MASAKAZU SUZUKI

Sur les relations d'équivalence ouvertes dans les espaces analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 4 (1974), p. 531-541
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_4_531_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 7, 1974, p. 531-542.

SUR LES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE OUVERTES DANS LES ESPACES ANALYTIQUES

PAR MASAKAZU SUZUKI

Introduction

Il y a un critère utile de H. Cartan [1] pour que le quotient d'un espace analytique par une relation d'équivalence propre soit de nouveau un espace analytique. Cependant, on ne connaît pas beaucoup de choses sur les relations d'équivalence non propres. Nous donnerons un critère pour ce problème (th. 1, n° 3) et l'appliquerons pour l'étude sur l'existence des intégrales premières de certaines feuilletages analytiques complexes dans une variété de Stein (th. 2, n° 4).

Nous donnerons aussi un exemple simple d'une feuilletage analytique complexe *propre* dans un dicylindre qui n'admet aucune intégrale première globale non constante (*cf.* nos 4 et 9).

1. Quotients des espaces analytiques

1. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE PROPRES. — Citons tout d'abord un résultat de H. Cartan [1] sur ce sujet :

Soit R *une relation d'équivalence propre définie dans un espace analytique réduit. Pour que l'espace quotient* X/R *soit un espace analytique* (*réduit*), *il faut et il suffit que chaque point de* X/R *ait un voisinage* V *tel que les sections de* $\mathcal{O}$ (X)/R *sur* V *séparent les points de* V.

Nous allons donner un autre critère pour ce genre de problème sur les espaces quotients.

2. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE OUVERTES. — Soit X un espace analytique réduit de dimension complexe n. Une relation d'équivalence R sera dite ouverte, si la projection $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{R}$ est une application ouverte. Il est évident que, si X/R est un espace analytique, le graphe $\mathrm{G} = \{ (x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} \mid x \sim y \pmod{\mathrm{R}} \}$ de R est un sous-ensemble analytique de X×X. Nous nous proposons d'en étudier la réciproque pour les relations d'équivalence ouvertes.

Pour ce but, fixons quelques notations comme suit :

NOTATIONS. — On suppose que G est un ensemble analytique de codimension q dans le produit X×X. On désignera par p la projection : $\mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathrm{R}$ et par F_x la fibre passant par $x \in \mathrm{X}$, [i. e. $\mathrm{F}_x = p^{-1}(p(x))$]. Soient $(a, b) \in \mathrm{G}$, et $r = \dim_b(\mathrm{F}_a)$ (1); il existe alors, un voisinage V de b, un isomorphisme φ de V sur un sous-ensemble analytique $\varphi(\mathrm{V})$ de $\beta \times \mathrm{B}$, où β et B sont deux boules ouvertes de centre l'origine dans $\mathbf{C}^r$ et $\mathbf{C}^m$ ($m \geqq q$-respectivement, et un voisinage U de a qui vérifient les conditions suivantes : (1) la fer) meture $\overline{\mathrm{V}}$ de V est compacte; (2) $\varphi(b) = 0$ et $\varphi : \mathrm{V} \to \mathbf{C}^{r+m}$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathrm{V}}$; (3) pour tout $x \in \mathrm{U}$, on a $\mathrm{F}_x \cap \varphi^{-1}(\beta \times \partial \mathrm{B}) = \varnothing$.

Ces notations étant fixées, on peut d'abord montrer le fait suivant :

Lemme 1. — *Soit* R *une relation d'équivalence ouverte dans une variété analytique complexe* X. *Si le graphe* G *de* R *est un sous-ensemble analytique de* $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, *il existe un sous-ensemble analytique* S *de* X *de codimension* $\geqq 1$, *tel que l'intersection de* $\mathrm{X}-\mathrm{S}$ *avec chaque classe d'équivalence de* R *soit une sous-variété analytique* (*sans singularité*), *et que les composantes connexes de ces sous-variétés soient les feuilles d'un feuilletage analytique de* $\mathrm{X}-\mathrm{S}$.

1° En effet, soit $n =$ dimension de X, $q =$ codimension de G dans $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Désignons par G_0 l'ensemble des points réguliers de G, de codimension q. Démontrons d'abord que l'ensemble G_1 des points (x, y) de G_0 tels que la variété $x \times \mathrm{X}$ soit transversale à G_0 en (x, y) est dense dans G_0. Puisque $\mathrm{G}_0 - \mathrm{G}_1$ est un sous-ensemble analytique de G_0, il suffit de montrer que $\mathrm{G}_1 \neq \varnothing$.

Supposons par l'absurde que $\mathrm{G}_1 = \varnothing$; alors, quel que soit $(a, b) \in \mathrm{G}_0$, on a

$$\dim_b(\mathrm{F}_a) > n-q.$$

Prenons $\varphi : \mathrm{V} \to \beta \times \mathrm{B}$ et U comme ci-dessus, (*cf.* Notation, mais dans le cas actuel $m = q$). R étant ouverte, on peut choisir ce U de façon que l'on ait $\mathrm{F}_x \cap \mathrm{V} \neq \varnothing$ pour tout $x \in \mathrm{U}$. En outre, comme $(a, b) \in \mathrm{G}_0$, on peut supposer que $\mathrm{G} \cap (\mathrm{U} \times \mathrm{V}) \subset \mathrm{G}_0$. Dans cette situation, l'hypothèse $\mathrm{G}_1 = \varnothing$ implique $\dim(\mathrm{F}_x \cap \mathrm{V}) > n-q$ pour tout $x \in \mathrm{U}$; par suite, $\dim(\mathrm{G}_0) > n+n-q = 2n-q$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $q = \operatorname{codim}(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$.

