Annales scientifiques de l'É.N.S.

Claudio Baiocchi

Définition d'opérateurs maximaux et applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 4 (1969), p. 481-520
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_4_481_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 2, 1969, p. 481 à 520.

DÉFINITION D'OPÉRATEURS MAXIMAUX ET APPLICATIONS

PAR CLAUDIO BAIOCCHI,
Pavie, Italie (1).

1. INTRODUCTION.

1.1. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$ (pour les notations, *cf.* le n° 2); et soit $P = P(x, D)$ un opérateur différentiel linéaire, à coefficients suffisamment réguliers, de façon que :

$$P(x, D) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathcal{O}), \mathcal{D}'(\mathcal{O})) \quad (^2); \tag{1.1}$$

$$P(x, D)\varphi \in L^2(\mathcal{O}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) \tag{1.2}$$

et que, $P^\star(x, D)$ désignant l'adjoint de $P(x, D)$ [qui est dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathcal{O}), \mathcal{D}'(\mathcal{O}))$; *cf.* (1.1)]

$$P^\star(x, D)\psi \in L^2(\mathcal{O}), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{1.3}$$

On peut alors définir (au moins) deux prolongements fermés de P (3) :

(1.4) P_s *(prolongement « fort », ou « à la* Friedrichs *» de* P) *qui est la fermeture de* P, *comme opérateur de* $L^2(\mathcal{O})$ *dans lui-même* [P *étant considéré défini seulement sur* $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$];

(1.5) P_w *(prolongement « faible » de* P, *ou « opérateur maximal » associé à* P) *défini par dualité :* $u \in D(P_w)$ *si* $u \in L^2(\mathcal{O})$ *et si il existe* $f \in L^2(\mathcal{O})$ *telle que*

$$(u, P^\star\varphi)_{L^2(\mathcal{O})} = (f, \varphi)_{L^2(\mathcal{O})}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$; *alors on pose* $P_w u = f$.

---

(1) Adresse de l'auteur : Claudio BAIOCCHI, Istituto Matematico, Università, Pavia (Italia). Ce travail entre dans le cadre des activités des « Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C. N. R. ».

(2) $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ désigne l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$; pour ce qui concerne les espaces de fonctions et de distributions sur $\mathcal{O}$ dont on fait usage, *cf.* le n° 2.

(3) On suit ici les notations de Hörmander [13]; dans [13] on appelle P_s « the very strong extension » et P_w « the maximal operator ».

On a évidemment $P_s \subseteq P_w$; mais il est naturel de s'attendre que, sous des hypothèses convenables sur $\mathcal{O}$ et P, on doit avoir $P_s = P_w$.

1.2. Il s'agit évidemment d'une généralisation naturelle du problème de la coïncidence entre les concepts de dérivée forte, introduit par Friedrichs, et de dérivée faible, introduit par Friedrichs et Sobolef; On pourrait généraliser encore le problème en remplaçant l'espace $L^2(\mathcal{O})$ par des espaces du type $L^p(\mathcal{O})$, ou des espaces de mesures sur $\mathcal{O}$ (à ce sujet, *cf.* par exemple Fichera [8], [9]); on peut « localiser » le problème, et remplacer $L^2(\mathcal{O})$ par $L^2_{loc}(\mathcal{O})$ (*cf.* alors Hörmander [14]); on peut aussi remplacer P par un système, ou une matrice d'opérateurs; sous cette forme le problème de l'identité entre P_s et P_w se pose quand on cherche l'équivalence entre plusieurs définitions possibles d'espaces du type $W^{k,p}(\mathcal{O})$ (*cf.* à ce sujet Deny-Lions [7], Gagliardo [12], Il'in [17], Nečas [21]).

Dans un cas particulier (4) le problème a été posé par Friedrichs [10], et résolu en faisant usage d'une technique (des « mollifiers ») qui est ensuite devenue une des méthodes les plus employées dans l'étude de la régularité des solutions des équations différentielles.

1.3. On peut remarquer que le problème de la coïncidence entre P_s et P_w est préliminaire à la résolution de nombreuses questions, en particulier pour ce qui concerne les problèmes aux limites attachés à P; d'où l'intérêt de la question, intérêt démontré aussi par les nombreuses recherches qui ont été développées sur ce sujet. En effet, outre les résultats des travaux déjà cités, on sait que $P_s = P_w$, sous des hypothèses convenables sur $\mathcal{O}$, quand :

a. P est à coefficients constants (*cf.* Hörmander [13]);

b. P est elliptique d'ordre 2, à coefficients suffisamment réguliers (*cf.* Birman [4]);

c. P est elliptique, ou parabolique, à coefficients suffisamment réguliers (*cf.* Lions-Magenes [19], [20]);

d. P est formellement hypoelliptique, à coefficients suffisamment réguliers (*cf.* Hörmander [13]);

e. P est « de type principal » et $\mathcal{O}$ est « suffisamment petit » (*cf.* Hörmander [14]; on travaille ici dans des espaces du type $L^2_{loc}(\mathcal{O})$);

f. Dans le cas où $\mathcal{O} = \mathbf{R}^\nu$ on consultera aussi Browder [5], Niznik [22], Peetre [23];

(4) Celui où P est une matrice d'opérateurs différentiels du premier ordre. Dans [11], Friedrichs a traité aussi le cas où P est elliptique d'ordre quelconque. Dans [10], [11], on travaille en général dans les espaces $L^p_{loc}(\mathcal{O})$; *cf.* toutefois le n° 4 de [10] où l'on travaille dans $L^p(\mathcal{O})$.

g. Dans le cas où $\nu = 1$, on peut par exemple consulter Coddington [6] et la bibliographie de cet ouvrage.

1.4. Dans ce travail on traite le problème $P_s = P_w$ à l'aide d'une variante du « lemme de Friedrichs » (*cf.* théor. 2.1), et on met en évidence l'équivalence entre le problème $P_s = P_w$ et plusieurs autres problèmes liés à l'opérateur P et à l'ouvert $\mathcal{O}$ (*cf.* le n° 5). On donne des conditions sur $\mathcal{O}$ et sur P suffisantes pour avoir $P_s = P_w$ (*cf.* théor. 6.1), en obtenant un résultat qui, comme cas particuliers, redonne presque tous les résultats signalés plus haut, avec quelques précisions sur les hypothèses concernant la régularité de $\mathcal{O}$ et des coefficients de P.

Il est toutefois à remarquer que les conditions sur $\mathcal{O}$ et P du théorème 6.1, suffisantes à assurer que $P_s = P_w$, paraissent sous une forme implicite, à savoir sous la forme de conditions sur un espace du type de $D(P_w)$; la question de vérifier dans les cas concrets (outre ceux qu'on signale) ces conditions, ou bien de les traduire en termes de propriétés (par exemple, algébriques) sur P reste ouverte; on a montré au n° 7.10 la possibilité de vérifier ces conditions si l'on connaît un théorème d'existence de « solutions fortes » et un théorème d'unicité de « solutions faibles » d'un problème aux limites homogène associé à P; en d'autres termes, le problème de la coïncidence entre les prolongements fort et faible de P peut se ramener à un problème analogue relatif à une réalisation convenable de P.

1.5. Outre qu'il redonne presque tous les résultats signalés plus haut, le théorème 6.1 s'applique à d'autres cas, et notamment au cas où P est un opérateur « du type des ondes »; *cf.* théorème 7.1.

C'est justement la validité de la relation $P_s = P_w$ dans ce dernier cas qui a été le point de départ de cette recherche; en effet, dans ce cas le problème, qui avait été signalé dans Lions-Magenes ([20], chap. 5, remarque 11.1) était résolu seulement si P est à coefficients constants (*cf.* alors Hörmander [13]) ou bien si $\mathcal{O}$ est « suffisamment petit » (le résultat étant alors de caractère local; *cf.* Hörmander [14]).

2. Notations. Le lemme de Friedrichs.

2.1. Soit ν un entier positif; $x = \{x_j\}_{j=1,\ldots,\nu}$ va désigner le point de l'espace euclidien à ν dimensions $\mathbf{R}^\nu$.

Pour $x \in \mathbf{R}^\nu$, on pose

$$|x| \equiv \left(\sum_{j=1}^{\nu} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

pour $x, y \in \mathbf{R}^\nu$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^1$, on pose

$$\alpha x + \beta y \equiv \{\alpha x_j + \beta y_j\}_{j=1,\ldots,\nu};$$

pour $x \in \mathbf{R}^\nu$, $r > 0$, on pose

$$S(x; r) = \{y \mid y \in \mathbf{R}^\nu; |x - y| < r\};$$

pour $E \subset \mathbf{R}^\nu$, $r > 0$, on pose

$$S(E; r) = \bigcup_{x \in E} S(x; r);$$

pour $E \subset \mathbf{R}^\nu$, $t \in \mathbf{R}^\nu$, on pose

$$E + t = \{x + t \mid x \in E\};$$

pour $E \subset \mathbf{R}^\nu$, $\overline{E}$, $\mathring{E}$, ∂E vont désigner respectivement la fermeture, l'intérieur, le bord de E.

2.2. Suivant des notations usuelles (*cf.* par exemple Schwartz [24]) si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$ on désignera par $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ l'espace des fonctions $\varphi : x \to \varphi(x)$ définies sur $\mathcal{O}$, à valeurs complexes, infiniment dérivables, et à support compact contenu dans $\mathcal{O}$; $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ sera supposé muni de la topologie de Schwartz [24].

