Annales scientifiques de l'É.N.S.

I.D. Brown
Guivarc'h

Espaces de Poisson des groupes de Lie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 7, nº 2 (1974), p. 175-179
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1974_4_7_2_175_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 7, 1974, p. 175 à 180.

ESPACES DE POISSON DES GROUPES DE LIE

PAR I. D. BROWN ET Y. GUIVARC'H

On donne une démonstration du théorème suivant qui résout une conjecture de C. C. Moore signalée par R. Azencott ([1], p. 117).

THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe de radical* R *tel que le centre de* G/R *soit fini. Alors* G *est de type* T *si et seulement si l'algèbre de Lie* $\mathscr{L}$ (G) *de* G *est le produit direct d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre de type* R.

Rappelons [1] qu'un groupe de Lie connexe est dit de type T s'il est transitif sur tous les espaces de Poisson des probabilités étalées sur G. Rappelons aussi qu'un groupe de Lie connexe G est dit de type R si toutes les valeurs propres de ad X sont imaginaires pures pour tout élément X de l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ (G) de G.

La proposition suivante montre que la condition de l'énoncé du théorème équivaut à une condition en apparence plus faible [1].

PROPOSITION 1. — *Soit* $\mathscr{G}$ *une algèbre de Lie de radical* $\mathscr{R}$, $\mathscr{P}$ *le plus grand idéal de type* R *et* $\mathscr{S}$ *un facteur semi-simple de* $\mathscr{P}$ *dans* $\mathscr{G}$. *Alors si* $\mathscr{P}$ *contient* $\mathscr{R}$, $\mathscr{G}$ *est le produit direct de* $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{S}$ *si et seulement si, pour tout* x *de* $\mathscr{G}$, *les valeurs propres de* ad x *restreint à* $\mathscr{R}$ *sont imaginaires pures.*

Démonstration. — Puisque $\mathscr{P}$ contient $\mathscr{R}$, le « seulement si » est évident.

Supposons que $\mathscr{S}$ ne soit pas un idéal, donc agisse sur $\mathscr{R}$ non trivialement. Donc $\mathscr{S}$ possède un facteur direct $\mathscr{S}_0$ simple qui agit non trivialement sur $\mathscr{R}$. Si $D^k \mathscr{R}$ est le plus grand élément de la série dérivée de $\mathscr{R}$ sur lequel $\mathscr{S}_0$ agit trivialement $D^{k-1} \mathscr{R}/D^k \mathscr{R}$ fournit une représentation non triviale de $\mathscr{S}_0$. Celle-ci possède un poids, nécessairement non-nul. Donc $\mathscr{S}_0$ contient des éléments x tels que les valeurs propres de ad x restreint à $\mathscr{R}$ ne soient pas imaginaires pures.

La proposition suivante, qui reprend une démonstration de R. Azencott ([1], p. 115-116) montrera que si $\mathscr{L}$ (G) vérifie la condition du théorème, G est de type T.

PROPOSITION 2. — *Soit* G *un groupe de Lie résoluble connexe de type* R. *Alors* G *possède un sous-groupe* H $\neq \{ e \}$ *caractéristique, abélien, connexe, tel que les orbites sous* G *des éléments de* H *par automorphismes intérieurs soient relativement compactes.*

Démonstration. — Soit $D^r G$ le dernier terme non nul de la suite dérivée fermée de G. On peut se borner, pour montrer la proposition au cas où $D^r G$ est le groupe additif d'un espace vectoriel réel, en passant au quotient par le sous-groupe compact maximal de $D^r G$. En ce cas, le théorème de Lie appliqué à la représentation de G dans $D^r G$ par automorphismes intérieurs, fournit un élément $x \neq 0$ dont l'orbite sous G est relativement compacte car G est de type R. Soit H le sous-ensemble des éléments de $D^r G$ de ce type : il est clair que H est un sous-espace vectoriel de $D^r G$ invariant par les automorphismes de G. H est donc le sous-groupe fermé cherché.