2° Si $(a, b) \in \mathrm{G}_1$, on peut voir facilement que R induit une structure feuilletée analytique (non singulière) de codimension q dans un voisinage de b, dont les feuilles sont composantes connexes des classes d'équivalence de R dans ce voisinage. On en a $(b, b) \in \mathrm{G}_1$. Soit Δ la diagonale de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$; $\Delta - (\Delta \cap \mathrm{G}_1)$ est un sous-ensemble analytique de Δ de codimension $\geqq 1$; désignons sa projection sur X par S. Nous voyons que R engendre une structure feuilletée analytique de codimension q dans $\mathrm{X}-\mathrm{S}$ jouissant de la propriété demandée dans la proposition, avec S un sous-ensemble analytique de X de codimension $\geqq 1$.

C. Q. F. D.

Revenons maintenant au cas où X est un espace analytique réduit (de dimension n toujours). R est une relation d'équivalence ouverte sur X dont le graphe soit un ensemble analytique. Alors,

Lemme 2. — *On a* $\dim_x \mathrm{F}_x = n-q$, *pour tout* $x \in \mathrm{X}$.

(1) ... $\dim_b(\mathrm{F}_a)$ est la dimension complexe de F_a au point b.

En effet, nous avons déjà vu que l'ensemble $\{ x \in X \mid \dim_x (F_x) = n-q \}$ est dense dans X; on a donc $\dim_x (F_x) \geqq n-q$ pour tout $x \in X$, puisque cet ensemble est fermé.

Supposons maintenant qu'il existe un point $b \in X$ tel que $\dim_b (F_b) = r > n-q$. Prenons $\varphi : V \to \beta \times B$ et U comme ci-dessus (*cf.* Notations), en posant $a = b$. Soit

$$U_0 = \{ x \in U \mid \dim (F_x \cap V) \leqq r-1 \};$$

on sait que U_0 est un ensemble ouvert non vide. Soit x_0 un point de U_0 et L une courbe analytique complexe dans U passant par x_0 et b. Prenons un point frontière a' de $L \cap U_0$ *dans* $L \cap U$; a' existe puisque $b \notin U_0$.

Considérons l'image $G(L)$ de $(L \times V) \cap G$ dans $L \times \beta \times B$ par

$$\mathrm{id} \times \varphi : L \times V \to L \times \beta \times B.$$

$G(L)$ est un ensemble analytique dans $L \times \beta \times B$; et on a $\overline{G(L)} \cap L \times \beta \times (\partial B) = \emptyset$. [Rappeler : $F_x \cap \varphi^{-1} (\beta \times \partial B) = \emptyset$ pour tout $x \in U$.] Donc, sa projection $\underline{G}(L)$ sur $L \times \beta$ est aussi un ensemble analytique dans $L \times \beta$.

Comme $\dim (F_{a'} \cap V) = r$, $\underline{G}(L)$ contient $a' \times \beta$. ($\dim \beta = r$). Par suite, $a' \times \beta$ est une composante irréductible de $\underline{G}(L)$, (puisque $\dim L = 1$). Soit σ la réunion des autres composantes irréductibles de $\underline{G}(L)$; $(a' \times \beta) \cap \sigma$ est un sous-ensemble analytique de $a' \times \beta$ de codimension $\geqq 1$. Il existe donc un ouvert γ dans β tel que $(a' \times \gamma) \cap \sigma = \emptyset$; et puis un voisinage α de a' sur L tel que, pour tout $x \in \alpha - a'$, l'on ait $\varphi^{-1} (\gamma \times B) \cap F_x = \emptyset$. Considérons maintenant la saturation de $\varphi^{-1} (\gamma \times B)$ [= la réunion des F_x tels que $x \in \varphi^{-1} (\gamma \times B)$]; elle contient a' puisque $a' \times \beta \subset \underline{G}(L)$; d'autre part elle ne contient pas de point de $\alpha - a'$ puisque $(\alpha - a') \times \gamma \cap \underline{G}(L) = \emptyset$. Ceci est contradiction avec l'hypothèse que R est ouvert. Donc, on a $\dim_b (F_b) = n-q$ pour tout $b \in X$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Nous venons de voir en même temps *que* G *est de codimension pure* q *dans* $X \times X$.

3. QUOTIENTS DES ESPACES ANALYTIQUES PAR LES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE OUVERTES. — Revenons maintenant au problème posé au commencement du n° 2.

THÉORÈME 1. — *Soit* R *une relation d'équivalence ouverte, définie sur un espace analytique réduit* X *de dimension* n. *Alors, pour que l'espace quotient* X/R *soit un espace analytique* (*réduit*), *il faut et il suffit que le graphe* G *de* R *soit un sous-ensemble analytique de* $X \times X$.