$\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ désignera l'espace des distributions sur $\mathcal{O}$, c'est-à-dire l'espace dual de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ (*cf.* toujours Schwartz [24]); la dualité entre l'élément $\mathbf{T} \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ et l'élément $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ sera notée $\langle \mathbf{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{O}}$.

2.3. Si $\alpha \equiv \{\alpha_j\}_{j=1,\ldots,\nu}$, avec α_j entier $\geqq 0$ pour tout j, est un multi-indice, on pose $|\alpha| = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j$; si α, β sont deux multi-indices, on écrit $\alpha \geqq \beta$ si $\alpha_j \geqq \beta_j$ pour tout j; si $\alpha \geqq \beta$ on pose aussi

$$\alpha - \beta \equiv \{\alpha_j - \beta_j\}_{j=1,\ldots,\nu} \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{\nu} \binom{\alpha_j}{\beta_j}.$$

On désigne par D^α, ou bien $\partial^{|\alpha|}/\partial x^\alpha$, la dérivée

$$\prod_{j=1}^{\nu} D_j^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{\nu} \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

$\left(D^0, \dfrac{\partial^0}{\partial x^0}, D_j^0, \dfrac{\partial^0}{\partial x_j^0} \text{ désignent l'opérateur identique}\right)$, dérivée qui sera toujours prise au sens des distributions.

2.4. On fera usage des espaces fonctionnels suivants ($\mathcal{O}$ étant un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$) :

$C^k(\mathcal{O})$ $(k = 0, 1, \ldots)$ = espace des fonctions définies sur $\mathcal{O}$, à valeurs complexes, continues sur $\mathcal{O}$ avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre k;

$C^\infty(\mathcal{O})$, espace des fonctions définies sur $\mathcal{O}$, à valeurs complexes, indéfiniment dérivables;

$L^p_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$, espace des (classes de) fonctions définies (presque partout) sur $\mathcal{O}$, à valeurs complexes, mesurables, et de $p^{\text{ième}}$ puissance sommable (ou bien essentiellement bornées si $p = +\infty$) sur $\mathcal{O}$;

$L^p_{\text{loc}}(\mathcal{O})$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$, espace des (classes de) fonctions dont la restriction à tout compact $K \subset \mathcal{O}$ est dans $L^p(K)$;

$W^{k,p}(\mathcal{O})$ $(k = 1, 2, \ldots; 1 \leqq p \leqq +\infty) = \{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{O});\ D^\alpha \varphi \in L^p(\mathcal{O})$ pour tout α avec $|\alpha| \leqq k \}$.

On notera souvent $H^k(\mathcal{O})$ au lieu que $W^{k,2}(\mathcal{O})$.

On fera aussi usage des notations :

$C^k(\overline{\mathcal{O}})$ $(k = 0, 1, \ldots; +\infty)$, ensemble des restrictions à $\mathcal{O}$ des éléments de $C^k(\mathbf{R}^\nu)$;

$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$, ensemble des restrictions à $\mathcal{O}$ des éléments de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$.

On ne rappellera pas les propriétés des espaces qu'on va employer; signalons seulement que $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ [5] [et donc on peut, en particulier, dériver les éléments de $L^1_{\text{loc}}(\mathcal{O})$] et que, posant $dx = dx_1 \ldots dx_\nu$, on a

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{O}} u(x)\, \varphi(x)\, dx, \quad \forall\, u \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{O}), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{2.1}$$

En particulier, désignant par

$$(f, g)_{L^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \quad (^6)$$

le produit scalaire dans $L^2(\mathcal{O})$, on a

$$\langle u, \varphi \rangle_{\mathcal{O}} = (u, \overline{\varphi})_{L^2(\mathcal{O})}, \quad \forall\, u \in L^2(\mathcal{O}), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}). \tag{2.2}$$

2.5. Soient données $\varphi \in L^2(\mathcal{O})$, $\psi \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$; on a alors que $\psi . \varphi$ et $(D_j \psi) . \varphi$ sont dans $L^2(\mathcal{O})$; donc l'expression $D_j(\psi . \varphi) - (D_j \psi) . \varphi$ a un sens [dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$]. On pose alors

$$\psi . D_j \varphi = D_j(\psi . \varphi) - (D_j \psi) . \varphi \tag{2.3}$$

en prolongeant ainsi une formule valable pour φ, ψ « plus régulières ».

Explicitons aussi la formule suivante (de démonstration immédiate) qui va nous servir dans la suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, c \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu), \quad \forall\, x, y \in \mathbf{R}^\nu \quad \text{on a} \\ |c(x) - c(y)| \leqq \sqrt{\nu} . \| c \|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)} . |x - y|. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

2.6. On va maintenant démontrer une variante du « lemme de Friedrichs » en adaptant et combinant les méthodes de Friedrichs ([10], n° 4) et de Hörmander ([14], n° 3).

---

(5) $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ signifie que $\mathcal{A}$ est contenu algébriquement dans $\mathcal{B}$ avec injection continue.

(6) Pour $\lambda \in \mathbf{C}$ (= complexes), $\overline{\lambda}$ désigne le complexe conjugué de λ.

Soient $\{\sigma_k\}_{k=1,2,\ldots}$, $\{t_k\}_{k=1,2,\ldots}$, et φ données avec

$$0 < \sigma_k < \frac{1}{k} \qquad (k=1, 2, \ldots); \tag{2.5}$$

$$t_k \in \mathbf{R}^\nu; \quad |t_k| \leqq C_1 \quad (\textit{indépendante de } k) \qquad (k=1, 2, \ldots); \tag{2.6}$$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu); \qquad \operatorname{supp} \varphi \subset S(0; 1); \qquad \int_{\mathbf{R}^\nu} \varphi(x)\, dx = 1. \tag{2.7}$$

$\{\sigma_k\}$, $\{t_k\}$, φ étant fixées, on pose

$$\varphi_k(x) = \sigma_k^{-\nu} \varphi\left(\frac{x}{\sigma_k} - t_k\right), \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^\nu \qquad (k=1, 2, \ldots); \tag{2.8}$$

$$(u)_k = u \star \varphi_k, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu) \ (^7) \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{2.9}$$

On aura (*cf.* Schwartz [24])

$$\left\{\begin{array}{l} \forall\, u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu), \quad k=1, 2, \ldots, \quad \text{on a} \\ (u)_k \in C^\infty(\mathbf{R}^\nu); \qquad \operatorname{supp}(u)_k \subset S(\operatorname{supp} u + \sigma_k t_k; \sigma_k). \end{array}\right. \tag{2.10}$$

De plus, si $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu)$, on aura

$$(u)_k(x) = \int_{\mathbf{R}^\nu} u(x-y)\, \varphi_k(y)\, dy = (\text{on pose } \eta = \sigma_k(y+t_k)) = \int_{\mathbf{R}^\nu} u(x - \sigma_k(\eta + t_k)).$$

$\varphi(\eta)\, d\eta$; d'où [*cf.* (2.7)]

$$(u)_k(x) = \int_{S(0;1)} u(x - \sigma_k(y+t_k))\, \varphi(y)\, dy, \quad \forall\, u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu) \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{2.11}$$

De (2.11) on déduit [avec $C_2 = C_2(\varphi)$ indépendante de u]

$$\|(u)_k\|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \leqq C_2 \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)}, \quad \forall\, u \in L^2(\mathbf{R}^\nu). \tag{2.12}$$

2.7. On va démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.1. — *Sous les hypothèses* (2.5), (2.6), (2.7), *et avec les notations* (2.8), (2.9), *soit* $c(x)$ *donnée avec*

$$c(x) \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu) \tag{2.13}$$

Il existe une constante C_3 *(qui dépend de* ν, $\varphi(x)$, $c(x)$, C_1 *mais qui est indépendante de* u*), telle que, pour* $j = 1, \ldots, \nu$, *on ait*

$$\|c.D_j[(u)_k] - (c.D_j u)_k\|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \leqq C_3 \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)}, \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu). \tag{2.14}$$

Démonstration. — Pour $j = 1, \ldots, \nu$ et pour $x \in \mathbf{R}^\nu$, on a [*cf.* (2.11)]

$$c(x) D_j[(u)_k(x)] - (c.D_j u)_k(x)$$
$$= \int_{S(0;1)} \{[c(x) - c(x - \sigma_k(y+t_k))]\, \varphi(y) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x - \sigma_k(y+t_k))\}\, dy.$$

---

(7) Convolution au sens de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu)$; *cf.* Schwartz [24].

En remplaçant la dérivée par rapport à x_j par $-\frac{1}{\sigma_k}$ fois la dérivée par rapport à y_j, et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} & c(x)\,\mathrm{D}_j[(u)_k(x)] - c.(\mathrm{D}_j u)_k(x) \\ & = \int_{\mathrm{S}(0;1)} \frac{1}{\sigma_k}\left[\frac{\partial}{\partial y_j} c(x-\sigma_k(y+t_k))\right] \varphi(y)\, u(x-\sigma_k(y+t_k))\,dy \\ & \quad + \int_{\mathrm{S}(0;1)} -\frac{1}{\sigma_k}[c(x)-c(x-\sigma_k(y+t_k))]\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\varphi(y)\right] u(x-\sigma_k(y+t_k))\,dy. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale on remplace $-\frac{1}{\sigma_k}\frac{\partial}{\partial y_j}$ par $\frac{\partial}{\partial x_j}$; dans la deuxième, on a

$$\begin{aligned} & \left|\frac{1}{\sigma_k}[c(x)-c(x-\sigma_k(y+t_k))]\right| \\ & \leq [cf.\ (2.4)]\sqrt{\nu}\,|y+t_k|.\|c\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)} \\ & \leq \sqrt{\nu}(|y|+|t_k|)\,\|c\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)} \leq \sqrt{\nu}(1+\mathrm{C}_1)\,\|c\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} & |c(x)\,\mathrm{D}_j[(u)_k]-(c\mathrm{D}_j u)_k(x)| \\ & \leq \sqrt{\nu}(1+\mathrm{C}_1)\,\|c\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)} \int_{\mathrm{S}(0;1)} |u(x-\sigma_k(y+t_k))|\,[\,|\varphi(y)|+|\varphi'_j(y)|\,]\,dy, \end{aligned}$$

d'où, en intégrant le carré des deux membres, et en appliquant l'inégalité de Minkowski, (2.14).

