ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE EYMARD
NOËL LOHOUÉ

Sur la racine carrée du noyau de Poisson dans les espaces symétriques et une conjecture de E. M. Stein

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 2 (1975), p. 179-188
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_2_179_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 8, 1975, p. 179 à 188.

SUR LA RACINE CARRÉE DU NOYAU DE POISSON DANS LES ESPACES SYMÉTRIQUES ET UNE CONJECTURE DE E. M. STEIN

PAR PIERRE EYMARD ET NOËL LOHOUÉ

0. Soit G un groupe de Lie semi-simple non compact, connexe et de centre fini. Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soit B la frontière de Furstenberg de l'espace symétrique $X = G/K$.

Considérons le noyau de Poisson-Furstenberg $P(x, b)$, défini sur $X \times B$. Nous montrons, au théorème 1, que, pour tout $q > 2$, la fonction $\sqrt{P}$ convole $L^2(B)$ dans $L^q(X)$.

Nous en déduisons, au théorème 2, une application au phénomène de Kunze et Stein : nous prouvons que, si $1 \leqq p < 2$, toute fonction de $L^p(G)$ invariante par K à droite convole $L^2(G)$ dans $L^2(G)$.

1. Soit G un groupe de Lie semi-simple, non compact, connexe et de centre fini. Soient $G = KAN$ et $G = K\overline{A^+}K$ des décompositions d'Iwasawa et Cartan respectivement. Notons $\mathfrak{a}^+$ la chambre de Weyl positive correspondante; soit Σ^+ l'ensemble des racines positives restreintes, chacune intervenant autant de fois que l'exige sa multiplicité, et notons 2ρ leur somme. On sait que, dans la décompostion de Cartan, une mesure de Haar sur G est donnée par la formule

$$(1) \qquad \int_G \varphi(g)\,dg = \int_K \int_{\mathfrak{a}^+} \int_K \varphi(k_1.\exp H.k_2) \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \operatorname{sh}(\alpha(H))\,dk_1\,dH\,dk_2,$$

où $dk_1 = dk_2$ est la mesure de Haar normalisée sur K, et où dH est la mesure sur $\mathfrak{a}^+$ restriction d'une mesure de Lebesgue sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A.

Sur l'espace symétrique $X = G/K$, soit dx la mesure-quotient de dg par K. Si M est le centralisateur de A dans K, la frontière de Furstenberg [2] de X est l'espace homogène $B = K/M$ isomorphe à G/MAN. Sur B, soit $db = dk_M$ la mesure-quotient de dk par M.

Le noyau de Poisson sur $X \times B$ est donné par la formule

$$P(gK, kM) = e^{-2\rho(H(g^{-1}k))} \qquad (g \in G,\ k \in K),$$

où $\exp[H(g^{-1}k)]$ est la composante dans A de $g^{-1}k$ pour la décomposition d'Iwasawa.

THÉORÈME 1.— *Soit* $B = K/M$ *la frontière de Furstenberg d'un espace symétrique* $X = G/K$. *Pour tout nombre réel* $q > 2$, *par la formule*

$$f \mapsto F, \qquad \text{où} \quad F(gK) = \int_B P^{1/2}(gK, b) f(b)\, db, \tag{2}$$

la racine carrée du noyau de Poisson applique continûment $L^2(B, db)$ *dans* $L^q(X, dx)$.

Remarques. — 1° Pour $H \in \mathfrak{a}^+$ et $k \in K$, posons désormais

$$P_H(k) = P((\exp H)K, kM). \tag{3}$$

Alors, si $g = k_1 . \exp H . k_2$ est la décomposition de Cartan de g, on a

$$\begin{aligned} F(gK) &= \int_{K/M} P^{1/2}((k_1 \exp H)K, kM) f(kM)\, dk_M \\ &= \int_{K/M} P^{1/2}((\exp H)K, k_1^{-1} kM) f(kM)\, dk_M, \end{aligned}$$

soit

$$F(gK) = (\sqrt{P_H} \bigstar \check{f})\check{}\,(k_1),$$

où le produit de convolution est calculé sur K, les fonctions sur B étant identifiées à des fonctions sur K constantes sur les classes modulo M. [On note $\check{\varphi}(k) = \varphi(k^{-1})$].

