ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

TADATO MATSUZAWA

Sur une classe d'équations paraboliques dégénérées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 4, nº 1 (1971), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1971_4_4_1_1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 4, 1971, p. 1 à 19.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS PARABOLIQUES DÉGÉNÉRÉES

PAR TADATO MATSUZAWA.

1. INTRODUCTION. — Dans cet article, nous allons étudier d'abord le problème mixte pour une équation d'évolution du type

$$u_t + t^\alpha \Lambda(t)\, u = f, \qquad \alpha \geqq 0 \tag{1.1}$$

où $\{\Lambda(t)\}_{t\geqq 0}$ est une famille d'opérateurs dans un espace hilbertien, non bornés, autoadjoints, > 0, de domaine indépendant de $t \geqq 0$. La situation remarquable est le choix de la classe initiale.

Dans le paragraphe 2, nous démontrons un théorème d'existence et d'unicité de la solution faible du problème de Cauchy pour l'équation (1.2) (Λ indépendant de t). Dans le paragraphe 3, nous préparerons quelques lemmes sur les espaces de Sobolev avec poids. Dans le paragraphe 4, la régularité des solutions faibles de ce problème est démontrée.

Ensuite, dans le paragraphe 5, nous allons étudier le problème mixte pour les équations paraboliques dégénérées :

$$u_t - t^\alpha \sum_{i,j=1} (a_{ij}(x, t)\, u_{x_i})_{x_j} + t^\beta \sum_{i=1} b_i(x, t)\, u_{x_i} + c(x, t)\, u = f \tag{1.2}$$

comme application des résultats précédents. On y suppose que $0 \leqq \alpha$ et $\frac{\alpha - 1}{2} < \beta$. L'hypothèse $\frac{\alpha - 1}{2} < \beta$ est exacte.

La démonstration du théorème 5.1, résultat principal dans le paragraphe 5, se réduit à la théorie de Riesz-Schauder. La théorie de l'interpolation et un théorème de l'unicité (théorème 5.2), démontré par M. Y. Ikeda, y sont importants.

Enfin dans le problème 6, nous montrerons que le problème de Cauchy pour l'équation

$$(1.3)\qquad u_t - t^\alpha u_{xx} + it^\beta u_x = 0 \qquad (i=\sqrt{-1}),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

est mal posé au sens de Hadamard si $-1 < \beta < \frac{\alpha - 1}{2}\cdot$

L'auteur exprime ses remerciements à MM. Y. Ikeda et T. Ichinosé qui ont bien voulu discuter avec lui.

2. Théorème d'existence et d'unicité. — Utilisons les notations dans [8]. Soit Y un espace de Hilbert. On désigne par $L^2(0, T; Y)$ les (classes de) fonctions $t \to f(t)$ de carré intégrable sur $]0, T[$ $(0 < T < \infty)$ à valeurs dans Y. Muni de la norme

$$(2.1)\qquad \left(\int_0^T \|f(t)\|_Y^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(0,T;Y)},$$

$L^2(0, T; Y)$ est un espace de Hilbert. On désigne par $H^1(0, T; Y)$ les (classes de) fonctions f telles que f, $D_t f \in L^2(0, T; Y)$, où $D_t f$ désigne la dérivée (d'ordre 1) de u au sens des distributions sur $]0, T[$ à valeurs dans Y. On le munit de la norme

$$\|f\|_{H^1(0,T;Y)} = (\|f\|^2_{L^2(0,T;Y)} + \|D_t f\|^2_{L^2(0,T;Y)})^{\frac{1}{2}}.$$

Soit maintenant Λ un opérateur non borné dans Y, autoadjoint, positif de domaine $D(\Lambda)$. On peut définir les puissances Λ^θ de Λ, $\theta \in R$. $D(\Lambda^\theta)$ est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|_{D(\Lambda^\theta)} = (\|u\|_Y^2 + \|\Lambda^\theta u\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour α réel, $\geqq 0$, on considère l'espace de Hilbert F comme suit :

$$F = \left\{u;\ u \in L^2(0, T; Y),\ t^{\frac{\alpha}{2}} u \in L^2\left(0, T; D\left(\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_F = \left(\|u\|^2_{L^2(0,T;Y} + \left\|t^{\frac{\alpha}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}u\right\|^2_{L^2(0,T;Y)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère aussi un sous-espace Φ de F comme suit :

$$\Phi = \left\{v;\ v \in H^1(0, T; Y),\ t^{\frac{\alpha}{2}} v \in L^2\left(0, T; D\left(\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)\right),\ v(T) = 0\right\}.$$

Φ est un espace préhilbertien avec la norme

$$|||v|||_\Phi = (\|v\|_F^2 + \|v(0)\|_Y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a

$$\Phi \subset F,$$

l'injection étant continue et Φ est dense dans F.

DÉFINITION 2.1. — Soient $f \in L^2(o, T; Y)$ et $u_0 \in Y$, nous appelons $u \in F$ une solution faible du problème

$$(2.2) \qquad Lu = u_t + t^\alpha \Lambda u = f \quad \text{dans }]o, T[,$$

$$(2.3) \qquad u(o) = u_0.$$

si u vérifie

$$(2.4) \qquad -[u, (v e^{-t})_t] + \left[t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} u, t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} v e^{-t}\right] = [f, v e^{-t}] + (u_0, v(o))_Y$$

pour tout $v \in \Phi$. Ici [,] désigne le produit scalaire dans $L^2(o, T; Y)$ et $(\, , \,)_Y$ dans Y.

THÉORÈME 2.1. — *Supposons que* $\alpha \geqq o$. *Soit* $f \in L^2(o, T; Y)$ *et* $u_0 \in Y$. *Il existe une solution faible u unique dans* F *pour le problème* (2.2), (2.3). *On a l'inégalité*

$$(2.5) \qquad \| u \|_F \leqq C\,(^1) \{ \| f \|_{L^2(o, T; Y)} + \| u_0 \|_Y \}.$$

La constante C *ne dépend pas de* $f \in L^2(o, T; Y)$ *et de* $u_0 \in Y$.

Démonstration. — (i) *L'existence :* Posons la forme sesquilinéaire

$$E(u, v) = -[u, (v e^{-t})_t] + \left[t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} u, t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} v e^{-t}\right], \qquad u \in F, \quad v \in \Phi.$$

Pour tout $v \in \Phi$, la forme $u \to E(u, v)$ est continue sur F. De plus, il existe une constante $K > o$ telle que

$$(2.6) \qquad | E(v, v) | \geqq ||| v |||^2, \qquad v \in \Phi.$$

En effet, on vérifie que

$$\operatorname{Re}(E(v, v)) = \frac{1}{2} \| v(o) \|_Y^2 + \frac{1}{2} [v, v e^{-t}] + \left[t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} v, t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} v e^{-t}\right] \geqq K ||| v |||^2, \qquad v \in \Phi,$$

pour $K > o$ assez petit.