C. Q. F. D.

2.8. On aura aussi besoin du lemme suivant :

LEMME 2.2. — *Pour $w \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)$, on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \|(w)_k - w\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)} = 0. \tag{2.15}$$

Démonstration. — Dès que $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)$, et grâce à la majoration uniforme (2.12), il suffit de démontrer (2.15) pour $w \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$.

Pour $w \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$, on a [*cf.* (2.11) et (2.17)] :

$$\begin{aligned} |(w)_k(x)-w(x)| & = \left|\int_{\mathrm{S}(0;1)} [w(x-\sigma_k(y+t_k))-w(x)]\,\varphi(y)\,dy\right| \\ & \leq \left[\int_{\mathrm{S}(0;1)} |\varphi(y)|\,dy\right] \sup\{\,|w(x-\sigma_k(y+t_k))-w(x)|;\ |y|\leq 1\} \\ & \leq \left[\int_{\mathrm{S}(0;1)} |\varphi(y)|\,dy\right] \sup\left\{\,|w(z)-w(x)|;\ |z-x|\leq \frac{\mathrm{C}_1+1}{k}\right\} \end{aligned}$$

et pour $k\to+\infty$ le dernier membre tend vers zéro (w étant uniformément continue).

Soit maintenant R tel que $\operatorname{supp} w \subset S(O; R)$; on aura [*cf.* (2.10)] $\operatorname{supp}[(w)_k] \subset S(O; R + C_1 + 1)$ et donc $\operatorname{supp}[(w)_k - w] \subset S(O; R + C_1 + 1)$; d'où (2.15) pour $w \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$.

C. Q. F. D.

Corollaire 2.1. — *Si* $a \in L^\infty(\mathbf{R}^\nu)$, $w \in L^2(\mathbf{R}^\nu)$, *on a*

$$\lim_{k \to +\infty} \| a[(w)_k] - (aw)_k \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de majorer $\| a[(w)_k] - (aw)_k \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)}$ par

$$\begin{aligned} &\| a[(w)_k] - aw \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} + \| aw - (aw)_k \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \\ &\quad \leq \| a \|_{L^\infty(\mathbf{R}^\nu)} \| (w)_k - w \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} + \| (aw)_k - aw \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \end{aligned}$$

et d'appliquer (2.15) au premier terme, et (2.15) (avec aw au lieu de w) au deuxième terme.

C. Q. F. D.

2.9. On est maintenant en mesure de démontrer la variante du « lemme de Friedrichs » dont on aura besoin.

Théorème 2.1. — *Sous les hypothèses* (2.5), (2.6), (2.7), (2.13) *et avec les notations* (2.8), (2.9), *on a*

$$(2.16) \qquad \lim_{k \to +\infty} \| c\,D_j[(u)_k] - (c\,D_j u)_k \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} = 0 \quad (^8), \quad \forall u \in L^2(\mathbf{R}^\nu).$$

Démonstration. — Dès que $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$ est dense dans $L^2(\mathbf{R}^\nu)$, et grâce à la majoration uniforme (2.14), il suffit de démontrer (2.16) pour $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$.

Soit donc $u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$, j fixé entre 1 et n; on a

$$\begin{aligned} &\lim_{k \to +\infty}{}'' \| c\,D_j[(u)_k] - (c\,D_j u)_k \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \\ &= \lim_{k \to +\infty}{}'' \| c[(D_j u)_k] - (c\,D_j u)_k \|_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} = 0 \quad (^9) \end{aligned}$$

grâce au corollaire 2.1 avec $a = c$, $w = D_j u$.

C. Q. F. D.

Remarque 2.1. — On contrôle aisément que, quel que soit $p \in [1, +\infty[$, on a

$$(2.15\,bis) \qquad \lim_{k \to +\infty} \| (w)_k - w \|_{L^p(\mathbf{R}^\nu)} = 0, \quad \forall w \in L^p(\mathbf{R}^\nu);$$

$$(2.16\,bis) \quad \lim_{k \to +\infty} \| c\,D_j[(u)_k] - (c\,D_j u)_k \|_{L^p(\mathbf{R}^\nu)} = 0, \quad \forall c \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu), \quad \forall u \in L^p(\mathbf{R}^\nu)$$

(il suffit de répéter ce que l'on a fait jusqu'ici pour $p = 2$).

( ) *Cf.* le n° 2.5 pour le sens de $c\,D_j u$ lorsque $u \in L^2(\mathbf{R})$.

(9) On applique ici la relation (immédiate) $D_j[(u)_k] = (D_j u)_k$. Plus généralement, on remarquera que, si $P = P(D)$ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, pour tout k et pour toute $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, on a $P(D)[(u)_k] = (P(D)u)_k$.

3. Un exemple.

3.1. Dans ce n° 3, on considère dans un cas simple le problème du n° 1.1, pour montrer de quelle façon le théorème 2.1 s'applique à ce genre de problèmes.

Les simplifications qu'on va introduire seront relatives, soit à P (qu'on va supposer opérateur d'ordre $\leqq 2$, en deux variables indépendantes), soit à $\mathcal{O}$ [qu'on va supposer ouvert convenable, et borné ([10])].

En outre, on va se borner au cas de fonctions réelles.

3.2. On suppose $\nu = 2$; on note (x, y) (avec $x, y \in \mathbf{R}^1$), au lieu de (x_1, x_2), le point de $\mathbf{R}^2$.

Soit P l'opérateur défini par

$$(3.1)\quad \mathrm{P}u = \mathrm{P}(x, y, \mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)\, u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x, y)\, u) + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(b(x, y)\, u) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(c(x, y)\, u) + \frac{\partial}{\partial x}(d(x, y)\, u) + \frac{\partial}{\partial y}(e(x, y)\, u) + f(x, y)\, u,$$

où les coefficients a, b, c, d, e, f sont supposés réels et « suffisamment réguliers »; par exemple

$$(3.2)\qquad a, b, c \in \mathrm{W}^{2,\infty}(\mathbf{R}^2);\qquad d, e \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^2);\qquad f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^2),$$

de façon que l'on aura, soit la relation :

$$(3.3)\qquad \mathrm{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}^2), \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)) \cap \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2), \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)),$$

soit la relation :

$$(3.4)\qquad \mathrm{P}^\star \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}^2), \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)) \cap \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2), \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)) \quad ([11]),$$

où $\mathrm{P}^\star$ désigne, comme d'habitude, l'adjoint formel de P, à savoir

$$(3.5)\qquad \mathrm{P}^\star v = \mathrm{P}^\star(x, y, \mathrm{D}_x, \mathrm{D}_y)\, v = a(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} + c(x, y)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - d(x, y)\frac{\partial v}{\partial x} - e(x, y)\frac{\partial v}{\partial y} + f(x, y)\, v.$$

3.3. On suppose toujours P donné par (3.1), (3.2) étant remplie. Soit $\mathcal{O}$ donné par

$$(3.6)\qquad \mathcal{O} =]-1, +1[\times]-1, +1[$$

([10]) $\mathcal{O}$ étant borné, l'ensemble $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ coïncide avec $\mathrm{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}})$; on emploie la notation $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ dès que, dans la généralisation au cas où $\mathcal{O}$ n'est plus borné, on doit travailler avec $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ et non avec $\mathrm{C}^\infty(\overline{\mathcal{O}})$.

([11]) (3.4) suit de (3.3) par transposition. Pour $v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$ on peut calculer $\mathrm{P}^\star v$ par la formule (3.5) suivante, à l'aide de remarques analogues à celles développées au n° 2.5.

et relativement à $\mathcal{O}$, P, ainsi fixés, on va étudier le problème de la coïncidence entre P_w et P_s [notations (1.4), (1.5); grâce à (3.2) on vérifie aisément (1.1), (1.2), (1.3)].

On s'aperçoit tout de suite que $D(P_w)$ coïncide avec l'ensemble

$$(3.7) \qquad X(\mathcal{O}) = \{ u \mid u \in L^2(\mathcal{O})\,;\ Pu \in L^2(\mathcal{O}) \}$$

et que, si l'on munit $X(\mathcal{O})$ de la « norme du graphe », $D(P_s)$ coïncide avec l'adhérence de $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ dans $X(\mathcal{O})$. Le problème de la validité de la relation $P_s = P_w$ se réduit donc au problème de la validité de la relation

$$(3.8) \qquad \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) \ \textit{est dense dans}\ X(\mathcal{O}).$$

3.4. Pour $v \in L^2(\mathcal{O})$ on va désigner par $\tilde{v}$ la fonction (définie presque partout) qui coïncide avec v dans $\mathcal{O}$ et nulle hors de $\overline{\mathcal{O}}$. Posons

$$(3.9) \qquad Y(\mathcal{O}) = \{ v \mid v \in L^2(\mathcal{O})\,;\ P^\star \tilde{v} \in L^2(\mathbf{R}^2) \}$$

(espace qu'on munit de la norme du graphe); on a évidemment $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subset Y(\mathcal{O})$; et rappelons qu'une condition suffisante ([12]) pour avoir (3.8) est la validité de la relation :

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) \ \textit{est dense dans}\ Y(\mathcal{O}).$$

Avec des notations évidentes ([13]), la dernière relation équivaut à

$$(3.10) \qquad \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})} \ \textit{est dense dans}\ \widetilde{Y(\mathcal{O})}.$$

On va donc étudier la validité de (3.10).