2° Si $\alpha \in \Sigma^+$ et $H \in \mathfrak{a}^+$, on a $\operatorname{sh}(\alpha(H)) \leqq e^{\alpha(H)}$ donc

$$\prod_{\alpha \in \Sigma^+} \operatorname{sh}(\alpha(H)) \leqq e^{\sum_\alpha \alpha(H)} = e^{2\rho(H)}.$$

Ces remarques et la formule (1) montrent que, pour établir le théorème 1, il suffit d'établir la

PROPOSITION. *Pour tout* $q > 2$, *il existe une constante* C_q *telle que, pour toute* $f \in L^2(K/M)$, *on ait*

$$\int_{\mathfrak{a}^+} \| \sqrt{P_H} \bigstar f \|_q^q \, e^{2\rho(H)}\, dH \leqq C_q \| f \|_2^q. \tag{4}$$

La démonstration de cette proposition consiste essentiellement à appliquer *in the right place* le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (*cf.* [10], II, p. 112). Pour plus de clarté, nous la décomposerons en lemmes.

LEMME 1. *Soit* ν *un nombre réel tel que* $1 < \nu \leqq 2$. *Alors il existe une constante* c_ν *telle que, pour tout* $H \in \mathfrak{a}^+$, *on ait*

$$\| \sqrt{P_H} \|_\nu \leqq c_\nu e^{(1-(2/\nu))\rho(H)}.$$

Démonstration. — Posons $\lambda = i(\nu - 1)\rho$, donc $i\lambda - \rho = -\nu\rho$. D'après la formule intégrale de Harish-Chandra pour les fonctions sphériques, on a, en posant $a = \exp H$,

$$\| \sqrt{P_H} \|_\nu^\nu = \int_K e^{-\nu\rho(H(a^{-1}k))}\, dk = \int_K e^{(i\lambda - \rho)(H(a^{-1}k))}\, dk = \varphi_\lambda(a^{-1}) = \varphi_{-\lambda}(a).$$

Comme $1 < \nu \leqq 2$, on sait (*Cf.* [3], p. 279 à 291, et aussi [4], p. 390) que, pour tout $H \in \mathfrak{a}^+$, si l'on pose $a_t = \exp(t\,H)$, la fonction de variable réelle

$$t \mapsto \varphi_{-\lambda}(a_t)\,e^{(i\lambda+\rho)(tH)}$$

tend, quand $t \to +\infty$, en croissant vers la constante $\mathbf{c}(-\lambda)$, où $\mathbf{c}$ est la fonction d'Harish-Chandra. Remarquant que $i\lambda+\rho = (2-\nu)\,\rho$, on en déduit le lemme en posant $c_\nu = [\mathbf{c}(-\lambda)]^{1/\nu}$.

DÉFINITION. — Pour $H \in \mathfrak{a}^+$ et $f \in L^1(K/M)$, posons

$$\mathrm{T}f(H) = e^{(1+(2/q))\rho(H)}\,\|\sqrt{P_H}\star f\|_q, \tag{5}$$

où le nombre réel $q > 2$ est désormais fixé.

LEMME 2. — *Si* $2q/(q+2) \leqq \mu < q$, *il existe une constante* A_μ *telle que, pour toute* $f \in L^\mu(K/M)$ *et pour tout* $H \in \mathfrak{a}^+$, *on ait*

$$\mathrm{T}f(H) \leqq A_\mu\,e^{(2/\mu)\rho(H)}\,\|f\|_\mu.$$

Démonstration. — Soit ν tel que $1/q = (1/\mu)+(1/\nu)-1$. Alors $1 < \nu \leqq 2$. D'après l'inégalité de Young et le lemme 1, on a

$$\|\sqrt{P_H}\star f\|_q \leqq \|\sqrt{P_H}\|_\nu\,\|f\|_\mu \leqq c_\nu\,e^{(1-(2/\nu))\rho(H)}\|f\|_\mu,$$

donc

$$\mathrm{T}f(H) \leqq c_\nu\,e^{(1+(2/q)+1-(2/\nu))\rho(H)}\,\|f\|_\mu = c_\nu\,e^{(2/\mu)\,\rho(H)}\,\|f\|_\mu.$$