En effet, la nécessité est évidente. Supposons réciproquement que G soit un sous-ensemble analytique de $X \times X$ de codimension q. Puisque G est un ensemble fermé, et R étant ouverte, X/R satisfait à l'axiome de Hausdorff. Il suffit donc de montrer que chaque point z de X/R possède un voisinage isomorphe (comme un espace annelé) à un espace analytique.

Soit z un point de X/R, et soit $b \in p^{-1}(z)$. D'après le lemme 2, on a

$$\dim_b(\mathrm{F}_b) = n-q.$$

On peut donc prendre φ, V, β, B et U de la même manière qu'à « Notations » (n° 2), en posant $a = b$, $r = n-q$. Désignons par O l'origine de β et par B^* l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathrm{O}\times\mathrm{B})$. R étant ouverte, la réunion $\hat{\mathrm{U}} = \bigcup_{x\in\mathrm{U}}(\mathrm{F}_x)$ est un ensemble ouvert; $\hat{\mathrm{U}} \cap \mathrm{B}^*$ est aussi ouvert dans B^*.

Considérons $\mathrm{G} \cap (\mathrm{U}\times\mathrm{V})$. Il est de codimension pure q. D'ailleurs,

$$\mathrm{G} \cap \varphi^{-1}(\beta\times\partial\mathrm{B}) = \varnothing.$$

On a par suite $\mathrm{F}_x \cap \mathrm{B}^* \neq \varnothing$ pour tout $x \in \mathrm{U}$; l'image $\mathrm{W} = p(\mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}})$ est un voisinage ouvert de z dans X/R. De plus, le nombre des points de $\mathrm{F}_x \cap \mathrm{B}^*$ compte tenu de leurs multiplicités, est constant et fini, (soit = N), sur U. Il en résulte que la projection

$$p : \mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}} \to \mathrm{W}$$

est propre. Pour chaque point t de $\mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}}$, désignons par $t_1 (= t), t_2, \ldots, t_\mathrm{N}$ les points de $\mathrm{F}_t \cap \mathrm{B}^*$, en respectant leur multiplicité (s'il y a lieu).

L'image de $\mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}}$ par φ est $(\subset \mathrm{O}\times\mathrm{B})$ dans l'espace $\mathbf{C}^m$ de m variables complexe $y_1, \ldots, y_m$ ($m \geqq q$, *cf.* « Notations »). Soient H la famille des fonctions homogènes de degré 1 de ces variables $y_1, \ldots, y_m$ et F celle des polynômes symétriques de N variables $z_1, \ldots, z_\mathrm{N}$. Alors, pour toute paire $h \in \mathrm{H}$ et $f \in \mathrm{F}$, la fonction $g(t) = f(h(t_1), \ldots, h(t_\mathrm{N}))$ est une intégrale première holomorphe de R sur $\mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}}$; il lui correspond une section $s_{f,h}$ de $\mathcal{O}(\mathrm{X})/\mathrm{R}$ sur W, définie par $s_{f,h}(p(t)) = g(t)$ pour $t \in \mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}}$. En outre, si t, t' sont deux points de $\mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}}$ et si on a $s_{f,h}(p(t)) = s_{f,h}(p(t'))$ pour toutes les paires $f \in \mathrm{F}$, $h \in \mathrm{H}$, on a nécessairement $t \sim t'$ mod R. Donc, d'après le théorème de H. Cartan cité au n° 1, le voisinage $\mathrm{W} = (\mathrm{B}^* \cap \hat{\mathrm{U}})/\mathrm{R}$ de z est un espace analytique.

C. Q. F. D.

Remarque. — Puisque R est ouverte, si X est localement irréductible, [ou si $\mathcal{O}_x(\mathrm{X})$ est un anneau intègre pour chaque $x \in \mathrm{X}$], son quotient X/R l'est aussi.

Comme un corollaire de ce théorème, nous pouvons compléter le lemme 1 comme suit :

THÉORÈME 2. — *Soit* R *une relation d'équivalence ouverte dans une variété analytique complexe* X. *Si le graphe* G *de* R *est un sous-ensemble analytique de* $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$, *il existe un sous-ensemble analytique* S *de* X *de codimension* $\geqq 2$, *tel que l'intersection de* $\mathrm{X}-\mathrm{S}$ *avec chaque classe d'équivalence de* R *soit une sous-variété analytique* (*sans singularité*), *et que les composantes connexes de ces sous-variétés soient les feuilles d'un feuilletage analytique de* $\mathrm{X}-\mathrm{S}$.

En effet, soit $n = \dim(\mathrm{X})$ et $q = \operatorname{codim}(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$.

Considérons la projection $p : X \to Z = X/R$. X est une variété (non singulière); Z est localement irréductible, d'après la remarque ci-dessus. Soit e l'ensemble des points singuliers de Z; e est de codimension $\geqq 2$; par suite $p^{-1}(e)$ l'est aussi. Soient s l'ensemble des points critiques de p dans $X - p^{-1}(e)$

$$(\text{i. e. } s = \{ x \in X - p^{-1}(e) \mid \operatorname{rang} dp_x \leqq q-1 \}),$$

s_1 la réunion de l'ensemble des points singuliers de s et des composantes irréductibles de dimension $\leqq n-2$ de s, et s_2 l'ensemble des points x de $s - s_1$ tels que

$$\operatorname{rang} d(p|_s)_x \leqq q-2.$$

Alors, $S = p^{-1}(e) \cup s_1 \cup s_2$ est un ensemble analytique de codimension $\geqq 2$ dans X.