3.5. Dans la suite on aura besoin de quelques propriétés de régularité pour les éléments de $\widetilde{Y(\mathcal{O})}$; précisément, il suffira d'avoir

$$(3.11) \qquad \textit{Si P est d'ordre 2 ([14]), on a}\ \widetilde{Y(\mathcal{O})} \subset H^1(\mathbf{R}^2).$$

Montrons que (3.11) est remplie si P n'est pas « de type mixte ».

En effet, si l'on a

$$b^2(x, y) < 4a(x, y)\, c(x, y), \quad \forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

l'opérateur P (et donc $P^\star$) est de type elliptique; grâce aux théorèmes de régularité locale des solutions des équations elliptiques ([15]) on en tire que, pour toute $v \in \widetilde{Y(\mathcal{O})}$, on a $v \in H^2(\mathbf{R}^2)$; d'où (3.11) dans ce cas.

([12]) On montrera au n° 5 que les relations (3.8) et (3.10) sont équivalentes; de toute façon l'implication qu'on va énoncer est bien connue; *cf.* la remarque 5.6 suivante.

([13]) Et précisément $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})} = \{ \tilde{\varphi} \mid \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) \}$ et $\widetilde{Y(\mathcal{O})} = \{ \tilde{v} \mid v \in Y(\mathcal{O}) \}$ [espace muni de la norme transportée de $Y(\mathcal{O})$].

([14]) A savoir si $a^2(x, y) + b^2(x, y) + c^2(x, y) \not\equiv 0$ dans $\overline{\mathcal{O}}$.

([15]) *Cf.*, par exemple, Friedrichs [11].

Supposons maintenant que l'on ait

$$b^2(x, y) = 4a(x, y)\, c(x, y), \quad \forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad (^{16});$$

P (donc P*) est de type parabolique; alors (3.11) suit des théorèmes de régularité locale des solutions d'équations hypoelliptiques ([17]).

Supposons finalement que l'on ait

$$b(x, y) > 4a(x, y)\, c(x, y), \quad \forall\, (x, y) \in \mathbf{R}^2;$$

l'opérateur P (donc P*) est de type hyperbolique; la validité de (3.11) dans ce cas sera montrée, plus généralement, au n° 7.

3.6. Dès maintenant, on va supposer (3.11) remplie : et on va démontrer (3.10).

On remarque d'abord que, si $\psi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, on a $\psi . \varphi \in \widetilde{Y(\mathcal{O})}$ pour toute $\varphi \in \widetilde{Y(\mathcal{O})}$: en effet, il suffit d'écrire $P^\star(\psi . \varphi) = \psi . P^\star \varphi + Q\varphi$, où Q est un opérateur d'ordre 1, à coefficients dépendant des dérivées de ψ, si P est d'ordre 2; tandis que Q est un opérateur d'ordre 0 si P est d'ordre ≤ 1; donc, en tout cas, (3.11) assure que $P^\star(\psi\varphi) \in L^2(\mathbf{R}^2)$.

Ceci posé, introduisons les ensembles

$$\mathcal{O}_1 = \left]-\frac{1}{7}, +\infty\right[\times \left]-\frac{1}{7}, +\infty\right[; \qquad \mathcal{O}_2 = \left]-\frac{1}{7}, +\infty\right[\times \left]-\infty, +\frac{1}{7}\right[;$$

$$\mathcal{O}_3 = \left]-\infty, +\frac{1}{7}\right[\times \left]-\frac{1}{7}, +\infty\right[; \qquad \mathcal{O}_4 = \left]-\infty, +\frac{1}{7}\right[\times \left]-\infty, +\frac{1}{7}\right[;$$

et soient $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, $\operatorname{supp} \psi_j \subset \mathcal{O}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ telles que, $\forall\, (x, y) \in \overline{\mathcal{O}}$, on ait $\sum_{j=1}^{4} \psi_j(x, y) = 1$; pour approcher $\varphi \in Y(\mathcal{O})$ par des éléments de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ on écrira $\varphi = \sum_{j=1}^{4} \psi_j \varphi$; et il suffira donc de démontrer que tout élément de $Y(\mathbf{R}^2)$ à support contenu dans $\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_j$ $(j = 1, \ldots, 4)$ est approchable dans $Y(\mathbf{R}^2)$ ([18]) par des éléments de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$.

Comme le problème présente une symétrie évidente par rapport à j, on se bornera à montrer :

(3.12) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } \varphi \in Y(\mathbf{R}^2) \textit{ avec } \operatorname{supp} \varphi \subseteq \overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_1, \textit{ alors } \varphi \textit{ peut être approchée dans } Y(\mathbf{R}^2) \\ \textit{par des éléments de } \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}. \end{array} \right.$

([16]) Et toujours P d'ordre 2; *cf.* ([14]).

([17]) *Cf.*, par exemple, Hörmander [16].

([18]) On remarquera que la norme de $\widetilde{Y(\mathcal{O})}$ coïncide avec la norme induite par $Y(\mathbf{R}^2)$.

3.7. On va faire usage des résultats du n° 2; on fixe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ telle que (2.7) ait lieu; et on pose $t_k = (-2, -2)$; $\sigma_k = \frac{1}{7k}$ pour $k = 1, 2, \ldots$; évidemment (2.5), (2.6) sont remplies; et, avec les notations (2.8), (2.9), on aura, grâce à (2.10) :

$$\text{(3.13)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } v \in \mathrm{Y}(\mathbf{R}^2) \textit{ et si } \operatorname{supp} v \subseteq \mathcal{O} \cap \mathcal{O}_1, \textit{ on a}, \ \forall k, \\ \qquad \operatorname{supp}(v)_k \subseteq \mathcal{O}; \qquad \textit{donc} \quad (v)_k \in \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}, \quad \forall k. \end{array} \right.$$

On va montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \| (v)_k - v \|_{\mathrm{Y}(\mathbf{R}^2)} = 0$; d'où (3.12).

Remarquons d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} \| (v)_k - v \|_{\mathrm{Y}(\mathbf{R}^2)} &\leq \| (v)_k - v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} + \| \mathrm{P}^\star (v)_k - \mathrm{P}^\star v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} \\ &\leq \| (v)_k - v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} + \| (\mathrm{P}^\star v)_k - \mathrm{P}^\star v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} + \| \mathrm{P}^\star [(v)_k] - (\mathrm{P}^\star v)_k \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} \end{aligned}$$

et les deux premiers termes, lorsque $k \to +\infty$, tendent vers zéro grâce à (2.15) (avec $w = v$, et $w = \mathrm{P}^\star v$ respectivement). On majore le dernier terme :

$$\begin{aligned} &\| \mathrm{P}^\star [(v)_k] - (\mathrm{P}^\star v)_k \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} \\ &\leq \left\{ \left\| a \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(v)_k] - \left(a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_k \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} \right. \\ &\qquad \left. + \left\| b \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} [(v)_k] - \left(b \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} \right)_k \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} + \left\| c \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(v)_k] - \left(c \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \right)_k \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} \right\} \\ &\quad + \left\{ \left\| d \frac{\partial}{\partial x} [(v)_k] - \left(d \frac{\partial v}{\partial x} \right)_k \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} + \left\| e \frac{\partial}{\partial y} [(v)_k] - \left(e \frac{\partial v}{\partial y} \right)_k \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} \right\} \\ &\quad + \left\{ \| f[(v)_k] - (fv)_k \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} \right\}. \end{aligned}$$

On considère séparément les trois expressions entre parenthèses $\{ \ \}$, en les appelant, pour abréger, A_k, B_k, C_k.

3.8. On va montrer que, lorsque $k \to +\infty$, A_k, B_k, C_k tendent vers zéro, sous une hypothèse un peu plus faible que (3.2) [19]. Plus précisément, on va distinguer deux cas :

$$\text{(3.14)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{On a } a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0; \textit{ et on suppose} \\ \qquad d, e \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^2); \qquad f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^2), \end{array} \right.$$

$$\text{(3.15)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textit{On a } a^2 + b^2 + c^2 \not\equiv 0; \textit{ et on suppose} \\ \qquad a, b, c \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^2); \qquad d, e, f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^2). \end{array} \right.$$

Si (3.14) est remplie, on a $\mathrm{A}_k \equiv 0$; et on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{B}_k = 0$ grâce à (2.16) $\left(\text{avec } c, \mathrm{D}_j, u \text{ remplacées par } d, \frac{\partial}{\partial x}, v \text{ ou bien par } e, \frac{\partial}{\partial y}, v\right)$; $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{C}_k = 0$, grâce au corollaire 2.1 (avec a, w remplacées respectivement par f, v).

---

[19] *A posteriori*, (3.11) étant supposée remplie : par exemple, si l'on a (3.15) [et non (3.2)] on a besoin de (3.11) pour donner un sens à A_k, B_k.