LEMME 3. — *Considérons* T *définie en* (5) *comme une application sous-linéaire qui transforme les fonctions sur* K/M (muni de la mesure dk_M) *en fonctions sur* $\mathfrak{a}^+$ [muni de la mesure $d\sigma(H) = e^{-2\rho(H)}\,dH$]. *Alors, pour tout* μ *tel que* $2q/(q+2) \leqq \mu < q$, *l'application* T *est de type faible* (μ, μ) *au sens de Marcinkiewicz.*

Démonstration. — Pout tout $s > 0$, soit E_s l'ensemble des $H \in \mathfrak{a}^+$ tels que $\mathrm{T}f(H) > s$. Il faut montrer que $\sigma(E_s) = 0(\|f\|_\mu/s)^\mu$. Or, si $H \in E_s$, d'après le lemme 2 on a

$$e^{(2/\mu)\rho(H)}\,\|f\|_\mu \geqq A_\mu^{-1}\,s,$$

donc

$$e^{-2\rho(H)} \leqq A_\mu^\mu\left(\frac{\|f\|_\mu}{s}\right)^\mu,$$

d'où le résultat.

LEMME 4. — *Pour tout* $q > 2$, *il existe une constante* C'_q *telle que, pour toute* $f \in L^2(K/M)$, *on ait*

$$\int_{\mathfrak{a}^+} \|\sqrt{P_H}\star f\|_q^2\,e^{(4/q)\rho(H)}\,dH \leqq C'_q\,\|f\|_2^2. \tag{6}$$

Démonstration. — Soient des nombres réels μ_1 et μ_2 tels que

$$\frac{2q}{q+2} \leqq \mu_1 < 2 < \mu_2 < q.$$

D'après le lemme 3, l'application T est de type faible (μ_1, μ_1) et (μ_2, μ_2). Donc, d'après le théorème de Marcinkiewicz, T est *de type fort* (2, 2). Autrement dit, il existe une constante C'_q telle que, pour toute $f \in L^2(K/M)$, on ait

$$\int_{\mathfrak{a}^+} |Tf(H)|^2 e^{-2\rho(H)} dH \leqq C'_q \|f\|_2^2,$$

ce qui, en remplaçant $Tf(H)$ par sa définition (5), n'est autre que (6).

Fin de la démonstration du théorème 1. — Prouvons la formule (4) à partir des lemmes 2 et 4. On a d'après le lemme 4,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathfrak{a}^+} \|\sqrt{P_H}\bigstar f\|_q^q e^{2\rho(H)} dH\\ &= \int_{\mathfrak{a}^+} \|\sqrt{P_H}\bigstar f\|_q^2 e^{(4/q)\rho(H)} \|\sqrt{P_H}\bigstar f\|_q^{q-2} e^{(2-(4/q))\rho(H)} dH\\ &\leqq C'_q \|f\|_2^2 \sup_{H\in\mathfrak{a}^+} (\|\sqrt{P_H}\bigstar f\|_q^{q-2} e^{(2-(4/q))\rho(H)}).\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 2 où l'on fait $\mu = 2$,

$$\begin{aligned}\|\sqrt{P_H}\bigstar f\|_q^{q-2} &= Tf(H)^{q-2} e^{-(1+(2/q))(q-2)\rho(H)}\\ &\leqq A_2^{q-2} e^{(q-2)\rho(H)} e^{-(1+(2/q))(q-2)\rho(H)} \|f\|_2^{q-2}\\ &\leqq A_2^{q-2} e^{-(2/q)(q-2)\rho(H)} \|f\|_2^{q-2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\|\sqrt{P_H}\bigstar f\|_2^{q-2} e^{(2-(4/q))\rho(H)} \leqq A_2^{q-2} \|f\|_2^{q-2};$$

et, par suite,

$$\int_{\mathfrak{a}^+} \|\sqrt{P_H}\bigstar f\|_q^q e^{2\rho(H)} dH \leqq C'_q A_2^{q-2} \|f\|_2^2 \|f\|_2^{q-2} = C_q \|f\|_2^q.$$

C. Q. F. D.

2. Du théorème 1 nous allons déduire une application au « phénomène de Kunze et Stein ». Dans [6], ces auteurs ont montré que, si $G = SL(2, \mathbf{R})$, *pour tout nombre réel* p *tel que* $1 \leqq p < 2$, *il existe une constante* C_p *telle que, quelles que soient les fonctions* h *et* f *continues à support compact sur* G, *on ait*

(7) $$\|h\bigstar f\|_2 \leqq C_p \|h\|_p \|f\|_2.$$

Dans [7] et [8], R. L. Lipsman prouve la même propriété pour $G = SL(n, \mathbf{C})$ et $G = SO_0(n, 1)$. On conjecture en fait que la propriété est vraie pour tout groupe de Lie semi-simple connexe et de centre fini (*cf.* [9], Problem 8).