Enfin la forme

$$v \to [f, v e^{-t}] + (u_0, v(o))_Y$$

est continue sur Φ, pour la norme $||| v |||$.

---

(1) La lettre C pourra désigner les constantes différentes.

Alors d'après le théorème 1.1, chap. III, [6], il existe $u \in \mathrm{F}$ avec $\mathrm{E}(u, v) = [f, v e^{-t}] + (u_0, v(0))_{\mathrm{Y}}$ pour tout $v \in \Phi$, i. e. l'existence de la solution faible est démontrée.

(ii) *L'unicité :* Soit $u \in \mathrm{F}$ une solution faible du problème (2.2), (2.3) avec $f = 0$ et $u_0 = 0$. Dans ce cas, la condition (2.4) est équivalente à

$$- [u, v_t] + \left[t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} u, t^{\frac{\alpha}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} v\right] = 0, \qquad v \in \Phi. \tag{2.7}$$

Posons

$$v(t) = \int_t^{\mathrm{T}} u(\tau)\, d\tau.$$

Alors $v \in \Phi$ et on peut le substituer dans (2.6) et on a

$$\| u \|^2_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{Y})} + \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}} t^\alpha \left| \int_t^{\mathrm{T}} \Lambda^{\frac{1}{2}} u(\tau)\, d\tau \right|^2 d\tau = 0. \tag{2.8}$$

Donc $u = 0$.

Le théorème de graphe fermé donne l'inégalité (2.5).

3. Quelques lemmes sur les espaces de Sobolev avec poids. — Y étant un espace de Hilbert comme ci-dessus. Pour r réel, $0 \leqq r \leqq 1$, posons

$$\mathrm{V}_r(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}) = \{ u;\ u \in \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}),\ t^r u_t \in \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}) \}.$$

$\mathrm{V}_r(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})$ est un espace hilbertien avec la norme

$$\| u \|_{\mathrm{V}_r(0,\mathrm{T};\mathrm{Y})} = \left(\| u \|^2_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{Y})} + \| t^r u_t \|^2_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{Y})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous posons

$$\mathring{\mathrm{V}}_r(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}) = \text{adhérence de } \mathrm{C}_0^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}) \text{ dans } \mathrm{V}^r(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}).$$

Pour s réel, $0 < s < 1$, désignons par $\mathrm{H}^s(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})$ l'espace des fonctions u à valeurs dans Y telles que

$$\| u \|_{\mathrm{H}^s(0,\mathrm{T};\mathrm{Y})} = \left(\| u \|^2_{\mathrm{L}^2(0,\mathrm{T};\mathrm{Y})} + \int_0^{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\| u(t) - u(\tau) \|^2_{\mathrm{Y}}}{| t - \tau |^{2s+1}}\, dt\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Aussi nous posons

$$\mathring{\mathrm{H}}^s(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}) = \text{adhérence de } \mathrm{C}_0^\infty(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}) \text{ dans } \mathrm{H}^s(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}).$$

Lemme 3.1. — *Soit r réel, $0 \leqq r < 1$. Nous avons l'inclusion algébrique et topologique*

$$\mathring{\mathrm{V}}_r(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y}) \subset \mathring{\mathrm{H}}^s(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})$$

pour tout s avec $0 \leqq s \leqq 1 - r$.

Démonstration. — (i) *Le cas* $\frac{1}{2} \leq r < 1$: Prenons $v \in C_0^\infty(0, T; Y)$. On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{dt}{t^{2s+1}} \int_0^T \| v(\sigma + t) - v(\sigma) \|_Y^2 \, d\sigma \\
&= \int_0^T \frac{dt}{t^{2s+1}} \int_0^T \left\| \int_\sigma^{\sigma+\tau} v'(\tau) \, d\tau \right\|_Y^2 d\sigma \\
&= \int_0^T \frac{dt}{t^{2s+1}} \int_0^T \frac{1}{2-2r} [(\sigma+t)^{2-2r} - \sigma^{2-2r}] \, d\sigma \int_\sigma \tau^{2r-1} \| v'(\tau) \|_Y^2 \, d\tau \\
&\leq \mathrm{Cte} \int_0^T \frac{dt}{t^{2s+2r-1}} \int_0^T \sigma^{2r} \| v'(\sigma) \|_Y^2 \, d\sigma \\
&= \mathrm{Cte} \| v \|_{V_r(0,T;Y)}
\end{aligned}$$

si $2s + 2r - 1 < 1$ donc si $s < 1 - r$.

(ii) *Le cas* $0 \leq r < \frac{1}{2}$. Pour $v \in C_0^\infty(0, T; Y)$, on a

$$v(\sigma + t) - v(\sigma) = t \int_0^1 v'(\sigma + \theta t) \, d\theta.$$

Alors pour $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \| v(\sigma + t) - v(\sigma) \|_Y^2 \, d\sigma = t^2 \int_0^T d\sigma \left\| \int_0^1 v'(\sigma + \theta t) \, d\theta \right\|_Y^2 \\
&\quad \leq t^2 \int_0^T d\sigma \int_0^1 \frac{d\theta}{(\sigma + \theta t)^{2r}} \int_0^T (\sigma + \theta t)^{2r} \| v'(\sigma + \theta t) \|_Y^2 \, d\sigma \\
&\quad \leq t^2 \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_0^1 \frac{d\theta}{(\sigma + \theta t)^{2r}} \int_0^T d\theta \int_0^1 (\sigma + \theta t)^{2r} \| v'(\sigma + \theta t) \|_Y^2 \, d\sigma \\
&\quad \leq \mathrm{Cte} \, t^{2-2r} \int_0^T \sigma^{2r} \| v'(\sigma) \|_Y^2 \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{dt}{t^{2s-1}} \int_0^T \| v(\sigma + t) - v(\sigma) \|_Y^2 \, d\sigma \\
&\leq \mathrm{Cte} \int_0^T \frac{dt}{t^{2s+2r-1}} \| v \|_{V_r(0,T;Y)}^2 \\
&\leq \mathrm{Cte} \| v \|_{V_r(0,T;Y)}^2.
\end{aligned}$$

si $s < 1 - r$.

