tikzcd}$$

dans lequel δ *provient de la suite exacte de tores* $1 \to \mathrm{S} \to \mathrm{D}(\mathrm{M}) \to \mathrm{T} \to 1$, γ *de* β *et* ω *du cup-produit, est un diagramme anticommutatif d'homomorphismes de groupes. Il identifie le groupe* T (k)/Br *à l'image de* ω;

(iii) *le groupe* T (k)/Br *est un invariant des classes de k-équivalence birationnelle stable de k-tores* T;

(iv) *si* X *est une k-compactification lisse de* T, *l'application induite* $\mathrm{T}(k)/\mathrm{Br} \to \mathrm{X}(k)/\mathrm{Br}$ *est une bijection.*

L'assertion (i) a été déjà prouvée. Pour (ii), rappelons que δ est un isomorphisme d'après le théorème 2 et que l'application $\mathrm{T}(k)/\mathrm{R} \to \mathrm{T}(k)/\mathrm{Br}$ est bien définie d'après la proposition 16. Le fait que γ soit un plongement traduit l'assertion (i). L'anticommutativité du diagramme (ii) se réduit à celle du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(k) \arrow[d, "\delta"] & \times \mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{T}}) \arrow[dr, "\cup"] & \\
& & \mathrm{H}^2(\mathrm{G}, \mathrm{K}^*) \\
\mathrm{H}^1(k, \mathrm{S}) & \times \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{S}}) \arrow[uu, hook, "\partial"] \arrow[ur, "\cup"'] &
\end{tikzcd}$$

défini par δ, ∂ et les cup-produits et celle-ci résulte aisément de la formule

$$d(a \cup b) = da \cup b + a \cup db \quad \text{pour} \quad a \in \mathrm{D}(\mathrm{M})(\mathrm{K}) \quad \text{et} \quad b \in \mathrm{C}^1(\mathrm{G}, \mathrm{M}).$$

L'invariance du groupe $T(k)/\mathrm{Br}$ résulte de son identification à l'image de ω et de l'invariance de $[\hat{S}]$ (prop. 6). En (iv) enfin, l'application $T(k)/\mathrm{Br} \to X(k)/\mathrm{Br}$ est injective par définition de la Br-équivalence sur $T(k)$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T(k)/R & \twoheadrightarrow & T(k)/\mathrm{Br} \\ \downarrow{\scriptstyle\approx} & & \downarrow \\ X(k)/R & \twoheadrightarrow & X(k)/\mathrm{Br} \end{array}$$

montre qu'elle est également surjective puisqu'il en est ainsi de $T(k)/R \to X(k)/R$ (prop. 13). □

COROLLAIRE 1. — *On conserve les mêmes hypothèses et notations :*

(i) *si k est de type fini sur* $\mathbf{Q}$, $T(k)/\mathrm{Br}$ *est un groupe fini;*

(ii) *si k est un corps* $\mathfrak{p}$*-adique, l'équivalence de Brauer coïncide sur* $T(k)$ *avec la* R-*équivalence et le groupe des classes est le groupe fini*

$$T(k)/\mathrm{Br} = H^1(G, \hat{S})^{\sim};$$

(iii) *si k est un corps de nombres, soit μ l'application composée*

$$H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\Delta} \prod_v H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\lambda} \prod_v H^1(G^v, \hat{S}),$$

de l'application diagonale Δ et du produit λ des restrictions de G *à* G^v, *pour l'ensemble des places v de k. Alors*

$$T(k)/\mathrm{Br} = [\mathrm{im}\,\lambda/\mathrm{im}\,\mu]^{\sim}.$$

L'assertion (i) résulte aussitôt du corollaire 2 au théorème 2, *via* la surjection $T(k)/R \to T(k)/\mathrm{Br}$. Si k est un corps $\mathfrak{p}$-adique, l'application ω du diagramme de la proposition 17 est bijective en vertu de la dualité locale de Tate-Nakayama [21], d'où l'assertion (ii). Dans le cas global, supposons, ce qui est loisible, G fini et complétons ce même diagramme par le morphisme ι :

$$\mathrm{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \mathrm{Br}\,k] \hookrightarrow \mathrm{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \coprod_v \mathrm{Br}\,k_v],$$

ce qui donne le morphisme $\chi = \iota\omega$:

$$H^1(k, S) \to \mathrm{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \coprod_v \mathrm{Br}\,k_v],$$

morphisme dont l'image est encore isomorphe à $T(k)/\mathrm{Br}$. Ce morphisme se factorise en

$$H^1(k, S) \xrightarrow{\nu} \coprod_v \mathrm{Hom}[H^1(G^v, \hat{S}), \mathrm{Br}\,k_v] \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \coprod_v \mathrm{Hom}[H^1(G, \hat{S}), \mathrm{Br}\,k_v],$$

où le second morphisme est défini par les restrictions de G à G^v et le premier par la restriction $H^1(k, S) \to \coprod_v H^1(k_v, S)$ composée avec le produit des morphismes locaux $H^1(k_v, S) \to \mathrm{Hom}[H^1(G^v, \hat{S}), \mathrm{Br}\,k_v]$ définis par cup-produit. Soient I_K le G-module des idèles de K, $S(A_K)$ le G-module $\mathrm{Hom}(\hat{S}, I_K)$ et $S(C_K) = S(A_K)/S(K)$. La suite exacte de groupes finis (S est flasque!)

$$H^1(k, S) \to H^1[G, S(A_K)] \to H^1[G, S(C_K)]$$

donne, par les dualités locales et globale de Tate-Nakayama ([21], [32]) (*voir* la démonstration du corollaire 5 du théorème 2), la suite exacte

$$H^1(G, \hat{S}) \xrightarrow{\mu} \prod_v H^1(G^v, \hat{S}) \xrightarrow{\tilde{v}} H^1(k, S)^{\sim}.$$

L'image de χ, canoniquement isomorphe à $T(k)/\mathrm{Br}$, a donc pour duale

$$\mathrm{im}\,\tilde{\chi} = \mathrm{im}\,\tilde{v} \circ \lambda = \tilde{v}(\mathrm{im}\,\lambda) = \mathrm{im}\,\lambda/\mathrm{im}\,\mu. \quad \square$$

Ce corollaire 1 donne en particulier, par la proposition 7 :