Pour en déduire que, sous la condition du théorème, G est de type T, on peut raisonner par récurrence sur dim R, le cas dim R = 0 étant bien connu ([2], th. 5.4). Il suffit de construire un sous-groupe connexe non nul de R, distingué et contenu dans le groupe des périodes des fonctions harmoniques bornées pour une probabilité μ étalée quelconque sur G. Si H est le sous-groupe de R défini par la proposition précédente, le sous-groupe compact maximal de H, s'il est non nul, est un tel sous-groupe : en effet, il est caractéristique dans H, donc distingué et comme il est connexe, il est dans le centre de G et l'on peut conclure par le théorème IV.1 de [1].

Si le sous-groupe compact maximal de H est nul, H est un espace vectoriel réel et, en utilisant une base de cet espace, on obtient une base de voisinages de e G-invariants. On conclut alors encore par le théorème IV.1 de [1].

Si G est un groupe opérant sur un espace localement compact E, on dira que $F \subset E$ peut être contracté par G en $a \in E$ si, pour tout voisinage W de a et tout compact K de F, il existe $g \in G$ tel que $g K \subset W$.

Si V est un espace vectoriel réel, on note $\mathscr{G}_p(V)$ l'ensemble des sous-variétés affines de dimension p du complexifié $V^{\mathbf{C}}$ de V et on munit cet ensemble de la topologie naturelle. Si l'on se donne un sous-espace vectoriel W de dimension $n-p$ de $V^{\mathbf{C}}$, l'ensemble des éléments de $\mathscr{G}_p(V)$ dont la direction admet ce sous-espace comme supplémentaire est un ouvert $U \subset \mathscr{G}_p(V)$ qui sera dit ouvert affine. Si l'on complète une base $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de W en une base $e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n$ de $V^{\mathbf{C}}$, on a un système de coordonnées sur U; la direction d'un élément X de U est définie par un p-vecteur $v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \in \Lambda^p V^{\mathbf{C}}$

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} t^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p},$$

avec ici $t^{1 \ldots p} \neq 0$ et de plus X coupe W en un point unique ω : X est alors défini par la donnée de ω et $t^{i_1 \ldots i_p}$ $(i_1 \ldots i_p \neq 1 \ldots p)$, $t_{1 \ldots p}$ étant donné égal à 1.

Notons enfin que le groupe affine GA (V) de V opère de manière naturelle sur $\mathscr{G}_p(V)$.

PROPOSITION 3. — *Soit* S *un groupe de Lie simple non-compact,* ρ *une représentation non triviale de* S *dans un espace vectoriel réel* V. *Alors il existe un entier* p *et un ouvert affine* U *de* $\mathscr{G}_p(V)$ *qui peut être contracté par* $\rho(S)$ *en un point de* U.

Démonstration. — Considérons une décomposition de Cartan :

$$\mathscr{L}(S) = \mathscr{T} + \mathfrak{p}$$

de $\mathscr{L}(S)$ où $\mathscr{T}$ est une sous-algèbre compacte maximale de $\mathscr{L}(S)$. Soit $\mathscr{U} = \mathscr{C} + i\,\mathfrak{p}$ la forme réelle compacte de $\mathscr{L}(S)^{\mathbf{C}}$ associée à cette décomposition et considérons un produit scalaire sur V^C pour lequel les éléments de $\rho(\mathscr{U})$ sont antihermitiens. Si h est un élément non nul de $\mathfrak{p}$, $\rho(h)$ est alors hermitien et non nul car, $\mathscr{L}(S)$ étant simple, ρ est fidèle. Soit alors $e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n$ une base de V^C dans laquelle la matrice de $\rho(h)$ est diagonale réelle et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux. Prenons p tel que $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \lambda_p \geqq 0 > \lambda_{p+1} \geqq \ldots \lambda_n$ et observons que $0 < p < n$ car $\rho(h) \neq 0$ est de trace nulle. Considérons alors l'ouvert affine U des éléments de $\mathscr{G}_p(V)$ dont la direction admet le sous-espace engendré par $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ comme supplémentaire. Si $X \in U$ est défini par les $t_{i_1 \ldots i_p}$ $(t_{1 \ldots p} = 1)$ et $\omega = \sum_{j>p} \omega_j e_j$, $\rho(\exp h)$ X est défini par

$$t'_{i_1 \ldots i_p} = \exp(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_p} - \lambda_1 \ldots - \lambda_p)\, t_{i_1 \ldots i_p}$$

et

$$\omega' = \sum_{j>p} e^{\lambda_j} \omega_j e_j.$$

Comme

$$e^{\lambda_j} < 1 \qquad (j > p)$$

et

$$\exp(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_p} - \lambda_1 \ldots - \lambda_p) < 1\, (i)_1 \ldots i_p) \neq (1 \ldots p),$$

U peut être contracté en le sous-espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_p)$.