C. Q. F. D.

Ensuite, soit Λ comme ci-dessus. Pour m réel, $0 < m \leqq 1$ et α, s réels, $\geqq 0$, désignons par $W_T^m(\alpha, s)$ l'espace des fonctions u telles que

$$u \in H^m(0, T; Y), \tag{3.1}$$

$$t^\alpha u \in L^2(0, T; D(\Lambda^s)). \tag{3.2}$$

Nous prenons pour norme :

$$\| u \|_{W_T^m(\alpha, s)} = (\| u \|^2_{H^m(0,T;Y)} + \| t^\alpha u \|^2_{L^2(0,T;D(\Lambda^s))})^{\frac{1}{2}}.$$

Nous posons

$$\mathring{W}_T^m(\alpha, s) = \text{adhérence de } C_0^\infty(0, T; Y) \text{ dans } W_T^m(\alpha, s).$$

LEMME 3.2 (*cf.* [2]). — *Pour tout nombre* α, m, $0 < m \leqq 1$ $\left(m \neq \frac{1}{2}\right)$ *et tout* θ, $0 \leqq \theta \leqq 1$, *nous avons l'inclusion algébrique et topologique*

$$\mathring{W}_T^m(\alpha, s) \subset \mathring{W}_T^m(\beta, s(1-\theta)) \tag{3.3}$$

avec $\beta = (1-\theta)\alpha - \theta m$ (*et* $s \geqq 0$).

Démonstration. — Suivons la manière de démontrer le théorème 1.1 [2].

(i) Pour $\theta = 1$, i. e. $\beta = -m$, on a l'inégalité

$$\| t^{-m} u \|_{L^2(0,T;Y)} \leqq C \| u \|_{\mathring{H}^m(0,T;Y)} \tag{3.4}$$

(*voir* chap. I [8]). Ceci démontre le lemme dans le cas $\beta = -m$.

(ii) Soit $u \in \mathring{W}_T^m(\alpha, s)$. On a d'après (3.2) et (3.4) :

$$\begin{cases} t^\alpha u \in L^2(0, T; D(\Lambda^s)), \\ t^{-m} u \in L^2(0, T; Y) \end{cases} \tag{3.5}$$

$\zeta = \xi + i\eta$ étant un nombre complexe, considérons la fonction holomorphe à valeurs dans $L^2(0, T; Y)$:

$$\omega(\zeta, t) = t^{(1-\zeta)\alpha - \zeta m} u(t).$$

Nous vérifions à partir de (3.5) :

$$\omega(i\eta, t) \in L^2(0, T; D(\Lambda^s)). \sup_\eta \| \omega(i\eta, .) \|_{L^2(0,T;D(\Lambda^s))} < +\infty,$$

$$\omega(1 + i\eta, t) \in L^2(0, T; Y) \sup_\eta \| \omega(1+i\eta, .) \|_{L^2(0,T;Y)} < +\infty.$$

Nous avons, en utilisant la théorie de « l'interpolation holomorphe » (*voir* [8]) :

$$t^{(1-\theta)\alpha - \theta m} u(t) = \omega(\theta, t) \in L^2(0, T; D(\Lambda^{s(1-\theta)})),$$

$$\| \omega(\theta, .) \|_{L^2(0,T;D(\Lambda^{s(1-\theta)}))} \leqq C(\| t^\alpha u \|_{L^2(0,T;D(\Lambda^s))} + \| t^{-m} u \|_{L^2(0,T;Y)}).$$

D'où s'ensuit le lemme 3.2 par (3.3).

4. Équation d'évolution $u_t + t^\alpha \Lambda u = f$, $\alpha \geqq 0$.

Lemme 4.1 (*cf.* th. 10.1, chap. 1 [8] et th. 1.2 [2]). — *Pour* $u \in W_T^1(\alpha, 1)$, *on a*

$$u(0) \in D\left(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right). \tag{4.1}$$

L'application $u \to u(0)$ *est continue et surjective de* $W_T^1(\alpha, 1)$ *dans* $D\left(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right) \subset Y$.

Démonstration. — Posant $t = \sigma^{\frac{1}{\alpha+1}}$, $\hat{u}(\sigma) = u\left(\sigma^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)$, on a

$$\sigma^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \hat{u}_\sigma \in L^2(0, T^{\alpha+1}; Y), \tag{4.2}$$

$$\sigma^{\frac{1}{2(\alpha+1)}} \hat{u} \in L^2(0, T^{\alpha+1}; D(\Lambda)). \tag{4.3}$$

Alors, par le théorème 10.1, chap. 1 dans [8] (théorème de trace et d'interpolation), on a

$$\hat{u}(0) = u(0) \in D\left(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right)$$

et la surjectivité de l'application.

La surjectivité de l'application $W_T^1(\alpha, 1) \ni u \to u(0) \in D\left(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right)$ est aussi démontrée par le théorème suivant :

Théorème 4.1. — *Soit* $\alpha \geqq 0$. *Pour tout* $u_0 \in D\left(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right)$ *il existe* u *unique dans* $W_T^1(\alpha, 1)$ *tel que*

$$Lu = u_t + t^\alpha \Lambda u = 0 \quad \textit{dans }]0, T[. \tag{4.4}$$

$$u(0) = u_0. \tag{4.5}$$

On a l'inégalité

$$\| u \|_{W_T^1(\alpha, 1)} \leqq C \| u_0 \|_{D\left(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right)}, \tag{4.6}$$

Démonstration. — Utilisons la diagonalisation de Λ. D'après la théorie de la décomposition spectrale (*cf.* [3]) il existe :

(i) une somme mesurable hilbertienne

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}(\lambda)\, d\mu(\lambda), \qquad 0 < \lambda_0 \leqq \lambda < \infty,$$

$d\mu(\lambda)$ = mesure de Radon $\geqq 0$ sur $[\lambda_0, +\infty[$;

(ii) un opérateur unitaire $\mathcal{U}$ de Y sur $[\lambda_0, +\infty[$ qui applique $D(\Lambda)$ sur $\mathcal{H}_1$, où

$$\mathcal{H}_1 = \{ v ; v \in \mathcal{H},\ \lambda v \in \mathcal{H} \}, \tag{4.7}$$

avec

$$\| v \|_{\mathcal{H}_1} = \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^2 \| v(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}$$

et tel que

$$\mathcal{U}(\Lambda u) = \lambda (\mathcal{U} u) \qquad u \in D(\Lambda). \tag{4.8}$$

On vérifie que

$$\mathcal{U} \text{ est un isomorphisme de } D(\Lambda^\theta) \text{ sur } \mathcal{H}_\theta, \tag{4.9}$$

où

$$\mathcal{H}_\theta = \{ v ; v \in \mathcal{H},\ \lambda^\theta v \in \mathcal{H} \}, \qquad 0 \leqq \theta. \tag{4.10}$$

avec

$$\| v \|_{\mathcal{H}_\theta} = \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^2 \| v(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\mu(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a $v \in \mathcal{H}_\theta$ si, et seulement si $\lambda^\theta v \in \mathcal{H}$ (car $\lambda_0 > 0$ et $\theta \geqq 0$), et la norme sur $\mathcal{H}_\theta$ équivaut à la norme du graphe.

