Annales scientifiques de l'É.N.S.

François Laudenbach

Disjonction homotopique et disjonction isotopique : la première obstruction

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 5, nº 3 (1972), p. 397-422

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1972_4_5_3_397_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 5, 1972, p. 397 à 422.

DISJONCTION HOMOTOPIQUE ET DISJONCTION ISOTOPIQUE : LA PREMIÈRE OBSTRUCTION

Par François LAUDENBACH

Dans tout cet article (1), on travaille avec la catégorie DIFF des variétés différentielles, éventuellement à bord et à coins, et des applications C^∞. M désigne une variété *compacte* de dimension m, V une variété de dimension v et N une sous-variété de dimension n; f est un plongement de M dans V; on suppose toujours $v > m$. L'entier $k = m + n - v$ est la *dimension d'intersection*; c'est la dimension de $K = f^{-1}(N)$ lorsque f est transversal sur N.

Le problème de savoir si f est isotope à un plongement de M dans V — N se fractionne en deux problèmes. Le premier relève de la théorie d'obstruction classique en théorie de l'homotopie; il s'agit de trouver une *homotopie de disjonction* de f, c'est-à-dire une application $h : M \times [0, 1] \to V \times [0, 1]$, respectant le paramètre, telle que

$$h \mid M \times \{0\} = f \qquad \text{et} \qquad h(M \times \{1\}) \subset (V - N) \times \{1\}.$$

Étant donnée une telle homotopie, le second problème consiste à la déformer pour en faire une isotopie de disjonction. Dans cet article nous envisageons le second problème dans le cas où M est sans bord ou, plus généralement, dans le cas où $f(\partial M) \subset \partial V$ et où l'on impose à toutes les applications de M dans V de coïncider avec f sur le bord (2).

Comme nous allons le rappeler au paragraphe 1, si $n \geq 2k + 3$, le problème admet toujours une solution. En revanche si $n = 2k + 2$, on rencontre une obstruction; bien ententu, cette obstruction dépend de l'homotopie de disjonction h et apparaît donc comme une obstruction

(1) Les principaux résultats de cet article ont été annoncés dans [9].

(2) Si, au contraire, on s'autorise des modifications sur le bord, alors le problème discuté admet une réponse très différente; la première obstruction arrive bien plus tard.

secondaire dans le problème de disjoindre $f(M)$ de N par isotopie. Pour définir cette obstruction $\chi_f(h)$ (§ 2), nous introduisons l'hypothèse supplémentaire que M, N et V sont orientables ([3]). Le paragraphe 3 est technique et prépare la démonstration du théorème principal (§ 4), où l'on prouve que, si $m, n \leqq v - 3$, $\chi_f(h)$ est la seule obstruction à déformer h en une isotopie de disjonction. Signalons qu'une des difficultés principales vient de la non-régularité de certains revêtements. Au paragraphe 5 nous montrons sur un exemple de Haefliger que l'obstruction $\chi_f(h)$ n'est pas toujours nulle.

Je remercie J. Cerf, A. Chenciner et C. Morlet pour les conversations que j'ai eues avec eux sur ce sujet.

1. Nouvelle formulation du problème et rappel des résultats établis

1.1. Introduisons l'ensemble quasi-simplicial, au sens de Morlet [10], $\Lambda_{\otimes}(f; C^\infty)$, où l'indice $\otimes$ est I (Isotopie) ou PI (Pseudo-Isotopie) : si Δ^p est le p-simplexe standard, un p-simplexe de cet ensemble est une application C^∞,

$$F: \quad M \times (\{0\} \star \Delta^p) \to V \times (\{0\} \star \Delta^p)$$

(où $\{0\} \star \Delta^p$ est le joint d'un point avec Δ^p) telle que :

1° $F \mid M \times \{0\} = f$;

2° si $\otimes = \mathrm{PI}$, F respecte les faces de $\{0\} \star \Delta^p$,
si $\otimes = \mathrm{I}$, F respecte la projection sur $\{0\} \star \Delta^p$;

3° $F(M \times \Delta^p) \subset (V - N) \times \Delta^p$;

4° si $\partial M \neq \emptyset$, $F \mid \partial M \times (\{0\} \star \Delta^p) = f \times \mathrm{Id} \mid (\{0\} \star \Delta^p)$.

Les opérateurs de face sont évidents. Si on demande en plus que F soit une immersion, ou un plongement, on définit le sous-ensemble quasi-simplicial $\Lambda_{\otimes}(f; \mathrm{Imm})$ ou $\Lambda_{\otimes}(f; \mathrm{Plgt})$. Les 0-simplexes de $\Lambda_{\mathrm{I}}(f; C^\infty)$ sont les homotopies C^∞ de disjonction de f par rapport à N ; les 0-simplexes de $\Lambda_{\mathrm{I}}(f; \mathrm{Plgt})$ sont les isotopies de disjonction.

1.2. Le problème que nous voulons discuter est le suivant : quand l'application naturelle

$$\omega_0: \quad \pi_0(\Lambda_{\mathrm{I}}(f; \mathrm{Plgt})) \to \pi_0(\Lambda_{\mathrm{I}}(f; C^\infty))$$

est-elle une surjection? On peut se poser la même question en remplaçant les symboles Plgt par Imm ou (et) I par PI.

([3]) Si les variétés ne sont pas orientables, on peut certainement calculer l'obstruction en introduisant les premières classes de Stiefel-Whitney des différents fibrés tangents et normaux qui interviennent dans la question. Je n'ai pas fait ce calcul.

Remarques. — 1° Les ensembles quasi-simpliciaux $\Lambda_{\mathrm{I}}(f;\mathrm{C}^{\infty})$ et $\Lambda_{\mathrm{PI}}(f;\mathrm{C}^{\infty})$ ont naturellement le même type d'homotopie.

2° Il résulte de la théorie des immersions ([4], [7], [12]) que l'application naturelle

$$\Lambda_{\mathrm{I}}(f;\ \mathrm{Imm}) \to \Lambda_{\mathrm{I}}(f;\mathrm{C}^{\infty})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

1.3. Dans [8], j'ai démontré que, si $n \geqq 2k+3$ et si $\Lambda_{\mathrm{I}}(f;\mathrm{C}^{\infty})$ n'est pas vide, alors $\Lambda_{\mathrm{I}}(f;\ \mathrm{Plgt})$ n'est pas vide. J'ai utilisé pour cela la méthode de l'« engulfing » de Stallings [13], méthode issue de la topologie semi-linéaire; pour obtenir la surjectivité de ω_0, j'ai dû supposer $n > 2k+3$; cependant la méthode s'appliquait au cas où M et N n'étaient que des polyèdres.

Depuis A. Tinéo a démontré dans [14] un théorème de « réalisation d'intersection » dont il résulte en particulier que ω_0 est surjectif dès que $n \geqq 2k+3$:

Définition. — Si X est une sous-variété de $\mathrm{M}\times[0,\ 1]$, on appelle *fonction hauteur sur* X la restriction à X de la projection $\mathrm{M}\times[0,\ 1] \to [0,\ 1]$.

Théorème (Tinéo). — *Soient* V^v, N^n, M^m, f *comme précédemment. On suppose que* f *est transversal sur* N. *Soit* $h : \mathrm{M}\times[0,\ 1] \to \mathrm{V}$ *une homotopie de* f générique, *c'est-à-dire telle que :*

(i) *h est transversale sur* N;

(ii) *la fonction hauteur sur* $h^{-1}(\mathrm{N})$ *est de Morse (on note* $p+1$ *son plus grand indice critique).*

Alors si $n \geqq 2p+3$ *(en particulier si* $n \geqq 2k+3$*), il existe une application*

$$\mathrm{H} :\ \mathrm{M}\times[0,\ 1]\times[0,\ 1] \to \mathrm{V}$$

transversale sur N *et telle que :*

1° $\mathrm{H} \mid \mathrm{M}\times[0,\ 1]\times\{0\} = h$;

2° $\mathrm{H} \mid \mathrm{M}\times[0,\ 1]\times\{1\}$ *est une isotopie;*

3° *pour tout* $t\in[0,\ 1]$, $\mathrm{H} \mid \mathrm{M}\times\{0\}\times\{t\} = f$;

4° *pour tout* $t\in[0,\ 1]$, $\mathrm{H} \mid \mathrm{M}\times[0,\ 1]\times\{t\}$ *est transversal sur* N *et l'image réciproque de* N *est isotope, dans* $\mathrm{M}\times[0,\ 1]$, à $h^{-1}(\mathrm{N})$.

Dans cet article, nous allons étudier la première dimension $n = 2k+2$, pour laquelle ω_0 n'est plus *a priori* surjectif.

2. Définition d'une obstruction

2.1. NOMBRE D'ENLACEMENT. — Ce qui est exposé en 2.1 et 2.2 est indépendant de la situation géométrique décrite dans l'introduction. Soit X une variété de dimension x; dans $X \times [0, 1]$, on considère deux sous-variétés W de dimension w et D, *compacte*, de dimension d, telles que :

1° $d + w = x$;

2° $D \cap W = \emptyset$ (intersection générique);

3° $\partial D = D \cap X \times \{1\}$, $\partial W = W \cap X \times \{0\}$ et ces intersections sont régulières;

4° W est orientée et D est transversalement orientée.

Dans ces conditions, on peut définir un *nombre d'enlacement* $l(W, D) \in \mathbf{Z}$. On considère la classe d'homologie de chaînes localement finies à coefficients entiers $[W] \in H_w^{LF}(X \times [0, 1] - D, X \times \{0\})$, représentée par W. Dans la suite du triple $(X \times [0, 1], X \times [0, 1] - D, X \times \{0\})$, la flèche bord

$$\delta : \; H_{w+1}^{LF}(X \times [0, 1], X \times [0, 1] - D) \to H_w^{LF}(X \times [0, 1] - D, X \times \{0\})$$

est un isomorphisme. Posons $\alpha = \delta^{-1}([W])$; par excision α donne $\alpha' \in H_{w+1}(T, \partial T)$ où T est un voisinage tubulaire compact de D. Par l'isomorphisme de Thom α' donne $\alpha'' \in H_0(D)$. Alors $l(W, D)$ est l'image de α'' par la résolution canonique $H_0(D) \to \mathbf{Z}$.