Dans les cas particuliers ci-dessus, la propriété a été démontrée par des méthodes difficiles (mais instructives) s'appuyant, dans chaque cas particulier, sur la connaissance explicite des représentations irréductibles de G, de leur prolongement analytique et de la formule de Plancherel. Il est douteux que ces outils puissent être prochainement disponibles dans le cas général.

Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Il est connu et facile à démontrer ([9] et [5]) que la propriété de convolution (7) a lieu dans le cas général si l'on suppose de plus que la fonction h soit bi-K-invariante. Nous allons déduire du théorème 1 qu'en fait l'invariance de h par K *d'un seul côté* est suffisante :

THÉORÈME 2. — *Soit* G *un groupe de Lie semi-simple non compact, connexe et de centre fini. Soit* K *un sous-groupe compact maximal de* G. *Soit p un nombre réel tel que* $1 \leqq p < 2$. *Alors il existe une constante* C_p, *telle que, quelle que soit la fonction h continue à support compact sur* G *et invariante à droite par* K, *on ait, pour toute* $f \in L^2(G)$,

$$\| h \bigstar f \|_2 \leqq C_p \| h \|_p \| f \|_2. \tag{7}$$

La méthode que nous présentons ici est fondée sur un principe de majoration dû à Carl S. Herz [5], qui nous permet, dans l'étude du problème, de remplacer la représentation régulière [de G dans $L^2(G)$] par la représentation quasi-régulière π de G dans $L^2(B) \simeq L^2(G/MAN)$. On est ainsi ramené à prouver que tout coefficient de π invariant à droite par K appartient à $L^q(G)$ pour tout $q > 2$. Ce dernier point peut se réduire au cas particulier des coefficients $g \mapsto (\pi(g) 1 \mid f)$, où 1 est la fonction identique à 1 sur B, et où $f \in L^2(B)$; mais on voit aisément que l'appartenance aux $L^q(G)$ de ces coefficients est essentiellement le théorème 1. Voici maintenant le détail de la démonstration ([1]).

Soit π la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(B) \cong L^2(G/MAN)$. Cette représentation, qui est irréductible et dans la série principale, est donnée par la formule

$$[\pi(g)f](b) = P^{1/2}(gK, b) f(g^{-1}.b) \qquad [f \in L^2(B)],$$

où $g.b$ est l'action de G opérant à gauche sur $G/MAN \simeq B$.

LEMME 5. — *Pour tout* $q > 2$, *il existe une constante* C_q *telle que, pour toute* $f \in L^2(B)$, *on ait* :

$$\int_G |(\pi(g) 1 \mid f)|^q \, dg \leqq C_q \| f \|_2^q.$$

Démonstration. — On a

$$(\pi(g) 1 \mid f) = \int_B P^{1/2}(gK, b) \overline{f(b)} \, db.$$

D'autre part, pour tout $k \in K$, on a $\pi(k) 1 = 1$, donc la fonction $g \mapsto (\pi(g) 1 \mid f)$ est invariante par K à droite, donc s'identifie à la fonction $\overline{F}$ définie en (2). Ainsi le lemme 5 n'est qu'une autre manière d'énoncer le théorème 1.