Pour $f \in L^2(0, T; Y)$, on définit $\mathcal{U} f$ par

$$(\mathcal{U} f)(t) = \mathcal{U}(f(t)) \quad \text{p. p.}$$

et de même pour $f \in L^2(0, T; D(\Lambda^\theta))$. Alors, $\mathcal{U}$ est un isomorphisme de $L^2(0, T; D(\Lambda^\theta))$ sur $L^2(0, T; \mathcal{H}_\theta)$.

Démontrons que la solution du problème (4.4), (4.5) est donnée par

$$u(t) = \exp\left(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Lambda \right) u_0. \tag{4.11}$$

Comme $\left(\mathcal{U} \exp\left(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Lambda \right) u_0 \right) = \exp\left(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \lambda \right) \mathcal{U} u_0$, on a

$$\begin{aligned} \| \mathcal{U} u(t) \|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H})} &= \int_0^T dt \int_{\lambda_0}^{\infty} \exp\left(\frac{-2t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \lambda \right) \| \mathcal{U} u_0 \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\mu(\lambda) \\ &= \mathrm{Cte} \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \| \mathcal{U} u_0 \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\mu(\lambda) \\ &= \mathrm{Cte} \| \mathcal{U} u_0 \|^2_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2(\alpha+1)}}}. \end{aligned}$$

Et aussi on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{U} u_t\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H})} &= \|\mathcal{U}(t^\alpha \Lambda u(t))\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H})}\\ &= \int_0^T dt \int_{\lambda_0}^\infty t^{2\alpha}\lambda^2 \exp\left(\frac{-2t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\lambda\right) \|\mathcal{U} u_0\|^2_{\mathcal{H}(\lambda)}\, d\mu(\lambda)\\ &= \mathrm{Cte}\, \|\mathcal{U} u_0\|^2_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2(\alpha+1)}}}.\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à $u \in W^1_T(\alpha, 1)$ et on voit immédiatement que u vérifie (4.4), (4.5).

THÉORÈME 4.2. — *Soit* $\alpha \geqq 0$. *Soit* $u \in F$ *la solution faible* (*cf.* déf 2.1 et th. 2.1) *du problème :*

$$Lu = u_t + t^\alpha \Lambda u = f \quad \text{dans }]0, T[, \tag{4.12}$$

$$u(0) = 0, \tag{4.13}$$

avec $f \in L^2(0, T; Y)$. *Alors* $u \in L^2\left(0, T; D\left(\Lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)\right)$ *et on a l'inégalité*

$$\|u\|_{L^2\left(0,T;D\left(\Lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)\right)} \leqq C\|f\|_{L^2(0,T;Y)} \tag{4.14}$$

La constante C *ne dépend pas de* $f \in L^2(0, T; T)$.

Démonstration. — Pour $f \in L^2(0, T; Y)$, définissons $f_\lambda (\lambda \geqq \lambda_0)$ par

$$(\mathcal{U} f_\lambda)(\gamma) = \begin{cases} \mathcal{U} f(\gamma), & \lambda_0 \leqq \gamma \leqq \lambda,\\ 0, & \lambda < \gamma.\end{cases} \tag{4.15}$$

Alors nous avons

$$\lambda(t) \in L^2(0, T; D(\Lambda^\theta)), \qquad 0 \leqq \theta < \infty, \tag{4.16}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} f_\lambda = f \quad \text{dans } L^2(0, T; Y). \tag{4.17}$$

On vérifie immédiatement que

$$u_\lambda(t) = \int_0^t \exp\left\{\frac{-(t^{\alpha+1}t - \tau^{\alpha+1})}{\alpha+1}\Lambda\right\} f_\lambda(\tau)\, d\tau \tag{4.18}$$

est la solution du problème (4.12), (4.13) avec $f = f_\lambda$. Par le théorème 2.1, on a

$$\|u_\lambda\|_F \leqq C\|f_\lambda\|_{L^2(0,T;Y)}. \tag{4.19}$$

Donc, en faisant λ vers l'infini, on voit que la solution faible du problème (4.12), (4.13) est donnée par

$$u(t) = \int_0^t \exp\left\{\frac{-(t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})}{\alpha+1}\Lambda\right\} f(\tau)\, d\tau. \tag{4.20}$$

Nous démontrons maintenant l'inégalité (4.14). Posons $v(\lambda, t) = \mathfrak{U}f$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\mathrm{T}} \left\| \mathfrak{U}\left(\Lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} u(t)\right)\right\|_{\mathcal{K}}^2 dt \\
&= \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\lambda_0}^{\infty} \left\| \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \mathfrak{U}\, u(t) \right\|_{\mathcal{K}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda)\, dt \\
&= \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\lambda_0}^{\infty} \left\| \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \int_3^t \exp\left\{ \frac{-(t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1})}{\alpha + 1} \lambda \right\} v(\lambda, \tau)\, d\tau \right\|_{\mathcal{K}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda)\, dt \\
&\leq \int_{\lambda_0}^{\infty} d\mu(\lambda) \int_0^{\mathrm{T}} \left(\int_0^t \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \exp\left\{ \frac{-(t-\tau)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \lambda \right\} \| v(\lambda, \tau) \|_{\mathcal{K}(\lambda)} d\tau \right)^2 dt \\
&\leq \mathrm{Cte} \int_{\lambda_0}^{\infty} d\mu(\lambda) \int_0^{\mathrm{T}} \| v(\lambda, t) \|_{\mathcal{K}(\lambda)}^2 dt \\
&= \mathrm{Cte} \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\lambda_0}^{\infty} \| \mathfrak{U} f(t) \|_{\mathcal{K}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) \\
&= \mathrm{Cte}\, \| \mathfrak{U} f \|_{\mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathcal{K})}.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre l'inégalité (4.14).

THÉORÈME 4.3. — *Soient* $f \in \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})$ *et* $u \in \mathrm{F}$ *la solution faible du problème* (4.12), (4.13). *Il existe une constante* C *telle que*

$$\left\| t^{\frac{1}{2}} u_t \right\|_{\mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})} \leq \mathrm{C} \| f \|_{\mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})}. \tag{4.21}$$

La constante C *ne dépend pas de* $f \in \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})$.

Démonstration. — Pour $f \in \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})$, posons f_λ, u_λ comme dans la démonstration du théorème 4.3. Alors on trouve que $u_\lambda \in \mathrm{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathrm{D}(\Lambda^\theta))$, $0 \leq \theta < \infty$, et u_λ est la solution (forte) du problème (4.12), (4.13) avec $f = f_\lambda$.