Soit b un point de $s - s_1 - s_2$; il existe alors, un voisinage U de b dans $X - S$ et un système de coordonnées locales $z_1, \ldots, z_q$ dans un voisinage W de $p(b)$ sur Z, vérifiant les conditions suivantes :

(1) $p(U) = W$;

(2) $p(s \cap U)$ est définie par l'équation $z_1 = 0$;

(3) le groupe fondamental $\pi_1(U - s)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ (le groupe additif des entiers).

Soit k l'ordre des zéros de la fonction $z_1 \circ p$ sur $s \cap U$. Alors, la submersion holomorphe $p' : U \to \mathbf{C}^q$ définie par

$$p'(x) = ((z_1(p(x)))^{1/k}, z_2(p(x)), \ldots, z_q(p(x)))$$

induit dans U une structure feuilletée non singulière dont chaque feuille soit une composante irréductible d'une classe d'équivalence de R dans U. Donc, la famille des composantes irréductibles des fibres $p^{-1}(z)$, $z \in Z - e$, dans $X - S$ définit une structure feuilletée non singulière dans $X - S$ ayant la propriété demandée dans le théorème 2.

C. Q. F. D.

2. Intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes

4. PROBLÈME. — Considérons un feuilletage analytique complexe $\mathscr{F}$ de codimension q, d'une variété analytique complexe M de dimension n. Désignons par F_x la feuille passant par un point x de M. On dira que $\mathscr{F}$ est *propre* dans M, si toute feuille F de $\mathscr{F}$ est un ensemble analytique dans M (ou si l'application d'inclusion $j : F \to M$ est propre).

Lorsque $\mathscr{F}$ est propre dans M, l'un des problèmes d'intégration est le suivant : rechercher un espace analytique N *de dimension* q et une application holomorphe surjective $p : M \to N$ tels :

(a) que l'image par p de chaque feuille de $\mathscr{F}$ soit *un point* de N.

Nous appellerons une paire (N, p) ayant cette propriété (a) *quotient analytique de* M (de dimension q) *compatible avec* $\mathscr{F}$; et p sa *projection*. S'il existe ce (N, p), il correspond, à chaque fonction analytique f dans un domaine D sur N, une intégrale première $f \circ p$ de $\mathscr{F}$ dans $p^{-1}(D)$.

D'après S. Kondo, même si M est une variété de Stein et si $\mathscr{F}$ est propre dans M, sa quotient compatible (N, p) n'existe pas nécessairement. Nous en donnerons un exemple plus simple au n° 9.

Le but du présent paragraphe est de démontrer le fait suivant :

THÉORÈME 3. — *Soient* M *une variété de Stein de dimension complexe* n, $\mathscr{F}$ *un feuilletage* propre *et analytique complexe de* M *de dimension* 1, *jouissant des deux propriétés suivantes* :

(1) *Toute feuille de* $\mathscr{F}$ *est analytiquement homéomorphe à une courbe algébrique affine* (*qui dépend des feuilles*);

(2) *Désignons par* R *la relation d'équivalence définie par* $\mathscr{F}$ [*i. e.* $x \sim y$ mod (R) *si et seulement si* $F_x = F_y$]. *La condition dit qu'il existe un espace topologique séparé* N_1 (= *espace d'Hausdorff*) *et une application continue* $p_1 : M/R \to N_1$ *non dégénérée*, [*c'est-à-dire*, $p_1^{-1}(y)$ *est discret pour tout* $y \in N_1$].

Alors, l'adhérence $\overline{G}$ *du graphe* G *de* R *est un ensemble analytique de codimension pure* $n-1$ *dans* $M \times M$, *et* $\overline{G}$ *définit une relation d'équivalence ouverte sur* M.

Remarque. — Il en résulte, d'après le théorème 1 du paragraphe précédent, qu'il existe un quotient analytique (N, p) de M, de dimension $n-1$, compatible avec $\mathscr{F}$. En outre, ce quotient possède les propriétés suivantes :

(b) N a un sous-ensemble dense A tel que, pour tout $z \in A$, $p^{-1}(z)$ soit irréductible;

(b') A chaque intégrale première analytique de $\mathscr{F}$ dans $p^{-1}(D)$, quel que soit D un ouvert dans N, il correspond une fonction analytique g dans D telle que $f = g \circ p$.

Dans l'article [5], nous démontrerons ce théorème dans le cas où $n = 2$, mais sans l'hypothèse de l'existence de la solution topologique [la condition (2) ci-dessus].

5. LEMMES. — Avant d'entrer dans la démonstration de ce théorème, citons quelques résultats de T. Nishino [4] dont nous aurons besoin.

Une variété analytique de dimension 1 sera dite de type (g, m), si elle est analytiquement isomorphe à une variété analytique compacte connexe de genre g privée de m points.

