CHARLES DELORME

Sous-monoïdes d'intersection complète de N

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 9, nº 1 (1976), p. 145-154
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1976_4_9_1_145_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 9, 1976, p. 145 à 154.

SOUS-MONOÏDES D'INTERSECTION COMPLÈTE DE N

PAR CHARLES DELORME

On donne une caractérisation récursive des monoïdes d'intersection complète inclus dans **N**, qui permet de les construire aisément avec leurs générateurs minimaux. On donne aussi un algorithme permettant de décider si une partie de **N** engendre un monoïde d'intersection complète. Un des intérêts de ces monoïdes est qu'on peut les réaliser avec un point P d'une courbe lisse X comme ensemble des ordres des pôles en P des fonctions méromorphes sur X et régulières hors de P (Pinkham [2]).

1. Définitions

Soit Γ un sous-monoïde de **N**, autre que $\{ 0 \}$.

On considère l'algèbre $A = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} K\, t^{\alpha} \subset K[t]$, où K est un corps. Si a est le p. g. c. d. de Γ, alors $\overline{A} = K[t^{a}]$ est le normalisé de A et le conducteur de A est $\overline{A}\, t^{c}$, où c est le plus petit entier tel que $c + \mathbf{N}\, a \subset \Gamma$. C'est pourquoi on dit que c est le *conducteur* de Γ. Si $a = 1$, on dit que Γ est *numérique.*

On dit que Γ est d'*intersection complète* quand A est d'intersection complète, ce qui ne dépend pas de K (Herzog [1], 1.13) : si G est un générateur de Γ, de cardinal fini g, cela signifie que la congruence attachée à la surjection naturelle de monoïdes $\mathbf{N}^{G} \to \Gamma$ admet un générateur à $g-1$ éléments.

2. Motivations géométriques

Voici deux occurrences de ces monoïdes :

A un point P d'une courbe lisse et propre X, on attache le monoïde des ordres des pôles en P des fonctions méromorphes sur X régulières hors de P. Pinkham ([2], 14.2) indique que tout monoïde numérique d'intersection complète Γ peut être obtenu de cette manière à partir d'une courbe. Le genre de celle-ci est $c/2$, où c est le conducteur de Γ car Γ est symétrique (Kunz [3]).

Pour qu'un sous-anneau complet de dimension 1 de K $[[t]]$ soit d'intersection complète (autrement dit, pour qu'une branche de courbe analytique géométriquement intègre soit d'intersection complète), il suffit que le monoïde des valuations soit d'intersection complète. Cette condition n'est pas nécessaire, comme le montre un exemple de Herzog et Kunz ([4], p. 40-41).

3. Notations

Soit G une partie finie et non vide de $\mathbf{N}$, ne contenant pas 0; on appelle g le cardinal de G.

Si L est une partie non vide de G, on note $\Gamma(\mathrm{L})$ le sous-monoïde de $\mathbf{N}$ engendré par L, et A (L) désigne l'algèbre $\bigoplus_{\alpha \in \Gamma(\mathrm{L})} \mathrm{K}\, t^{\alpha}$. L'anneau de polynômes dont les indéterminées sont les T_x, $x \in \mathrm{L}$ est noté K (L). On gradue A (L) et K (L) en attribuant à t le degré 1 et à T_x le degré x. On a alors un morphisme surjectif d'anneaux gradués $\mathrm{K}(\mathrm{L}) \to \mathrm{A}(\mathrm{L})$ qui à T_x fait correspondre t^x. Le noyau de ce morphisme est l'idéal homogène I (L), qui est engendré par les différences de monômes unitaires de même degré (Herzog [1], 1.4).

On a des inclusions naturelles graduées $\mathrm{A}(\mathrm{L}) \subset \mathrm{A}(\mathrm{G})$, $\mathrm{K}(\mathrm{L}) \subset \mathrm{K}(\mathrm{G})$, ...

Enfin $\mathrm{A}_+(\mathrm{L})$ et $\mathrm{K}_+(\mathrm{L})$ sont des idéaux gradués maximaux de A (L) et K (L).

4. Suites distinguées

Une suite distinguée $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ sur G est formée d'une suite $\mathscr{P}$ de partitions de G en parties non vides, soit $\mathscr{P} = (\mathrm{P}_i,\ 1 \leqq i \leqq g)$ et d'une suite $\mathscr{Z}$ d'éléments de K (G), soit $\mathscr{Z} = (\mathrm{Z}_i,\ 2 \leqq i \leqq g)$ telles que :

(★) pour $i \geqq 2$, la partition P_{i-1} se déduit de P_i en supprimant deux éléments distincts L_i et L'_i de P_i et en les remplaçant par leur réunion.