Soit maintenant valable (3.15); on a alors

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2) \quad [cf.\ (3.11)];$$

et $a\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ a un sens (*cf.* nº 2.5); analoguement pour $b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $c\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$; en outre, (2.16) donne $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathrm{A}_k = 0$ [20]; et le corollaire 2.1 donne

$$\lim_{\mathrm{K} \to +\infty} \mathrm{B}_k = \lim_{\mathrm{K} \to +\infty} \mathrm{C}_k = 0.$$

3.9. La forme particulièrement simple de P et de $\mathcal{O}$ a permis d'appliquer le théorème 2.1 pour obtenir des résultats concernant l'identité $\mathrm{P}_s = \mathrm{P}_\omega$ [*cf.* (1.4), (1.5)].

Maintenant on va généraliser, en étudiant dans le nº 4 une classe d'opérateurs P et d'ouverts $\mathcal{O}$ pour lesquels on peut appliquer le nº 2 pour avoir (3.10); et dans le nº 5 l'équivalence en général entre (3.8), (3.10) et d'autres problèmes liés à $\mathcal{O}$ et à P.

4. Un théorème de densité.

4.1. Soit l un entier positif; on se donne $(\nu + 1)\,l$ opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Q}_{ij} = \mathrm{Q}_{ij}(\mathrm{D}); \qquad \mathrm{R}_i = \mathrm{R}_i(\mathrm{D}) \qquad (i = 1, \ldots, l; j = 1, \ldots \nu) \\ \qquad\qquad\qquad \textit{op. diff. lin. à coeff. const.} \end{array} \right.$$

et $(\nu + 1)l$ fonctions

$$(4.2) \quad c_{ij}(x) \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu); \qquad d_i(x) \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\nu) \qquad (i = 1, \ldots, l; j = 1, \ldots, \nu).$$

A partir de ces données on va construire un opérateur, qu'il sera commode d'appeler $\mathfrak{L}^\star$, défini de la manière suivante; on pose

$$(4.3) \quad \left| \begin{array}{l} \mathrm{D}(\mathfrak{L}^\star) = \Big\{ v \mid v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu);\ \mathrm{Q}_{ij} v,\ \mathbf{R}_i v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu) \\ \qquad (i = 1, \ldots, l; j = 1, \ldots, \nu); \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{l} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu) \Big\} \quad [21]. \end{array} \right.$$

---

[20] Par exemple, pour le premier terme de A_k on a

$$\left\| a\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(v)_k] - a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)} = [cf.\ (9)] \left\| a\frac{\partial}{\partial x}(v'_x)_k - \left(a\frac{\partial v'_x}{\partial x} \right)_k \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)}.$$

expression qui, lorsque $k \to +\infty$, tend vers zéro grâce à (2.16) (c, u étant remplacés par a, v'_x respectivement).

[21] Pour le sens de cette relation, *cf.* le nº 2.5.

$D(\mathfrak{X}^\star)$ est un espace de Hilbert par rapport au produit scalaire associé à la norme

$$
(4.4)\quad \left\{\begin{aligned} \|v\|_{D(\mathfrak{X}^\star)} = \Bigg\{ & \|v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} + \sum_{i=1}^{l} \|R_i v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \\ & + \sum_{i=1}^{\nu} \|Q_{ij} v\|^2_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} + \left\| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} D_j Q_{ij} v \right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \Bigg\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right.
$$

Ceci posé, on définit l'opérateur [linéaire non borné, de domaine $D(\mathfrak{X}^\star)$] $\mathfrak{X}^\star : L^2(\mathbf{R}^\nu) \to L_2(\mathbf{R}^\nu)$ en posant, pour $v \in D(\mathfrak{X}^\star)$,

$$
(4.5)\qquad \mathfrak{X}^\star v = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} D_j Q_{ij} v + R_i v \right).
$$

On posera aussi, pour tout $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbf{R}^\nu$,

$$
(4.6)\qquad D(\mathfrak{X}^\star; \mathcal{O}) = \{ v \mid v \in D(\mathfrak{X}^\star);\ \operatorname{supp} v \subseteq \overline{\mathcal{O}} \}.
$$

(On vérifie aisément qu'il s'agit d'un sous-espace fermé de $D(\mathfrak{X}^\star)$; on le munit de la norme induite par $D(\mathfrak{X}^\star)$.]

Remarque 4.1. — Si l'on choisit $\nu = 2$, $l = 3$,

$$
\begin{gathered}
R_1(D) = Q_{11}(D) = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad R_2(D) = Q_{1,2}(D) = \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
Q_{1,3}(D) = Q_{2,2}(D) = Q_{2,3}(D) = 0, \qquad R_3(D) = I; \\
c_{1,1} = a; \qquad c_{1,2} = b; \qquad c_{2,2} = c; \qquad c_{1,3} = c_{2,1} = c_{2,3} = 0; \\
d_1 = -d, \qquad d_2 = -e; \qquad d_3 = f;
\end{gathered}
$$

on voit que l'opérateur $\mathfrak{X}^\star$ (à part le domaine de définition) coïncide avec l'opérateur $P^\star$ donné par (3.5). Si (3.11) est remplie et si $\mathcal{O}$ est donné par (3.6) on vérifie aussi que $\widetilde{Y(\mathcal{O})} = D(\mathfrak{X}^\star; \mathcal{O})$. On va étudier le problème de la densité de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ dans $D(\mathfrak{X}^\star; \mathcal{O})$; on est donc en train de généraliser ce qu'on a fait au nº 3.

4.2. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$. Rappelons que, suivant Hörmander [13], on dit que « $\mathcal{O}$ *est de type* T » si l'on a :

$\mathcal{O}$ est un ouvert borné de $\mathbf{R}^\nu$; et il existe un nombre fini, soit N, d'ouverts de $\mathbf{R}^\nu$: $\{\mathcal{O}_r\}_{r=1,\dots,N}$, tels que $\bigcup_{r=1}^{N} \mathcal{O}_r \supset \overline{\mathcal{O}}$; et que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $t_{r,\varepsilon} \in \mathbf{R}^\nu$ avec $|t_{r,\varepsilon}| < \varepsilon$, de façon que $\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_r + t_{r,\varepsilon} \subset \mathcal{O}$ ($r = 1, \dots, N$; $\varepsilon > 0$).

On aura besoin dans la suite d'une hypothèse un peu plus forte que celle-ci; plus précisément :

(4.7) $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{O} \textit{ est un ouvert borné } (^{22}) \textit{ de } \mathbf{R}^\nu\textit{; il existe un nombre fini, soit } \mathrm{N}\textit{, d'ouverts de } \mathbf{R}^\nu : \\ \{\mathcal{O}_r\}_{r=1,\ldots,\mathrm{N}} \textit{ tels que } \bigcup_{r=1}^{\mathrm{N}} \mathcal{O}_r \supset \overline{\mathcal{O}}\textit{; il existe en outre une constante } c_1 > 0 \textit{ et une} \\ \textit{suite } \{\sigma_k\}_{k=1,2,\ldots} \textit{ avec } 0 < \sigma_k < \frac{1}{k} \textit{ de façon que, pour tout } r = 1, \ldots, \mathrm{N} \textit{ et pour} \\ \textit{tout } k = 1, 2, \ldots \textit{ il existe } t_{r,k} \in \mathbf{R}^\nu \textit{ avec } |t_{r,k}| \leq \mathrm{C}_1 \textit{ et} \\ (\star) \qquad \mathrm{S}(\overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_r; \sigma_k) + \sigma_k t_{r,k} \subset \mathcal{O} \qquad (k = 1, 2, \ldots; r = 1, \ldots, \mathrm{N}). \end{array}\right.$

Remarque 4.2. — Si $\mathcal{O}$ est borné, et si $\overline{\mathcal{O}}$ est une variété à bord de classe C^1 dont le bord est $\partial\mathcal{O}$, (4.7) est remplie (il suffit de développer par la formule de Taylor).

Remarque 4.3. — Soit $\{\mathcal{O}^{(n)}\}_{n=1,2,\ldots}$ la famille (au plus dénombrable) des intersections non vides entre $\mathcal{O}$ et les composantes connexes de $\overline{\mathcal{O}}$. Dès qu'on a

$$\mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O}) = \bigoplus_n \mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O}^{(n)}) \qquad \text{et } [cf.\ (^{13})] \qquad \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O}^{(n)})} = \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})} \cap \mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O}^{(n)}),$$

pour ce qui concerne le problème de la densité de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ dans $\mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O})$ on peut travailler « par composantes »; on introduit alors la définition :

Définition. — *On dit que $\mathcal{O}$ est « de type $\overline{\mathrm{T}}$ » si chacune des $\mathcal{O}^{(n)}$ vérifie* (4.7).

Et au lieu de supposer $\mathcal{O}$ vérifiant (4.7) on supposera $\mathcal{O}$ de type $\overline{\mathrm{T}}$.

4.3. On va démontrer le :

Théorème 4.1. — *Sous les hypothèses et avec les notations du n° 4.1, soit $\mathcal{O}$ de type $\overline{\mathrm{T}}$; et supposons que $\mathcal{O}$, $\mathfrak{T}^\star$ soient tels que*

(4.8) $\qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu), \quad \forall v \in \mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O}), \qquad$ *on a* $\quad \psi . v \in \mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O}).$

Alors on a

(4.9) $\qquad \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ *est dense dans* $\mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O})$.

Démonstration. — Il suffit de montrer le théorème en supposant remplie (4.7) (*cf.* la remarque 4.3).

Soit $\{\psi_r\}_{r=1,\ldots,\mathrm{N}}$ une partition de l'unité sur $\overline{\mathcal{O}}$ relative aux $\{\mathcal{O}_r\}_{r=1,\ldots,\mathrm{N}}$ $\Big[$ à savoir : pour $r = 1, \ldots, \mathrm{N}$, $\psi_r \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$, $\operatorname{supp}\psi_r \subset \mathcal{O}_r$; et $\sum_{r=1}^{\mathrm{N}} \psi_r(x) = 1$ pour $x \in \overline{\mathcal{O}}$ $\Big]$.