2.2. Soient $(X \times [0, 1], W, D)$ et $(X \times [0, 1], W', D')$ deux triplets vérifiant les conditions de 2.1. On suppose qu'ils sont *cobordants*, c'est-à-dire qu'il existe des sous-variétés $\hat{W}$ et $\hat{D}$, compacte, dans $X \times [0, 1] \times [0, 1]$ telles que

$$\begin{aligned}
\partial\hat{D} &= \hat{D} \cap [X \times \partial([0, 1] \times [0, 1]) - X \times \{0\} \times [0, 1]],\\
\partial\hat{W} &= \hat{W} \cap [X \times \partial([0, 1] \times [0, 1]) - X \times \{1\} \times [0, 1]],\\
\hat{D} \cap X \times [0, 1] \times \{0\} &= D, \qquad \hat{D} \cap X \times [0, 1] \times \{1\} = D',\\
\hat{W} \cap X \times [0, 1] \times \{0\} &= W, \qquad \hat{W} \cap X \times [0, 1] \times \{1\} = W',
\end{aligned}$$

où toutes les intersections sont régulières. On suppose que $\hat{W}$ est orientée, que l'orientation de son bord induit celle de W' et l'opposée de celle de W, que $\hat{D}$ est transversalement orientée et que cette orientation transversale induit celle de D et de D'.

Génériquement l'intersection de D et de W est ponctuelle. Puisque $\partial W \cap \partial D = \emptyset$, on peut, par la méthode habituelle, définir le nombre d'intersection $[\hat{W}] \cap [\hat{D}] \in \mathbf{Z}$. On vérifie alors la formule

$$\text{(F.2.2)} \qquad l(W', D') = l(W, D) + [\hat{W}] \cap [\hat{D}].$$

2.3. Homotopie régulière de disjonction générique. — Nous reprenons le problème géométrique posé en 1.2 lorsque $n = 2k + 2$. Soit h un 0-simplexe de $\Lambda_I(f; \mathrm{Imm})$; on dit que h est *générique* si :

1° l'immersion $h : M \times [0, 1] \to V \times [0, 1]$ est générique (self-intersection transversale);

2° h est transversale sur $N \times [0, 1]$;

3° $h \mid h^{-1}(N \times [0, 1])$ est un plongement.

On démontre que tout 0-simplexe est homotope à un 0-simplexe générique; par les arguments classiques de transversalité, on peut satisfaire à 1° et 2°. Ceci étant, pour satisfaire à 3°, on peut utiliser le lemme suivant dû à Tinéo [14] :

Lemme. — *Soient deux variétés* X *et* Y, Z *une sous-variété de* Y *et* $f : X \to Y$ *une application transversale sur* Z. *Notons* $K = f^{-1}(Z)$ *et* $g = f \mid K : K \to Z$. *Alors toute homotopie* $\{ g_t \mid t \in [0, 1] \}$ *de* g *est la restriction à* K *d'une homotopie* $\{ f_t \mid t \in [0, 1] \}$ *de* f *telle que, pour tout* $t \in [0, 1]$, f_t *soit transversale sur* Z *et* $f_t^{-1}(Z) = K$. *De plus, on peut choisir la famille* $\{ f_t \}$ *continûment en fonction de la famille* $\{ g_t \}$.

Pour les 1-simplexes, on donne une définition analogue de la généricité en remplaçant dans 3° « plongement » par « immersion générique » et en imposant que les extrémités soient des 0-simplexes génériques. Tout 1-simplexe dont les extrémités sont génériques est homotope, rel. ses extrémités, à un 1-simplexe générique.

Pour $p \geqq 2$, on définit par récurrence les p-simplexes génériques en imposant les conditions du type 1° et 2° et aussi que les faces soient génériques.

2.4. Variété de points doubles. — Dans la suite de cet article, on suppose que M et V sont connexes (la généralisation au cas non connexe est facile, mais nécessite des notations désagréables). On choisit une fois pour toutes des points de base $x_0 \in M$ et $y_0 = f(x_0) \in V$. On considère un revêtement pointé

$$p : (\tilde{V}, \tilde{y}_0) \to (V, y_0)$$

tel que

$$p_* \pi_1(\tilde{V}, \tilde{y}_0) = f_* \pi_1(M, x_0).$$

L'application f se relève en $\bar{f} : (M, x_0) \to (\tilde{V}, \tilde{y}_0)$ mais ne se relève dans aucun revêtement non trivial de $\tilde{V}$. Considérons alors, d'une part le revêtement $q : \tilde{M} \to M$, image réciproque par f de $(\tilde{V}, p, V)$ et d'autre part le produit fibré $\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}$, qui est aussi l'espace total du revêtement image réciproque par p de $(\tilde{V}, p, V)$.

L'application $f : M \to V$ se relève canoniquement en $\tilde{f} : \tilde{M} \to \tilde{V}$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{V} \arrow[d] \arrow[dr, "p"] & \\
\tilde{M} \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\tilde{f}_q"'] & \tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V} \arrow[d] & V \\
 & \tilde{V} \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme peut donc se compléter par une application $\Phi : \tilde{M} \to \tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}$, dont on vérifie immédiatement qu'elle induit une bijection sur l'ensemble des composantes connexes. On peut donc identifier $\pi_0(\tilde{M})$ avec $\pi_0\left(\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}\right)$, ensemble qui s'identifie lui-même à

$$p_* \pi_1(\tilde{V}, \tilde{y}_0) \diagdown \pi_1(V, y_0) \diagup p_* \pi_1(\tilde{V}, \tilde{y}_0).$$

Cette identification est justifiée, car elle est équivariante par rapport aux involutions canoniques : d'une part, l'involution $\ddot{\pi} \to \overset{..}{\widehat{\pi^{-1}}}$ sur l'ensemble des doubles classes; d'autre part, l'involution σ_* induite par l'involution naturelle σ de $\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}$ qui permute les facteurs.

Il est bon de rappeler que $\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}$ (resp. $\tilde{M}$) est un revêtement trivial de $\tilde{V}$ (resp. M), si et seulement si $p_* \pi_1(\tilde{V}, \tilde{y}_0)$ est un sous-groupe invariant de $\pi_1(V, y_0)$, mais que ces deux revêtements ont l'un et l'autre au moins une composante qui revêt trivialement leurs bases respectives, à savoir celle correspondant à la double classe triviale.

Nous utiliserons les notations suivantes : pour tout double classe $\ddot{\pi}$, $\tilde{M}_{\ddot{\pi}}$ désigne la composante correspondante de $\tilde{M}$. D'autre part, si H est un p-simplexe de $\Lambda_I(f; \text{Imm})$, H se relève en $\bar{H} : M \times \Delta^{p+1} \to \tilde{V} \times \Delta^{p+1}$, en $\tilde{H} : \tilde{M} \times \Delta^{p+1} \to \tilde{V} \times \Delta^{p+1}$ et en $\psi : \tilde{M} \times \Delta^{p+1} \to \left(\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}\right) \times \Delta^{p+1}$.

Considérons l'ensemble

$$D(H) = \{(x, \tilde{x}', t) \in M \times \tilde{M} \times \Delta^{p+1} \mid \bar{H}(x, t) = \tilde{H}(\tilde{x}', t),\ x \neq q(\tilde{x}')\}.$$

La projection naturelle $M \times \tilde{M} \times \Delta^{p+1} \to M \times M \times \Delta^{p+1}$ plonge D(H) ; c'est d'ailleurs l'image de ce plongement qui est habituellement regardé comme l'ensemble des points doubles à la source de H. Puisque M est compact, on en déduit que D (H) est compact. Si H est générique, D (H) est une variété de dimension $2m - \nu + p + 1$. On pose $D_{\ddot{\pi}}(H) = (M \times \tilde{M}_{\ddot{\pi}} \times \Delta^{p+1}) \cap D(H)$; on l'appelle la *variété des points doubles de type* $\ddot{\pi}$. Par compacité, $D_{\ddot{\pi}}(H)$ est vide sauf pour un nombre fini de doubles classes.

Puisque l'image du plongement de D (H) dans $M \times M \times \Delta^{p+1}$ est invariante par l'involution $(x, x', t) \to (x', x, t)$, D (H) est lui-même muni d'une *involution canonique* Σ qui est sans point fixe. On vérifie que

$$\Sigma(D_{\ddot{\pi}}(H)) = D_{\sigma_*(\ddot{\pi})}(H),$$

alors que les variétés $\tilde{M}_{\ddot{\pi}}$ et $\tilde{M}_{\sigma_*(\ddot{\pi})}$ ont en général des groupes fondamentaux non isomorphes.

2.5. Préimages de N. — On note $\tilde{N}$ l'image réciproque de N dans le revêtement $\tilde{V}$. Si H est un p-simplexe générique de $\Lambda_I(f;\,\mathrm{Imm})$, $\tilde{H}$ est transversal sur $\tilde{N} \times \Delta^{p+1}$; posons $w(H) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{N} \times \Delta^{p+1})$; c'est une sous-variété de $\tilde{M} \times \Delta^{p+1}$ de codimension $\nu - n$. Nous allons décrire une partition naturelle sur l'ensemble des composantes connexes de $w(H)$.

On considère l'application $\psi : \tilde{M} \times \Delta^{p+1} \to (\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}) \times \Delta^{p+1}$ définie en 2.4. La restriction $\psi \mid w(H)$ a son image dans $\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N}$. On définit alors, pour tout $\alpha \in \pi_0(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N})$, $w_\alpha(H)$ comme étant la préimage de la composante α par l'application $\psi \mid w(H)$.

On pose aussi $W(H) = M \times w(H)$ et $W_\alpha(H) = M \times w_\alpha(H)$; W (H) est une sous-variété de $M \times \tilde{M} \times \Delta^{p+1}$ et $W_\alpha(H)$ est une sous-variété de $M \times \tilde{M}_{j(\alpha)} \times \Delta^{p+1}$, où $j : \pi_0(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N}) \to \pi_0(\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V})$ désigne l'application induite par l'inclusion.

Puisque V est supposé connexe, j est une surjection; d'autre part, on a $\sigma_* j = j \sigma_*$, où, par abus de notation, σ_* désigne à la fois les involutions canoniques de $\pi_0(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N})$ et de $\pi_0(\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V})$.