(★★) Z_i est différence de deux monômes unitaires $\mathrm{X}_i \in \mathrm{K}(\mathrm{L}_i)$ et $\mathrm{X}'_i \in \mathrm{K}(\mathrm{L}'_i)$ de même degré > 0.

5. Remarques

La condition (★) implique que P_i a i éléments, que $\mathrm{P}_1 = \mathrm{G}$, que P_g est la partition de G en ses parties à 1 élément.

Les polynômes Z_i appartiennent à $\mathrm{I}(\mathrm{L}_i \cup \mathrm{L}'_i)$, donc à I (G).

Si $g = 1$, on a tout simplement $\mathscr{P} = (\mathrm{P}_1)$ et $\mathscr{Z} = \varnothing$.

Si $g \geqq 2$, une suite distinguée sur G induit naturellement des suites distinguées sur L_2 et L'_2.

6. Lemme. — *Pour que* $\Gamma(\mathrm{G})$ *soit d'intersection complète, il faut et il suffit qu'il existe une suite distinguée* $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ *sur* G *telle que* I (G) *soit engendré par* $\mathscr{Z}$.

La condition est évidemment suffisante, car $\mathscr{Z}$ comporte $g-1$ éléments.

Si $\Gamma(G)$ est d'intersection complète, un générateur à $g-1$ éléments de la congruence attachée à $N^G \to \Gamma(G)$ fournit un générateur à $g-1$ éléments de $I(G)$, de la forme $(Y_j - Y'_j,\ 2 \leqq j \leqq g)$, où Y_j et Y'_j sont deux monômes unitaires de même degré, évidemment > 0, car ces éléments de $I(G)$ ne sont pas nuls.

Nous allons construire $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ de proche en proche. Supposons qu'on ait déjà construit les P_i, $k \leqq i \leqq g$, vérifiant (★), et les Z_i, $k < i \leqq g$, vérifiant (★★) et $Z_i = Y_i - Y'_i$.

C'est trivial pour $k = g$: on prend $P_g = \{\{x\}, x \in G\}$. Si on arrive à $k = 1$, le lemme est démontré. On suppose donc $k > 1$, et on essaye de diminuer k.

Soit S le produit tensoriel sur K : $\bigotimes_{B \in P_k} A(B)$. On a un morphisme surjectif d'anneaux gradués $\varphi : K(G) \to S$ en composant l'isomorphisme naturel $K(G) \to \bigotimes_{B \in P_k} K(B)$ et le produit tensoriel des surjections $K(B) \to A(B)$. L'image de $I(G)$ par φ est appelée J. Les images $\varphi(Z_i)$, $k < i \leqq g$ sont nulles, donc J est engendré par les $\varphi(Y_i - Y'_i)$, $2 \leqq i \leqq k$.

Soit B un élément de P_k. On trouve dans J l'élément $\varphi(T_y^x - T_x^y)$, avec $x \in B$ et $y \in G$, $y \notin B$. Donc J n'est pas inclus dans l'idéal engendré par les $A_+(B')$, $B' \in P_k$, $B' \neq B$. Donc il existe au moins un u, $2 \leqq u \leqq k$, tel que $\varphi(Y_u)$ ou $\varphi(Y'_u)$ soit dans $A(B)$. Comme P_k a k éléments et comme u ne peut prendre que $k-1$ valeurs, il existe un v, $2 \leqq v \leqq k$, et deux éléments distincts B et B' de P_k tels que $Y_v \in K(B)$ et $Y'_v \in K(B')$. Quitte à modifier la numérotation des $Y_j - Y'_j$, $2 \leqq j \leqq k$, on peut supposer $v = k$. Ce qui permet de construire P_{k-1} suivant (★) en prenant $L_k = B$ et $L'_k = B'$, et $Z_k = Y_k - Y'_k$, ce qui vérifie (★★), et la construction a progressé d'un cran.

7. LEMME. — *Soit* $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ *une suite distinguée sur* G, *avec* $g \geqq 2$. *On pose* $b = p.g.c.d.\ L_2$, $b' = p.g.c.d.\ L'_2$, $p = p.p.c.m.\ (b, b')$; *on appelle* r *le degré de* Z_2. *On a les propriétés suivantes :*

(i) *si* F *et* F' *sont des générateurs minimaux de* $I(L_2)$ *et* $I(L'_2)$, *alors* F, F', Z_2 *est un générateur minimal de* $(I(L_2), I(L'_2), Z_2)$;

(ii) *pour que* $I(L_2)$, $I(L'_2)$, Z_2 *engendre* $I(G)$, *il faut et il suffit que* $r = p$.