(22) *Cf.* la remarque 4.5 suivante, pour l'hypothèse « $\mathcal{O}$ borné ».

Pour approcher $v \in \mathrm{D}(\mathcal{L}^\star ; \mathcal{O})$ par des éléments de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ on écrit $v = \sum_{r=1}^{\mathrm{N}} v\psi_r$; et on se borne à montrer que $v\psi_r$ est approchable $[v\psi_r \in \mathrm{D}(\mathcal{L}^\star ; \mathcal{O})$ grâce à (4.8)]; soit donc r_0 fixé entre 1 et N; et soit $v \in \mathrm{D}(\mathcal{L}^\star)$, avec supp $v \subset \overline{\mathcal{O}} \cap \mathcal{O}_{r_0}$; il faut montrer qu'une telle v est approchable, dans $\mathrm{D}(\mathcal{L}^\star)$, par des éléments de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$.

Après avoir fixé r_0, v remplissant les conditions ci-dessus choisissons, dans (2.5), (2.6) $t_k = t_{r_0, k}$ et σ_k de façon que l'on ait ($\star$) de (4.7) avec $r = r_0$, pour tout k; et soit φ vérifiant (2.7). On aura [notations (2.8), (2.9)] que, pour tout k, $(v)_k \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^\nu)$; et grâce à (2.10) et à ($\star$) de (4.7), on a $(v)_k \in \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$.

Le théorème sera donc démontré si l'on démontre que

$$\lim_{k \to +\infty} \| (v)_k - v \|_{\mathrm{D}(\mathcal{L}^\star)} = 0;$$

c'est-à-dire si l'on démontre que l'on a

$$\lim_{k \to +\infty} \| (v)_k - v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)} = 0;$$

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{l} \left\{ \sum_{j=1}^{\nu} \| \mathrm{Q}_{ij}[(v)_k] - \mathrm{Q}_{ij} v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)} + \| \mathrm{R}_i[(v)_k] - \mathrm{R}_i v \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)} \right\} = 0,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij}[(v)_k] - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} v \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)} = 0.$$

La première de ces relations est donnée par (2.15) avec $w = v$; toujours (2.15), avec $w = \mathrm{Q}_{ij} v$ et $w = \mathrm{R}_i v$ donne la deuxième relation [*cf.* ([9]); on a $\mathrm{Q}_{ij}[(v)_k] = (\mathrm{Q}_{ij} v)_k$ et $\mathrm{R}_i[(v)_k] = (\mathrm{R}_i v)_k$]; quant à la troisième relation on a [en appliquant encore ([9])]

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} (v)_k - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} v \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} \| c_{ij} \mathrm{D}_j[(\mathrm{Q}_{ij} v)_k] - (c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} v)_k \|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)} \\
&\quad + \left\| \left(\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} v \right)_k - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} v \right\|_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)}.
\end{aligned}$$

Lorsque $k \to +\infty$ le dernier terme tend vers zéro grâce à (2.15) $\left(\text{avec } w = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} \mathrm{D}_j \mathrm{Q}_{ij} v\right)$; et les autres termes tendent vers zéro grâce à (2.16) (avec $c = c_{ij}$, $u = \mathrm{Q}_{ij} v$).

C. Q. F. D.

4.4. La généralisation au cas où $\mathfrak{L}^\star$ est remplacé par une matrice d'opérateurs est immédiate; nous nous bornerons ici au cas des matrices d'opérateurs d'ordre $\leqq 1$; plus précisément on se donne deux entiers positifs : m, n; q, r désignant les indices variant respectivement entre 1 et m, 1 et n. Pour tout q, r on se donne un opérateur (correspondant au $\mathfrak{L}^\star$ du n° 4.1 avec $l=1$; Q_{ij}, R_i étant l'identité)

$$\mathfrak{L}^{\star q,r} v = \sum_{j=1}^{\nu} c_j^{q,r} D_j v + d^{q,r} v, \tag{4.10}$$

où [de même qu'en (4.2)] les fonctions $c_j^{q,r}$, $d^{q,r}$ vérifient, pour tout (q, r) :

$$c_j^{q,r}(x) \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu) \qquad [j=1, \ldots, \nu]; \qquad d^{q,r}(x) \in L^\infty(\mathbf{R}^\nu) \tag{4.11}$$

et on désigne par $\mathfrak{L}^\star$ l'opérateur (linéaire, non borné) de $\{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^m$ dans $\{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^n$ défini par les relations

$$\left\{\begin{aligned} & D(\mathfrak{L}^\star) = \Bigg\{ \vec{v} \,\Big|\, \vec{v} \equiv \{v_q\}_{q=1,\ldots,m} \in \{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^m; \\ & \qquad \sum_{q=1}^{n} \mathfrak{L}^{\star q,r} v_q \in \{L^2(\mathbf{R}^\nu)\} \quad (^{23}), \quad r=1, \ldots, n \Bigg\}; \end{aligned}\right. \tag{4.12}$$

$$\mathfrak{L}^\star \vec{v} \equiv \left\{ \sum_{q=1}^{n} \mathfrak{L}^{\star q,r} v_q \right\}_{r=1,\ldots,n}, \quad \forall \vec{v} \in D(\mathfrak{L}^\star). \tag{4.13}$$

Pour procéder de façon analogue à ce qu'on a fait dans (4.4) on devrait poser

$$\| \vec{v} \|_{D(\mathfrak{L}^\star)} = \left\{ \| \vec{v} \|^2_{\{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^m} + \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=1}^{m} \left\| \sum_{j=1}^{\nu} c_j^{q,r} D_j v_q \right\|^2_{L^2(\mathbf{R}^\nu)} \right\}^{\frac{1}{2}};$$

toutefois, on s'aperçoit aisément qu'une norme équivalente à celle-ci est la « norme du graphe » et on pose donc

$$\| \vec{v} \|_{D(\mathfrak{L}^\star)} = \left\{ \| \vec{v} \|^2_{\{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^m} + \| \mathfrak{L}^\star \vec{v} \|^2_{\{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^n} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.14}$$

Pour $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbf{R}^\nu$ on pose

$$D(\mathfrak{L}^\star; \mathcal{O}) = \{ \vec{v} \,|\, \vec{v} \equiv \{v_q\}_{q=1,\ldots,m} \in D(\mathfrak{L}^\star);\ \operatorname{supp} v_q \subset \mathcal{O},\ q=1, \ldots, m \} \tag{4.15}$$

[norme induite par $D(\mathfrak{L}^\star)$] et on remarquera que dans ce cas (4.8) est automatiquement remplie, quel que soit $\mathcal{O}$: en effet, pour $v \in D(\mathfrak{L}^\star)$,

---

([23]) Pour le sens de cette relation, *cf.* le n° 2.5.

$\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$, $r = 1, \ldots, n$, on a

$$\sum_{q=1}^{m} \mathfrak{L}^{\star q,r}(v_q\psi) = \sum_{q=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{m} c_j^{q,r} \mathrm{D}_j(v_q\psi) + d^{q,r} v_q\psi\right)$$
$$= \psi\sum_{q=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\nu} c_j^{q,r}\mathrm{D}_j v_q + d^{q,r} v_q\right) + \sum_{q=1}^{m} v_q \sum_{j=1}^{\nu} c_j \mathrm{D}_j\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu).$$

On peut procéder, composante par composante, de façon identique à ce qu'on a fait au nº 4.3; et on obtient le

Théorème 4.2. — *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, quel que soit $\mathcal{O}$ de type $\overline{\mathrm{T}}$, on a*

$$\{\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}\}^m \text{ est dense dans } \mathrm{D}(\mathfrak{L}^\star; \mathcal{O}). \tag{4.16}$$

4.5. Soit k un entier positif; et soit l le nombre des multi-indices α, tels que $|\alpha| < k$; on va désigner par $\{\mathrm{R}_i; i = 1, \ldots, l\}$ la famille des dérivées d'ordre inférieur à k.

Considérons maintenant la famille des dérivées d'ordre $k-1$; et ajoutons à cette famille un nombre convenable de fois l'opérateur nul de façon à avoir une famille de cardinalité $\nu.l$; on va désigner par $\{\mathrm{Q}_{ij}\}_{\substack{i=1,\ldots,l\\ j=1,\ldots,\nu}}$ les éléments de cette famille.

Il est évident que tout opérateur $\mathfrak{L}^\star$ d'ordre k peut se mettre (de plusieurs façons) sous la forme (4.5) avec le choix ci-dessus des Q_{ij}, R_i; de plus, si les coefficients de la partie principale de $\mathfrak{L}^\star$ sont de classe $\mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)$, et si les autres coefficients sont de classe $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ on peut choisir (toujours de plusieurs façons) les c_{ij}, d_i, tels qu'on ait (4.2).