([1]) Dans le cas particulier où $1 \leqq p < 4/3$, il est intéressant de remarquer, après le Referee, qu'on peut rapidement déduire le théorème 2 du résultat correspondant spécialisé au cas où h est bi-K-invariant. En effet, posons

$$T_h(f) = h \bigstar f, \qquad \text{et} \qquad g = \tilde{h} \bigstar h, \qquad \text{où} \quad \tilde{h}(x) = \overline{h(x^{-1})}.$$

Si h est K-invariant à droite et appartient à $L^p(G)$, avec $1 \leqq p < 4/3$, alors g est bi-K-invariant et, d'après l'inégalité de Young, appartient à $L^r(G)$, avec $1/r = (2/p) - 1$, donc $1 \leqq r < 2$. De plus $T_g = T_h^* T_h$. En appliquant le cas bi-invariant à g, on a donc

$$||| T_h |||^2 = ||| T_h^* T_h ||| = ||| T_g ||| \leqq C_r \| g \|_r \leqq C_r \| h \|_p^2.$$

LEMME 6. — *Soit* $g \mapsto v(g) = (\pi(g) f_0 \mid f)$ *un coefficient quelconque de* π, *où* f_0 *et* f *appartiennent à* $L^2(B)$. *Alors, pour tout* $g \in G$,

$$\int_K |v(gk)|^2 \, dk \leqq \|f_0\|_2^2 (\pi(g) 1 \,\|f|)^2.$$

Démonstration. — On peut supposer f_0 et f positives. On a alors :

$$\begin{aligned}(\pi(g) f_0 \mid f)^2 &= \left(\int_B P^{1/2}(g^{-1}K, b) f(g.b) f_0(b)\, db\right)^2 \\ &= \left(\int_B P^{1/4}(g^{-1}K, b) f^{1/2}(g.b) P^{1/4}(g^{-1}K, b) f^{1/2}(g.b) f_0(b)\, db\right)^2 \\ &\leqq \int_B P^{1/2}(g^{-1}K, b) f(g.b)\, db \int_B P^{1/2}(g^{-1}K, b) f(g.b) f_0^2(b)\, db \\ &= (\pi(g) 1 \mid f) \int_B P^{1/2}(g^{-1}K, b) f(g.b) f_0^2(b)\, db.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $k \in K$, on a

$$\begin{aligned}|v(gk)|^2 &= (\pi(gk) f_0 \mid f)^2 \\ &\leqq (\pi(gk) 1 \mid f) \int_B P^{1/2}(k^{-1} g^{-1}, b) f(gk.b) f_0^2(b)\, db \\ &= (\pi(g) \;\; 1 \mid f) \int_B P^{1/2}(g^{-1}, kb) f(g.kb) f_0^2(b)\, db \\ &= (\pi(g) \;\; 1 \mid f) \int_B P^{1/2}(g^{-1}, b) f(g.b) f_0^2(k^{-1} b)\, db.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_K |v(gk)|^2 \, dk &\leqq (\pi(g) 1 \mid f) \int_B P^{1/2}(g^{-1}, b) f(g.b)\, db \int_K f_0^2(k^{-1} b)\, dk \\ &= \|f_0\|_2^2 (\pi(g) 1 \mid f)^2.\end{aligned}$$

COROLLAIRE. — *Soit* $g \mapsto v(g) = (\pi(g) f_0 \mid f)$ *un coefficient de* π *invariant par* K *à droite. Alors on a, pour tout* $q > 2$,

$$\int_G |v(g)|^q \, dg \leqq C_q \|f_0\|_2^q \|f\|_2^q.$$

Démonstration. — En effet, d'après le lemme 6, on a, pour tout $g \in G$,

$$|v(g)| \leqq \|f_0\|_2 (\pi(g) 1 \mid |f|).$$

Il suffit donc d'appliquer le lemme 5.

3. Avant de poursuivre la démonstration du théorème 2, nous allons dans ce paragraphe exposer le *principe de majoration de Herz* [5] dans le cadre d'une généralisation aux représentations induites due à G. Arsac [1]. En fait nous utiliserons un énoncé différant légèrement de celui de ces auteurs.

Soit G un groupe localement compact séparable. Soit H un sous-groupe fermé de G (tout à l'heure nous prendrons H = MAN). Sur l'espace homogène B = G/H des classes $\dot{g} = g\mathrm{H}$, soit db une mesure quasi-G-invariante; on a une formule de quasi-invariance

$$\int_{\mathrm{B}} \varphi(gb)\,db = \int_{\mathrm{B}} \mathrm{P}(g, b)\,\varphi(b)\,db,$$

quand, tout à l'heure, nous prendrons H = MAN, le noyau P sera le noyau de Poisson.