Soit $f : D \to B$ une submersion holomorphe (surjective) d'une variété analytique complexe D de dimension n sur une boule ouverte B dans l'espace $\mathbf{C}^{n-1}$ vérifiant les deux conditions suivantes : (1) Pour tout $z \in B$, $f^{-1}(z)$ est irréductible; (2) Pour toute droite complexe L dans B, $f^{-1}(L)$ est une variété de Stein.

Désignons par E l'ensemble des points z de B tels que $f^{-1}(z)$ soit algébroïde (c'est-à-dire, analytiquement isomorphe à une courbe algébrique affine).

LEMME 1. — *Si* $z_0 \in E$ *et si la capacité* (²) *de* $E \cap U$ *est positive pour tout voisinage* U *de* z_0, *alors* z_0 *est un point intérieur de* E.

Un point b de B sera appelé valeur ordinaire de f, s'il existe un voisinage U de b tel que toute $f^{-1}(z)$, $z \in U$, soit homéomorphe (topologiquement) à $f^{-1}(b)$; les autres points

(²) ... Il s'agit de la capacité par rapports aux fonctions plurisousharmoniques.

de B seront appelés valeur critique de f. Alors, on a

LEMME 2. — *Si* E = B, *l'ensemble* K *des valeurs critiques de* f *est de capacité nulle dans* B.

LEMME 3. — *Si* E = B *et si* K = $\varnothing$, D *est analytiquement homéomorphe à un domaine algébroïde étalé au-dessus de* $B \times \mathbf{C}$. (*En particulier, il existe une fonction holomorphe* h *sur* D *telle que l'application* $f \times g : D \to B \times \mathbf{C}$ *soit propre*.)

Dans T. Nishino [4], ces lemmes sont démontrés pour le cas où $\dim B = 1$. Mais, comme on peut le voir sans difficulté, ils restent valables pour $\dim B > 1$.

6. TUBES NORMAUX. — Les trois lemmes que nous venons de citer seront appliqués aux domaines D (B, i) étalés au-dessus de M, qui s'appellent tubes normaux, construits de la façon suivante :

Soient $\overline{B}$ une boule fermée dans $\mathbf{C}^{n-1}$ de centre l'origine O, $i : \overline{B} \to M$ une immersion holomorphe (i. e. holomorphe au voisinage de $\overline{B}$) telle que l'image $i(\overline{B})$ soit transversale à $\mathscr{F}$ en chaque point de i (B). On appelle la paire $(\overline{B}, i)$ une *transversale* (fermée) de $\mathscr{F}$ *de centre* i (O). Il existe alors un voisinage U de i (B) (B = l'intérieur de $\overline{B}$) et une application holomorphe $f : U \to B$ tels que l'on ait $f \circ i = \mathrm{id}$, et que, pour chaque $z \in B$, la fibre $f^{-1}(z)$ soit une feuille de $\mathscr{F} \mid U$.

Prenant une fonction d'holomorphe η dans B telle que son domaine d'holomorphie dans $\mathbf{C}^{n-1}$ coincïde avec B, considérons le domaine d'holomorphie D' de la fonction $\eta \circ f$ sur M. D' est un domaine pseudoconvexe, contenant U, étalé au-dessus de M sans point de ramification intérieur. Donc, d'après le théorème d'Oka (Docquier-Grauert [2]), D' est une variété de Stein. Remarquons que $f : U \to B$ peut être prolongée à une application holomorphe $f : D' \to B$.

Désignons par C_z pour $z \in B$ la composante irréductible contenant le point $i(z)$ ($\in U \subset D'$) de la courbe $f^{-1}(z)$ dans D'; et par D (B, i) la réunion $\bigcup_{z \in B} C_z$. Alors, D (B, i) est un sous domaine (i. e. ouvert et connexe) de D'.

Quel que soit L un sous-ensemble analytique de B, non singulière et de dimension 1, l'image réciproque f^{-1} (L) dans D' est un sous-ensemble analytique de D' n'ayant que des points singuliers uniformisibles; on peut donc le regarder comme une *variété* de Stein *de dimension* 2. Or, $f^{-1}(L) \cap D(B, i)$ est un sous-domaine pseudoconvexe de f^{-1} (L); puisque, si on désigne par Ω la frontière de $f^{-1}(L) \cap D(B, i)$ dans f^{-1} (L), il existe pour tout point ζ de Ω une courbe analytique passant par ζ et contenue dans Ω. Par suite, d'après le théorème d'Oka (Docquier-Grauert [2]), $f^{-1}(L) \cap D(B, i)$ est une variété de Stein.

On peut donc appliquer à ce domaine D (B, i) les lemmes 1, 2, 3, cités ci-dessus. [Évidemment, $f : D(B, i) \to B$ est submersion.] Nous appellerons D (B, i) *tube normal de* $\mathscr{F}$ par rapport à (B, i).

Remarque. — On désignera par F_z ($z \in B$) la feuille de $\mathscr{F}$ passant par le point $i(z)$. Chaque C_z ($z \in B$) est un revêtement de F_z dont le nombre de feuillets est égal à l'ordre du groupe d'holonomie de $\mathscr{F}$ sur F_z.