Preuve de (i). — Si on a une relation $\Sigma \lambda_f f + \Sigma \lambda_{f'} f' + \nu Z_2 = 0$, homogène, dans $K(G)$, comme Z_2 est non nul dans l'anneau intègre $A(L_2) \otimes A(L'_2)$ identifié au quotient $K(G)/(I(L_2), I(L'_2))$, le coefficient ν de Z_2 est nul dans $A(L_2) \otimes A(L'_2)$, donc s'écrit $\Sigma \mu_f f + \Sigma \mu_{f'} f'$ dans $K(G)$. La relation devient

$$\Sigma(\lambda_f + Z_2 \mu_f) f + \Sigma(\lambda_{f'} + Z_2 \mu_{f'}) f' = 0.$$

En calculant modulo $(K_+(L'_2))$, et en identifiant le quotient $K(G)/(K_+(L'_2))$ à $K(L_2)$, on obtient $0 = \Sigma(\bar{\lambda}_f + X_2 \bar{\mu}_f) f$. La minimalité de F donne $\bar{\lambda}_f + X_2 \bar{\mu}_f \in K_+(L_2)$, donc $\lambda_f \in (K_+(L_2), K_+(L'_2)) = K_+(G)$. De même, les coefficients des f' sont dans $K_+(G)$. Enfin le coefficient de Z_2 est dans $(I(L_2), I(L'_2)) \subset K_+(G)$. Ce qui prouve la minimalité de F, F', Z_2.

Preuve de (ii). — Supposons que $p = r$. On sait que $I(G)$ est engendré par les $Y_1 Y'_1 - Y_2 Y'_2$, où Y_1 et Y_2 sont des monômes unitaires de $K(L_2)$, et Y'_1 et Y'_2 sont des monômes unitaires de $K(L'_2)$, dont les degrés vérifient $y_1+y'_1 = y_2+y'_2$. On en déduit $y_1-y_2 = y'_2-y'_1 = mp$, où m est entier. On peut, quitte à remplacer l'élément de $I(G)$ par son opposé, se ramener à $m \geqq 0$. On a alors une égalité :

$$Y_1 Y'_1 - Y_2 Y'_2 = Y'_1 (Y_1 X_2^m Y_2) + Y_2 (Y'_1 X_2'^m - Y'_2) + Y'_1 Y_2 (X_2^m - X_2'^m),$$

où

$$Z_2 = X_2 - X'_2.$$

Bien sûr, on a $Y_1 - X_2^m Y_2 \in I(L_2)$, $Y'_1 X_2'^m Y'_2 \in I(L'_2)$ et $X_2^m - X_2'^m$ est multiple de Z_2. Ceci démontre la partie il suffit.

Supposons maintenant $r > p$ (il est évident que r est un multiple positif de p). Comme $\Gamma(L_2)$ et $\Gamma(L'_2)$ se confondent avec $\mathbf{N}\, b$ et $\mathbf{N}\, b'$ à partir d'un certain rang, leur intersection se confond avec $\mathbf{N}\, p$ au-delà de ce rang. Il existe donc dans cette intersection un nombre q non multiple de r. On pourra trouver deux monômes unitaires de degré q, l'un dans $K(L_2)$, l'autre dans $K(L'_2)$. Leur différence est dans $I(G)$, mais n'est pas nulle dans $(A(L_2) \otimes A(L'_2))/(Z_2)$, où elle vaut $t^q \otimes 1 - 1 \otimes t^q$ modulo $t^r \otimes 1 - 1 \otimes t^r$. Ceci prouve la partie il faut.

8. Lemme. — *Soit* $(\mathscr{P}, \mathscr{X})$ *une suite distinguée sur* G. *Pour que* $\mathscr{X}$ *engendre* $I(G)$, *il faut et il suffit que la condition* (★★★) *suivante soit réalisée :*

(★★★) *pour tout* i, $2 \leqq i \leqq g$, *le degré de* Z_i *est le p. p. c. m. des p. g. c. d. de* L_i *et* L'_i.