Soit σ une représentation unitaire continue de H dans un espace hilbertien $\mathscr{H}_\sigma$. La représentation *induite* $\pi_\sigma = \mathrm{Ind}\,(\sigma \uparrow \mathrm{G})$ est une représentation unitaire continue de G dans l'espace $\mathscr{H}_{\pi_\sigma}$ des fonctions à valeurs vectorielles $\vec{f} : \mathrm{G} \to \mathscr{H}_\sigma$ qui sont 1° mesurables; 2° telles que, quels que soient $g \in \mathrm{G}$, $h \in \mathrm{H}$, on ait

$$\vec{f}(gh) = \sigma(h^{-1})\vec{f}(h);$$

3° telles que la fonction $\dot{g} \mapsto \|\vec{f}(g)\|_{\mathscr{H}_\sigma}$ soit de carré intégrable sur B. L'espace $\mathscr{H}_{\pi_\sigma}$ est de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\vec{f}_1 \,|\, \vec{f}_2) = \int_{\mathrm{B}} (\vec{f}_1(g) \,|\, \vec{f}_2(g))\,db.$$

La représentation π_σ est définie par

$$[\pi_\sigma(g_0)\vec{f}\,](g) = \mathrm{P}^{1/2}(g_0, \dot{g})\vec{f}(g_0^{-1}\dot{g}),$$

où $g_0 \in \mathrm{G}$, $\vec{f} \in \mathscr{H}_{\pi_\sigma}$.

En particulier on s'intéresse à la représentation *quasi-régulière* π de G dans L^2 (G/H, db) qui n'est autre que la représentation $\pi = \pi_{i_{\mathrm{H}}}$ *induite* par la représentation *triviale* i_{H} de H. Elle est définie par

$$\pi(g_0)f(\dot{g}) = \mathrm{P}^{1/2}(g_0, \dot{g})f(g_0^{-1}\dot{g}),$$

où $g_0 \in \mathrm{G}$, $f \in \mathrm{L}^2$ (G/H, db).

PRINCIPE DE MAJORATION. — *Avec les notations qui précèdent, pour tout coefficient* $u(g) = (\pi_\sigma(g)\vec{f}_0 \,|\, \vec{f})$ *de la représentation induite, où* $\vec{f}_0$ *et* $\vec{f}$ *appartiennent à* $\mathscr{H}_{\pi_\sigma}$, *il existe un coefficient* $w(g) = (\pi(g)f_0 \,|\, f)$ *de la représentation quasi-régulière, où* f_0 *et* f *appartiennent à* L^2 (G/H), *tel que* :

$$\begin{cases} 1^\circ \ \textit{pour tout } g \in \mathrm{G}, \textit{ on a } |u(g)| \leqq w(g); \\ 2^\circ \ \|f\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{G/H})} = \|\vec{f}\|_{\mathscr{H}_{\pi_\sigma}} \textit{ et } \|f_0\|_{\mathrm{L}^2(\mathrm{G/H})} = \|\vec{f}_0\|_{\mathscr{H}_\sigma}. \end{cases}$$

Démonstration. — Posons

$$f(\dot{g}) = \|\vec{f}(g)\|_{\mathscr{H}_\sigma} \qquad \text{et} \qquad f_0(\dot{g}) = \|\vec{f}_0(g)\|_{\mathscr{H}_\sigma}.$$

Par définition de la représentation induite, les fonctions f et g sont dans $L^2(G/H)$, et on a les formules du 2° par définition de la norme dans l'espace $\mathscr{H}_{\pi_\sigma}$. De plus, pour tout $g_0 \in G$,

$$\begin{aligned}
|u(g_0)| &= |(\pi_\sigma(g_0)\vec{f}_0 \,|\, \vec{f})| \\
&= \left| \int_B (P^{1/2}(g_0, \dot{g})\vec{f}_0(g_0^{-1}g) \,|\, \vec{f}(g))_{\mathscr{H}_\sigma} \, d\dot{g} \right| \\
&= \left| \int_B P^{1/2}(g_0, \dot{g})(\vec{f}_0(g_0^{-1}g) \,|\, \vec{f}(g))_{\mathscr{H}_\sigma} \, d\dot{g} \right| \\
&\leqq \int_B P^{1/2}(g_0, \dot{g}) \| \vec{f}_0(g_0^{-1}g) \|_{\mathscr{H}_\sigma} \| \vec{f}(g) \|_{\mathscr{H}_\sigma} \, d\dot{g}. \\
&= \left| \int_B P^{1/2}(g_0, \dot{g}) f_0(g_0^{-1}\dot{g}) f(\dot{g}) \, d\dot{g} \right| = (\pi(g_0)f_0 \,|\, f) = w(g_0).
\end{aligned}$$