Si H est un 0-simplexe générique de $\Lambda_I(f;\,\mathrm{Imm})$, les sous-variétés $W_\alpha(H)$ et $D_{j(\alpha)}(H)$ sont disjointes dans $\tilde{M} \times \tilde{M}_{j(\alpha)} \times [0, 1]$; elles vérifient toutes les conditions de 2.1 sauf la condition d'orientation. Si H est 1-simplexe générique, $W_\alpha(H)$ et $D_{j(\alpha)}(H)$ se rencontrent suivant un nombre fini de points et vérifient donc toutes les conditions de 2.2 sauf la condition d'orientation. Dans ce dernier cas, l'involution canonique Σ de $D(H)$ induit une involution sans point fixe de $W(H) \cap D(H)$ qui transforme $W_\alpha(H) \cap D_{j(\alpha)}(H)$ en $W_{\sigma_*(\alpha)}(H) \cap D_{j\sigma_*(\alpha)}(H)$.

2.6. Orientation des variétés de points doubles. — On suppose que M, N et V sont orientées. On oriente les revêtements de sorte que la projection respecte l'orientation; ainsi est orientée la diagonale $\delta_{\tilde{V}}$ de $\tilde{V} \underset{V}{\times} \tilde{V}$. La variété $D(H)$ est alors transversalement orientée, car elle est préimage de $\delta_{\tilde{V}}$ par une application transversale. L'involution canonique Σ de $D(H)$ est alors de degré $(-1)^{v-m}$. Dans le cas où H est un 1-simplexe générique, deux points de $W(H) \cap D(H)$, équivalents modulo Σ, ont des signes qui diffèrent du facteur $(-1)^{v-m} = (-1)^k$.

2.7. Un invariant des 0-simplexes génériques; définition de l'obstruction.

2.7.1. Soit h un 0-simplexe *générique* de $\Lambda_I(f;\ \mathrm{Imm})$. On définit $l_f(h) \in H_0\left(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N};\ \mathbf{Z}\right)$ de la manière suivante : pour $\alpha \in \pi_0\left(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N}\right)$, le coefficient $l_f(h)_\alpha$ de l'élément de base α est l'entier $l(W_\alpha(h),\ D_{j(\alpha)}(h))$, nombre d'enlacement de $W_\alpha(h)$ avec $D_{j(\alpha)}(h)$ dans $M \times \tilde{M}_{j(\alpha)} \times [0,\ 1]$, tel qu'il a été défini en 2.1.

Si H est un 1-simplexe générique reliant h et h', on a, d'après (F.2.2),

$$l_f(h')_\alpha - l_f(h)_\alpha = [W_\alpha(H)] \cap [D_{j(\alpha)}(H)]. \tag{F.2.7.1}$$

D'après 2.5 et 2.6, si $\sigma_*(\alpha) \neq \alpha$, on a

$$[W_\alpha(H)] \cap [D_{j(\alpha)}(H)] = (-1)^k [W_{\sigma_*(\alpha)}(H)] \cap [D_{j\sigma_*(\alpha)}(H)];$$

si $\sigma_*(\alpha) = \alpha$ et si k est impair, $[W_\alpha(H)] \cap [D_{j(\alpha)}(H)] = 0$; enfin si $\sigma_*(\alpha) = \alpha$ et si k est pair, $[W_\alpha(H)] \cap [D_{j(\alpha)}(H)]$ est pair. Autrement dit, $l_f(h') - l_f(h) \in \mathrm{Image}\ (\mathrm{Id} + (-1)^k \sigma_*)$.

Des considérations précédentes, il découle qu'il existe une application bien définie

$$\chi_f:\ \pi_0(\Lambda_I(f;\ \mathrm{Imm})) \to H_0\left(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N};\ \mathbf{Z}\right) / \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + (-1)^k \sigma_*),$$

qui à la classe d'un 0-simplexe générique h associe la classe de $l_f(h)$.

Si h est une isotopie de disjonction [i. e. un 0-simplexe de $\Lambda_I(f;\ \mathrm{Plgt})$], alors les variétés $D_{\tilde{\pi}}(h)$ sont toutes vides et, par conséquent, $l_f(h) = 0$. On a donc la proposition suivante :

2.7.2. PROPOSITION. — *Considérons la situation géométrique* (M^m, V^v, N^n, f) *de l'introduction. On suppose que* M, N *et* V *sont orientées, que* M *et* V *sont connexes, que* M *est compacte et que* $f(\partial M) \subset \partial V - \partial N$. *Si* $n = 2k + 2$, *il existe une application naturelle* (4) :

$$\chi_f : \pi_0(\Lambda_I(f; \mathrm{Imm})) \to H_0\left(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N}; \mathbf{Z}\right) / \mathrm{Im}(\mathrm{Id} + (-1)^k \sigma_*)$$

qui s'annule sur l'image de

$$\omega_0 : \pi_0(\Lambda_I(f; \mathrm{Plgt})) \to \pi_0(\Lambda_I(f; \mathrm{Imm})).$$

(*k est la dimension d'intersection;* pour les notations ω_0, σ_* et $\tilde{N}$, *voir* 1.2, 2.4 et 2.5).

2.7.3. *Remarques.* — 1° Compte tenu des remarques 1.2, on peut considérer que χ_f est défini sur $\pi_0(\Lambda_{PI}(f; C^\infty))$.

On peut alors vérifier que χ s'annule aussi sur l'image de

$$\pi_0(\Lambda_{PI}(f; \mathrm{Plgt})) \to \pi_0(\Lambda_{PI}(f; C^\infty)).$$

2° Si V est 1-connexe et N connexe, le groupe d'obstruction est $\mathbf{Z}$ si k est impair et $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si k est pair.

2.7.4. *Fonctorialité.* — Soit $f' : M \to V$ un plongement isotope à f, par une isotopie F; alors F induit des équivalences d'homotopie

$$\Lambda_\otimes(f; \mathrm{Imm}) \simeq \Lambda_\otimes(f'; \mathrm{Imm}),$$
$$\Lambda_\otimes(f; \mathrm{Plgt}) \simeq \Lambda_\otimes(f'; \mathrm{Plgt}),$$

où $\otimes = $ I ou PI. On vérifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(\Lambda_I(f; \mathrm{Imm})) \arrow[dr, "\chi_f"] \arrow[dd, "\wr" sloped, no head] & \\
& H_0\left(\tilde{N} \underset{N}{\times} \tilde{N}; \mathbf{Z}\right) / \mathrm{Im}(\mathrm{Id} + (-1)^k \sigma_*) \\
\pi_0(\Lambda_I(f'; \mathrm{Imm})) \arrow[ur, "\chi_{f'}"'] &
\end{tikzcd}$$

2.7.5. Soit $h \in \Lambda_I(f; \mathrm{Imm})$. D'après le théorème de Tinéo (1.3), il existe un plongement $f' : M \to V$, une isotopie F de f à f', et un 0-simplexe $h' \in \Lambda_I(f'; \mathrm{Imm})$ tels que :

1° les classes de h et de h' se correspondent dans la bijection induite par F, donc $\chi_f(h) = \chi_{f'}(h')$;

2° $h'^{-1}(N \times [0, 1])$ soit une réunion de $(k + 1)$-disques sur chacun desquels la fonction hauteur n'ait qu'un seul point critique.

---

(4) Elle dépend tout de même du choix d'un revêtement pointé V de $\tilde{V}$ (*voir* 2.4).

3. La stratification de l'espace des immersions définie par une sous-variété du but

Le problème suggéré par le titre de ce paragraphe pourrait être l'objet d'une étude systématique. Ici nous ne parlerons que de ce qui sera utile pour la démonstration du théorème principal (§ 4). La situation reste donc celle de la proposition 2.7.2.

3.1. Strates de codimension 0 et strates de codimension 1.

3.1.1. Dans l'espace Imm (M, V), muni de la topologie C^∞, on considère l'ouvert $\mathcal{G}^0$ des immersions transversales sur N. Le complémentaire est de codimension 1, en ce sens que tout chemin dans Imm (M, V) est proche d'un chemin dans $\mathcal{G}^0$, mais qu'il y a des familles à deux paramètres dans Imm (M, V) qui ne sont pas proches d'une famille à deux paramètres dans $\mathcal{G}^0$. Dans Imm (M, V) $-$ $\mathcal{G}^0$, on définit un ouvert $\mathcal{G}^1$: $g \in \mathcal{G}^1$ si g est transversale sur N sauf en un point c où il y a un contact d'ordre 1 et d'indice 0; précisément, cela veut dire qu'il existe au voisinage de c dans M et de $g(c)$ dans V des coordonnées locales dans lesquelles g est de la forme

$$g(x_1, \ldots, x_m) = (x_1^2 + \ldots + x_m^2, x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

où N est l'espace des n dernières coordonnées.

$\mathcal{G}^1$ est de codimension 1; la stratification ($\mathcal{G}^0$, $\mathcal{G}^1$) est localement triviale au sens de Cerf [1]; mais le complémentaire de $\mathcal{G}^0 \cup \mathcal{G}^1$ n'est pas de codimension au moins 2, car il y a des strates de codimension 1 correspondant à des contacts d'ordre 1 et d'indice non nul.

Le groupe qui agit naturellement sur cet espace stratifié est

$$G = \mathrm{Diff}(M) \times \mathrm{Diff}(V, N),$$

où Diff (V, N) désigne l'espace des difféomorphismes de V qui laissent N invariant. Malheureusement l'action de G si elle respecte la stratification, n'est cependant pas une action localement triviale; en effet, les composantes connexes de $\mathcal{G}^0$ ne sont pas contenues dans des orbites de G, alors que ce serai vrai pour un espace de plongements. La conséquence de ceci est que le lemme des chemins élémentaires de Cerf [1] n'est pas applicable. Il nous faudra contourner cette difficulté.

3.1.2. Nous aurons besoin de considérer l'espace Imm^0 (M, V) des immersions qui n'ont pas de point double sur N. Puisque l'on suppose $n = 2k + 2$, Imm^0 (M, V) est un ouvert dense dans Imm (M, V) et l'espace des chemins de $\mathrm{Imm}^0(\mathrm{M}, \mathrm{V})$ est aussi un ouvert dense dans l'espace des chemins de $\mathrm{Imm}(\mathrm{M}, \mathrm{V})$. On pose $\mathcal{F}^0 = \mathrm{Imm}^0(\mathrm{M}, \mathrm{V}) \cap \mathcal{G}^0$ et $\mathcal{F}^1 = \mathrm{Imm}^0(\mathrm{M}, \mathrm{V}) \cap \mathcal{G}^1$. $(\mathcal{F}^0, \mathcal{F}^1)$ est une stratification localement triviale; le groupe G agit sur elle mais non localement trivialement.