PROPOSITION 4. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe contenu dans le groupe affine d'un espace vectoriel* V. *Si* $G \cap V \neq 0$, *et si* G *est de type* T, G *est de type* R.

Démonstration. — Comme d'après [1] (th. V.1) le radical de G est de type R, il suffit de vérifier que G ne possède pas de facteur semi-simple non compact. Si S était un tel sous-groupe, il laisserait fixe un point de V car les représentations de S sont semi-simples et, ce point étant supposé être 0, on aurait une représentation non triviale ρ de S dans V. Soient alors, d'après la proposition précédente, K un compact d'intérieur non vide de $\mathscr{G}_p(V)$ et s un élément de S tel que s K soit contenu dans l'intérieur de K. Alors l'ensemble E des g de G tels que g K soit contenu dans l'intérieur de K est un semi-groupe ouvert non vide de G. Soit p une probabilité étalée portée par E et v une mesure de probabilité sur K, telle que $p \bigstar v = v$, dont l'existence est assurée par le théorème de Markhoff-Kakutani. Puisque G est de type T on doit avoir $\forall \tau \in G \cap V$, $\tau v = v$, parce que le radical consiste des p-périodes ([1], prop. V.3), ce qui est impossible car $\tau \neq 0$ ne peut laisser invariant un compact de $\mathscr{G}_p(V)$. Donc la partie semi-simple de G est compacte.

PROPOSITION 5. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe, de radical* R *et de radical nilpotent* N. *Alors, si* R *est non compact, il existe un espace vectoriel réel* V *et un homomorphisme* h *de* G *dans* GA (V) *tel que* h (N) *soit contenu dans* V *et non nul et que, de plus, le noyau de* h *opère de manière unipotente sur* $\mathscr{L}$ (R).

Démonstration. — Montrons d'abord que l'on peut se ramener au cas où N est un espace vectoriel réel.

Soit N′ le sous-groupe dérivé fermé de N, N_1 l'image réciproque dans N du sous-groupe compact maximal de N/N′, qui est caractéristique donc distingué, π l'homomorphisme canonique de G sur $\overline{G} = G/N_1$. Alors l'homomorphisme $h = \overline{h} \circ \pi$ répond aux conditions voulues pour G dès que $\overline{h}$ y répond pour $\overline{G}$. D'abord, le radical nilpotent de $\overline{G}$ est $\overline{N} = N/N_1$: si l'élément $r = \exp X$ de R opère de manière unipotente sur $\mathscr{L}(N/N_1)$, il opère aussi de la même façon sur $\mathscr{L}(N/N')$ car N'/N_1 étant compact, le groupe connexe G opère trivialement sur lui. Il résulte de [3] (lemme 2.2) que r opère aussi de manière unipotente sur $\mathscr{L}(N)$ et donc appartient à N.

Le radical $\overline{R} = R/N_1$ de $\overline{G}$ ne peut être compact car R/N', extension de N_1/N' par R/N_1, le serait aussi. Alors N/N' serait compact donc N également et enfin R aussi comme extension de N par R/N. Il est clair que $\overline{h}(N) \subset V$ et $\overline{h}(N) \neq 0$ entraînent $h(N) \subset V$ et $h(N) \neq 0$ car $h(N) = \overline{h}(\overline{N})$. Comme $\operatorname{Ker} h = \pi^{-1}[\operatorname{Ker} \overline{h}]$ opère de manière unipotente sur $\overline{R} = R/N_1$, il opère aussi, comme plus haut, de la même façon sur R lui-même.