COROLLAIRE. — *Soit* G *un groupe localement compact séparable et soit* H *un sous-groupe fermé de* G. *Soit* π *la représentation quasi-régulière de* G *dans* $L^2(G/H)$. *Soient* F_0 *et* F *deux fonctions appartenant à* $L^2(G)$. *Alors il existe un coefficient* $w(g) = (\pi(g)f_0 \,|\, f)$ *de* π, *où* f_0 *et* f *sont des fonctions appartenant à* $L^2(G/H)$, tel que :

$$\begin{cases} 1^\circ \ \textit{pour tout } g \in G, \textit{ on a } |F_0 \bigstar \tilde{F}(g)| \leqq w(g); \\ 2^\circ \ \|F_0\|_{L^2(G)} = \|f_0\|_{L^2(G/H)} \ \textit{et} \ \|F\|_{L^2(G)} = \|f\|_{L^2(G/H)}. \end{cases}$$

[Notation : on a posé $\tilde{F}(g) = \overline{F(g^{-1})}$.]

Démonstration. — Soit ρ (resp. σ) la représentation régulière gauche de G (resp. H) dans $L^2(G)$ [resp. $L^2(H)$]. D'après le théorème d'induction par étages, ρ est unitairement équivalente à $\pi_\sigma = \operatorname{Ind}(\sigma \uparrow G)$; autrement dit, il existe une isométrie J de $L^2(G)$ sur $\mathscr{H}_{\pi_\sigma}$ telle que, pour tout $g \in G$, on ait $J\rho(g) = \pi_\sigma(g)J$. Posons

$$\vec{f}_0 = J(F_0) \qquad \text{et} \qquad \vec{f} = J(F).$$

On a

$$\begin{aligned}
|F_0 \bigstar \tilde{F}(g)| &= (\rho(g)F_0 \,|\, F)_{L^2(G)} = (J\rho(g)F_0 \,|\, JF)_{\mathscr{H}_{\pi_\sigma}} \\
&= (\pi_\sigma(g)JF_0 \,|\, JF)_{\mathscr{H}_{\pi_\sigma}} = (\pi_\sigma(g)\vec{f}_0 \,|\, \vec{f})_{\mathscr{H}_{\pi_\sigma}}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir w telle que 1° et 2°, il suffit donc, dans le principe de majoration, de prendre pour f_0 et f celles qui sont associées à $\vec{f}_0$ et $\vec{f}$.

4. *Fin de la démonstration du théorème* 2. — Soit à nouveau $G = KAN$ un groupe de Lie connexe semi-simple non compact, de centre fini, et soit π la représentation quasi-régulière de G dans $L^2(B) \simeq L^2(MAN)$. Notons dk la mesure de Haar normalisée de K considérée comme une mesure sur G identiquement nulle sur $G-K$. Le théorème 2 est évident pour $p = 1$; soit $1 < p < 2$, et posons $(1/q)+(1/p) = 1$.

Soit h une fonction continue à support compact sur G, invariante à droite par K, donc tell que $h \bigstar dk = h$.

Soient F_0 et F_1 deux fonctions appartenant à $L^2(G)$. Posons $F = dk \bigstar F_1$. Soit $w(g) = (\pi(g) f_0 \mid f)$ la majorante de $F_0 \bigstar \tilde{F}$ fournie par le corollaire du principe de majoration.