Définition. — Un chemin dans $\mathrm{Imm}(\mathrm{M}, \mathrm{V})$ est dit *chemin de traversée de* $\mathcal{F}^1$ (resp. de $\mathcal{G}^1$) s'il est contenu dans $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$ (resp. $\mathcal{G}^0 \cup \mathcal{G}^1$) et s'il coupe $\mathcal{F}^1$ (resp. $\mathcal{G}^1$) transversalement et en un seul point.

3.2. Chemins élémentaires d'élimination.

3.2.1. Soit $g : \mathrm{M} \to \mathrm{V}$ une immersion appartenant à $\mathcal{G}^0$ telle que $g^{-1}(\mathrm{N})$ contienne une k-sphère S. Un *chemin élémentaire d'élimination de* S *d'origine* g est une homotopie régulière $\lambda = \{ g_t \mid t \in [0, 1] \}$ telle que

(i) $g_0 = g$ et, pour tout $t \in [0, 1]$, $g_t \in \mathcal{G}^0 \cup \mathcal{G}^1$;

(ii) il existe un ouvert U dans M, contenant le support de l'homotopie régulière [5], tel que $g \mid \mathrm{U}$ soit un plongement et que $g^{-1}(\mathrm{N}) \cap \mathrm{U} = \mathrm{S}$;

(iii) $\{ g_t \mid \mathrm{U} \}$ est une isotopie élémentaire de disjonction au sens de Cerf : en coordonnées cartésiennes

$$g_t(x_1, \ldots, x_m) = (x_1^2 + \ldots + x_m^2 + (2t - 1)\,\omega(\rho^2), x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0),$$

où ω est une fonction de $\rho^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2$ de graphe

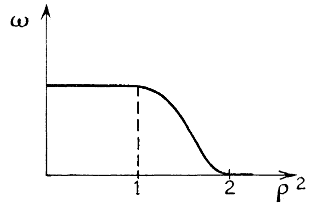

Fig. 1

Lorsque $0 \leq t < 1/2$, $(g_t \mid \mathrm{U})^{-1}(\mathrm{N})$ est une k-sphère; lorsque $t = 1/2$ on a un point de contact et lorsque $1/2 < t \leq 1$, $(g_t \mid \mathrm{U})^{-1}(\mathrm{N})$ est vide. Le chemin λ coupe $\mathcal{G}^1$ transversalement et en un seul point.

A la donnée d'un chemin élémentaire λ d'origine g, relatif à l'élimination de S, on peut associer les objets géométriques suivants : un $(k+2)$-disque Δ,

---

[5] Le support de l'homotopie régulière $\{ g_t \}$ est l'adhérence de l'ensemble

$$\{ x \in \mathrm{M} \mid \exists\, t > 0,\ g_t(x) \neq g_0(x) \}.$$

à bord anguleux, plongé dans un V et champ ξ de $(\nu - n - 1)$-repères normaux à Δ dans V tels que :

1° $\Delta \cap N = \partial_+ \Delta$ (intersection transversale), Δ rencontre $g(M)$ régulièrement le long de $\partial_- \Delta$, où $\partial_+ \Delta$ et $\partial_- \Delta$ sont les deux hémisphères lisses de $\partial\Delta$; $g(S) = \partial_+ \Delta \cap \partial_- \Delta$;

2° $\xi \mid \partial_+ \Delta \subset \nu(N, V)$, $\xi \mid \partial_- \Delta \subset \nu(\partial_- \Delta, g(M))$.

Dans le système de coordonnées cartésiennes utilisé plus haut,

$$\Delta = \{ z_1, \ldots, z_v \in \mathbf{R}^v \mid z_{m+2} = \ldots = z_v = 0,$$
$$z_2 = \ldots = z_{m-k} = 0, 0 \geqq z_1 \geqq z^2_{m-k+1} + \ldots + z^2_{m+1} - 1 \},$$
$$\xi = \left(\frac{\partial}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_{m-k}} \right).$$

Réciproquement tout disque Δ, muni d'un champ ξ, vérifiant les conditions précédentes est associé à un chemin élémentaire d'élimination λ. De plus, toute isotopie de Δ, parmi les disques plongés vérifiant 1° se relève en une homotopie de λ parmi les chemins élémentaires d'élimination.

DÉFINITION. — On appelle support de λ dans V l'intersection des fermés pouvant être le support d'une isotopie ambiante de V qui prolonge l'isotopie $\{ g_t \mid U \}$. On voit que c'est un épaississement du disque Δ.

3.2.2. *Orientation.* — Lorsque M, N et V sont orientées, $S = g^{-1}(N)$ est transversalement orientée, donc orientée. On oriente alors $\partial_+ \Delta$ de sorte que $g(S)$ ait l'orientation du bord de $\partial_+ \Delta$ et on oriente Δ de sorte que $\partial_+ \Delta$ ait l'orientation du bord de Δ.

3.2.3. *Remarques.* — 1° Soit $g \in \mathcal{F}^0$; notons $\mathcal{E} l$ l'espace des chemins élémentaires d'élimination d'origine g. Soit $\lambda \in \mathcal{E} l$; alors il existe dans $\mathcal{E} l$ un chemin arbitrairement petit d'origine λ et dont l'extrémité λ' est un chemin de $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$. Mais si λ' et λ'' sont deux telles approximations de λ, alors *en général* λ' et λ'' *ne sont pas joignables dans l'espace des chemins élémentaires contenus dans* $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$.

2° Soit g un plongement et $\lambda = \{ g_t \mid t \in [0, 1] \}$ un chemin élémentaire d'élimination d'origine g. Soit Δ le disque associé à λ. Si int $\Delta \cap g(M) = \emptyset$, alors λ est homotope à une isotopie d'élimination; il suffit pour cela de diminuer le support de l'homotopie régulière $\{ g_t \}$.

3.2.4. PROPOSITION. — *Soit $g \in \mathcal{F}^0$ générique (i. e. les self-intersections sont transversales), et soit λ un chemin de traversée de $\mathcal{F}^1$, issu de g, relatif à l'élimination d'une sphère $S \subset g^{-1}(N)$. Si $\nu \geqq 2k + 4$, λ est homotope, parmi les chemins de $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$, d'origine g et traversant $\mathcal{F}^1$, à un chemin élémentaire λ', dont l'extrémité peut être choisie générique.*

(Cette proposition remplace le lemme des chemins élémentaires de Cerf dont nous avons déjà dit qu'il ne fonctionnait pas.)

Démonstration. — Représentons λ par une immersion

$$h: \quad M\times[0, 1] \to V\times[0, 1]$$

respectant le paramètre; h est transversal sur $N\times[0, 1]$ et on a $h^{-1}(N\times[0, 1]) = K \cup D$, où K est un cylindre et où D est un $(k+1)$-disque bordé par $S\times\{0\}$; la fonction hauteur sur K est sans point critique et sur D n'a qu'un maximum. Il existe alors dans $M\times[0, 1]$ un $(k+2)$-disque $\mathfrak{D}$, à bord anguleux, avec les propriétés suivantes :

— $\partial\mathfrak{D} = D \cup D'$, où $D' = \mathfrak{D} \cap M\times\{0\}$ est un $(k+1)$-disque;

— int $\mathfrak{D} \cap h^{-1}(N\times[0, 1]) = \emptyset$;

— la fonction hauteur sur $\mathfrak{D}$ n'a pas de point critique.

Génériquement h plonge $\mathfrak{D}$ dans $V\times[0, 1]$. Quitte à faire opérer sur $M\times[0, 1]$ un difféomorphisme préservant les niveaux, on peut supposer que h plonge aussi un voisinage de $\mathfrak{D}$ de la forme $U\times[0, 1]$, où U est un voisinage de D′ dans M. Autrement dit, $h \mid U\times[0, 1]$ est une isotopie. En faisant opérer au but une isotopie de $V\times[0, 1]$, à niveaux constants et à support dans le complémentaire de $N\times[0, 1]$, on se ramène au cas où $h \mid U\times[0, 1]$ est une isotopie à support *compact* dans U. Il est alors immédiat de déformer h pour que le support de l'homotopie régulière $\{h_t\}$ soit dans U. Enfin on applique le lemme des chemins élémentaires de Cerf à l'isotopie de disjonction $h \mid U\times[0, 1]$ de $g \mid U$ par rapport à N pour en faire une isotopie élémentaire de disjonction; cette dernière déformation, se faisant à travers les isotopies à support compact dans U, peut être aussi regardée comme une déformation de h. Après toutes ces déformations, h représente un chemin élémentaire d'élimination.

C. Q. F. D.

3.2.5. *Remarque.* — Supposons que dans la proposition précédente g soit un plongement et que $g^{-1}(N) = S$; soient h et h' les 0-simplexes de $\Lambda_I(g; \mathrm{Imm})$ associés aux chemins λ et λ'. Alors on a défini en 2.7.1 $l_g(h)$ et $l_g(h')$ et on a $l_g(h) = l_g(h')$, car la déformation de λ à λ' se fait dans l'espace $\mathrm{Imm}^0(M, V)$ [appliquer la formule (F.2.7.1)].

3.2.6. Définition. — Soit $f: M \to V$ un plongement. Une homotopie de disjonction h de f par rapport à N est dite *simple* si $f^{-1}(N)$ est une réunion de sphères et si h est composé de chemins élémentaires d'élimination de chacune des sphères.

Si $v \geq 2k+4$, d'après 2.7.5 et 3.2.4, quitte à modifier f par une isotopie, toute homotopie de disjonction est homotope à une homotopie simple. Remarquons qu'alors son relèvement dans le revêtement $\tilde{V}$ est aussi une homotopie simple de disjonction par rapport à $\tilde{N}$.

3.3. Éliminations indépendantes. — Soient $g \in \mathcal{F}^0$ une immersion générique et S_1, S_2 deux k-sphères dans $g^{-1}(N)$. Soient λ_1 un chemin élémentaire d'élimination de S_1 et g_1 l'extrémité de λ_1 ; alors $S_2 \subset g_1^{-1}(N)$. Un chemin élémentaire λ_2 d'origine g_1, relatif à l'élimination de S_2, est dit *indépendant* de λ_1 si le support de λ_2 est disjoint du support de λ_1. Rappelons que le support est un épaississement du $(k+2)$-disque associé.

Proposition. — *Si* $\nu - n \geq 2$ *et* $\nu \geq 2k+5$, λ_2 *est homotope à un chemin élémentaire* λ'_2 *indépendant de* λ_1*; l'homotopie de* λ_2 *à* λ'_2 *se fait parmi les chemins de traversée de* $\mathcal{F}^1$ *d'origine* g_1.