7. ORDRES DES FEUILLES. — Citons une proposition de notre article [5] :

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage propre de codimension q d'une variété topologique M. Soient B, B′ deux boules ouvertes dans $\mathbf{R}^q$ telles que $\overline{B} \subset B'$, et soit $i : B' \to M$ un plongement continu de B′ dans M tel que l'image $i(B')$ soit *transversale* à $\mathscr{F}$ en chaque point de $i(\overline{B})$. Désignons par $n_B(x)$ pour $x \in X$ le nombre des points de $F_x \cap B$. [$\mathscr{F}$ étant propre, on a $n_B(x) < \infty$ pour tout $x \in M$]. Alors, on a

PROPOSITION 3. — *Chaque sous-ensemble fermé* E (non vide) *de* M *possède un point* $a \in E$ *et un voisinage* V *de* a *tels que* $n_B(x)$ *soit constante sur* $V \cap E$.

Une feuille F de $\mathscr{F}$ sera dite *d'ordre* 1, s'il existe une transversale (B, i) de $\mathscr{F}$ ayant le centre sur F telle que l'on ait $F_z \cap i(B-z) = \varnothing$ pour tout $z \in B$. On a, d'après la proposition ci-dessus,

COROLLAIRE. — *L'ensemble des points* $x \in M$ *tels que* F_x *soit d'ordre* 1 *est dense dans* M. *Plus fortement, quels que soient* (B, i) *une transversale de* $\mathscr{F}$ *et* E *un sous-ensemble fermé non vide de* B, *on peut trouver un point* a *de* E *et un voisinage* V *de* a *de façon que l'on ait* $i(V \cap E - z) \cap F_z = \varnothing$ *pour tout* $z \in V \cap E$.

8. DÉMONSTRATION. — Nous sommes maintenant en position de démontrer le théorème 2. Revenons au feuilletage analytique complexe $\mathscr{F}$ propre dans une variété de Stein M jouissant des deux propriétés (1) et (2) du théorème. Montrons d'abord que la fermeture $\overline{G}$ du graphe $G = \{(x, y) \in M \times M \mid F_x = F_y\}$ est un sous-ensemble analytique de $M \times M$.

1° Soit (x_0, y_0) un point quelconque de $\overline{G}$. On peut alors trouver une paire de transversales fermées $(\overline{B}, i)$, $(\overline{B}', i')$ de $\mathscr{F}$ de centre x_0, y_0 respectivement, qui vérifient

$$[i(B) \times i'(\partial B')] \cap \overline{G} = \varnothing.$$

En effet, soit (B'', i') une transversale de $\mathscr{F}$ de centre $i'(O) = y_0$, où B″ est une boule dans $\mathbf{C}^{n-1}$ de centre l'origine O. D'après la condition (2) du théorème, $p_1 : M/R \to N_1$ est non dégénéré; d'autre part $\mathscr{F}$ est propre; par suite, l'application composée

$$k = p_1 \circ p_0 \circ i' : B'' \xrightarrow{i'} M \xrightarrow{p_0} M/R \xrightarrow{p_1} N_1$$

est non dégénéré. On peut donc tracer dans B″ une boule concentrique $B' \subset\subset B''$ de façon que l'on ait $k(O) \notin k(\partial B')$.

Comme N_1 est espace de Hausdorff et comme l'image $k(\partial B')$ est compacte, il existe un voisinage δ de $k(O)$ tel que $\delta \cap k(\partial B') = \varnothing$. Considérons l'image réciproque de δ dans M par $p_2 = p_1 p_0$ (: $M \to N_1$); $p_2^{-1}(\delta)$ est ouvert dans M et contient x_0.

$$(\because (x_0, y_0) \in \overline{G} \subset \{(x, y) \in M \times M \mid p_2(x) = p_2(y)\}).$$

On peut donc tracer une transversale (B, i) de $\mathscr{F}$ de centre x_0 *dans* $p^{-1}(\delta)$. Alors, on a bien $[i(B) \times i'(\partial B')] \cap \overline{G} = \varnothing$.

2° Considérons, par rapport à cette (B, i) le tube normal $D(B, i)$ de $\mathscr{F}$. Soit E l'ensemble des points z de B tels que C_z soit algébroïde. Alors le complément $e = B - E$ est de capacité nulle.

En effet, supposons par l'absurde que $\mathrm{Cap}(e) > 0$. Soit e_0 l'ensemble des points x de e tels que, pour tout voisinage V de x, l'on ait $\mathrm{Cap}(e \cap V) > 0$. Alors, e_0 est un ensemble fermé dans B et non vide. D'après le corollaire de la proposition 3, il existe un point a de e_0 et un voisinage V de a tels que $i(V \cap e_0 - z) \cap F_z = \varnothing$ pour tout

$$z \in V \cap e_0.$$

Or, la capacité de $V \cap e_0$ étant positive, il en résulte que le groupe d'holonomie de $\mathscr{F}$ sur la feuille F_a ne contient que l'élément unité. Par suite, C_a est univalente sur F_a; donc, d'après la condition (1) du théorème 2, C_a est algébroïde; ce qui est en contradiction avec $a \in e$.

3° Compte tenu du lemme 1, il résulte de 2° que la fermeture $\bar{e}$ est aussi de capacité nulle.