Posons

$$v(g) = \int_K w(gk)\, dk = (\pi(g)\pi(dk) f_0 \mid f)$$

et remarquons que :

1° puisque $\tilde{F}$ est K-invariante à droite,

$$|F_0 \bigstar \tilde{F}(g)| = \int_K |F_0 \bigstar \tilde{F}(gk)|\, dk \leqq \int_K w(gk)\, dk = v(g),$$

donc

$$\| F_0 \bigstar \tilde{F} \|_q \leqq \| v \|_q;$$

2° v est un coefficient de π qui est K-invariant à droite, donc, d'après le corollaire du Lemme 5,

$$\| v \|_q \leqq C_q^{1/q} \| \pi(dk) f_0 \|_2 \| f \|_2 \leqq C_q^{1/q} \| f_0 \|_2 \| f \|_2.$$

On en déduit que, quelles que soient F_0 et F_1 dans $L^2(G)$,

$$\begin{aligned} |(h \bigstar F_1 \mid F_0)| &= |(h \bigstar dk \bigstar F_1 \mid F_0)| = |(h \bigstar F \mid F_0)| = |(h \mid F_0 \bigstar \tilde{F})| \\ &\leqq \| h \|_p \| F_0 \bigstar \tilde{F} \|_q \leqq \| h \|_p \| v \|_q \leqq C_q^{1/q} \| h \|_p \| f_0 \|_2 \| f \|_2 \\ &= C_q^{1/q} \| h \|_p \| F_0 \|_2 \| F \|_2 \leqq C_q^{1/q} \| h \|_p \| F_0 \|_2 \| F_1 \|_2, \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème en posant $C_p = C_q^{1/q}$.

Remarque finale. — Soit A (G) l'algèbre de Fourier de G, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions du type $F_1 \bigstar \tilde{F}_2$, où F_1 et F_2 parcourent $L^2(G)$. On vient de prouver que, si G est un groupe de Lie semi-simple connexe et de centre fini, alors tout élément de A (G) *qui est K-invariant à droite*, appartient à tous les $L^q(G)$, pour tout $q > 2$.

La conjecture générale de E. M. Stein équivaut à la même propriété, mais *sans* l'hypothèse de K-invariance. Grâce aux raisonnements des paragraphes 2, 3 et 4, on voit que cette conjecture sera démontrée si l'on peut prouver l'appartenance aux $L^q(G)$, $q > 2$, de tous les coefficients $g \mapsto (\pi(g) f_0 \mid f)$ de la représentation quasi-régulière de G dans L^2 (G/MAN), et non plus seulement, comme nous l'avons fait au théorème 1, des coefficients particuliers $g \mapsto (\pi(g) 1 \mid f)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Arsac, *Sur l'espace de Banach engendré par les coefficients d'une représentation unitaire* (*Thèse Doct. ès Sc. Math.*, Université de Lyon-I, 1973).

[2] H. Furstenberg, *A Poisson Formula for Semi-Simple Lie Groups* (*Ann. of Math.*, vol. 77, 1963, p. 335-386).

[3] Harish-Chandra, *Spherical Functions on a Semi-Simple Lie Group*, I (*Amer. J. Math.*, vol. 80, 1958, p. 241-310).
[4] S. Helgason, and K. D. Johnson, *The Bounded Spherical Functions on Symmetric Spaces* (*Adv. in Math.*, vol. 3, 1969, p. 586-593).
[5] C. S. Herz, *Sur le phénomène de Kunze-Stein* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 271, série A, 1970, p. 491-493).
[6] R. A. Kunze and E. M. Stein, *Uniformly Bounded Representations and Harmonic Analysis on the* 2×2 *Real Unimodular Group* (*Amer. J. Math.*, vol. 82, 1960, p. 1-62).
[7] R. Lipsman, *Harmonic Analysis on* SL $(n, \mathfrak{C})$ (*J. Funct. Anal.*, vol. 3, 1969, p. 126-155).
[8] R. Lipsman, *Uniformly Bounded Representations of the Lorentz Group* (*Amer. J. Math.*, vol. 91, 1969, p. 938-962).
[9] E. M. Stein, *Some Problems in Harmonic Analysis Suggested by Symmetric Spaces and Semi-Simple Groups* (*Actes du Congrès international des mathématiciens*, Nice, 1970, p. 173-189).
[10] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, second edition, Cambridge, 1968.

(Manuscrit reçu le 20 juin 1974.)

Pierre Eymard,
Département de Mathématiques,
Université de Nancy I,
Case officielle 140,
54037 Nancy

et

Noël Lohoué,
U. E. R. Mathématique,
Université Paris XI,
91405 Orsay.