Preuve. — Soit Δ_i le disque associé à λ_i $(i = 1, 2)$; comme en 3.2.1, $\partial_+ \Delta_i$ et $\partial_- \Delta_i$ désignent les deux hémisphères de son bord.

Si $\partial_- \Delta_2$ est contenu dans $g(M)$ et si $\partial_+ \Delta_1 \cap \partial_+ \Delta_2 = \emptyset$, alors $\partial\Delta_1 \cap \partial\Delta_2 = \emptyset$ et génériquement $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$; dans ce cas, la proposition est triviale.

Puisque $k+1 < m$ et que $\overline{g_1(M) - g(M)}$ est une boule, on peut isotoper $\partial_- \Delta_2$, modulo S_2, à la surface de $g_1(M)$ jusque dans $g(M)$. D'autre part, on peut faire fuir les points d'intersection $\partial_+ \Delta_2 \cap \partial_+ \Delta_1$ $(n = 2k+2)$ par le bord $g(S_1)$ de $\partial_+ \Delta_1$. On se ramène ainsi au cas précédent. Il faut remarquer qu'au cours de l'isotopie de Δ_2, $\operatorname{int} \partial_+ \Delta_2$ coupe $g(S_1)$; cela ne fait apparaître aucun point double sur N, car, pour l'immersion g_1, la sphère S_1 n'existe plus dans l'intersection :

C. Q. F. D.

Par abus de notation, si λ_2 est indépendant de λ_1, on se permettra de considérer λ_2 comme un chemin d'origine g relatif à l'élimination de S_2. alors $\lambda_1 \star \lambda_2$ est clairement homotope à $\lambda_2 \star \lambda_1$ dans $(\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1, \mathcal{F}^0)$.

3.4. Invariants des chemins élémentaires d'élimination.

3.4.1. Soient un plongement $f \in \mathcal{F}_0$, λ un chemin élémentaire dans $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$, d'origine f et relatif à l'élimination d'une sphère S de $f^{-1}(N)$; soit Δ le $(k+2)$-disque associé à λ. Considérons les relèvements $\bar{f} : M \to \tilde{V}$ et $\bar{\lambda}$ de λ dans le revêtement $\tilde{V}$ introduit en 2.4 ; $\bar{\Delta}^0$ est le disque associé à $\bar{\lambda}$; il sert de composante de base à l'ensemble $\tilde{\Delta} = \tilde{V} \mid \Delta$; pour $\gamma \in \pi_0(\tilde{\Delta})$, on note $\bar{\Delta}^\gamma$ la composante correspondante.

Nous noterons $\mathbf{Z}_{\tilde{V}}$ le faisceau en groupes abéliens, image directe par $p : \tilde{V} \to V$ du faisceau constant de fibre $\mathbf{Z}$ sur $\tilde{V}$; c'est un système de coefficients locaux sur V. La classe d'intersection de $\tilde{\Delta}$ avec $\bar{f}(\mathrm{M})$ est un élément $i(\lambda) \in \mathbf{Z}_{\tilde{\mathrm{V}}}(\Delta)$.

Remarques importantes. — 1° Si λ et λ' sont deux chemins élémentaires relatifs à l'élimination de S et si leurs disques associés Δ et Δ' sont isotopes modulo S, alors on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{T}_{\Delta}^{\Delta'} : \mathbf{Z}_{\tilde{\mathrm{V}}}(\Delta) \overset{\cong}{\rightarrow} \mathbf{Z}_{\tilde{\mathrm{V}}}(\Delta');$$

mais on n'a pas nécessairement

$$\mathrm{T}_{\Delta}^{\Delta'} i(\lambda) = i(\lambda').$$

A priori cette égalité n'est vraie que si la famille $\{\Delta_t \mid t \in [0, 1]\}$ reliant Δ à Δ' vérifie la condition 1° de 3.2.1 et que, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\mathrm{int}\, \partial_+ \Delta_t \cap (f(\mathrm{M}) \cap \mathrm{N}) = \emptyset.$$

2° Supposons $m, n \leqq \nu - 3$, alors dès que $i(\lambda) = 0$, par le théorème de disjonction de Whitney, on peut disjoindre int Δ de $f(\mathrm{M})$; autrement dit, λ est homotope à une isotopie d'élimination de S.

3.4.2. On a une application naturelle

$$\theta : \pi_0(\tilde{\Delta}) \rightarrow \pi_0\left(\tilde{\mathrm{N}} \underset{\mathrm{N}}{\times} \tilde{\mathrm{N}}\right)$$

qui à $\gamma \in \pi_0(\tilde{\Delta})$ associe la composante de $\tilde{\mathrm{N}} \underset{\mathrm{N}}{\times} \tilde{\mathrm{N}}$ contenant (x', x''), où $x' \in \bar{\Delta}^{\gamma}$ et $x'' \in \bar{\Delta}^{0}$. Il faut remarquer que si $\tilde{\mathrm{N}}$ n'est pas un revêtement régulier, θ n'est pas injective. θ induit un morphisme

$$\theta_* : \mathbf{Z}_{\tilde{\mathrm{V}}}(\Delta) \rightarrow \mathrm{H}_0\left(\tilde{\mathrm{N}} \underset{\mathrm{N}}{\times} \tilde{\mathrm{N}}; \mathbf{Z}\right).$$

On pose $l(\lambda) = \theta_*(i(\lambda))$. On obtient alors la proposition suivante, qui résulte immédiatement des définitions :

PROPOSITION. — *Soit un plongement $f : \mathrm{M} \rightarrow \mathrm{V}$, $f \in \mathcal{F}^0$; soit h une homotopie simple de disjonction, composée de chemins élémentaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ indépendants. Alors*

$$l_f(h) = \sum_1^q l(\lambda_i).$$

3.5. GLISSEMENT. — Soient un plongement $f \in \mathcal{F}^0$ et λ_1, λ_2 deux chemins élémentaires d'origine f, relatifs à l'élimination de deux k-sphères S_1, $\mathrm{S}_2 \subset f^{-1}(\mathrm{N})$; on suppose que λ_1 et λ_2 sont indépendants et contenus dans $\mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$. Nous allons construire une homotopie de $\lambda_1 \star \lambda_2$ jusqu'à

$\lambda'_1 \star \lambda'_2 \subset \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^1$, parmi les chemins de $\mathcal{G}^0 \cup \mathcal{G}^1$. Cette homotopie modifiera les invariants. On se donne $x_1 \in \partial_+ \Delta_1$, $x_2 \in \partial_+ \Delta_2$ et un chemin Γ plongé dans N, joignant x_1 à x_2 et ne rencontrant les deux disques qu'en ces deux points et régulièrement. En poussant int $\partial_+ \Delta_1$ le long de Γ, on fait apparaître deux points d'intersection de signes opposés avec int $\partial_+ \Delta_2$;

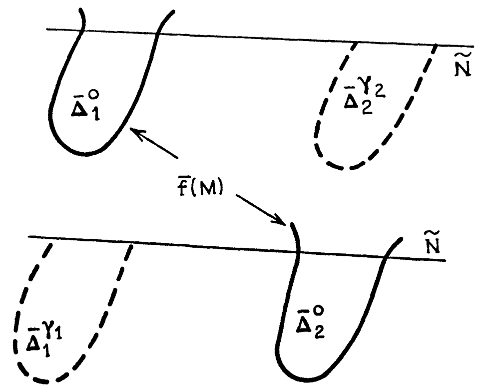

Fig. 2. — Figure dans $\tilde{V}$ avant le glissement.

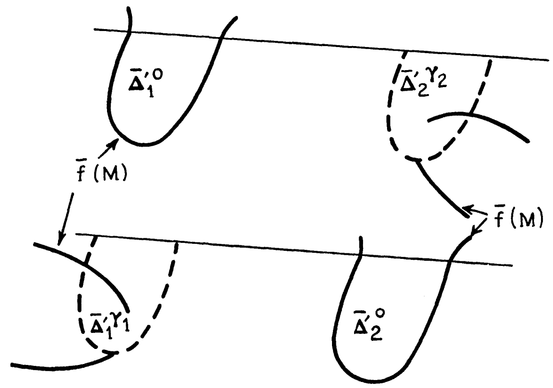

Fig. 3. — Figure dans $\tilde{V}$ après le glissement.

ensuite on fait fuir le point négatif (resp. positif) par le bord S_2 de $\partial_+ \Delta_2$. Cette opération est un *glissement positif* (resp. *négatif*) *le long de* Γ. Elle se relève en une isotopie de Δ_1, donc en une homotopie de λ_1 jusqu'à un nouveau chemin élémentaire λ'_1.

Au cours du glissement, int $\partial_+ \Delta_1$ coupe S_2 en un point; donc il apparaît à un moment donné un point double sur N : l'homotopie de λ_1 à λ'_1 a lieu parmi les chemins de traversée non de $\mathcal{F}^1$ mais de $\mathcal{G}^1$.

Le chemin Γ détermine $\gamma_1 \in \pi_0(\tilde{\Delta}_1)$ et $\gamma_2 \in \pi_0(\tilde{\Delta}_2)$: la composante γ_1 (resp. γ_2) contient l'extrémité du relèvement de Γ dans $\tilde{N}$ à partir d'un point de $\bar{\Delta}_2^0$ (resp. $\bar{\Delta}_1^0$). On vérifie alors la formule

(F.3.5) $$T_{\Delta'_1}^{\Delta_1}(i(\lambda'_1)) = i(\lambda_1) + [\gamma_1].$$

Le chemin d'élimination λ_2 n'est plus indépendant de λ'_1 puisque $\partial_+ \Delta'_1 \cap \partial_+ \Delta_2 = 1$ point. Cependant on peut faire fuir le point par le bord S_1 de $\partial_+ \Delta'_1$ (*voir* proposition 3.3); ce faisant, on déforme λ_2 en λ'_2 qui est indépendant de λ'_1. On a la formule

(F'.3.5) $$T_{\Delta'_2}^{\Delta_2}(i(\lambda'_2)) = i(\lambda_2) + (-1)^k [\gamma_2].$$

Des deux formules précédentes, on déduit

(F''.3.5) $$l(\lambda'_1) + l(\lambda'_2) = l(\lambda_1) + l(\lambda_2) + \alpha_1 + (-1)^k \alpha_2,$$

où $\alpha_1 = \theta_* [\gamma_1]$, $\alpha_2 = \theta_* [\gamma_2]$; de plus, $\alpha_2 = \sigma_* \alpha_1$, où, rappelons-le, σ_* est l'involution canonique de $H_0\left(\tilde{N} \times_N \tilde{N}; \mathbf{Z}\right)$.