Ce lemme se démontre par récurrence sur g. Il est trivial pour $g = 1$. Pour $g \geqq 2$, le lemme 7 qui précède permet de ramener la question sur G et $(\mathscr{P}, \mathscr{X})$ aux questions correspondantes sur L_2 et L'_2 et les suites distinguées induites par $(\mathscr{P}, \mathscr{X})$ (rem. 5). En effet, de (ii), on tire que Z_2 doit avoir pour degré le p. p. c. m. des p. g. c. d. de L_2 et L'_2, grâce à (i), on voit que $I(L_2)$ et $I(L'_2)$ doivent être engendrés par les éléments Z_i, $2 < i \leqq g$, qui sont soit dans $I(L_2)$ soit dans $I(L'_2)$, pour que $\mathscr{X}$ engendre $I(G)$. Remarquons qu'alors $\Gamma(L_2)$ et $\Gamma(L'_2)$ sont d'intersection complète. Inversement, l'utilisation de (ii) montre que la condition (★★★) est suffisante.

9. Proposition. — *Soit* G *le générateur minimal d'un sous-monoïde* $\Gamma(G)$ *de* $\mathbf{N}$. *Pour que* $\Gamma(G)$ *soit numérique et d'intersection complète, il fait et il suffit que l'une des conditions suivantes soit réalisée :*

$G = \{1\}$ *(auquel cas* $\Gamma(G) = \mathbf{N}$);

G *est l'union disjointe de deux de ses parties non vides, de la forme* $a_1 G_1$ *et* $a_2 G_2$, *où* a_1 *et* a_2 *sont premiers entre eux, où* G_1 *et* G_2 *sont les générateurs minimaux de deux monoïdes numériques d'intersection complète, avec les conditions* $a_1 \in \Gamma(G_2)$ *et* $a_1 \notin G_2$, $a_2 \in \Gamma(G_1)$ *et* $a_2 \notin G_1$.

Pour démontrer cette proposition, on utilise une suite distinguée sur G vérifiant (★★★), ce qui montre que la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on se servira encore du lemme 7 (ii).

Dans le cas où G a 3 éléments, on retrouve la proposition 3 de Watanabe [5], dont la démonstration est obtenue par des méthodes semblables. On peut généraliser également le lemme 1 de Watanabe [5] comme suit :

10. PROPOSITION. — *Soient* Γ_1 *et* Γ_2 *deux monoïdes numériques, engendrés par* G_1 *et* G_2. *Soient* a_1 *et* a_2 *deux nombres non nuls et premiers entre eux, tels que* $a_1 \in \Gamma_2$ *et* $a_2 \in \Gamma_1$. *On considère le monoïde* (*visiblement numérique*) $\Gamma = a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2$:

(i) *le conducteur de* Γ *est* $c = a_1 c_1 + a_2 c_2 + (a_1 - 1)(a_2 - 1)$, *où* c_1 *et* c_2 *sont les conducteurs de* Γ_1 *et* Γ_2;

(ii) *si les générateurs minimaux* G_1 *et* G_2 *de* Γ_1 *et* Γ_2 *comportent* g_1 *et* g_2 *éléments, celui de* Γ *en a* $g_1 + g_2$ *ou* $g_1 + g_2 - 1$;

(iii) *pour que* Γ *soit symétrique, il faut et il suffit que* Γ_1 *et* Γ_2 *le soient;*

(iv) *pour que* Γ *soit d'intersection complète, il faut et il suffit que* Γ_1 *et* Γ_2 *le soient.*

Preuve de (i). — On sait que $(a_1 - 1)(a_2 - 1)$ est le conducteur de $a_1 \mathbf{N} + a_2 \mathbf{N}$. Donc $a_1 c_1 + a_2 c_2 + (a_1 - 1)(a_2 - 1) + \mathbf{N} \subset a_1 c_1 + a_1 \mathbf{N} + a_2 c_2 + a_2 \mathbf{N} \subset a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2 = \Gamma$; l'expression proposée majore donc c. Si $a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_1 a_2 - a_1 - a_2$ appartenait à Γ, cela s'écrirait $a_1 b_1 + a_2 b_2$, avec $b_1 \in \Gamma_1$ et $b_2 \in \Gamma_2$, on aurait pour des raisons de congruence modulo a_1 et a_2, les égalités $b_1 = c_1 - 1 + a_2 u_2$ et $b_2 = c_2 - 1 + a_1 u_1$, u_1 et u_2 entiers, de somme 1, et tous deux > 0 (car $a_1 \in \Gamma_2$ et $a_2 \in \Gamma_1$), ce qui est impossible. L'expression proposée est bien le conducteur de Γ.