Prenons $\zeta(t) \in \mathrm{C}^\infty[0, \mathrm{T}]$ tel que

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{\mathrm{T}}{2}, \\ 0, & t = \mathrm{T}. \end{cases}$$

Compte tenu de $t^{\frac{\alpha+1}{2}} \zeta \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda \in \Phi$ et de

$$\mathrm{L}\left(t^{\frac{\alpha+1}{2}} \zeta\, \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda\right) = t^{\frac{\alpha+1}{2}} \zeta\, \Lambda^{\frac{1}{2}} f_\lambda + \frac{\alpha+1}{2} t^{\frac{\alpha-1}{2}} \zeta\, \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda + t^{\frac{\alpha+1}{2}} \zeta_t \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda.$$

Nous avons, par l'inégalité (2.6),

$$\begin{aligned}
&\left\| t^{\frac{\alpha+1}{2}} \zeta\, \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda \right\|_{\mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})}^2 + \left\| t^{\alpha + \frac{1}{2}} \zeta\, \Lambda u_\lambda \right\|_{\mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{Y})}^2 \\
&\quad \leq \mathrm{C} \left\{ \left\| t^{\frac{1}{2}} \zeta f_\lambda \right\| . \left\| t^{\alpha + \frac{1}{2}} \zeta \Lambda u_\lambda \right\| + \left\| t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta\, \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda \right\| . \left\| t^{\frac{\alpha}{2}} \zeta\, \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda \right\| \right. \\
&\qquad \left. + \left\| t^{\frac{\alpha+1}{2}} \zeta_t \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda \right\| . \left\| t^{\frac{\alpha+1}{2}} \zeta\, \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda \right\| \right\}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ici, nous avons noté par $\| \, . \, \|$ la norme dans $L^2(o, T; Y)$. D'où nous avons

$$\left\| t^{\alpha+\frac{1}{2}} \zeta \Lambda u_\lambda \right\|^2 \leqq C \left\{ \| f_\lambda \| . \left\| t^{\alpha+\frac{1}{2}} \zeta \Lambda u_\lambda \right\| + \| f_\lambda \|^2 \right\}. \tag{4.23}$$

pour une autre constante C qui ne dépend pas de f, λ [l'inégalité (2.5)]. En faisant tendre λ vers l'infini on a

$$\left\| t^{\alpha+\frac{1}{2}} \zeta \Lambda u \right\|_{L^2(o, T; Y)} \leqq C \| f \|_{L^2(o, T; Y)}. \tag{4.24}$$

D'où on a le théorème 4.3.

THÉORÈME 4.4. — *Soit* $\alpha \geqq o$. *Considérons le problème :*

$$Lu = u_t + t^\alpha \Lambda u = f \quad \text{dans }]o, T[, \tag{4.12}$$

$$u(o) = o, \tag{4.13}$$

avec $f \in L^2(o, T; Y)$.

Alors il existe une solution u (donnée par (4.20)) *unique dans* $W_T^1(\alpha, 1)$. *De plus, il existe une constante* C *telle que*

$$\| u \|_{W_T^1(\alpha, 1)} \leqq C \| f \|_{L^2(o, T; Y)}. \tag{4.25}$$

La constante C *ne dépend pas de* $f \in L^2(o, T; Y)$.

Démonstration. — Par le théorème 4.3 et le lemme 3.1, nous avons $u \in H^m(o, T; Y)$ pour tout m, $o \leqq m < \frac{1}{2}$ et

$$\| u \|_{H^m(o, T; Y)} \leqq C(m) \| f \|_{L^2(o, T; Y)}$$

donc nous avons $u \in W_T^m\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et

$$\| u \|_{W_T\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)} \leqq C'(m) \| f \|_{L^2(o, T; Y)}, \qquad o \leqq m < \frac{1}{2}. \tag{4.26}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.2 on a

$$\mathring{W}_T^m\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset \mathring{W}_T^m\left(\frac{\alpha}{2} + k - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha + 1}\right)\right), \tag{4.27}$$

où $k = \frac{1 - m}{\alpha + 2}$, $o < m < \frac{1}{2}$ et $o < k < \frac{1}{2}$.

Prenons $\zeta \in C^\infty[o, T]$ comme dans la démonstration du théorème 4.3. De la même manière que ci-dessus, en tenant compte de $t^{\frac{\alpha}{2}+k} \zeta \Lambda^{\frac{1}{2}} u_\lambda \in \Phi$, on a

$$(4.22)' \qquad \left\| t^{\frac{\alpha}{2}+k}\zeta\Lambda^{\frac{1}{2}}u_\lambda \right\|^2_{L^2(0,T;Y)} + \| t^{\alpha+k}\zeta\Lambda u_\lambda \|^2_{L^2(0,T;Y)}$$
$$\leq C\Big\{ \| t^k\zeta f_\lambda \| . \| t^{\alpha+k}\zeta\Lambda u_\lambda \| + \left\| t^{\frac{\alpha}{2}+k-\frac{1}{2}}\zeta\Lambda^{\frac{1}{2}}u_\lambda \right\|^2$$
$$+ \left\| t^{\frac{\alpha}{2}+k}\zeta_t\Lambda^{\frac{1}{2}}u_\lambda \right\| . \left\| t^{\frac{\alpha}{2}+k}\zeta\Lambda^{\frac{1}{2}}u_\lambda \right\| \Big\}.$$

Par (4.26), (4.27), on trouve que

$$\left\| t^{\frac{\alpha}{2}+k-\frac{1}{2}}\zeta\Lambda^{\frac{1}{2}}u_\lambda \right\|^2_{L^2(0,T;Y)} \leq C \| \zeta u_\lambda \|_{\mathring{W}^{m}_{T}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha+1}\right)\right)} \leq C' \| f_\lambda \|_{L^2(0,T;Y)}.$$

D'où nous avons comme au (4.24),

$$(4.24)' \qquad \| t^{\alpha+k}\zeta\Lambda u \|_{L^2(0,T;Y)} \leq C \| f \|_{L^2(0,T;Y)}.$$

D'où nous avons

$$(4.28) \qquad \| t^k u_t \|_{L^2(0,T;Y)} \leq C \| f \|_{L^2(0,T;Y)}.$$

Encore par le lemme 3.1, on a $u \in H^{m_1}(o, T; Y)$ pour m_1 tel que $\frac{1}{2} < m_1 < 1 - k$ et donc $u \in W^{m_1}_T\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Alors, comme $\frac{1}{2} < m_1 < 1$, on a

$$(4.27)' \qquad \mathring{W}^{m_1}_T\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset \mathring{W}^{m_1}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha+1}\right)\right).$$

Dans le calcul (4.22)', on prend $t^{\frac{\alpha}{2}}\zeta\Lambda^{\frac{1}{2}}u_\lambda$ au lieu de $t^{\frac{\alpha}{2}+k}\zeta\Lambda^{\frac{1}{2}}u_\lambda$, on a $t^\alpha\zeta\Lambda u \in L^2(o, T; Y)$, d'où $u_t \in L^2(o, T; Y)$ et on obtient le théorème 4.4.