COROLLAIRE 2. — *Soient* K/k *une extension galoisienne finie de groupe* G *et* $T = R^1_{K/k}\,G_m$ *:*

(i) *si* k *est un corps* $\mathfrak{p}$*-adique,*

$$T(k)/\mathrm{Br} = H^3(G, \mathbf{Z})^{\sim};$$

(ii) *si* k *est un corps de nombres,*

$$T(k)/\mathrm{Br} = [\mathrm{im}\,\lambda/\mathrm{im}\,\mu]^{\sim},$$

où μ *désigne l'application composée*

$$H^3(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\Delta} \prod_v H^3(G, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\lambda} \prod_v H^3(G^v, \mathbf{Z})$$

de l'application diagonale Δ *et du produit* λ *des restrictions de* G *à* G^v. $\square$

8. Comparaison de quelques critères de rationalité

On dispose, pour l'étude des problèmes k-birationnels sur une k-variété X, d'un certain nombre d'invariants k-birationnels, définis éventuellement sous des hypothèses restrictives sur X ou k. La proposition 5, par exemple, définit, pour X convenable, l'invariant $\rho(X) = [\hat{S}]$ et, par suite, d'autres invariants, moins fins, mais plus « calculables », tels que $H^1(k, S)$, $H^1(G, \hat{S})$, $H^{-1}(G, \hat{S})$ et, sur un corps global, $Ш^2(k, S)$ et $Ш^2(G, \hat{S})$: *voir* le début du paragraphe 2. En caractéristique 0, on dispose encore, comme invariants des k-variétés complètes et lisses, de $X(k)/R$ (prop. 10), du groupe $\mathrm{Br}\,X$ ([13], « Brauer III », coroll. 7.3) et de $X(k)/\mathrm{Br}$ (prop. 16). L'objet de ce paragraphe est de comparer ces divers invariants sur l'exemple des tores.

Pour un tore T défini sur un corps global k, on peut encore considérer le k-défaut du principe de Hasse $Ш(T) = Ш^1(k, T)$ et le k-défaut d'approximation faible $A(T)$: si i désigne l'application diagonale de $T(k)$ dans le produit, pour toutes les places v de k, des groupes topologiques $T(k_v)$, $A(T)$ est, par définition, le quotient de $\prod_v T(k_v)$ par l'adhérence de l'image de i. Voskresenskiĭ ([33], th. 6) a montré, en caractéristique 0, l'existence d'une suite exacte

$$0 \to A(T) \to H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{X})^{\sim} \to Ш(T) \to 0,$$

mettant en relation, de manière un peu inattendue, A (T) et Ш (T) [*voir* prop. 19 (iB)]; il en a déduit en particulier la nullité de Ш (T) pour T k-rationnelle. En fait, les groupes A (T) et Ш (T) sont, dans le cas global, deux invariants k-birationnels supplémentaires pour les tores T définis sur k :

PROPOSITION 18. — *Soit* T *un tore défini sur un corps de nombres* k, *ou un corps de fonctions algébriques d'une variable sur un corps fini, et déployé par l'extension galoisienne finie* K/k *de groupe* G. *Soient* $1 \to S \to E \to T \to 1$ *une résolution flasque de* T *dans* $\mathscr{T}_{K/k}$ *et* $\mu : H^1(G, \hat{S}) \to \prod_v H^1(G^v, \hat{S})$ *l'application de restriction :*

(i) *cette résolution définit des isomorphismes de groupes finis*

$$A(T) \xrightarrow{\approx} Ч^1(k, S) \quad et \quad A(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \operatorname{im}\mu,$$

$$Ш(T) \xrightarrow{\approx} Ш^2(k, S) \quad et \quad Ш(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \ker\mu;$$

(ii) *les groupes finis* A (T) *et* Ш (T) *sont des invariants des classes de* k-*équivalence birationnelle stable de tores* T *définis sur le corps* k.

Tout d'abord, l'assertion (ii) est une conséquence immédiate des isomorphismes $A(T) \approx \operatorname{im}\mu$ et $Ш(T) \approx \ker\mu$ et de l'invariance de $[\hat{S}]$ (prop. 6). L'isomorphisme $A(T) \xrightarrow{\approx} Ч^1(k, S)$ est donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
E(k) & \longrightarrow & T(k) & \longrightarrow & H^1(k, S) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\
\prod_v E(k_v) & \xrightarrow{\pi} & \prod_v T(k_v) & \xrightarrow{\partial} & \prod_v H^1(k_v, S) & \to & 0
\end{array}$$

Il suffit de voir que $i[T(k)]$ est dense dans le sous-groupe ouvert $\partial^{-1}(\operatorname{im}\nu)$. Or, si U est un ouvert de $\prod_v T(k_v)$ tel qu'il existe x dans $T(k)$ avec $\partial i(x) \in \partial(U)$, $\pi^{-1}[i(x)^{-1}.U]$ est un ouvert non vide de $\prod_v E(k_v)$; comme $A(E) = 0$, le tore E étant quasi trivial, cet ouvert rencontre l'image de $E(k)$, d'où $U \cap i[T(k)] \neq \varnothing$. L'isomorphisme $Ш(T) \xrightarrow{\approx} Ш^2(k, S)$ est donné par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(k, T) & \longrightarrow & H^2(k, S) & \longrightarrow & H^2(k, E) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \prod_v H^1(k_v, T) & \to & \prod_v H^2(k_v, S) & \to & \prod_v H^2(k_v, E)
\end{array}$$

compte tenu de $Ш^2(k, E) = 0$, le tore E étant quasi trivial. Les isomorphismes $A(T)^{\sim} \to \operatorname{im}\mu$ et $Ш(T)^{\sim} \to \ker\mu$ proviennent alors des dualités, données par le corps de classes, entre $Ч^1(k, S) = \operatorname{coker} \nu$ et $\operatorname{im} \mu = \ker \tilde{\nu}$ (*cf.* la démonstration du corollaire 1 de la proposition 17) d'une part, $Ш^2(k, S)$ et $\ker \mu$ d'autre part. □

La proposition ci-dessous résume les relations qui existent entre les divers invariants introduits dans le cas d'un tore sur un corps global.