Preuve de (ii). — Il suffit de remarquer que seul $a_1 a_2$, s'il appartient à $a_1 G_1 \cup a_2 G_2$, est susceptible de se décomposer. On peut d'ailleurs préciser le générateur minimal de Γ, soit G, et son nombre d'éléments :

si $a_1 a_2 \in a_1 G_1 \cap a_2 G_2$, alors $G = a_1 G_1 \cup a_2 G_2$ a $g_1 + g_2 - 1$ éléments;

si $a_1 a_2 \notin a_1 G_1 \cup a_2 G_2$, alors $G = a_1 G_1 \cup a_2 G_2$ a $g_1 + g_2$ éléments;

si $a_1 a_2$ appartient à un seul des ensembles $a_1 G_1$, $a_2 G_2$, alors G est $a_1 G_1 \cup a_2 G_2$ privé de $a_1 a_2$ et possède $g_1 + g_2 - 1$ éléments.

Preuve de (iii). — Supposons d'abord que Γ_1 et Γ_2 sont symétriques. Soit $u_1 a_1 + u_2 a_2$ un nombre hors de Γ. On peut en modifiant la décomposition de ce nombre se ramener au cas où u_1 est hors de Γ_1, mais $u_1 + a_2 \in \Gamma_1$. Alors $u_2 - a_1 \notin \Gamma_2$. Alors

$$c - 1 - u_1 a_1 - u_2 a_2 = a_1 (c_1 - 1 - u_1) + a_2 (c_2 - 1 - u_2 + a_1) \in \Gamma;$$

donc Γ est symétrique.

Inversement, si Γ est symétrique, soit u un nombre hors de Γ_1. Alors $a_1 u \notin \Gamma$, et $c - 1 - a_1 u$ appartient à Γ et se met sous la forme $a_1 b_1 + a_2 b_2$, avec $b_1 \in \Gamma_1$ et $b_2 \in \Gamma_2$. On a aussi $b_1 = c_1 - 1 - u + v a_2$ et $b_2 = c_2 - 1 + a_1 - v a_1$, donc v est $\leqq 0$, et $c_1 - 1 - u = b_1 - v a_2 \in \Gamma_1$; donc Γ_1 est symétrique. De même pour Γ_2.

Preuve de (iv). — Nous introduisons une modification mineure aux concepts déjà utilisés; au lieu de prendre pour G une partie finie de $\mathbf{N}^+$, nous considérons que G est l'ensemble d'indices d'une famille finie d'éléments de $\mathbf{N}^+$ (i. e. de nombres entiers strictement positifs).

Si les valeurs des éléments de la famille sont toutes distinctes, on retrouve ce qu'on a fait jusqu'ici en identifiant l'ensemble des indices et l'ensemble des valeurs. Il y a lieu de modifier quelques détails de notations, mais les notions et les propriétés décrites dans les paragraphes 4 à 8 sont inchangées.

Pour prouver (iv), on pourra utiliser une suite distinguée sur l'union disjointe $a_1 G_1 \perp\!\!\!\perp a_2 G_2 = G'$, telle que $L_2 = a_1 G_1$, $L'_2 = a_2 G_2$, et que Z_2 soit de degré $a_1 a_2$ (il est clair que de telles suites existent). L'utilisation du lemme 7 assure l'équivalence souhaitée : si les générateurs minimaux de I (L_2) et I (L'_2) ont h et h' éléments, avec bien sûr $h \geqq g_1 - 1$ et $h' \geqq g_2 - 1$, celui de I (G') en a $h + h' + 1$. Les relations $h + h' + 1 = g_1 + g_2$ d'une part, ($h = g_1 - 1$ et $h' = g_2 - 1$) d'autre part sont manifestement équivalentes.

C. Q. F. D.

11. **Remarques**

Ceci permet de construire des monoïdes d'intersection complète, et leur générateur minimal, mais mieux, cela permet de les construire tous en raison de la caractérisation récursive que constitue la proposition 9.

En outre, on trouve une expression du conducteur pour un monoïde Γ d'intersection complète par une application itérée de 10, (i), qui est :

$$c = \text{p.g.c.d.}\,\Gamma - (\text{somme des éléments de G}) + (\text{somme des degrés des } Z_i,\ 2 \leqq i \leqq g),$$

où G est une partie de N^+ engendrant Γ, et où les Z_i proviennent d'une suite distinguée sur G qui vérifie (★★★). Cette formule se trouve déjà dans [4], 5 10; Herzog et Kunz donnent un résultat plus fort : on a toujours $c \leqq M$, l'égalité ne pouvant être réalisée que si Γ est d'intersection complète, où M est le minimum de la somme des degrés de $n-1$ éléments de I (G) homogènes et linéairement indépendants modulo I (G) K_+ (G), corrigé par la somme et le p. g. c. d. des éléments de G comme ci-dessus.