3.6. Sommes connexes. — Soient f, λ_1, λ_2 comme en 3.5. On suppose qu'il existe un lacet contractible formé d'un chemin joignant S_1 à S_2 dans $f(M)$ et d'un chemin joignant S_1 à S_2 dans N. Si $m, n \leq v - 3$, c'est qu'il existe un 2-disque D à bord anguleux, plongé dans V, dont les deux points anguleux appartiennent respectivement à S_1 et à S_2, et tel que

$$- \operatorname{int} D \cap (f(M) \cup N) = \emptyset,$$
$$\left.\begin{array}{l} - \partial_+ D = N \cap D \\ - \partial_- D = f(M) \cap D \end{array}\right\} \text{intersections régulières.}$$

De plus, génériquement,

$$\partial_+ D \cap (\operatorname{int} \partial_+ \Delta_1 \cup \operatorname{int} \partial_+ \Delta_2) = \emptyset,$$
$$\partial_- D \cap (\operatorname{int} \partial_- \Delta_1 \cup \operatorname{int} \partial_- \Delta_2) = \emptyset.$$

Dans ces conditions, il existe une isotopie $\{h_t \mid t \in [0, 1]\}$ de f à f', à support dans un voisinage de $\partial_- D$, qui réalise la somme connexe de S_1 et de S_2 : si S est la k-sphère obtenue par somme connexe de S_1 et de S_2 dans N le long de $\partial_+ D$, S est contenue dans $f'^{-1}(N)$.

Il existe alors un chemin élémentaire naturel λ, d'origine f', relatif à l'élimination de S et qui a la propriété que les chemins $\lambda_1 \star \lambda_2$ et $\{h_t \mid t \in [0, 1]\} \star \lambda$ sont homotopes dans $(\mathrm{Imm}^0(M, V), \mathcal{F}^0)$. *On dira que λ est le résultat de la somme connexe de λ_1 et de λ_2.*

La démonstration de ce fait est analogue à celle du « cancellation lemma » [2] ou du « lemme de la queue d'aronde » [3]. Elle consiste à construire dans un espace euclidien un modèle que l'on plonge ensuite dans V. Disons simplement que le disque Δ associé à λ est la somme connexe de Δ_1 et de Δ_2.

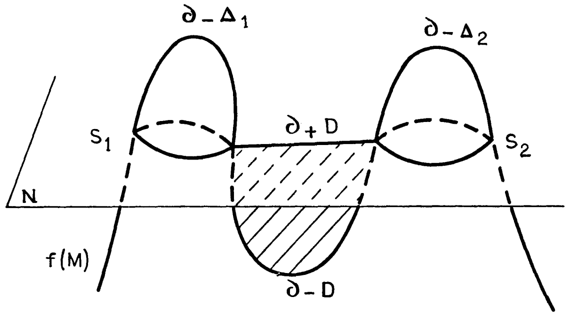

Fig. 4

On a des isomorphismes naturels

$$\mathbf{Z}_{\tilde{V}}(\Delta_1) \cong \mathbf{Z}_{\tilde{V}}(\Delta) \cong \mathbf{Z}_{\tilde{V}}(\Delta_2).$$

En regardant ces isomorphismes comme des identifications, on a la formule

(F.3.6) $$i(\lambda) = i(\lambda_1) + i(\lambda_2).$$

4. Le théorème principal

4.1. Théorème. — *Les notations sont celles de la proposition* 2.7.2. *On en garde toutes les hypothèses et on suppose en plus* $m, n \leqq v - 3$ (*inégalités qui impliquent* $v \geqq 2k + 5$ et $n \leqq 3$). *Alors le noyau de* χ_f *coïncide avec l'image de* $\pi_0(\Lambda_{\mathrm{I}}(f;\ \mathrm{Plgt}))$ *dans* $\pi_0(\Lambda_{\mathrm{I}}(f;\ \mathrm{Imm}))$.

Démonstration. — Soit h un 0-simplexe générique de $\Lambda_{\mathrm{I}}(f;\ \mathrm{Imm})$. D'après la proposition 2.7.2, il suffit de prouver que si $\chi_f(h) = 0$, h est homotope à une isotopie de disjonction. D'après 2.7.5 et 3.2.3, il suffit de le prouver lorsque h est *simple* (*voir* 3.2.6), c'est-à-dire composée de chemins élémentaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, relatifs à l'élimination des sphères $S_1, \ldots, S_q$, dont la réunion est $f^{-1}(N)$. D'après 3.3 on peut prendre $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ indépendants. L'hypothèse $\chi_f(h) = 0$ est alors équivalente à

$$\sum_1^q l(\lambda_j) \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + (-1)^k \sigma_*).$$

D'après 2.7.4, on peut modifier f par isotopie, donc, à volonté, faire apparaître de nouvelles sphères $S_{q+1}, \ldots, S_{q+q'}$, dans l'intersection avec N, qui sont triviales en ce sens qu'elles sont données avec des chemins d'élimination $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q+q'}$, indépendants entre eux, indépendants de $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, et tels que $i(\lambda_{q+j}) = 0$, pour $j = 1, \ldots, q'$; d'ailleurs λ_{q+j} n'est autre que l'isotopie inverse de l'isotopie qui a fait naître S_{q+j}.

Par exemple, si on se donne $\alpha \in \pi_0\left(\tilde{N} \times_N \tilde{N}\right)$ et $\varepsilon \in \{+, -\}$, on peut faire naître S_{q+1} et S_{q+2} et joindre $\partial_+ \Delta_{q+1}$ à $\partial_+ \Delta_{q+2}$ par un chemin Γ de N, de sorte que le glissement de signe ε le long de Γ modifie $\lambda_{q+1} \bigstar \lambda_{q+2}$ en $\lambda'_{q+1} \bigstar \lambda'_{q+2}$ avec

$$l(\lambda'_{q+1}) + l(\lambda'_{q+2}) - l(\lambda_{q+1}) - l(\lambda_{q+2}) = \varepsilon([\alpha] + (-1)^k \sigma_*[\alpha]).$$

On voit donc que, quitte à faire une isotopie de f, par des opérations de glissement, se ramener au cas où $h = \lambda_1 \bigstar \ldots \bigstar \lambda_q$, avec $\sum_1^q l(\lambda_j) = 0$.

La seconde étape consiste à faire des sommes connexes (*voir* 3.6). Pour chaque $S_j \subset f^{-1}(N)$, on peut regarder à quelle composante de $\tilde{N}$ appartient $\bar{f}(S_j)$. Si $\bar{f}(S_j)$ et $\bar{f}(S_{j'})$ appartiennent à la même composante de $\tilde{N}$, alors on peut réaliser, par une isotopie de f, la somme connexe de S_j et de $S_{j'}$ et la somme connexe de λ_j et de $\lambda_{j'}$. Par (F.3.6) les opérations de somme connexe conservent la nullité de $\sum l(\lambda_j)$. Maintenant, si, pour tout j, j', $j \neq j'$, $\bar{f}(S_j)$ et $\bar{f}(S_{j'})$ appartiennent à des composantes différentes de $\tilde{N}$, on a, pour tout j, $l(\lambda_j) = 0$.

D'après 3.4.1, si pour tout j, l'élément $i(\lambda_j)$ est nul dans $\mathbf{Z}_{\tilde{V}}(\Delta_j)$, alors le théorème est démontré. En fait, lorsque $\tilde{N}$ est un revêtement régulier, il est facile de voir que $l(\lambda_j) = 0$ implique $i(\lambda_j) = 0$. Si $\tilde{N}$ n'est pas régulier, on peut se ramener à la nullité de $i(\lambda_j)$ par des glissements. C'est ce que nous allons expliquer en supposant pour simplifier que $q = 1$: on note $S = S_1$, $\Delta = \Delta_1$, $\lambda = \lambda_1$.

On considère l'ensemble des points orientés, $f^{-1}(\text{int}\,\Delta)$; puisque $l(\lambda) = 0$, il y a autant de points positifs que de points négatifs. Notons $x_1, \ldots, x_r$ (resp. $y_1, \ldots, y_r$) l'image par $\bar{f}$ dans $\tilde{V}$ des points positifs (resp. négatifs). Ce sont les points d'intersection de $\bar{f}(M)$ avec $\tilde{\Delta} = \tilde{V} \mid \Delta$. Notons $\bar{\Delta}(x_j)$ la composante de $\tilde{\Delta}$ contenant x_j et $[\bar{\Delta}(x_j)]$ l'élément que représente ce disque orienté (3.2.2) dans $\mathbf{Z}_{\tilde{V}}(\Delta)$. Dire que $l(\lambda) = 0$ revient à dire qu'à une renumérotation près, pour tout j,

$$\theta_*([\bar{\Delta}(x_j)]) = -\theta_*([\bar{\Delta}(y_j)]).$$

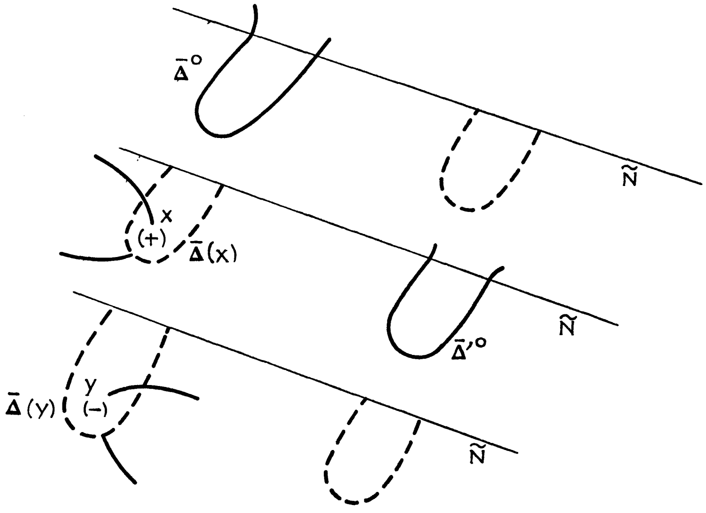

Fig. 5. — Avant les glissements.