PROPOSITION 19. — *On conserve les notations et hypothèses de la proposition précédente. On considère, en outre, sur un corps de nombres, une k-compactification lisse* $T \to X$ *de* T :

(i) *on a deux suites exactes naturelles*

(iR) $$0 \to Ш(S) \to T(k)/R \to \prod_v T(k_v)/R \to A(T) \to 0,$$

(iB) $$0 \to A(T) \to H^1(G, \hat{S})^{\sim} \to Ш(T) \to 0;$$

(ii) *sur un corps de nombres, on a un diagramme naturel*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 \to Ш(T)^{\sim} \to \mathrm{Br}_a X & \xrightarrow{\mu} & \prod_v \mathrm{Br}_a X_v & \xrightarrow{\tau} & T(k)/R^{\sim} \to Ш(S)^{\sim} \to 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle\lambda} & & \\ & & \prod_v \mathrm{Br}_a X & & \end{array}$$

Dans ce diagramme, la suite horizontale est exacte et

$$A(T)^{\sim} = \operatorname{im} \mu, \qquad T(k)/\mathrm{Br}^{\sim} = \operatorname{im} \tau\lambda.$$

Rappelons (§ 7, *a*) que $\mathrm{Br}_a X$ désigne le quotient du noyau de $\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X}$ par l'image de $\mathrm{Br}\, k \to \mathrm{Br}\, X$. Si X est une *k*-compactification lisse d'un tore T défini sur un corps *k* de caractéristique 0 et déployé par l'extension galoisienne K/k de groupe G, on a des isomorphismes canoniques [*cf.* lemmes 15 (i) et 16]

$$\mathrm{Br}_a X \xrightarrow{\approx} H^1(k, \mathrm{Pic}\, \overline{X}) \xleftarrow{\approx} H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K).$$

Comme on l'a déjà signalé, la suite (iB) est due, en caractéristique 0, à Voskresenskiĭ [33], sous la forme

$$0 \to A(T) \to H^1(k, \mathrm{Pic}\, \overline{X})^{\sim} \to Ш(T) \to 0.$$

La considération d'accouplements avec des groupes de Brauer convenables permet alors de l'interpréter naturellement [26] sous la forme

$$0 \to A(T) \to \mathrm{Br}_a X^{\sim} \to Ш(T) \to 0.$$

La suite (iR) est la simple traduction, *via* le théorème 2 et la proposition 18 (i), de la suite

$$0 \to Ш(S) \to H^1(k, S) \to \prod_v H^1(k_v, S) \to Ч^1(k, S) \to 0,$$

qui est exacte par définition. La suite (iB) est la conséquence immédiate des isomorphismes $A(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \operatorname{im} \mu$ et $Ш(T)^{\sim} \xrightarrow{\approx} \ker \mu$ donnés par la résolution flasque et le corps de classes [prop. 18 (i)]. Par assemblage de ces deux suites et dualité, on obtient donc la suite exacte longue

$$0 \to Ш(T)^{\sim} \to H^1(G, \hat{S}) \to \prod_v H^1(G^v, \hat{S}) \to T(k)/R^{\sim} \to Ш(S)^{\sim} \to 0,$$

étant donné les résultats locaux

$$T(k_v)/R \xrightarrow{\approx} H^1(k_v, S) \xrightarrow{\approx} H^1(G^v, \hat{S})^{\sim}$$

et les compatibilités des dualités locales et globale. Voici inversement comment se découpe cette suite, en fonction de Ш (T), A (T), T (k)/R et de la cohomologie de $\hat{S}$:

$$0 \to Ш(T)^{\sim} \to H^1(G, \hat{S}) \to A(T)^{\sim} \to 0,$$

$$0 \to A(T)^{\sim} \to \prod_v H^1(G^v, \hat{S}) \to Ч^1(G, \hat{S}) \to 0,$$

$$0 \to Ч^1(G, \hat{S}) \to [T(k)/R]^{\sim} \to Ш^2(G, \hat{S}) \to 0.$$

Sur un corps de nombres, $H^1(G, \hat{S}) = Br_a X$ et $H^1(G^v, \hat{S}) = Br_a X_v$, puisque $[\hat{S}] = [\mathrm{Pic}\, X_K]$ (*cf.* ci-dessus) : on peut prendre pour G-résolution flasque de $\hat{T}$ la suite exacte

(B) $$0 \to \hat{T} \to M \to \mathrm{Pic}\, X_K \to 0,$$

où M désigne le G-module des diviseurs de X_K à support hors de T_K (prop. 6). Enfin, l'assertion sur T (k)/Br est la traduction du corollaire 1 (iii) de la proposition 17. □

On se restreint *désormais* au cas d'un corps de nombres k, en conservant les hypothèses et notations des deux propositions précédentes. On se propose, pour finir, de préciser le diagramme d'implications reliant, en général, les critères de rationalité suivants (critères relatifs au k-tore T) :

(i) T est une variété k-rationnelle;

(ii) T est une variété k-stablement rationnelle, i. e., pour n assez grand, $T \times \mathbf{G}_{m,k}^n$ est k-rationnelle;

(iii) T est le quotient d'un tore quasi trivial par un sous-tore quasi trivial, i. e. $[\hat{S}] = 0$;

(iv) T^n est, pour $n > 0$ convenable, k-stablement rationnelle, i. e. $[\hat{S}]$ est d'ordre fini;

(v) il existe un k-tore T′ tel que $T \times T'$ soit k-rationnelle, i. e. $[\hat{S}]$ est inversible;

(vi) $Br_a X = 0$ et $T(k)/R = 0$, i. e. $H^1(G, \hat{S}) = 0$ et $H^1(k, S) = 0$;

(vii) $T(k)/R = 0$, i. e. $H^1(k, S) = 0$;

(viii) $Br_a X = 0$, i. e. $H^1(G, \hat{S}) = 0$;

(ix) $T(k)/Br = 0$;

(x) A (T) = 0;

(xi) Ш (T) = 0.

Ces diverses propriétés sont liées par le diagramme d'implications ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & & \text{(vii)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(i)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(ii)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(iii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iv)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(v)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{(vi)} \arrow[r, Leftrightarrow] & {\Bigg[} & & \text{(ix)} \\
 & & & & & & & \text{(viii)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
 & & & & & & & & {[\text{(x) et (xi)}]} \arrow[uu, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Ces mêmes propriétés et implications subsistent pour k quelconque de caractéristique 0, à condition de supprimer (x) et (xi), et, pour k quelconque, si l'on supprime (ix) et la mention $\mathrm{Br}_a \mathrm{X}$ dans (vi) et (viii). Pour chacune des propriétés (vi) à (xi), on note respectivement (vi)′, ..., (xi)′ la propriété plus forte obtenue en exigeant la propriété correspondante, non seulement pour k et G, mais aussi pour toute extension finie k'/k et tout sous-groupe G′ de G.