12. **Définition**

Si B est une partie non vide de G, différente de G, on appelle E (B) le plus petit élément positif strictement du monoïde $\Gamma(B) \cap \Gamma(\bar{B})$, où $\bar{B}$ est le complémentaire de B dans G.

13. Lemme. — *Soit* G *une partie finie de* N^+, *engendrant* Γ (G) *d'intersection complète, soit* $(\mathscr{P}, \mathscr{Z})$ *une suite distinguée sur* G *vérifiant* (★★★), *et soit* k *un entier*, $2 \leqq g \leqq k$.

Alors il existe deux éléments distincts B *et* B' *de* P_k, *tels que* E (B) = E (B'). *De plus, si* X *et* X' *sont deux monômes unitaires, de degré* E (B), *l'un dans* K (B), *l'autre dans* K (B'), *il existe une suite distinguée vérifiant* (★★★), *soit* $(\mathscr{P}', \mathscr{Z}')$, *avec* $Z'_i = Z_i$ *et* $P'_i = P_i$ *pour* $k < i \leqq g$, *avec* $P'_k = P_k$ *et* $Z'_k = X - X'$.

Considérons un élément B_0 de P_k. Il existe un plus petit indice j tel que $B_0 \in P_j$. Dans P_{j-1}, il y a un élément B_1, réunion de B_0 et d'un autre élément C_0 de P_j. Au signe près, Z_j est égal à $R_0 - S_0 = W_0$, où $R_0 \in K(B_0)$ et $S_0 \in K(C_0)$. Ensuite, si $B_1 \neq G$, il existe un plus petit indice j' tel que $B_1 \in P_{j'}$. Dans $P_{j'-1}$, on trouve $B_2 = B_1 \cup C_1$, et $Z_{j'}$ est au signe près $W_1 = R_1 Q_{0,1} - S_1$, où $R_1 \in K(B_0)$, $Q_{0,1} \in K(C_0)$ et $S_1 \in K(C_1)$. Et ainsi de suite jusqu'à $B_{n+1} = G$, et Z_2 est au signe près

$$W_n = R_n R_{0,n} Q_{1,n} \dots Q_{n-1,n} - S_n,$$

avec $S_n \in K(C_n)$, $R_n \in K(B_0)$ et $Q_{i,n} \in K(C_n)$, tous monômes unitaires.

On peut noter que G est la réunion disjointe de $B_0, C_0, \dots, C_n$. On peut aussi voir, en appliquant le lemme 7 à $B_{i+1} = B_i \cup C_i$ et W_i, que $D = I(G)/K_+(G)\, I(G)$ est somme directe des images des $I(C_i)$, de l'image de $I(B_0)$, des sous-espaces de D engendrés par les images de W_i.

Soient X et X' deux monômes unitaires de même degré, avec $X \in K(B_0)$ et $X' = UV_0 \dots V_n$, où $U \in K(B_0)$ et $V_i \in K(C_i)$, tous monômes unitaires. A cause de (★★★), le degré de V_n est multiple de celui de S_n, soit $v_n = e_n s_n$ l'égalité de degrés correspondante. On décompose alors $X - X'$ en la somme de trois termes de même degré :

$$X - U R_n^{e_n} V_0 Q_{0,n}^{e_n} \dots V_{n-1} Q_{n-1,n}^{e_n} \in I(B_n),$$

$$U V_0 \dots V_{n-1}((R_n Q_{0,n} \dots Q_{n-1,n})^{e_n} - S_n^{e_n}) \in (W_n),$$

$$U V_0 \dots V_{n-1}(S_n^{e_n} - V_n) \in I(C_n).$$

Dans la décomposition de l'image de $X - X'$ dans D, le coefficient de W_n est nul, sauf si $e_n = 1$ et $x = s_n$, auquel cas ce coefficient est 1.

Le degré de $V_{n-1} Q_{n-1,n}^{e_n}$ est multiple de celui de S_{n-1}, en vertu de (★★★). On recommence la même opération. On finit par arriver sur un élément de $I(B_0)$, savoir :

$$X - U R_n^{e_n} R_{n-1}^{e_{n-1}} \dots R_0^{e_0} = X - X' \text{ modulo } (W_0, \dots, W_n, I(C_0), \dots, I(C_n)).$$

Les égalités de degrés ayant servi entretemps sont :

(1) $$x = u + v_0 + \dots + v_n,$$

(2) $$v_i + \sum_{i<j\leqq n} e_j q_{i,j} = e_i s_i = e_i(r_i + \sum_{0\leqq j<i} q_{j,i}), \qquad 0 \leqq i \leqq n,$$