Ajouté en épreuves. Cette démonstration est incomplète. Une démonstration complète paraîtra dans un article ultérieur.

Nous supposons maintenant que $\Lambda(t)$ est un opérateur non borné, auto-adjoint, $> o$ pour chaque $t \in [o, T]$ et $D(\Lambda(t))$ est indépendant de t. Nous supposons en outre que $t \to \Lambda(t)$ est continue de $[o, T]$ dans $\mathcal{L}(X, Y)$ où $X = D(\Lambda(o))$.

Sous ces hypothèses on va démontrer le

THÉORÈME 4.5. — *Soit* $\Lambda(t)$ *comme ci-dessus. On considère le problème*

$$(4.29) \qquad Lu = u_t + t^\alpha\Lambda(t)u = f \quad \text{dans }]o, T[,$$
$$(4.30) \qquad u(o) = o,$$

avec $f \in L^2(o, T; Y)$. *Il existe une solution* u *unique dans* $W^1_T(\alpha, 1)$ *et on a*

$$(4.31) \qquad \| u \|_{W^1_T(\alpha,1)} \leq C \| f \|_{L^2(0,T;Y)}.$$

La constante C *ne dépend pas de* f.

Démonstration. — D'abord considérons le problème

$$L_l u = u_t + t^\alpha \Lambda(0) u = f \quad \text{dans }]0, \delta[, \tag{4.32}$$

$$u(0) = 0, \tag{4.33}$$

avec $f \in L^2(0, \delta; Y)$ et $0 < \delta \leq T$. Par le théorème 4.4, il existe une solution u unique dans $W^1_\delta(\alpha, 1)$ telle que

$$\| u \|_{W^1_\delta(\alpha, 1)} \leq C \| f \|_{L^2(0, \delta; Y)}. \tag{4.34}$$

Désignons par L_1^{-1} l'application $L^2(0, \delta; Y) \ni f \to u \in W^1_\delta(\alpha, 1)$. (4.34) s'écrit :

$$\| L_1^{-1} f \|_{W^1_\delta(\alpha, 1)} \leq C \| f \|_{L^2(0, \delta; Y)}. \tag{4.35}$$

La constante C ne dépend pas de δ, $0 < \delta \leq T$.

Comme l'équation (4.29) s'écrit :

$$u_t + t^\alpha \Lambda(0) u + t^\alpha (\Lambda(t) - \Lambda(0)) u = f, \tag{4.36}$$

le problème (4.29), (4.30) est équivaut à l'équation

$$u + L_1^{-1} L_2 u = L_1^{-1} f, \quad f \in L^2(0, \delta; Y), \tag{4.37}$$

où $L_2 u = t^\alpha (\Lambda(t) - \Lambda(0)) u$ pour $u \in W^1_\delta(\alpha, 1)$ avec $u(0) = 0$.

Ensuite, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on peut prendre $\delta > 0$ tel que

$$\| \Lambda(t) - \Lambda(0) \|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \varepsilon, \qquad 0 \leq t \leq \delta.$$

Donc, si l'on prend $\delta > 0$ assez petit, on a

$$\| L_1^{-1} L_2 \|_{(W^1_\delta(\alpha, 1),\, W^1_\delta(\alpha, 1))} \leq \frac{1}{2}.$$

La solution de (4.37) est uniquement donnée par

$$u = \lim_{m \to \infty} u_n \quad [\text{dans } W^1_\delta(\alpha, 1)], \tag{4.38}$$

où $u_1 = L_1^{-1}$ et $u_n = - L_1^{-1} L_2 u_{n-1} + L_1^{-1} f$, pour $n \geq 2$.

La théorie classique s'adopte pour $\frac{\delta}{2} < t \leq T$ et on obtient le théorème 4.5.

En combinant le théorème 4.1 et le théorème 4.5, on obtient le

Théorème 4.6. — *Soient* $\alpha \geqq 0$ *et* $\Lambda(t)$ *comme dans le théorème* 4.5. *Il existe une solution* u *unique dans* $W_T^1(\alpha, 1)$ *pour le problème*

$$Lu = u_t + t^\alpha \Lambda(t)\, u = f \quad dans \ ]0, T[, \tag{4.39}$$

$$u(0) = u_0, \tag{4.40}$$

avec $f \in L^2(0, T; Y)$, $u_0 \in D\left(\Lambda(0)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right)$.

De plus, on a

$$\| u \|_{W_T^1(\alpha, 1)} \leqq C \left\{ \| f \|_{L^2(0, T; Y)} + \| u_0 \|_{D\left(\Lambda(0)^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right)} \right\}. \tag{4.41}$$

La constante C *ne dépend pas de* f, u_0.

5. L'Équation

$$u_t - t^\alpha \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, t)\, u_{x_i})_{x_j} + t^\beta \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\, u_{x_i} + c(x, t)\, u = f.$$

Nous allons donner quelques exemples d'applications des résultats précédents.

Nous rappelons que

$$W_T^0(\beta, s) = \{ u;\ u \in L^2(0, T; Y),\ t^\beta u \in L^2(0, T; D(\Lambda^s)) \}. \tag{5.1}$$

Par la méthode complexe (*cf.* la démonstration du théorème 14.2, chap. 1, [8]), on a facilement

$$[W_T^0(\beta, s), L^2(0, T; Y)]_\theta = W_T^0(\theta\beta, \theta s), \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1, \qquad 0 \leqq s. \tag{5.2}$$

Ensuite, désignons ${}_0W_T^1(\alpha, s) = \{ u;\ u \in W_T^1(\alpha, s),\ u(0) = 0 \}$. ${}_0W_T^1(\alpha, s)$ est un sous-espace hilbertien de $W_T^1(\alpha, s)$. D'après la démonstration du lemme 3.2, nous avons l'inclusion algébrique et topologique

$${}_0W_T^1(\alpha, 1) \subset W_T^1\left(\beta, \frac{\beta+1}{\alpha+1}\right) \subset W_T^1\left(\beta, \frac{1}{2}\right), \qquad \alpha \geqq 0, \qquad \beta > \frac{\alpha - 1}{2}. \tag{5.3}$$

Lemme 5.1. — *Si l'injection* ${}_0W_T^1(\alpha, 1) \to L^2(0, T; Y)$ *est compacte, alors l'injection*

$${}_0W_T^1(\alpha, 1) \to W_T^0\left(\beta, \frac{1}{2}\right), \qquad \alpha \geqq 0, \qquad \beta > \frac{\alpha - 1}{2}$$

est compacte.