PROPOSITION 20. — *Il n'y a pas, dans le diagramme d'implications ci-dessus, d'autre relation que celles indiquées, hormis éventuellement la réciproque de* (i) $\Rightarrow$ (ii).

La question de savoir si cette réciproque est vraie ou non est, bien entendu, la question essentielle : c'est le *problème de Zariski* pour les tores (*voir* [34]). Il semble que Voskresenskiĭ [33] ait le premier posé la question sous la forme (iii) $\Rightarrow$ (i) : le quotient d'un tore quasi trivial par un sous-tore quasi trivial est-il une variété k-rationnelle ?

Les implications indiquées dans le diagramme ci-dessus résultent essentiellement de remarques déjà faites : l'équivalence de (ii) et (iii) est prouvée dans la proposition 6 et remonte à Voskresenskiĭ [33] en caractéristique 0 et Swan [31]; si $\mathrm{A}(\mathrm{T}) = 0$, chaque restriction $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \hat{\mathrm{S}}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G}^v, \hat{\mathrm{S}})$ est nulle et l'application λ est donc nulle, d'où (x) $\Rightarrow$ (ix).

Nous allons montrer par des contre-exemples que la plupart des implications du diagramme ont leur réciproque fausse, même au sens fort, i. e. (vii)′ n'implique pas (viii), (viii)′ n'implique pas (vii), etc. L'exemple généralement utilisé est celui du tore $\mathrm{R}^1_{\mathrm{K}/k}\, \mathbf{G}_m$ pour K/k galoisienne finie de groupe G sur un corps de nombres k. Rappelons les résultats obtenus dans ce cas (corollaire 1 de la proposition 15, corollaire 2 de la proposition 17 et proposition 18) : on désigne par X une k-compactification lisse de T, par k'/k une extension finie (sauf mention du contraire), par G′ le groupe de Galois de $\mathrm{K}k'/k'$ (c'est un sous-groupe de G); alors :

$\mathrm{Br}_a \mathrm{X}_{k'} = \mathrm{H}^1(\mathrm{G}', \hat{\mathrm{S}}) = \mathrm{H}^3(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$, que k'/k soit finie ou non;

$\mathrm{T}(k')/\mathrm{R}$ est extension du dual de $Ч^3(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$ par celui de $Ш^4(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$;

$\mathrm{T}(k')/\mathrm{Br}$ est le dual de l'image dans $Ч^3(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$ du produit $\prod_{v'} \mathrm{H}^3(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$ (on peut s'y limiter aux v' ramifiées dans $\mathrm{K}k'/k'$);

$\mathrm{A}_{k'}(\mathrm{T})$ est le dual de l'image de $\mathrm{H}^3(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$ dans le produit des $\mathrm{H}^3(\mathrm{G}'^{v'}, \mathbf{Z})$;

$Ш(k', \mathrm{T})$ est le dual de $Ш^3(\mathrm{G}', \mathbf{Z})$.

A. LA CONDITION (iv) N'IMPLIQUE PAS (iii). — Cela signifie simplement que le sous-groupe de torsion de U_G peut être non trivial, ce qui est déjà le cas pour $\mathrm{G} = \mathbf{Z}_{23}$ (d'après R 5, $\mathrm{U}_{\mathbf{Z}_{23}} = \mathrm{C}(\mathbf{Z}[\sqrt[23]{1}]) = \mathbf{Z}_3$). Exhibons dans ce cas, grâce à Swan [31] (*voir* aussi [33]), un k-tore qui convienne. Soient I l'idéal de $\mathbf{Z}[\mathrm{G}]$ noyau de la surjection

$\mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}_{47}$ obtenue en faisant opérer un générateur s de G sur $\mathbf{Z}_{47}$ *via* $1 \mapsto 2$ et T le tore dual. L'idéal $I = \langle s-2, 47 \rangle$ n'est pas principal [31], mais il est projectif, car cohomologiquement trivial (Nakayama). Ainsi, [I] est d'ordre fini dans U_G (*cf.* [22]). En revanche, il n'existe pas de modules de permutation P et Q, tels que $I \oplus P = Q$: s'il en était ainsi, P et Q seraient chacun la somme d'un facteur libre et d'un même facteur $\mathbf{Z}^r$ et I serait alors libre (par simplification, *cf.* [22]). Comme $[\hat{S}] = \rho(I) = -[I]$, on a bien $[\hat{S}]$ d'ordre fini, mais non nul.

B. LA CONDITION (v) N'IMPLIQUE PAS (iv). — Cela revient à dire que le groupe U_G peut être infini. En effet, si G est métacyclique et si 4 n'est pas une période de sa cohomologie, $\rho(J_G)$ est, d'après les propositions 2 et 3, un élément d'ordre infini de U_G. On peut donc prendre pour exemple $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$, pour K/k galoisienne de groupe $G = \langle s, t \rangle$ avec $s^4 = t^5 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$ (*cf.* R 5) : il existe de telles extensions pour $k = \mathbf{Q}$.

C. LA CONDITION (vi) N'IMPLIQUE PAS (v). — Soit $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ pour $K/k = \mathbf{Q}(\sqrt{\zeta})/\mathbf{Q}$ avec $\zeta = 6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$: cette extension est galoisienne de groupe G le groupe quaternionien d'ordre 8. Comme G n'est pas métacyclique, $[\hat{S}] = \rho(J_G)$ n'est pas inversible (prop. 2). Comme $\mathbf{Z}$ est H^3-trivial dans $\mathscr{L}_G$ ([3], chap. XII, § 7), on a, d'une part, $\mathrm{Br}_a X_{k'} = 0$ pour *toute* extension k'/k (finie ou non), d'où *a fortiori* (viii), et, d'autre part, $T(k)/R = \text{Ш}^4(G, \mathbf{Z})^{\sim}$. Or, ce groupe vaut 0, car il existe une place v de $k = \mathbf{Q}$, à savoir 2, pour laquelle $G^v = G$. Ainsi, ce tore T vérifie (vi) sans vérifier (v).