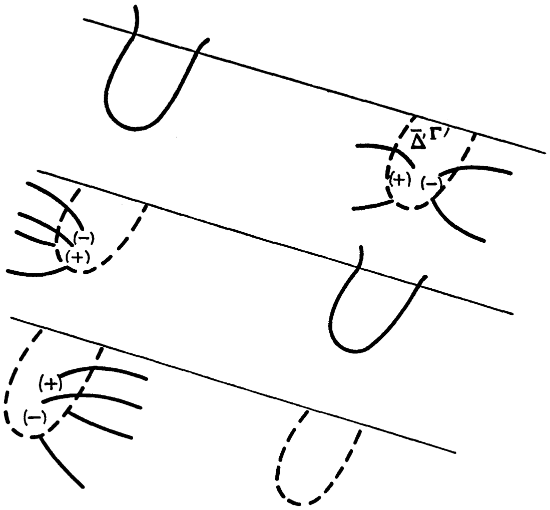

Fig. 6. — Après les glissements.

Si $\bar{\Delta}(x_j) = \bar{\Delta}(y_j)$, on peut éliminer la paire (x_j, y_j) par le procédé de Whitney.

Discutons le cas où il n'y a qu'une paire (x, y) mais où $\bar{\Delta}(x) \neq \bar{\Delta}(y)$. Alors il existe dans N un lacet Γ d'origine dans Δ, dont le relèvement à partir de $\bar{\Delta}(y)$ aboutit à $\bar{\Delta}(x)$ et dont le relèvement à partir de $\bar{\Delta}^0$ est un lacet. On introduit une nouvelle sphère d'intersection « triviale » S', avec son chemin d'élimination λ' de disque associé Δ', et un chemin Γ' joignant $\partial_+ \Delta$ à $\partial_+ \Delta'$ dans N, de sorte que le relèvement de Γ' à partir de $\bar{\Delta}(x)$ aboutisse à $\bar{\Delta}'^0$. On modifie $\lambda \star \lambda'$ par deux glissements : le premier est négatif le long de Γ' et le second est positif le long de $\Gamma \star \Gamma'$.

Avant les glissements, $\operatorname{int} \bar{\Delta}(x) \cap \bar{f}(\mathrm{M})$ est un point positif, $\operatorname{int} \bar{\Delta}(y) \cap \bar{f}(\mathrm{M})$ est un point négatif et $\operatorname{int} \tilde{\Delta}' \cap \bar{f}(\mathrm{M}) = \emptyset$. Après les glissements $\operatorname{int} \bar{\Delta}(x) \cap \bar{f}(\mathrm{M})$ et $\operatorname{int} \bar{\Delta}(y) \cap \bar{f}(\mathrm{M})$ contiennent tous les deux un point positif et un point négatif; d'autre part, si $\bar{\Delta}'^{\Gamma'}$ est la composante de $\tilde{\Delta}'$ qui contient l'extrémité du relèvement de Γ' à partir de $\bar{\Delta}^0$, $\bar{\Delta}'^{\Gamma'}$ est la seule composante de $\tilde{\Delta}'$ qui coupe $\bar{f}(\mathrm{M})$ et elle le fait en deux points de signes opposés. L'intersection de $f(\mathrm{M})$ avec $\operatorname{int} \Delta \cup \operatorname{int} \Delta'$ est donc formée de trois paires de points d'intersection qui peuvent toutes être éliminées par le procédé de Whitney. Finalement, le chemin λ relatif à l'élimination de S est homotope à une isotopie d'élimination de S. C. Q. F. D.

4.2. Étude a plusieurs paramètres. — Dans ce paragraphe, on suppose que le plongement $f : \mathrm{M} \to \mathrm{V}$ a son image disjointe de N. La dimension d'intersection $k = m + n - v$ peut être négative et on suppose $n \geqq 2k + 3$. Notons T_{PI} la triade d'ensembles quasi-simpliciaux

$$\mathrm{C}^{\infty}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{M}, \mathrm{V}), \quad \mathrm{Plgt}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{M}, \mathrm{V}), \quad \mathrm{C}^{\infty}_{\mathrm{PI}}(\mathrm{M}, \mathrm{V} - \mathrm{N}).$$

Pour $i \geqq 2$, un i-simplexe de T_{PI} est une application

$$\mathrm{F} : \quad \mathrm{M} \times \Delta^i \to \mathrm{V} \times \Delta^i$$

respectant les faces de Δ^i et telle que :

1° $\mathrm{F} \mid \mathrm{M} \times \{0\} = f$, où 0 est le sommet base de Δ^i;

2° $\mathrm{F} \mid \mathrm{M} \times \Delta^{i-1}$ est un plongement, où Δ^{i-1} est une face choisie de Δ^i contenant 0;

3° $\mathrm{F} \mid \mathrm{M} \times (\partial \Delta^i - \operatorname{int} \Delta^{i-1}) \subset (\mathrm{V} - \mathrm{N}) \times (\partial \Delta^i - \operatorname{int} \Delta^{i-1})$.

On voit que F est une homotopie de disjonction de $\mathrm{F} \mid \mathrm{M} \times \Delta^{i-1}$ par rapport à $\mathrm{N} \times \Delta^{i-1}$. Avec les mêmes notations qu'en 4.1, on obtient alors le théorème suivant :

Théorème. — 1° *Si* $i - 1 < n - 2k - 2$, $\pi_i(\mathrm{T}_{\mathrm{PI}}, f) = 0$.

2° *Si* M, V *et* N *sont orientées, il existe une application naturelle*

$$\Phi_f : \quad \pi_{n-2k-1}(\mathrm{T}_{\mathrm{PI}}, f) \to \mathrm{H}_0\left(\tilde{\mathrm{N}} \underset{\mathrm{N}}{\times} \tilde{\mathrm{N}}; \mathbf{Z}\right) / \operatorname{Im}(\mathrm{Id} + (-1)^k \sigma_*)$$

qui est un morphisme de groupes si $n - 2k - 1 \geqq 3$.

3° *Si* $m, n \leqq v - 3$, Φ_f *est une injection.*

Démonstration. — Le 1° résulte du théorème de Tinéo (1.3). Le 2° résulte de la proposition 2.7.2 et des remarques 1.2; sur la construction géométrique de l'obstruction, on voit la propriété d'additivité. Le théorème 4.1 implique que si m, $n \leqq v - 3$, $\Phi_f^{-1}(0) = 0$; donc si $n - 2k - 1 \geqq 3$, Φ_f est un monomorphisme de groupes; si $n - 2k - 1 = 2$, Φ_f est un monomorphisme d'ensembles pointés; mais comme cela est vrai quel que soit le plongement base f, on en déduit que Φ_f est une injection.

Remarque. — En utilisant les travaux de Morlet [11], j'ai prouvé dans [8] (proposition 2.4) une proposition qui permet de remplacer dans le théorème précédent, l'indice PI par l'indice I, à condition que

$$i \leqq 2v - m - n - 5 \qquad \text{et} \qquad m, n \leqq v - 3.$$

Bien entendu ces conditions supplémentaires ne sont pas nécessaires à la définition de Φ_f au 2°.

5. L'exemple de Haefliger

L'exemple le plus simple que nous puissions donner d'une homotopie de disjonction, pour laquelle l'obstruction à la déformer en une isotopie de disjonction est non nulle, nous est fourni par A. Haefliger dans [5] (p. 434).

5.1. Construction. — Soit un entier $k \geqq 1$; soient D_1 et D_2 deux disques de dimension $k+1$, plongés dans D^{k+2}, qui s'intersectent transversalement le long d'une k-sphère S dans l'intérieur de D^{k+2}. Pour $i = 1, 2$, Δ_i est le $(k+1)$-disque bordé par S dans D_i. On se donne un entier m tel que $m - k \geqq 3$ et on considère les entiers $n = 2k + 2$ et $v = m + n - k$. Choisissons $\gamma \in \pi_{k+1}(SO(v-k-2)/SO(k+1)) \cong \pi_{k+1}(SO/SO(k+1))$. On le représente par une application $\zeta : D_1 \to SO(v-k-2)$ telle que $\zeta(x) \in SO(k+1)$ pour $x \in D_1 - \operatorname{int} \Delta_1$. Soit N l'image de $D_1 \times D^{k+1}$ dans $V = D^{k+2} \times D^{v-k-2}$ par le plongement

$$P(x, y) = (x, \zeta(x).y),$$

où D^{k+1} est identifié au disque unité de l'espace des $(k+1)$ premières coordonnées dans D^{v-k-2}. Soit M l'image de $D_2 \times D^{m-k-1}$ dans V par le plongement $Q(u, z) = (u, z)$, où D^{m-k-1} est le disque orthogonal à D^{k+1} dans $D^{v-k-2=m}$.

Les disques M et N s'intersectent transversalement dans l'intérieur de V suivant $S \times \{0\}$. Les sphères ∂M et ∂N sont enlacées dans ∂V ([6], p. 71). On vérifie que ∂N représente dans $\partial V - \partial M \cong S^{k+1}$ l'image, au signe près, de $\delta\gamma \in \pi_k(SO(k+1))$ par le J-homomorphisme $\pi_k(SO(k+1)) \to \pi_{2k+1}(S^{k+1})$. En revanche, ∂M est homotope à zéro dans $\partial V - \partial N$; cela veut dire que, rel. ∂M, il existe une homotopie de disjonction de M par rapport à N. Nous allons construire une telle homotopie h et calculer l'obstruction

$$\chi(h) \in \mathbf{Z}/(1+(-1)^k)\,\mathbf{Z}.$$

Remarquons tout de suite que $\pi_{k+1}(SO/SO(k+1)) \cong \mathbf{Z}/(1+(-1)^k)\,\mathbf{Z}$; en regardant cet isomorphisme comme une identification, nous allons prouver la proposition suivante :

5.2. PROPOSITION. — *Il existe une homotopie régulière h de disjonction de* M *par rapport à* N, *rel.* ∂M, telle que $\chi(h) = \gamma$ (*au signe près*).