Démonstration. — Soit Π l'injection canonique de $L^2(0, T; Y)$ sur $L^2(0, T; Y)$. Posons $\mathfrak{X} = L^2(0, T; Y)$. Alors, par (5.3), on a

$$\Pi \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) \cap \mathcal{L}\left({}_0W_T^1(\alpha, 1), W_T^0\left(\beta, \frac{\beta+1}{\alpha+1}\right)\right), \qquad \alpha \geqq 0, \qquad \beta > \frac{\alpha - 1}{2}.$$

Par le théorème d'interpolation (*cf.* théorème 5.1, chap. 1, [8]) et par (5.2), on a

$$\Pi \in \mathcal{L}\left([{}_0W_T^1(\alpha, 1), \mathcal{X}]_\theta, W_T^0\left(\beta\theta, \frac{\beta+1}{\alpha+1}\theta\right)\right), \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

D'autre part, par hypothèse, l'injection

$${}_0W_T^1(\alpha, 1) \to [{}_0W_T^1(\alpha, 1), \mathcal{X}]_\theta, \qquad 0 < \theta < 1$$

est compacte (*cf.* théorème 16.2, chap. 1, [8]). D'où l'injection

$${}_0W_T^1(\alpha, 1) \quad (\to [{}_0W_T^1(\alpha, 1), \mathcal{X}]_\theta) \to W_T^0\left(\beta\theta, \frac{\beta+1}{\alpha+1}\theta\right), \qquad 0 < \theta < 1$$

est compacte.

Si $\beta > \frac{\alpha-1}{2}$, il existe un $\theta_0 = \theta_0(\beta)$ tel que

$$\beta\theta > \frac{\alpha-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\beta+1}{\alpha+1}\theta > \frac{1}{2}, \qquad \theta_0 \leqq \theta < 1.$$

Donc, par (5.3), nous avons démontré que l'injection

$${}_0W_T^1(\alpha, 1) \to W_T^0\left(\theta\beta, \frac{1}{2}\right), \qquad \alpha \geqq 0, \qquad \theta_0 \leqq \theta < 1$$

est compacte. D'où nous déduisons que l'injection

$${}_0W_T^1(\alpha, 1) \to W_T^0\left(\beta, \frac{1}{2}\right), \qquad \alpha \geqq 0, \qquad \beta > \frac{\alpha-1}{2}$$

est compacte.

C. Q. F. D.

Soit maintenant Ω un ouvert de R^n borné de frontière Γ assez régulière. Soit Q le cylindre $Q = \Omega \times]0, T[$, $0 < T < \infty$. Prenons $a_{ij}(x, t)$, $1 \leqq i, j \leqq n$, à valeurs réelles, $\in C^1(\overline{Q})$, et telles que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\,\xi_i\xi_j \geqq \gamma\,|\xi|^2, \qquad (x, t) \in \overline{Q}, \quad \xi \in R^n, \qquad a_{ij} = a_{ji} \tag{5.4}$$

pour quelque constante $\gamma > 0$.

Prenons $Y = L^2(\Omega)$,

$$\Lambda(t)\,u = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, t)\,u_{x_i})_{x_j},$$

$$D(\Lambda(t)) = \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

et posons

$$\mathcal{M}_T^1(\alpha, 1) = \{u;\ u \in H_t^1(0, T; L^2(\Omega)),\ t^\alpha u \in L^2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))\}.$$

$\mathcal{M}_T^1(\alpha, 1)$ est un espace hilbertien muni de la norme

$$\| u \|_{\mathcal{M}_T^1(\alpha,1)} = \left(\| u \|^2_{H^1(0,T;Y)} + \| t^\alpha u \|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On applique le théorème 4.6 et obtient la

Proposition 5.1. — *Supposons que* $\alpha \geqq 0$. *Soient* Ω, Q, $a_{ij}(x, t)$ *comme ci-dessus. Il existe* $u \in \mathcal{M}_T^1(\alpha, 1)$ *unique, tel que*

$$(5.5) \qquad Lu = ut - t^\alpha \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, t)\, u_{x_i})_{x_j} = f \quad dans\ Q,$$

$$(5.6) \qquad u(x, 0) = u_0(x) \quad sur\ \Omega$$

pour $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in D_\alpha(\Omega) = [\mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)}}$.

On a l'inégalité

$$(5.7) \qquad \| u \|_{\mathcal{M}_T^1(\alpha,1)} \leqq C \{ \| f \|_{L^2(Q)} + \| u_0 \|_{D_\alpha(\Omega)} \}.$$

La constante C *ne dépend pas de* f, u_0.

Remarque. — Par les résultats dans [5] et [7], on a

$$(5.8) \qquad \begin{cases} D_\alpha(\Omega) = \mathring{H}^{\frac{1}{\alpha+1}}(\Omega) & \text{si} \quad 0 \leqq \alpha < 1, \\ D_1(\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Omega), & \\ D_\alpha(\Omega) = H^{\frac{1}{\alpha+1}}(\Omega) & \text{si} \quad 1 < \alpha. \end{cases}$$

Théorème 5.1. — *Soient* Ω, Q, $a_{ij}(x, t)$ *comme ci-dessus. Soient* $b_i(x, t)$, $1 \leqq i \leqq n$ *et* $c(x, t)$ *les fonctions à valeurs complexes, mesurables et bornées dans* Q. *On suppose que* $0 \leqq \alpha$ *et* $\frac{\alpha - 1}{2} < \beta$. *Alors, il existe* $u \in \mathcal{M}_T^1(\alpha, 1)$ *unique, tel que*

$$(5.9) \qquad Lu = u_t - t^\alpha \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x, t)\, u_{x_i})_{x_j} + t^\beta \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\, u_{x_i} + c(x, t)\, u = f \quad dans\ Q,$$

$$(5.10) \qquad u(x, 0) = u_0(x) \quad sur\ \Omega$$

pour $f \in L^2(Q)$ *et* $u_0 \in D_\alpha(\Omega)$.

On a l'inégalité

$$(5.11) \qquad \| u \|_{\mathcal{M}_T^1(\alpha,1)} \leqq C \{ \| f \|_{L^2(Q)} + \| u_0 \|_{D_\alpha(\Omega)} \}.$$

La constante C *ne dépend pas de* f, u_0.