D. LA CONDITION (vii)′ N'IMPLIQUE PAS (xi). — *A fortiori*, (vii)′ n'implique pas (viii) ! On a déjà considéré au paragraphe 6 (corollaire 2 de la proposition 15) le cas du tore $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ pour $G = V_4$. Si K/k est telle que $G^v \neq G$ quelle que soit v, on trouve $A(T) = T(k)/R = T(k)/\mathrm{Br} = 0$ et cela reste vrai pour toute extension finie k'/k : c'est évident si Kk'/k' est cyclique et, sinon, on a encore $G^{v'} \neq G$ pour toute place v' de k'. Pourtant $\text{Ш}(T) = \mathbf{Z}_2$. On peut prendre $K/k = \mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})/\mathbf{Q}$.

E. LA CONDITION (vii)′ IMPLIQUE (x), MAIS (vii) N'IMPLIQUE PAS (x). — Soit T déployé par K/k galoisienne finie de groupe G. Si $A(T) \neq 0$, il existe [*cf.* prop. 19 (iR)] une place v de k, telle que $T(k_v)/R = H^1(G^v, \hat{S})^{\sim} \neq 0$. Soit k'/k quadratique, disjointe de K et telle que v ait deux prolongements distincts v'_1 et v'_2 à k'. Alors $\mathrm{Gal}(Kk'/k') = G$, $G^{v'_1} = G^{v'_2} = G^v$. L'application $H^1(G, \hat{S}) \to \prod_{v'} H^1(G^{v'}, \hat{S})$ n'est pas surjective, car $H^1(G^v, \hat{S}) \to H^1(G^{v'_1}, \hat{S}) \oplus H^1(G^{v'_2}, \hat{S})$ ne l'est pas, d'où $T(k')/R \neq 0$. On peut toutefois avoir (vii) sans avoir (x). Soient $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ avec $G = V_4$ et $s = s(K/k)$ le nombre de places v de k telles que $G^v = G$. Si $s = 1$, par exemple pour $\mathbf{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbf{Q}$, alors $T(k)/R = 0$, mais $A(T) = \mathbf{Z}_2$. Noter toutefois que, pour $K/k = \mathbf{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbf{Q}$, on a certes $T(\mathbf{Q})/R = 0$, mais $T(\mathbf{Q}_2)/R = T[\mathbf{Q}(\sqrt{17})]/R = \mathbf{Z}_2$.

F. LA CONDITION (viii)″ N'IMPLIQUE PAS (vii). — On désigne par (viii)″ la condition : $\mathrm{Br}_a X_{k'} = 0$ pour *toute* extension k'/k, finie ou non. Soit $T = R^1_{K/k}\mathbf{G}_m$ pour $K/k = \mathbf{Q}(\sqrt{\zeta})/\mathbf{Q}$ avec $\zeta = 221+26\sqrt{17}+6\sqrt{221}$: cette extension est galoisienne de groupe G le groupe quaternionien d'ordre 8. Le même argument qu'en C prouve que T vérifie (viii)″. Comme $\mathbf{Q}(\sqrt{\zeta})$ contient $\mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$, pour toute place v de $\mathbf{Q}$, $G^v \neq G$. Or, $H^4(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_8$, tandis que, pour un sous-groupe G' de G autre que G, $H^4(G', \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_4$, $\mathbf{Z}_2$ ou 0. On en déduit $Ш^4(G, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}_2$ et, par suite, $T(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$.

G. LES CONDITIONS (ix), (x), (xi) SONT UNIQUEMENT LIÉES PAR (x) ⇒ (ix). — Reprenons l'exemple de $R^1_{K/k}\,\mathbf{G}_m$ pour $G = V_4$ (*cf.* E). Si $s = 0$, par exemple pour $\mathbf{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})/\mathbf{Q}$, on trouve $Ш(T) = \mathbf{Z}_2$, mais $A(T) = T(k)/\mathrm{Br} = 0$. Si $s = 1$, comme pour $\mathbf{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbf{Q}$, alors $A(T) = \mathbf{Z}_2$, mais $Ш(T) = T(k)/\mathrm{Br} = 0$. Enfin, si $s > 1$, par exemple pour $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbf{Q}$, $A(T)$ et $T(k)/\mathrm{Br}$ sont non nuls, alors que $Ш(T) = 0$. □

Remarques.

R 12. Comme on le voit sur la suite exacte (iR) (prop. 19), deux points rationnels de T peuvent être partout localement R-équivalents sans l'être globalement. C'est manifeste sur l'exemple F, car dans ce cas $T(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$ alors que, pour tout nombre premier p, $T(\mathbf{Q}_p)/R = 0$ et, évidemment, $T(\mathbf{R})/R = 0$. De même, d'après la proposition 13 (ii), $X(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$ et $X(\mathbf{Q}_v)/R = 0$ pour toute place v de $\mathbf{Q}$. □

R 13. L'exemple E, où $T(\mathbf{Q})/R = T(\mathbf{Q}_p)/R = 0$ pour tout p premier impair, alors que $T(\mathbf{Q}_2)/R = T[\mathbf{Q}(\sqrt{17})]/R = \mathbf{Z}_2$ est typique de la variation de $T(k)/R$ avec k (*voir* aussi le corollaire 2 de la proposition 15). □

PROPOSITION 21. — *Soient* T *un tore défini sur* $\mathbf{Q}$ *et* X *une* $\mathbf{Q}$*-compactifiée lisse de* T. *On peut avoir*

(i) *l'équivalence de Brauer triviale sur* $X(k)$ *pour tout corps* k *de caractéristique* 0 *et pourtant* $X(\mathbf{Q})/R \neq 0$;

(ii) *la* R*-équivalence triviale sur* $X(k)$ *pour tout corps* k *de caractéristique* 0 *et pourtant* X *non* $\mathbf{Q}$*-rationnelle.*