Soit K l'ensemble des valeurs critiques de $f : D(B - \bar{e}, i) \to B - \bar{e}$; d'après le lemme 2, la capacité de K est nulle. Soit $\bar{\beta}$ une boule fermée, contenue dans le domaine $B - \bar{e} - K$; désignons par $D(\beta)$ l'image réciproque $f^{-1}(\beta)$ dans $D(B, i)$. Alors, d'après le lemme 3, il existe une fonction holomorphe sur $D(\beta)$ telle que $f \times h : D(\beta) \to \beta \times \mathbf{C}$ soit propre.

4° Pour chaque ensemble V dans B, l'image réciproque de $G \cap [i(V) \times i'(B')]$ par $i \times i' : B \times B' \to M \times M$ sera notée $\mathfrak{g}(V)$. Nous voulons montrer que $\bar{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}(B)}$ est un ensemble analytique dans $B \times B'$. Considérons $\mathfrak{g}(\beta) = \{(z, z') \in \beta \times B' \mid F_z = F_{z'}\}$ dans $\beta \times B'$. Soit S l'ensemble des points P de $D(\beta)$ tel que $\pi(P) \in i'(B')$, où $\pi : D(\beta) \to M$ est la projection. S est alors une variété analytique complexe de dimension $n-1$. Si

$$f' = i' \circ \pi,$$

on a $\mathfrak{g}(\beta)$ = l'image de S dans $\beta \times B'$ par l'application $f \times f' : S \to \beta \times B'$.

Comme $f \times h : D(\beta) \to \beta \times \mathbf{C}$ est propre, $f \times f' \times h : S \to \beta \times B' \times \mathbf{C}$ est propre. Désignons par S' l'image de S par $f \times f' \times h$; S' est un ensemble analytique dans $\beta \times B' \times \mathbf{C}$.

Or, $[i(\beta) \times i'(\partial B')] \cap \bar{G} = \varnothing$ (rappeler 1°); on en a $\bar{S}'(\beta \times \partial B' \times \mathbf{C}) = \varnothing$. Par suite, la projection T de S' sur $\beta \times \mathbf{C}$ est un ensemble analytique. D'autre part, d'après la proposition 3, il existe un ensemble ouvert V dans β tel que $n_{B'}(z)$, (= le nombre des points de $[i(z) \times i'(B')] \cap G$), soit constante ($< \infty$) sur V; le nombre des points de $(z \times \mathbf{C}) \cap T$ est aussi borné sur V; par suite $(V \times \mathbf{C}) \cap T$ est un ensemble analytique dans $V \times \bar{\mathbf{C}}$, où $\bar{\mathbf{C}}$ est la sphère de Riemann $|t| \leqq \infty$. Donc, d'après P. Thullen [6], T est prolongeable analytiquement à $\beta \times \bar{\mathbf{C}}$ (c'est-à-dire la fermeture $\bar{T}$ est un ensemble analytique dans $\beta \times \bar{\mathbf{C}}$). Soit c l'ensemble des points $z \in \beta$ tels que $(z, \infty) \in \bar{T}$; alors, c est discret.

La partie de $S' = (f \times f' \times h)(V)$ dans $(\beta - c) \times B' \times \mathbf{C}$ est un ensemble analytique dans $(\beta - c) \times B' \times \bar{\mathbf{C}}$. Donc, sa projection sur $(\beta - c) \times B'$ est un ensemble analytique dans $(\beta - c) \times B'$, qui coincïde avec $\mathfrak{g}(\beta - c)$ (rappeler le commencement de 4° actuel). β étant quelconque dans $B-e-K$, nous avons démontré que $\mathfrak{g}(B-e-K-c)$ est un ensemble analytique dans $(B-e-K-c)\times B'$, où c est un ensemble discret dans $B-e-K$.

Comme $e \cup K \cup c$ est un ensemble fermé et de capacité nulle dans B, et comme la projection de $\mathfrak{g}(B-e-K-c)$ sur B′ est bornée dans $\mathbf{C}^{n-1}$, $(B' \subset \mathbf{C}^{n-1})$, sa fermeture dans $B\times\mathbf{C}^{n-1}$ (ou dans $B\times B'$) qui coïncide avec $\overline{\mathfrak{g}}$ est un ensemble analytique dans $B\times B'$, en vertu du théorème de Riemann (on the removable singularities). Donc, $\overline{G}$ est un ensemble analytique au voisinage du point (x_0, y_0). Comme (x_0, y_0) est un point quelconque de $\overline{G}$, $\overline{G}$ est un ensemble analytique dans $M\times M$.

Remarque. — $\overline{G}$ est de codimension *pure* $n-1$.

5° $\overline{G}$ définit une relation d'équivalence sur M. En effet, (1) $(x, x)\in\overline{G}$,

$$(x, y)\in\overline{G} \Rightarrow (y, x)\in\overline{G} \tag{2}$$

sont évidentes. Montrons : (3) si $(x, y)\in\overline{G}$, et si $(y, z)\in\overline{G}$, alors $(x, z)\in\overline{G}$. Soit H la projection de $\overline{G}-G$ ($\subset M\times M$) dans M par $(x, y)\to x$. H est un ensemble de première catégorie de L. Baire (= réunion dénombrable au plus de sous-ensemble fermé sans point intérieur). Il existe donc une suite de points $x_1, x_2, \ldots$ de $M-H$ tendant vers x.