Démonstration. — Considérons dans $D^{k+2} \times \{0\}$ la $(k+2)$-boule à bord anguleux Δ' bordée par Δ_1 et Δ_2. Soient u'_1 (resp. u'_2) les champs de vecteurs unitaires normaux à Δ_1 (resp. Δ_2) rentrant dans Δ'. Soit $\bar{\xi}'$ un champ de $(v-n)$-repères normaux à N dans V le long de Δ_1. On peut supposer que $\bar{\xi}' = (\xi', u'_1)$; avec le système de coordonnées introduit en 5.1, on voit que, pour $x \in \Delta_1$,

$$\xi'(x) = \zeta(x)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

donc, pour $x \in S$, $\xi'(x) = \frac{\partial}{\partial z}$, le champ $\xi' \mid S$ se prolonge par $\frac{\partial}{\partial z}$ en un champ de $(m-k-1)$-repères normaux à Δ_2 dans M. On notera encore ξ' le champ ainsi construit sur la sphère anguleuse $\Delta_1 \cup \Delta_2$; ξ' est normal à Δ'.

Attachons à $M \times [0, 1]$ une anse $A(\varphi)$, d'indice $k+1$, par le plongement $\varphi : \partial D^{k+1} \times D^{m-k} \to M \times \{1\}$ qui est la trivialisation du fibré normal $\nu(S; M)$ définie par $\bar{\xi}' \mid S$. On peut construire

$$h' : \quad M \times [0, 1] \cup A(\varphi) \to V$$

transversale sur N, de sorte que $h' \mid M \times \{0\}$ soit l'inclusion $M \hookrightarrow V$, que $h'^{-1}(N) = S \times [0, 1] \bigcup_{\varphi} D^{k+1} \times \{0\}$ et que $h' \mid D^{k+1} \times D^{m-k}$ soit la trivialisation $\bar{\xi}'$ de $\nu(N, V) \mid \Delta_1$. L'attachement de l'anse $A(\varphi)$ est trivial, c'est-à-dire que l'on peut attacher sur $M \times [0, 1] \cup A(\varphi)$ une anse $A(\Phi)$, d'indice $k+2$, tuant la précédente. L'application h' se prolonge à $A(\Phi)$ en envoyant $A(\Phi)$ dans $V - N$ et l'âme de $A(\Phi)$ dans Δ'. Ce prolongement, encore noté h', constitue une homotopie de disjonction de M par rapport à N.

Cependant le champ ξ' ne se prolonge pas à Δ', puisque l'obstruction à ce prolongement est $\gamma \in \pi_{k+1}$ (SO/SO $(k+1)$). Par conséquent, $h' \mid \mathrm{A}(\Phi)$ est nécessairement singulière, autrement dit, h' n'est pas une homotopie régulière de disjonction.

Supposons qu'il existe un $(k+2)$-disque Δ, plongé dans V, tel que :

(i) $\partial\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$;

(ii) $\Delta \cap \mathrm{N} = \Delta_1$ et le champ u_1 rentrant dans Δ le long de Δ_1 coïncide avec u'_1;

(iii) Δ rencontre M régulièrement le long de Δ_2 et int Δ coupe M transversalement;

(iv) le champ ξ' se prolonge à Δ.

Alors, suivant la construction précédente, on obtient une homotopie élémentaire (au sens du paragraphe 3) de disjonction h de M par rapport à N et $\chi(h)$ est la classe de $[\mathrm{int}\,\Delta] \cap [\mathrm{M}]$ dans $\mathbf{Z}/(1+(-1)^k)\mathbf{Z}$.

Pour prouver la proposition, il suffit de construire un tel Δ par une isotopie de Δ' parmi les disques vérifiant (i) et (ii) mais pas (iii) et de calculer $[\mathrm{int}\,\Delta] \cap [\mathrm{M}]$, ce qui est facile dans ce cas.

Remarquons qu'il existe un champ canonique ξ'' sur Δ', coïncidant avec ξ' au-dessus de Δ_1. Cependant $\xi' \mid \Delta_2$ n'est peut-être pas contenu dans $\nu(\Delta_2; \mathrm{M})$. Les champs ξ' et ξ'' ne sont pas homotopes dans $\nu(\Delta'; \mathrm{V}) \mid \Delta_2$, mais ils le sont sûrement dans $\nu(\Delta_2; \mathrm{V})$. Il existe donc une famille à un paramètre $\{ \mathrm{L}_t \mid t \in [0, 1] \}$ d'automorphismes du fibré $\nu(\Delta_2; \mathrm{V})$, tels que :

— $\xi' = \mathrm{L}_1 \xi''$;

— $\mathrm{L}_0 = \mathrm{Id} \mid \nu(\Delta_2; \mathrm{V})$;

— pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \mathrm{S}$, $\mathrm{L}_t(x) = \mathrm{Id}$.

Par extension des isotopies, on peut supposer que $\{ \mathrm{L}_t \mid t \in [0, 1] \}$ est la restriction à $\nu(\Delta_2; \mathrm{V})$ d'une isotopie $\{ \psi_t \mid t \in [0, 1] \}$ parmi les difféomorphismes de V qui sont l'identité sur $\mathrm{N} \cup \Delta_2$. On pose alors $\Delta = \psi_1(\Delta')$; il est clair que Δ vérifie (i)...(iv).

Il reste à montrer que, au signe près, $\gamma = [\mathrm{int}\,\Delta] \cap [\mathrm{M}] \bmod (1+(-1)^k)$. Considérons pour cela le fibré en sphères $\nu^0(\Delta_2; \mathrm{V}) \equiv \mathrm{X}$, le sous-fibré $\nu^0(\Delta_2; \mathrm{M}) \equiv \mathrm{A}$ et l'extrémité de la section u'_2, notée B; $\mathrm{L}_1^{-1}(\mathrm{A})$ est le fibré en sphères engendré par le champ ξ''. Les dimensions de X, A et B sont respectivement $v-1$, $m-1$ et $k+1$ et on rappelle l'égalité $v = m+k+2$; les variétés A et B sont disjointes, de même que A et $\mathrm{L}_1(\mathrm{B})$, mais la famille à un paramètre de sous-variétés $\{ \mathrm{L}_t(\mathrm{B}) \mid t \in [0, 1] \}$ coupe A ponctuellement; on a donc un nombre d'intersection $[\{ \mathrm{L}_t(\mathrm{B}) \}] \cap [\mathrm{A}]$, qui, au signe près, est égal à $[\mathrm{int}\,\Delta] \cap [\mathrm{M}]$.

Par ailleurs, on peut supposer que les champs ξ' et ξ'' ne diffèrent que par leur première composante et que, pour tout $t \in [0, 1]$, L_t est l'identité sur le fibré engendré par les $(m - k - 2)$-dernières composantes. Autrement dit, pour calculer $[\{L_t(B)\}] \cap [A]$, on peut supposer que $m = k + 2$ et que ξ' et ξ'' sont des champs de vecteurs d'un $(k+3)$-fibré sur D^{k+1}. Considérons sur S^{k+2}, le pôle Nord y_0, l'équateur S^{k+1} et un point base y_1 de S^{k+1}. Alors $A = D^{k+1} \times \{y_1\} \cup D^{k+1} \times \{-y_1\}$ et $B = D^{k+1} \times \{y_0\}$; enfin

$$L_1^{-1}(A) = \text{graphe}(f) \cup \text{graphe}(-f),$$

où $f : (D^{k+1}, \partial D^{k+1}) \to (S^{k+1}, y_1)$ est une application de degré d, avec

$$\gamma = d \bmod (1 + (-1)^k).$$

On a, au signe près, les égalités

$$[\{L_t(B)\}] \cap [A] = [B] \cap [\{L_t^{-1}(A)\}] = d,$$

d'où

$$\gamma = ([\text{int}\, \Delta] \cap [M]) \bmod (1 + (-1)^k).$$

C. Q. F. D.

5.3. Remarque. — Si $k = 2,6$, $\pi_{k+1}(SO/SO(k+1)) \to \pi_k(SO(k+1))$ est nulle, donc ∂N est homotope à zéro dans $\partial V - \partial M$ et l'on peut disjoindre N de M homotopiquement. Si $m \geq 2k + 3$, on peut le faire isotopiquement (th. 1.3) et il existe donc une isotopie de disjonction de M par rapport à N en même temps que l'homotopie annoncée à la proposition précédente. Pour obtenir l'isotopie, on fait comme suit : dans ces dimensions la composée

$$\pi_{k+1}(SO(m - k - 1)) \to \pi_{k+1}(SO) \to \pi_{k-1}(SO/SO(k+1))$$

est un épimorphisme. Alors au lieu de prendre $\xi' \mid \Delta_2 = \frac{\partial}{\partial z}$, on peut prolonger $\left.\frac{\partial}{\partial z}\right| S$ à $\nu(\Delta_2; M)$ de sorte que le champ ainsi construit se prolonge à Δ'.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie* (I. H. E. S., Pub. math. n° 39, 1970).

[2] J. Cerf et A. Gramain, *Le théorème du h-cobordisme d'après Smale*, Secr. math. E. N. S., Paris, 1966.

[3] A. Chenciner, *Sur la géométrie des strates de petites codimensions de l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété* (*Thèse*, Orsay, 1971).

[4] M. I. Gromov, *Thèse* (*Izr. Akad. Nauk S. S. S. R.*, vol. 33, 1969, p. 707-734).

[5] A. Haefliger, *Differentiable embeddings of* S^n *in* S^{n+q} *for* $q > 2$ (*Ann. of Math.*, vol. 83, 1966, p. 402-436).

[6] A. Haefliger, *Enlacements de sphères en codimension supérieure à* 2 (*Comm. Math. Helv.*, vol. 41, 1966-1967, p. 51-72).

[7] M. Hirsch, *Immersions of manifolds* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 93, 1959, p. 242-276).

[8] F. Laudenbach, *Disjonction de sous-variétés et application au croisement des anses* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 3, 1970, p. 385-408).

[9] F. Laudenbach, *C. R. Acad. Sc.*, t. 273, série A, 1971, p. 1037-1039.

[10] C. Morlet, *Topologie des variétés semi-linéaires* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, p. 313-394).

[11] C. Morlet, *C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 1080 ou *Appendice de plongements et automorphismes de variétés*, cours Peccot, Collège de France, Paris, 1969.

[12] S. Smale, *The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces* (*Ann. of Math.*, vol. 69, 1959, p. 327-344).

[13] J. Stallings, *The piecewise linear structure of Euclidean space* (*Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 58, 1962, p. 481-488).

[14] A. Tinéo, *Un théorème de relèvement dans les espaces d'applications différentiables; réalisation d'intersection* (*Thèse de* 3e *cycle*, Orsay, 1971).

(Manuscrit reçu le 17 janvier 1972.)

F. Laudenbach,
Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes, 75-Paris, 5e
et Université de Paris XI,
Département de Mathématiques,
91-Orsay.