La démonstration utilise dans les deux cas la bijection $T(k)/R \xrightarrow{\approx} X(k)/R$ [prop. 13 (ii)]. Pour l'assertion (i), il suffit de considérer le tore de dimension 7 décrit en F : en effet, pour toute extension $k/\mathbf{Q}$, $\mathrm{Br}_a X_k = 0$, mais $T(\mathbf{Q})/R = \mathbf{Z}_2$. Pour (ii), l'exemple de Voskresenskiĭ ([33], *cf.* A) convient : c'est un $\mathbf{Q}$-tore, de dimension 23, non $\mathbf{Q}$-rationnel, mais facteur direct d'un tore quasi trivial, d'où aussitôt $T(k)/R = 0$ pour toute extension $k/\mathbf{Q}$. Pour un exemple plus simple, on peut considérer une extension galoisienne $L/\mathbf{Q}$ de groupe $G = \langle s, t \rangle$ avec $s^4 = t^5 = 1$ et $sts^{-1} = t^2$, puis la sous-extension $K/\mathbf{Q}$ fixe par s et le tore $T = R^1_{K/\mathbf{Q}}\,\mathbf{G}_m$ de dimension 4 (l'exemple B n'est autre que $R^1_{L/\mathbf{Q}}\,\mathbf{G}_m$ et convient aussi) : d'après R 4 et la proposition 6, ce tore T n'est pas une variété $\mathbf{Q}$-stablement rationnelle et, pourtant (corollaire 3 du théorème 2), $T(k)/R = 0$ pour *toute* extension $k/\mathbf{Q}$, puisque T, et donc T_k, est déployé par une extension métacyclique. □

Remarque.

R 14. On aurait pu raffiner la définition de l'équivalence de Brauer donnée au paragraphe 7, *a*, en considérant, non seulement l'accouplement $X(k) \times \mathrm{Br}\ X \to \mathrm{Br}\ k$, mais également tous les accouplements $X(k) \times \mathrm{Br}\, X_K \to \mathrm{Br}\, K$ pour toutes les extensions K/k finies (ou même quelconques). Or, même avec cette définition, on obtient encore, pour l'exemple (i) ci-dessus, une équivalence triviale, alors que $X(\mathbf{Q})/R$ n'est pas trivial. □

Annexe

On se propose de prouver l'anticommutativité du diagramme [*cf.* § 7, lemme 15 (iii)]

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Br}(X, K) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda"] & H^1(G, \mathrm{Pic}\, X_K) \arrow[ddll, "\mathfrak{d}"] \\
H^2(G, K[U]^*) \arrow[r, "\approx", "\gamma"'] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Br}(U, K) & \\
H^2(G, K[U]^*/K^*) & &
\end{tikzcd}$$

Rappelons les deux suites spectrales

(HS_X) $$H^p(G, H^q(X_K, \mathbf{G}_m)) \Rightarrow H^n(X, \mathbf{G}_m),$$

(HS_U) $$H^p(G, H^q(U_K, \mathbf{G}_m)) \Rightarrow H^n(U, \mathbf{G}_m)$$

et la suite exacte de G-modules

(B) $$0 \to K[U]^*/K^* \to M \to \mathrm{Pic}\, X_K \to 0,$$

où M désigne le G-module des diviseurs de X_K à support hors de U_K. Dans le diagramme ci-dessus, λ et π sont les flèches évidentes, γ est l'edge $E_2^{2,0} \to E^2$ tiré de (HS_U), α est le morphisme $\ker(E^2 \to E_2^{0,2}) \to E_2^{1,1}$ tiré de (HS_X) et $\mathfrak{d}$ est le cobord tiré de (B). Noter que γ coïncide avec le morphisme naturel.

Soient Y le fermé complémentaire de U, j l'immersion de U dans X, $\mathscr{H}_Y^i$ (resp. H_Y^i) les faisceaux (resp. groupes) de cohomologie à support dans Y. Pour un faisceau étale F sur X, on note simplement $j_* F$ le faisceau $j_* j^* F$ et, pour un élément b de $H^0(X, F)$ ou $H^0(X_K, F)$, on note b_u sa restriction à U ou U_K.

Soit $\mathbf{G}_{m,X} \to I^\cdot$ une résolution injective du faisceau étale $\mathbf{G}_{m,X}$; on note δ la différentielle de $I^\cdot$. Pour un G-module Q, on note ∂ la différentielle du complexe $C^\cdot(G, Q)$ des cochaînes de G à valeurs dans Q. Les suites spectrales (HS_X) et (HS_U) sont respectivement données par les bicomplexes $L_X^{\cdot\cdot}$ et $L_U^{\cdot\cdot}$ avec $L_X^{p,q} = H^0(X_K^p, I_q)$ et $L_U^{p,q} = H^0(U_K^p, I_q)$, la notation X_K^p (resp. U_K^p) désignant le produit fibré au-dessus de X (resp. U) de $p+1$ exemplaires de X_K (resp. U_K). Chaque complexe « simplicial » $H^0(X_K^\cdot, I_q)$ fournit une résolution exacte de $H^0(X, I_q)$ et s'identifie au complexe $C^\cdot[G, H^0(X_K, I_q)]$; de même en remplaçant X par U et X_K par U_K. On prend pour différentielle totale $d = d' + d''$ avec $d' = \partial$ et $d'' = (-1)^p \delta$.

a. DESCRIPTION DE (B) *via* $\mathrm{I}^{\cdot}$. — La suite exacte de cohomologie tirée de la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}^{\cdot}) \to \mathrm{I}^{\cdot}_{\mathrm{X}_{\mathrm{K}}} \to j_* \mathrm{I}^{\cdot}_{\mathrm{X}_{\mathrm{K}}} \to 0,$$

commence par

$$0 \to \mathbf{G}_{m, \mathrm{X}_{\mathrm{K}}} \to j_* \mathbf{G}_{m, \mathrm{X}_{\mathrm{K}}} \to \mathscr{H}^1_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m) \to 0,$$

ce qui donne l'identification $\mathscr{D}iv_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}} \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \xrightarrow{\approx} \mathscr{H}^1_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m)$. Par application du foncteur $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, .)$ à la suite de complexes ci-dessus, on obtient la suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{H}^0_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}^{\cdot}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}^{\cdot}) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}^{\cdot}) \to 0.$$