(3) $$x = u + e_0 r_0 + \dots + e_n r_n.$$

Voyons maintenant comment se traduit le fait que $x = E(B_0)$ et $u = 0$ [autrement dit, $X' \in K(\overline{B}_0)$]. Comme $x > 0$, l'un des e_i est > 0. Soit p le plus petit indice tel que $e_p \neq 0$. En utilisant la ligne (2) pour $0 \leqq i < p$, on observe que $q_{i,p} = 0$ pour $0 \leqq i < p$. Donc $W_p = R_p - S_p$. On en déduit $E(B_0) \leqq r_p = s_p$, donc $E(B_0) = s_p$ et $e_p = 1$.

Ceci montre déjà que pour chaque $B \in P_k$, le degré $E(B)$ est égal au degré d'un des Z_i, $2 \leqq i \leqq k$. Il y a donc deux éléments distincts B et B' de P_k, tels que $E(B) = E(B')$, puisque E associe aux k éléments de P_k au plus $k-1$ nombres.

Soit donc $X-X'$ une différence de deux monômes de degré $E(B)$, avec $X \in K(B)$ et $X' \in K(B')$. La décomposition de $X-X'$, obtenue en prenant $B_0 = B$ est de la forme :

$$X-X' = W_p \text{ modulo } (I(B_0), I(C_p), \ldots, I(C_n), W_{p+1}, \ldots, W_n),$$

si p est défini comme précédemment.

Les Z_i, $2 \leqq i \leqq g$, engendrent $I(G)$ (lemme 8). On obtient un nouveau générateur de $I(G)$ en remplaçant par $X-X'$ celui des Z_i qui est égal au signe près à W_p (son indice j vérifie $2 \leqq j \leqq k$). Comme ce générateur est encore formé de différences de monômes unitaires de même degré, on peut user de la construction de suites distinguées exposée au lemme 6 pour fabriquer $(\mathscr{P}', \mathscr{Z}')$, avec $P_i = P'_i$ pour $k \leqq i \leqq g$, avec $Z_i = Z'_i$ pour $k < i \leqq g$ et avec $Z_k = X-X'$.

Cette nouvelle suite distinguée vérifie (★★★) d'après le lemme 8. En particulier, $E(B)$ est le p. p. c. m. des p. g. c. d. de B et B'.

14. **Description d'un algorithme**

Soit G une partie finie et non vide de **N**, ne contenant pas 0. Pour savoir si $\Gamma(G)$ est d'intersection complète, on tente de construire une certaine suite distinguée de proche est en proche.

On part évidemment de P_g, partition de G en ses parties à 1 élément. Si on arrive à P_k, $k \geqq 2$, on calcule les $E(B)$, $B \in P_k$. S'ils sont tous distincts, le monoïde n'est pas d'intersection complète. Si deux éléments distincts B et B' de P_k vérifient $E(B) = E(B')$, on compare $E(B)$ et le p. p. c. m. des p. g .c. d. de B et de B'. S'ils sont distincts, le monoïde n'est pas d'intersection complète. S'ils sont égaux, on prend $L_k = B$ et $L'_k = B'$, et on définit P_{k-1} avec (★); on choisit Z_k différence de deux monômes unitaires de degré $E(B)$, l'un dans $K(B)$, l'autre dans $K(B')$. Ce qui fait progresser la construction d'un cran. Si on arrive ainsi à $k = 1$, le monoïde est d'intersection complète.

Justification de l'algorithme. — Si on arrive à $k = 1$, on a construit une suite distinguée vérifiant (★★★), donc un générateur de $I(G)$ ayant $g - 1$ éléments. Par la même occasion, on dispose d'une évaluation du conducteur de $\Gamma(G)$.

Inversement, si $\Gamma(G)$ est d'intersection complète, à chaque pas il existe une suite distinguée vérifiant (★★★), dont on connaît les termes P_i, $k \leqq i \leqq g$ et Z_i, $k < i \leqq g$: le lemme 12 montre qu'il existe une autre suite distinguée vérifiant (★★★), dont la partie connue comporte un terme de plus, et se déduit de la partie connue de la précédente comme il est dit dans l'algorithme. Ceci explique pourquoi les observations formulées dans l'algorithme permettent, le cas échéant, de nier que $\Gamma(G)$ soit d'intersection complète.

Le lemme 13 et l'algorithme restent valides si G est l'ensemble d'indices d'une famille finie d'éléments **N** non nuls.