Ayant ainsi fixé le choix des Q_{ij}, R_i, c_{ij}, d_i vérifiant (4.1), (4.2), on remarquera que $\mathrm{D}(\mathfrak{L}^\star) \subset \mathrm{H}^{k-1}(\mathbf{R}^\nu)$; d'après cela on vérifie aisément que l'on a

$$\mathrm{D}(\mathfrak{L}^\star) = \{ v \mid v \in \mathrm{H}^{k-1}(\mathbf{R}^\nu)^\star;\ \mathfrak{L}^\star v \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)\}$$

($\mathfrak{L}^\star v$ a un sens pour $v \in \mathrm{H}^{k-1}(\mathbf{R}^\nu)$; *cf.* nº 2.5); et qu'on a équivalence des normes si l'on munit le deuxième membre de la norme du graphe

$$\{\|v\|^2_{\mathrm{H}^{k-1}(\mathbf{R}^\nu)} + \|\mathfrak{L}^\star v\|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Une vérification directe (et immédiate !) montre que (4.8) est vérifiée par rapport à tout ouvert $\mathcal{O}$. Le théorème 4.1 dans ce cas donne donc :

Théorème 4.3. — *Soit $\mathfrak{L}^\star$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre k, les coefficients de $\mathfrak{L}^\star$ étant $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\nu)$, et les coefficients de la partie principale*

---

(24) Espace muni de la norme du graphe.

de $\mathfrak{L}^\star$ *étant* $W^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)$. *Quel que soit* $\mathcal{O}$ *ouvert de type* $\overline{\mathrm{T}}$ *l'ensemble* $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$ *est dense dans l'espace* $\{\varphi \mid \varphi \in H^{k-1}(\mathbf{R}^\nu);\ \mathfrak{L}^\star\varphi \in L^2(\mathbf{R}^\nu);\ \operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{\mathcal{O}}\}$ [*cf.* [24]].

4.6. On va donner deux compléments relatifs au théorème 4.1 (on pourrait faire de même pour les théorèmes 4.2, 4.3).

Remarque 4.4 (suite à la remarque 2.1). — Au lieu de travailler, comme on l'a fait, dans des espaces du type $L^2(\mathcal{O})$, on pourrait travailler dans des espaces du type $L^p(\mathcal{O})$ $(1 < p < +\infty)$, la démonstration des théorèmes restant la même. On peut aussi différencier l'espace $D(\mathfrak{L}^\star)$ par rapport aux espaces où l'on fait varier φ, $Q_{ij}\varphi$, $R_i\varphi$, $\mathfrak{L}^\star\varphi$; par exemple dans le théorème 4.3 on peut remplacer l'espace

$$\{\varphi \mid \varphi \in H^{k-1}(\mathbf{R}^\nu);\ \mathfrak{L}^\star\varphi \in L^2(\mathbf{R}^\nu);\ \operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathcal{O}\}$$

par l'espace

$$\{\varphi \mid \varphi \in W^{k-1,p}(\mathbf{R}^\nu);\ \mathfrak{L}^\star\varphi \in L^q(\mathbf{R}^\nu);\ \operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathcal{O}\} \qquad \text{où} \quad 1 < p < +\infty, \qquad 1 < q < +\infty.$$

Remarque 4.5. — Introduisons les notations

$$\mathcal{D}_{L^2}(\mathbf{R}^\nu) = \{\varphi \mid D^\alpha\varphi \in L^2(\mathbf{R}^\nu),\ \forall\,\alpha\},$$
$$\widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O})} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}_{L^2}(\mathbf{R}^\nu);\ \operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{\mathcal{O}}\}.$$

Si dans (4.7) on supprime la restriction « $\mathcal{O}$ borné », en remplaçant l'hypothèse « $\bigcup_{r=1}^{N} \mathcal{O}_r \supset \overline{\mathcal{O}}$ » par « $\bigcup_{r=1}^{N} \mathcal{O}_r \supset S(\mathcal{O};\delta)$, avec $\delta > 0$ », et si dans (4.8) on remplace « $\forall\,\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$ » par « $\forall\,\psi \in \mathcal{D}_{L^2}(\mathbf{R}^\nu)$ », la démonstration du théorème 4.1 peut être adaptée de façon à obtenir, au lieu de (4.9), la relation

$$(4.9\ bis) \qquad \widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O})} \ \textit{est dense dans}\ D(\mathfrak{L}^\star;\mathcal{O}) \quad [25].$$

A partir de (4.9 *bis*) on peut encore déduire (4.9); *cf.* la remarque 5.8 ci-après.

5. Plusieurs problèmes équivalents.

5.1. Dans ce n° 5, on va considérer des opérateurs différentiels linéaires, qu'on suppose définis seulement sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$, du type

$$(5.1) \qquad P\varphi = P(x, D)\varphi = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha\varphi,$$

---

[25] La partition de l'unité étant obtenue par éléments de $\widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O}_r)}$ au lieu de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O}_r)}$.

où les coefficients $a_\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu)$ sont tous nuls sauf un nombre fini. On a évidemment $P \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu), \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu))$; et on vérifie aisément que si l'on pose

$$(5.2) \qquad b_\beta = \sum_{\alpha \geqq \beta} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} a_\alpha,$$

on a les relations suivantes :

$$(5.3) \qquad P(x, D)\varphi = \sum_\beta D^\beta (b_\beta \varphi);$$

$$(5.4) \qquad P^\star \varphi = P^\star(x, D)\varphi = \sum_\beta (-1)^{|\beta|} b_\beta D^\beta \varphi \quad \text{([26])};$$

$$(5.5) \qquad P^\star(x, D)\varphi = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \varphi).$$

5.2. Soit P un opérateur du type (5.1); et supposons qu'on ait [notations (5.2)]

$$(5.6) \qquad a_\alpha,\ b_\beta \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^\nu), \quad \forall\, \alpha, \beta.$$

Remarquons que des (5.1), (5.4), (5.6) on déduit

$$(5.7) \qquad P\varphi,\ P^\star\varphi \in L^2(\mathbf{R}^\nu), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$$

et que [comme pour $u \in L^2(\mathbf{R}^\nu)$, on a au, $bu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^\nu)$] on peut définir

$$(5.8) \qquad \mathcal{P}u = \sum_\beta D^\beta (b_\beta u) \qquad \forall\, u \in L^2(\mathbf{R}^\nu);$$

$$(5.9) \qquad \mathcal{P}^\star v = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha v), \quad \forall\, v \in L^2(\mathbf{R}^\nu).$$

Grâce aux (5.3), (5.5), (5.6), on aura

$$(5.10) \qquad \mathcal{P} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^\nu), \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu)); \quad \mathcal{P} \text{ est un prolongement de } P;$$

$$(5.11) \qquad \mathcal{P}^\star \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^\nu), \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu)); \quad \mathcal{P}^\star \text{ est un prolongement de } P^\star.$$

5.3. Soit $\mathcal{O}$ tel que (μ_ν désignant la mesure ν-dimensionnelle de Lebesgue) :

$$(5.12) \qquad \mathcal{O} \text{ est ouvert de } \mathbf{R}^\nu; \quad \mu_\nu(\partial\mathcal{O}) = 0.$$

Pour toute $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ on va désigner par $\tilde{u}$ la fonction définie [presque partout; *cf.* (5.12)] par

$$(5.13) \qquad \tilde{u}(x) = u(x) \quad \text{pour } x \in \mathcal{O}; \qquad \tilde{u}(x) = 0 \quad \text{pour } x \notin \overline{\mathcal{O}}.$$

([26]) **P* étant l'adjoint de P au sens de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu), \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu))$.**

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ on écrira $P\varphi$ au lieu que $(P\tilde{\varphi})|_{\mathcal{O}}$; et on explicitera encore $P\varphi$ sous les formes (5.1), (5.3) [au lieu de

$$\sum_\alpha R_{\mathcal{O}}(a_\alpha)\,D^\alpha\varphi \quad \text{ou} \quad \sum_\beta D^\beta(R_{\mathcal{O}}(b_\beta)\,\varphi),$$

$R_{\mathcal{O}}$ désignant la restriction à $\mathcal{O}$], et notations analogues en ce qui concerne $P^\star$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^\star$.

Remarque 5.1. — Rappelons que, si $\mathcal{O}$ est de type T (*cf.* n° 4.2), $\mathcal{O}$ vérifie (5.12) (Hörmander [13]). A partir de cette implication on vérifie aussi qu'on a :

(5.14) *tout $\mathcal{O}$ de type* $\overline{\mathrm{T}}$ *vérifie* (5.12).

5.4. Étant donné $\mathcal{O}$ vérifiant (5.12) on introduit les espaces

(5.15) $$X(\mathcal{O}) = \{ u \mid u \in L^2(\mathcal{O})\,;\ \mathcal{P}u \in L^2(\mathcal{O}) \}\,;$$

(5.16) $$Y(\mathcal{O}) = \{ v \mid v \in L^2(\mathcal{O})\,;\ \mathcal{P}^\star\tilde{v} \in L^2(\mathbf{R}^\nu) \}.$$

On vérifie aisément qu'il s'agit d'espaces de Hilbert par rapport aux normes du graphe (27).