La suite exacte de cohomologie qu'on en tire commence (sans hypothèse particulière sur la k-variété X et l'ouvert U) par la suite exacte naturelle

$$0 \to \mathrm{K}[\mathrm{X}]^* \to \mathrm{K}[\mathrm{U}]^* \to \mathrm{M} \to \operatorname{Pic} \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \operatorname{Pic} \mathrm{U}_{\mathrm{K}},$$

comme il résulte de l'identification ci-dessus $\mathscr{D}iv_{\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}} \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \xrightarrow{\approx} \mathscr{H}^1_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m)$ et de l'isomorphisme $\mathrm{H}^1_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\approx} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathscr{H}^1_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m))$ dû à la nullité de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m)$.

b. LE DIAGRAMME (D). — Ce diagramme est en partie extrait du diagramme obtenu en considérant le morphisme de restriction $\mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{G}, \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m)) \to \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{G}, \mathrm{H}^{\cdot}(\mathrm{U}_{\mathrm{K}}, \mathbf{G}_m))$:

$$\xrightarrow{\partial} \qquad \delta\big\downarrow$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & & \mathrm{C}^2(\mathrm{G}, \mathrm{K}[\mathrm{U}]^*) \arrow[dd, "j"] \\
 & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1) \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[dddrrr] & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1) \arrow[dddrrr] & & & & \\
 & & & & & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_0) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}^2_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_0) \\
\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{I}_2) \arrow[r, "i"] \arrow[ddrrr] & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_2) \arrow[ddrrr] & & & & & \\
 & & & & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1) & \\
 & & & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}, \mathrm{I}_2) \arrow[r, "i"] & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_2) & &
\end{tikzcd}$$

c. DESCRIPTION DE α. — Un élément de $\operatorname{Br}(\mathrm{X}, \mathrm{K})$ se représente par un élément b de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathrm{I}_2)$ tel qu'il existe c dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1)$ avec $i(b) = \delta c$ et que $\delta b = 0$. Comme $dc = \partial c + \delta c$, l'élément $i(b)$ est homologue pour d à $-\delta c$ et l'image par α de la classe de b dans $\operatorname{Br}(\mathrm{X}, \mathrm{K})$ est la classe de $-\delta c$ dans $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \operatorname{Pic} \mathrm{X}_{\mathrm{K}})$: noter que $\mathrm{C}^{\cdot}(\mathrm{G}, \operatorname{Pic} \mathrm{X}_{\mathrm{K}})$ est l'homologie de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{\cdot}, \mathrm{I}_0) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{\cdot}, \mathrm{I}_1) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^{\cdot}, \mathrm{I}_2)$.

d. DESCRIPTION DE $\mathfrak{d}$. — Un élément de $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \operatorname{Pic} \mathrm{X}_{\mathrm{K}})$ se représente par un élément p de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1)$ tel qu'il existe q dans $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}^2_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_0)$ avec $\delta q = \partial p$ et que $\delta p = 0$. D'après **a**, la suite exacte $\mathrm{C}^1(\mathrm{G}, (\mathrm{B}))$ provient naturellement du diagramme

$$\delta\big\downarrow \quad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_0) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^0_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_2) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\mathrm{X}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_2) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(\mathrm{U}^1_{\mathrm{K}}, \mathrm{I}_2) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Comme Pic $U_K = 0$, la colonne de droite est exacte. Il existe donc r dans $H^0(X^1_K, I_0)$ tel que $\delta r_u = p_u$. Ainsi, $p-\delta r$ appartient à l'image de η et définit un relèvement dans $C^1(G, M)$ de la classe de p dans $C^1(G, \operatorname{Pic} X_K)$. Par application de ∂, on obtient donc un élément du noyau $C^2(G, K[U]^*)$ de $H^0(U^2_K, I_0) \to H^0(U^2_K, I_1)$, à savoir $q_u - \partial r_u$, car $\partial(p-\delta r) = \delta(q-\partial r)$. Finalement, la classe de p dans $H^1(G, \operatorname{Pic} X_K)$ a pour image par $\mathfrak{d}$ la classe de $q_u - \partial r_u$ dans $H^2(G, K[U]^*/K^*)$.

e. Description de λ. — C'est l'application induite par la restriction $H^0(X, I_2) \to H^0(U, I_2)$.

f. Description de γ. — Un élément de $H^2(G, K[U]^*)$ se représente par un élément s de $C^2(G, K[U]^*)$ tel que $\partial s = 0$. Dans le diagramme ci-dessous, il existe une chaîne d'éléments joignant, comme indiqué, s à un élément w de $H^0(U, I_2)$:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\delta"'] & {} \\ {} & \end{tikzcd}$$

(D)
$$\begin{tikzcd}
& & & C^2(G, K[U]^*) \arrow[d, "j"] \\
& & H^0(U^1_K, I_0) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U^2_K, I_0) \\
& H^0(U_K, I_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U^1_K, I_1) & \\
H^0(U, I_2) \arrow[r, "i"] & H^0(U_K, I_2) & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & & s \arrow[d] \\
& & t \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& v \arrow[r] \arrow[d] & {} & \\
w \arrow[r] & {} & &
\end{tikzcd}$$

L'existence d'une telle chaîne provient de l'exactitude des complexes horizontaux et on peut la remonter en raison de l'hypothèse Pic $U_K = 0$. Comme $dt = \partial t - \delta t$ et que $dv = \partial v + \delta v$, $j(s)$ est homologue pour d à $-i(w)$. L'image par γ de la classe de s dans $H^2(G, K[U]^*)$ est donc la classe de $-w$ dans $\operatorname{Br}(U, K)$.

g. Bilan. — Soient b et c comme en **c**. Prenons, en **d**, $p = \partial c$; on peut alors prendre $q = 0$. Soit r_u un relèvement de p_u dans $H^0(U^1_K, I_0)$: il existe alors un élément s dans $C^2(G, K[U]^*)$ tel que $j(s) = \partial r_u$. D'après **c** et **d**, l'image par $\mathfrak{d}\alpha$ de la classe de b dans $\operatorname{Br}(X, K)$ est la classe de s dans $H^2(G, K[U]^*/K^*)$.

Par ailleurs, l'élément b_u de $H^0(U, I_2)$ est connecté à s comme indiqué ci-dessous :

(D)
$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & p \arrow[dr] & & s \arrow[d] \\
b \arrow[r] \arrow[dr] & {} & & r_u \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& & c_u \arrow[r] \arrow[d] & p_u & \\
& b_u \arrow[r] & {} & &
\end{tikzcd}$$

D'après **e** et **f**, la classe de b dans $\operatorname{Br}(X, K)$ a donc pour image par $\gamma^{-1}\lambda$ la classe de $-s$ dans $H^2(G, K[U]^*)$ d'où l'anticommutativité annoncée. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel et J.-P. Serre, *Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne* (*Comm. Math. Helv.*, vol. 39, 1964, p. 111-164).