Or, $\overline{G}$ étant de codimension pure $n-1$, il existe un entier k_0 et une suite de points $y_{k_0}, y_{k_0+1}, y_{k_0+2}, \ldots$ tendant vers y tels que $(x_k, y_k)\in\overline{G}$ pour $k \geqq k_0$; Comme $x_k\in M-H$, on a $(x_k, y_k)\in G$. Il en résulte que $y_k\in M-H$.

Comme $(y, z)\in\overline{G}$, il existe de même une suite de points $z_{k_1}, z_{k_1+1}, \ldots$ tendant vers z tels que $(y_k, z_k)\in G$.

On a donc, $(x_k, z_k)\in G$ $(k \geqq k_1)$ et $(x, z)\in\overline{G}$.

6° Dans les notations du 3°, remarquons que, pour tout ouvert V dans B, la projection de $(V\times B')\cap\overline{G}$ sur B′ est ouvert. Il en résulte que la relation d'équivalence $\overline{R}$ définie par $\overline{G}$ est ouverte.

Les conclusions de 4° et 6°, nous permettent d'appliquer le théorème 1 à la relation d'équivalence $\overline{R}$; ce qui termine la démonstration du théorème 2.

$$(N = M/\overline{R}, \qquad p : M \to M/R.)$$

C. Q. F. D.

9. Exemples. — 1° L'espace quotient obtenu dans le théorème 2 n'est pas nécessairement un espace de Stein. Il peut être compact et de dimension > 0.

(1) Soit $\mathbf{C}^2$ l'espace des deux variables complexes x, y. Pour le feuilletage défini par la submersion $(xy-1)/x : \mathbf{C}^2 \to \overline{\mathbf{C}}$, l'espace quotient est la sphère de Riemann $\overline{\mathbf{C}}$.

(2) Pour le feuilletage défini par $x\,dy - iy\,dx = 0$ dans $\mathbf{C}^2 - \{ xy = 0 \}$, l'espace quotient est un tore complexe de dimension 1 $(i = \sqrt{-1})$.

Le problème : L'espace quotient obtenu dans le théorème 2, est-il analytiquement complet, au sens de Grauert-Remmert?

Un feuilletage analytique complexe *propre* dans une variété de Stein ne possède pas toujours un espace quotient compatible de dimension > 0. Bien qu'il y ait un exemple de S. Kondo, nous voulons donner un exemple plus simple :

(3) Considérons dans $\mathbf{C}^2-(0, 0)$ le feuilletage $\mathscr{F}$ défini par $x\,dy+(x-y)\,dx = 0$. Ce feuilletage a une intégrale première $x\,e^{y/x}$ dans $\mathbf{C}^2-[x = 0]$. Soit D le disque ouvert dans le plan $|y| < \infty$ tel que $0 \notin \mathrm{D}$, et soit $\mathrm{U} = [|x| < \infty] \times \mathrm{D}$. On peut voir facilement que la restriction $\mathscr{F}|_{\mathrm{U}}$ de $\mathscr{F}$ dans le domaine U est propre; mais $\mathscr{F}$ n'admet aucune intégrale première méromorphe dans U. En effet, supposons qu'il existe une intégrale première f de $\mathscr{F}|_{\mathrm{U}}$ méromorphe dans U. Soit S la feuille de $\mathscr{F}$ passant par le point (0, 1); S est définie par $x\,e^{y/x} = 1$. Soit S_0 une des composantes irréductibles de $\mathrm{S} \cap \mathrm{U}$, et joignons le point (0, 1) à un point de S_0 par un arc de Jordan l sur S. Alors, il est évident que la fonction f est prolongeable analytiquement suivant la courbe l jusqu'au point (0, 1). Donc, le domaine de méromorphie de f contient un voisinage V de l. Or, l'enveloppe d'holomorphie de $\mathrm{U} \cup \mathrm{V}$ est $\mathbf{C}_x \times (\mathrm{D} \cup \mathrm{V}_y)$, où V_y est la projection de V sur le plan y; et V_y contient l'origine $y = 0$. Donc, la fonction f doit être méromorphe dans $\mathbf{C}_x \times (\mathrm{D} \cup \mathrm{V}_y)$, mais les courbes $f =$ Cte ne peuvent être prolongées analytiquement à l'origine $x = 0$, $y = 0$; ce qui est absurde.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, *Quotiants of complex analytic spaces. Contributions to function theory*, Bombay, 1960.

[2] F. Docquier et H. Grauert *Levisches Problem und Rungescher Satz fur Teilgebiete Steinscher Magnifaltigkeiten* (*Math. Ann.*, vol. 140, 1960).

[3] S. Kondo (à paraître dans *J. Math. Soc. Japan*).

[4] T. Nishino, *Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes*, IV (à paraître dans *J. Math. Kyoto Univ.*).

[5] M. Suzuki, *Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques dans une variété de Stein de dimension complexe* 2 (à paraître).

[6] P. Thullen, *Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischen Functionen im Räume von n komplexen Veranderlichen* (*Math. Ann.*, vol. 111, 1935).

(Manuscrit le 10 juin 1974.)

Mazakazu Suzuki,
Faculté de mathématiques,
Université de Paris-Sud,
Centre d'Orsay,
91405 Orsay.