Supposons maintenant que N soit un espace vectoriel réel et notons que deux cas sont possibles $N = R$ ou $N \neq R$. Dans le premier cas, soit $C \cap R$ l'intersection du centre C de G avec R qui est un sous-espace de R; posons $\overline{G} = G/C \cap R$ et montrons que $\overline{G}$ est le produit semi-direct de $V = R/C \cap R$ et de sa partie semi-simple $G/R = \overline{G}/V$: si T est un sous-groupe connexe de $\overline{G}$ tel que $\mathscr{L}(\overline{G}) = \mathscr{L}(T) \oplus \mathscr{L}(V)$, l'adhérence $\overline{T}$ de T laisse $\mathscr{L}(T)$ invariante donc T aussi et alors $\overline{T} \cap V$ est contenu dans le centre de $\overline{G}$, ce qui implique $\overline{T} \cap V = 0$, $T = \overline{T}$ et signifie que $\overline{G}$ est produit semi-direct de V et $T = \overline{G}/V$. Si $\overline{g}$ est l'image de g dans $\overline{G}$, posons $V = N$ et :

$$\overline{g} = \tau(g)\rho(g) \qquad \text{avec} \quad \tau(g) \in V, \qquad \rho(g) \in T,$$

et définissons h par

$$h(g)v = \overline{g}\, v\, \overline{g}^{-1} + \tau(g),$$

h est bien un homomorphisme de G dans GA (V) tel que $h(R) = V \neq 0$ et l'image de $\operatorname{Ker} h$ dans $\overline{G}$ est contenue dans T et formée des $\overline{g}$ opérant trivialement sur V, donc aussi sur $\mathscr{L}(R)$.

Dans le deuxième cas, on pose $V = N$ et :

$$h(g)v = gvg^{-1} + [g, a] = gvg^{1} + gag^{-1}a^{-1}$$

où $a \in R$, $a \notin N$ et l'on vérifie que $[g_1 g, a] = g_1 [g, a] g_1^{-1} + [g_1, a]$, ce qui montre que h est un homomorphisme de G dans GA (V). On a bien $h(N) \subset V$ et $h(N) \neq 0$, car sinon a appartiendrait à N. Il est clair que $\operatorname{Ker} h$ opère de manière triviale sur N, donc de manière unipotente sur $\mathscr{L}(R)$.

Fin de la preuve du théorème. — Supposons G de type T et soit $\mathscr{L}(S)$ la partie semi-simple non compacte de $\mathscr{L}(G)$; il suffit de voir que $\mathscr{L}(S)$ opère trivialement sur $\mathscr{L}(R)$, parce que $\mathscr{L}(R)$ est déjà de type R ([1], cor. du th. V.2). Si R est compact, le groupe connexe G opère comme un groupe d'automorphismes de R, donc comme un groupe discret et par suite trivialement sur R. Si R est non compact, considérons l'homomorphisme h de la proposition 5 : $h(G)$ est un sous-groupe connexe de type T ([1], prop. IV.4) de GA (V) vérifiant $h(G) \cap V \neq \{0\}$. Donc, d'après la proposition 4, $h(G)$ est de type R, ce qui entraîne $h(S) = \{e\}$. Donc, d'après la proposition 5, S opère de manière unipotente sur $\mathscr{L}(R)$, ce qui entraîne, puisque S est semi-simple, que S opère de manière triviale. D'où

$$[\mathscr{L}(S), \mathscr{L}(R)] = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT, *Espaces de Poisson des groupes localement compacts* (*Lectures Notes in Mathematics*, vol. 148, Springer Verlag, Berlin, 1970).

[2] H. FURSTENBERG, *A Poisson formula for semi-simple Lie groups* (*Ann. Math.*, vol. 77, 1963, p. 335-386).

[3] W. PARRY, *Ergodic properties of affine transformations and flows on nilmanifolds* (*Amer. J. Math.*, vol. 91, 1969, p. 757-771).

(Manuscrit reçu le 19 octobre 1973.)

I. D. BROWN
et
Y. GUIVARC'H,
Département de Mathématiques
et d'Informatique,
B. P. n° 25 A,
35031 Rennes-Cedex.