[2] A. Borel et J. Tits, *Groupes réductifs* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 27, 1965, p. 55-151).

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, 1956.

[4] F. Châtelet, *Points rationnels sur les surfaces cubiques* (*Séminaire d'algèbre et de théorie des nombres*, Paris, 1954).

[5] F. Châtelet, *Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques* (*Enseignement math.*, vol. 5, 1959, p. 153-170).

[6] C. Chevalley, *On Algebraic Group Varieties* (*J. Math. Soc. Jap.*, vol. 6, 1954, p. 303-324).

[7] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 282, série A, 1976, p. 1113-1116).

[8] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La première descente sur les variétés rationnelles* (en préparation).

[9] P. Deligne, *Cohomologie à supports propres* in *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (SGA 4), t. 3 (*Lecture Notes in Math.*, n° 305, Springer, Berlin, 1973).

[10] A. W. M. Dress, *The Permutation Class Group of a Finite Group* (*J. of Pure and Applied Algebra*, vol. 6, 1975, p. 1-12).

[11] S. Endo and T. Miyata, *Quasi-Permutation Modules Over Finite Groups I, II* (*J. Math. Soc. Jap.*, vol. 25, 1973, p. 397-421 et vol. 26, 1974, p. 698-713).

[12] S. Endo and T. Miyata, *On a Classification of the Function Fields of Algebraic Tori* (*Nagoya Math. J.*, vol. 56, 1974, p. 85-104).

[13] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II, III* in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968.

[14] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie algébrique*, EGA IV (*Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 24, 1965, vol. 28, 1966).

[15] H. Hironaka, *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero, I, II* (*Ann. of Math.*, vol. 79, 1964, p. 109-326).

[16] S. Lang, *Diophantine Geometry*, Interscience, New York, 1962.

[17] S. Lang, *Algebraic Groups Over Finite Fields* (*Amer. J. Math.*, vol. 78, 1956, p. 555-563).

[18] H. W. Lenstra, *Rational Functions Invariant Under a Finite Abelian Group* (*Inv. Math.*, vol. 25, 1974, p. 299-325).

[19] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne* (*Actes Congrès intern. Math.*, Nice, 1970, p. 401-411).

[20] Yu. I. Manin, *Cubic Forms* (*Nauka*, Moscou, 1972) (*trad. anglaise* : North-Holland, Amsterdam, 1974).

[21] T. Nakayama, *Cohomology of Class Field Theory and Tensor Product Modules I* (*Ann. of Math.*, vol. 65, 1957, p. 255-267), voir aussi T. Ono, *On the Tamagawa Number of Algebraic Tori* (*Ann. of Math.*, vol. 78, 1963, p. 47-73).

[22] I. Reiner, *Integral Representations of Cyclic Groups of Prime Order* (*Proc. A.M.S.*, vol. 8, 1957, p. 142-146).

[23] P. Roquette, *Einheiten und Divisorklassen in endlich erzeugbaren Körpern* (*Jahresbericht d. Deutschen Math.-Verein.*, vol. 60, 1958, p. 1-27).

[24] M. Rosenlicht, *Toroidal Algebraic Groups* (*Proc. A.M.S.*, vol. 12, 1961, p. 984-988).

[25] P. Samuel, *A propos du théorème des unités* (*Bull. Sc. Math.*, vol. 90, 1966, p. 89-96).

[26] J.-J. Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires* (à paraître).

[27] B. Segre, *Questions arithmétiques sur les variétés algébriques* (*Colloque intern. d'algèbre et de théorie des nombres*, Paris, 1949, p. 83-91).

[28] J.-P. Serre, *Cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires* (*Colloque sur la théorie des groupes algébriques*, Bruxelles, 1962, p. 53-68).

[29] R. Steinberg, *Regular Elements of Semi-Simple Algebraic Groups* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, 25, 1965, p. 49-80).

[30] R. G. Swan, *Induced Representations and Projective Modules* (*Ann. of Math.*, vol. 71, 1960, p. 552-578).

[31] R. G. SWAN, *Invariant Rational Functions and a Problem of Steenrod* (*Inv. Math.*, vol. 7, 1969, p. 148-158).

[32] J. TATE, *The Cohomology Groups of Tori in Finite Galois Extensions of Number Fields* (*Nagoya Math. J.*, vol. 27, 1966, p. 709-719) voir aussi *Global Class Field Theory* in J. CASSELS et A. FRÖHLICH, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, 1967, p. 162-203).

[33] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Birational Properties of Linear Algebraic Groups* (*Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Mat., vol. 34, 1970, p. 3-19) (trad. anglaise : *Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 4, 1970, p. 1-17), voir aussi *On the Birational Equivalence of Linear Algebraic Groups* (*Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 188, 1969, p. 978-981) (trad. anglaise : *Soviet Math. Dokl.*, vol. 10, 1969, p. 1212-1215).

[34] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Fields of Invariants of Abelian Groups* (*Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 28, 1973, p. 77-102) (trad. anglaise : *Russian Math. Surveys*, vol. 28, 1973, p. 79-105).

[35] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Stable Equivalence of Algebraic Tori* (*Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Mat., vol. 38, 1974, p. 3-10) (trad. anglaise : *Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 8, 1974, p. 1-7).

[36] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Invariants birationnels des tores algébriques* (en russe) (*Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 30, 1975, p. 207-208), voir aussi *Quelques problèmes de géométrie birationnelle sur les tores algébriques* (en russe) (*Congrès intern. math.*, Vancouver, 1974, p. 343-347).

[37] H. ZASSENHAUS, *The Theory of Groups*, Chelsea, New York, 1949.

(Manuscrit reçu le 29 juin 1976)

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE,
C. N. R. S.
Mathématiques, bât. 425,
Université de Paris-Sud,
F-91405 Orsay;

Jean-Jacques SANSUC,
École Normale Supérieure,
Centre de Mathématiques,
45, rue d'Ulm,
75230 Paris Cedex 05.