15. Exemples

Les monoïdes, appelés « libres » dans [6], parmi lesquels figurent les monoïdes de valuation des branches analytiques de courbes planes, [1], 2.1, Remark, sont d'intersection complète. Ils se caractérisent par le fait qu'une des suites distinguées sur un générateur G, vérifiant (★★★), est telle que L_g et les L'_i, $2 \leqq i \leqq g$ sont les parties à un élément de G. Watanabe ([5], Remark 1) donne un exemple montrant que les monoïdes d'intersection complète ne sont pas tous de cette sorte.

$G = \{5, 6, 7, 8\}$. On a $E(\{5\}) = 15$, $E(\{6\}) = 12$, $E(\{7\}) = 14$, $E(\{8\}) = 16$. Le monoïde $\Gamma(G)$ n'est pas d'intersection complète car les $E(B)$, $B \in P_4$ sont distincts deux à deux.

$G = \{4, 5, 6, 7\}$. On a $E(\{4\}) = E(\{6\}) = 12$, $E(\{4, 6\}) = E(\{5\}) = 10$, mais $E(\{4, 5, 6\}) = E(\{7\}) = 14$ n'est pas égal à 7, qui est le p. p. c. m. de 7 et de $1 =$ p. g. c. d. $(\{4, 5, 6\})$. Le monoïde $\Gamma(G)$ n'est donc pas d'intersection complète.

$G = \{10, 14, 15, 21\}$. On a $E(\{10\}) = E(\{15\}) = 30$, $E(\{14\}) = E(\{21\}) = 42$, $E(\{10, 15\}) = E(\{14, 21\}) = 35$. Le monoïde est d'intersection complète, son conducteur est $1-(10+14+15+21)+(30+42+35) = 48$. Une suite distinguée vérifiant (★★★) est :

$$P_4 = \{\{10\}, \{14\}, \{15\}, \{21\}\}, \qquad Z_4 = T_{10}^3 - T_{15}^2,$$
$$P_3 = \{\{10, 15\}, \{14\}, \{21\}\}, \qquad Z_3 = T_{14}^3 - T_{21}^2,$$
$$P_2 = \{\{10, 15\}, \{14, 21\}\}, \qquad Z_2 = T_{10}^2 T_{15} - T_{14} T_{21}.$$
$$P_1 = \{G\},$$

Ces exemples illustrent le fonctionnement de l'algorithme. On aurait pu aussi user de la proposition 9 pour voir que $\Gamma(\{4, 5, 6, 7\})$ et $\Gamma(\{5, 6, 7, 8\})$ ne sont pas d'intersection complète.

On peut insérer $G = \{10, 14, 15, 21\}$ dans la formation d'exemples plus compliqués, selon la proposition 10 :

$$29\,\Gamma(G) + 31\,\Gamma(G) = \Gamma(\{290, 310, 406, 434, 435, 465, 609, 651\})$$

est d'intersection complète, son conducteur est $48.29+48.31+28.30 = 3720$:

$$20\,\Gamma(G) + 21\,\Gamma(G) = \Gamma(\{200, 210, 280, 294, 300, 315, 441\})$$

est d'intersection complète, son conducteur est 2348 :

$$14\,\Gamma(G) + 15\,\Gamma(G) = \Gamma(\{140, 150, 196, 210, 225, 294, 315\})$$

est d'intersection complète, son conducteur est 1574.

Pour terminer, je tiens à remercier le référé, dont les remarques m'ont permis d'améliorer cet article et de mieux le situer par rapport aux travaux déjà existants.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. HERZOG, *Generators and Relations of Abelian Semigroups and Semigroup Rings* (*Manuscripta Math.*, vol. 3, 1970, p. 175-193).

[2] H. PINKHAM, *Deformations of Algebraic Varieties with G_m Action* (*Astérisque*, vol. 20, Société Mathématique de France, Paris, 1974).

[3] E. KUNZ, *The Value semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring.* (*Proc. A.M.S.*, vol. 25, 1970, p. 748-751).

[4] J. HERZOG und E. KUNZ, *Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension* 1, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, 2. Abh., 1971, Springer Verlag.

[5] K. WATANABE, *Some Examples of One-Dimensional Gorenstein Domains* (*Nagoya Math. J.*, vol. 49, 1973, p. 101-109).

[6] J. BERTIN et P. CARBONNE, *Sur la structure des semi-groupes d'entiers et applications aux branches* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, série A, 1975, p. 1745-1748).

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1975,
révisé le 25 novembre 1975.)

CHARLES DELORME,
U.E.R. de Mathématiques,
Bât. 425,
91405 *Orsay*.