Démonstration. — Compte tenu de la proposition 5.1, et de (5.3), il suffit de démontrer le cas $u_0 = 0$.

Posons

$$L_1 u = u_t - t^\alpha \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} x,\ t)\ u_{x_i})_{x_j},$$

$$D(L_1) = \{ u;\ u \in \mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ 1),\ u(x,\ 0) = 0 \}.$$

$$L_2 u = t^\beta \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\ t)\ u_{x_i} + c(x,\ t)\ u,$$

$$D(L_2) = D(L_1).$$

L_1 est une application continue de $D(L_1) \to L^2(Q)$ et L_2 est complètement continue de $D(L_2) \to L^2(Q)$ si $\alpha \geqq 0$ et $\beta > \frac{\alpha - 1}{2}$. En effet, posons

$$_0\mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ \theta) = \{ u;\ u \in H^1(0,\ T;\ L^2(\Omega)),\ u \in \mathfrak{M}_T^0(\alpha,\ \theta),\ u(x,\ 0) = 0 \},$$

$$\mathfrak{M}_T^0(\beta,\ \theta) = \{ u;\ u \in L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega)),\ t^\beta u \in L^2(0,\ T;\ [\mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ L^2(\Omega)]_\theta \},$$

$$0 \leqq \theta \leqq 1.$$

D'après le lemme 3.2, on a

$$_0\mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ 1) \subset {}_0\mathfrak{M}_T^1\left(0,\ \frac{1}{\alpha + 1}\right) \subset H_{x,t}^{\frac{2}{\alpha+1},1}(Q).$$

Donc, l'injection $_0\mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ 1) \to L^2(Q) = L^2(0,\ T;\ L^2(\Omega))$ est compacte. On applique le lemme 5.1 aux espaces $_0\mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ \theta)$ et $\mathfrak{M}_T^0(\beta,\ \alpha)$ et on a l'injection compacte

$$_0\mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ 1) \subset \mathfrak{M}_T^0\left(\beta,\ \frac{1}{2}\right), \qquad \beta > \frac{\alpha - 1}{2}.$$

D'autre part, on a $[\mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),\ L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = \mathring{H}^1(\Omega)$ (*cf.* [5]). Donc L_2 est complètement continue.

Le problème est de démontrer l'existence de la solution de l'équation

$$L_1 u + L_2 u = f, \qquad f \in L^2(Q). \tag{5.12}$$

Par la proposition 5.1, il existe l'application continue L^{-1} de $L^2(Q)$ sur $D(L_1) = {}_0\mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ 1)$ et l'équation (5.12) équivaut à

$$u + L_1^{-1} L_2 u = L_1^{-1} f \qquad f \in L^2(Q), \quad u \in D(L_1), \tag{5.13}$$

où $L_1^{-1} L_2$ est une application complètement continue de $D(L_2) = D(L_1)$ dans $D(L_1)$. Par la théorie de Riesz-Schauder (*cf.* [13], par exemple), la solvabilité et l'unicité de l'équation (5.13) sont équivalentes. L'unicité est assurée par le théorème suivant :

Théorème 5.2. — *Supposons que* $\alpha \geqq 0$, $\beta > \frac{\alpha - 1}{2}$. *Soit* $u \in \mathfrak{M}_T^1(\alpha,\ 1)$ *vérifiant* (5.9), (5.10) *avec* $f = 0$, $u_0 = 0$. *Alors* $u \equiv 0$ *dans* Q.

Démonstration. — Multiplions chaque côté de (5.9) par $\bar{u}e^{2h(t)}$, $h(t)$ déterminée plus tard, nous avons

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^\tau\int_\Omega u_t\,\bar{u}e^{2h(t)}\,dx\,dt-\int_0^\tau\int_\Omega t^\alpha\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x,t)\,u_{x_i})_{x_j}\bar{u}e^{2h(t)}\,dx\,dt\right.$$
$$\left.+\int_0^\tau\int_\Omega t^\beta\sum_{i=1}^n b_i(x,t)\,u_{x_i}\bar{u}e^{2h(t)}\,dx\,dt+\int_0^\tau\int_\Omega c(x,t)\,u\bar{u}e^{2h(t)}\,dx\,dt\right)=0,$$
$$0<\tau\leqq \mathrm{T}.$$

Notons que nous avons

$$\left|\int_0^\tau\int_\Omega t^\beta b_i(x,t)\,u_{x_i}\bar{u}e^{2h(t)}\,dx\,dt\right|$$
$$\leqq\varepsilon\int_0^\tau\int_\Omega t^\alpha|u_{x_i}|^2e^{2h(t)}\,dx\,dt+\mathrm{C}(\varepsilon)\int_0^\tau\int_\Omega t^{2\beta-\alpha}|u|^2e^{2h(t)}\,dx\,dt,\qquad \varepsilon>0.$$

La constante $\mathrm{C}(\varepsilon)$ ne dépend pas de τ, $0<\tau\leqq\mathrm{T}$.

Nous avons enfin

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|u(x,\tau)|^2e^{2h(t)}\,dx+\mathrm{C}_1\sum_{i=1}^n\int_0^\tau\int_\Omega t^\alpha|u_{x_i}|^2e^{2h(t)}\,dt$$
$$\leqq\int_0^\tau\int_\Omega(h''(t)+\mathrm{C}_2t^{2\beta-\alpha}+\mathrm{C}_3)\,|u|^2e^{2h(t)}\,dt$$

pour quelques constantes $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3>0$ qui ne dépendent pas de τ, $0<\tau\leqq\mathrm{T}$. Par la condition $\beta>\frac{\alpha-1}{2}$, on a $2\beta-\alpha>-1$. Si l'on définit

$$h(t)=-\frac{\mathrm{C}_2t^{1+2\beta-\alpha}}{1+2\beta-\alpha}-\mathrm{C}_3t,$$

alors on a

$$\bar{u}e^{2h(t)}\in{}_0\mathfrak{M}^1_{\mathrm{T}}(\alpha,1)$$

et

$$h'(t)-\mathrm{C}_2t^{2\beta-\alpha}-\mathrm{C}_3=0,\qquad 0\leqq t<\infty.$$

Donc on a $u\equiv0$ dans Q.

C. Q. F. D.

6. Problème de Cauchy pour l'équation $u_t-t^\alpha u_{xx}+it^\beta u_x=0$. — Supposons que $-1<\beta<\frac{\alpha-1}{2}$. Considérons le problème de Cauchy pour l'équation

(6.1) $$u_t-t^\alpha u_{xx}+it^\beta u_x=0\quad\text{dans}\quad\mathrm{R}^2_+=\{(x,t);\,(x,t)\in\mathrm{R}^2,\ t>0\},$$

où $i=\sqrt{-1}$.