On fera aussi usage des notations suivantes :

(5.17) $$X^0(\mathcal{O}) = \{ u \mid u \in X(\mathcal{O})\,;\ \overline{\tilde{u}} + \mathcal{P}^\star\overline{\widetilde{\mathcal{P}u}} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu) \quad (28) \}\,;$$

(5.18) $$Y^0(\mathcal{O}) = \{ v \mid v \in Y(\mathcal{O})\,;\ \bar{v} + \mathcal{P}\,\overline{\mathcal{P}^\star v} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}) \quad (29) \}\,;$$

(5.19) $$\widetilde{Y(\mathcal{O})} = \{ \tilde{v} \mid v \in Y(\mathcal{O}) \}.$$

Remarque 5.2. — L'espace $\widetilde{Y(\mathcal{O})}$ sera supposé muni de la norme $\|\tilde{v}\|_{\widetilde{Y(\mathcal{O})}} = \|v\|_{Y(\mathcal{O})}$; on s'aperçoit immédiatement que si l'on pose

(5.20) $$Y_{\mathcal{O}} = \{ v \mid v \in Y(\mathbf{R}^\nu)\,;\ \operatorname{supp} v \subseteq \overline{\mathcal{O}} \}$$

[norme induite par $Y(\mathbf{R}^\nu)$] on a

(5.21) $$Y_{\mathcal{O}} = \widetilde{Y(\mathcal{O})} \quad \textit{(avec égalité des normes)}.$$

On va utiliser les relations

(5.22) $$\begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) & \textit{est un sous-espace de } X(\mathcal{O}), \\ \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})} & \textit{est un sous-espace de } \widetilde{Y(\mathcal{O})}, \end{cases}$$

(27) Il suffit de remarquer que, grâce à (5.10), (5.11), et grâce au fait que l'application $\sim\,:\, L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathbf{R}^\nu)$ est continue, les opérateurs $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^{\star\sim}$ sont fermés de $L^2(\mathcal{O})$ dans $L^2(\mathcal{O})$, $L^2(\mathbf{R}^\nu)$ respectivement.

(28) Autrement dit, la distribution (sur $\mathbf{R}^\nu$) $\overline{\tilde{u}} + \mathcal{P}^\star\overline{\widetilde{\mathcal{P}u}}$ est nulle.

(29) Autrement dit, la distribution (sur $\mathcal{O}$) $\bar{v} + \mathcal{P}\,\overline{\mathcal{P}^\star v}$ est nulle.

où, comme d'habitude, $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})} = \{ \tilde{\varphi} \mid \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}) \}$ [(5.22) résulte évidemment de (5.7), (5.10), (5.11)].

5.5. On a vu que (5.6) assure la validité des (1.1), (1.2), (1.3); grâce à (5.10) on vérifie aisément que l'on a (*cf.* le nº 1 pour les notations)

$$D(P_w) = X(\mathcal{O}); \qquad P_w = \mathcal{P}_{|X(\mathcal{O})}; \qquad D(P_S) = \textit{adhérence de } \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) \textit{ dans } X(\mathcal{O}).$$

Le problème $P_S = P_w$ peut alors être posé sous la forme :

Problème 5.1. — *Donner des conditions sur* $\mathcal{O}$ *et sur* P *telles qu'on ait*

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) \textit{ est dense dans } X(\mathcal{O}). \tag{5.23}$$

Supposons maintenant (5.12) remplie; et remarquons que l'opérateur (linéaire, non borné) $\mathcal{P}^\star : L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ de domaine $D(\mathcal{P}^\star) = Y(\mathcal{O})$ peut être considéré comme l'adjoint de l'opérateur $P : L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ de domaine $D(P) = \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$.

On peut alors se poser un problème (analogue à $P_S = P_w$) de coïncidence entre opérateurs définis par transposition ou par fermeture, sous la forme :

Problème 5.2. — *Donner des conditions sur* $\mathcal{O}$ *et sur* P *telles qu'on ait*

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) \textit{ est dense dans } Y(\mathcal{O}). \tag{5.24}$$

Remarque 5.3. — On peut évidemment remplacer (5.24) par

$$\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})} \textit{ est dense dans } \widetilde{Y(\mathcal{O})}. \tag{5.24 bis}$$

On va montrer que ces problèmes sont équivalents, dans le sens que [(5.6) et (5.12) étant remplies; on en a besoin pour poser les problèmes], on a (5.23) si et seulement si on a (5.24).

Remarque 5.4. — Pour ce qui concerne l'implication (5.24) $\Rightarrow$ (5.23), *cf.* la remarque 5.6 suivante.

5.6. Remarquons que [notation (5.17)] on a

$$X^0(\mathcal{O}) = \{ u \mid u \in L^2(\mathcal{O});\ \mathcal{P}u \in Y(\mathcal{O});\ \overline{u} + \mathcal{P}^\star \overline{\mathcal{P}u} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}) \}. \tag{5.25}$$

En effet, l'inclusion $\subseteq$ est immédiate, dès que les opérateurs $\sim$ et $-$ commutent. Inversement si $u \in L^2(\mathcal{O})$, et $\mathcal{P}u \in Y(\mathcal{O})$, on a $u \in X(\mathcal{O})$; et, si l'on pose $f = \tilde{u} + \mathcal{P}^\star \widetilde{\overline{\mathcal{P}u}}$ on a $f \in L^2(\mathbf{R}^\nu)$. Si, de plus, $u + \mathcal{P}^\star \overline{\mathcal{P}u} = 0$ [à savoir si u est dans le deuxième membre de (5.25)] on a $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{O}$; mais évidemment $f(x) = 0$ pour $x \notin \overline{\mathcal{O}}$; et [grâce au fait que $f \in L^2(\mathbf{R}^\nu)$ et à (5.12)] on a $f = 0$, donc $u \in X^0(\mathcal{O})$.

Lemme 5.1. — *Sous les hypothèses* (5.6), (5.12), *l'application* $u \to \overline{\mathcal{P}u}$ [*resp.* $v \to \overline{\mathcal{P}^\star v}$] *est injective et surjective de* $X^0(\mathcal{O})$ *sur* $Y^0(\mathcal{O})$ [*resp. de* $Y^0(\mathcal{O})$ *sur* $X^0(\mathcal{O})$].

Démonstration. — Il suffit évidemment de démontrer que les applications opèrent entre les espaces considérés, puisque l'injectivité est évidente à partir de la définition des espaces, et que la surjectivité suivra du fait que $\overline{\mathfrak{L}}$ (resp. $\overline{\mathfrak{L}^\star}$) admettra $-\overline{\mathfrak{L}^\star}$ (resp. $-\overline{\mathfrak{L}}$) comme inverse partout défini.

Soit $u \in X^0(\mathcal{O})$; si l'on pose $v = \overline{\mathfrak{L}u}$ on aura $v \in Y(\mathcal{O})$ [*cf.* (5.25)]; et de plus

$$\tilde{v} + \mathfrak{L}\,\widetilde{\overline{\mathfrak{L}^\star v}} = \mathfrak{L}(u + \overline{\mathfrak{L}^\star v}) = \mathfrak{L}\left\{\overline{\tilde{u} + \mathfrak{L}^\star \widetilde{\overline{\mathfrak{L}u}}}\right\} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O}),$$

d'où $\overline{\mathfrak{L}u} = v \in Y^0(\mathcal{O})$. Inversement soit $v \in Y^0(\mathcal{O})$; si l'on pose $u = \overline{\mathfrak{L}^\star v}$, on a $u \in L^2(\mathcal{O})$; $\mathfrak{L}u = \mathfrak{L}\,\overline{\mathfrak{L}^\star v} = -\overline{v} \in Y(\mathcal{O})$; et dès que

$$\tilde{u} + \mathfrak{L}^\star\,\widetilde{\overline{\mathfrak{L}u}} = \mathfrak{L}^\star(v + \overline{\mathfrak{L}u}) = \mathfrak{L}^\star\left\{\overline{\tilde{v} + \mathfrak{L}\,\widetilde{\overline{\mathfrak{L}^\star v}}}\right\} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathcal{O})$$

on a $\overline{\mathfrak{L}^\star v} = u \in X^0(\mathcal{O})$ grâce à (5.25).

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 5.1. — *Les relations suivantes sont équivalentes :*

(5.26) $$X^0(\mathcal{O}) = \{0\};$$

(5.27) $$Y^0(\mathcal{O}) = \{0\}.$$

5.7. On va maintenant démontrer les relations :

(5.28) $$X^0(\mathcal{O}) = \textit{le sous-espace de } X(\mathcal{O}) \textit{ orthogonal à } \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}});$$

(5.29) $$Y^0(\mathcal{O}) = \textit{le sous-espace de } Y(\mathcal{O}) \textit{ orthogonal à } \mathcal{D}(\mathcal{O}).$$

Grâce au corollaire 5.1 et au théorème de Hahn-Banach, on en déduit l'équivalence entre (5.23) et (5.24), donc l'équivalence des problèmes 5.1 et 5.2.

On se borne à montrer (5.28); de façon analogue on peut montrer (5.29). On a

$$\begin{aligned}
X^0(\mathcal{O}) &= \left\{u \mid u \in X(\mathcal{O});\ \tilde{\tilde{u}} + \mathfrak{L}^\star \widetilde{\widetilde{\overline{\mathfrak{L}u}}} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu)\right\} \\
&= \left\{u \mid u \in X(\mathcal{O});\ \left\langle \tilde{\tilde{u}} + \mathfrak{L}^\star \widetilde{\overline{\mathfrak{L}u}}, \Phi \right\rangle_{\mathbf{R}^\nu} = 0, \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)\right\} \\
&= \left\{u \mid u \in X(\mathcal{O});\ \langle \tilde{\tilde{u}}, \Phi \rangle_{\mathbf{R}^\nu} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \left\langle D^\alpha\left(a_\alpha \widetilde{\overline{\mathfrak{L}u}}\right), \Phi \right\rangle_{\mathbf{R}^\nu} = 0, \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)\right\} \\
&= \left\{u \mid u \in X(\mathcal{O});\ \langle \tilde{\tilde{u}}, \Phi \rangle_{\mathbf{R}^\nu} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_\alpha \left\langle a_\alpha \widetilde{\overline{\mathfrak{L}u}}, D^\alpha \Phi \right\rangle_{\mathbf{R}^\nu} = 0, \ \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)\right\} = [\textit{cf.}\ (2.1)] \\
&= \left\{u \mid u \in X(\mathcal{O});\ \int_{\mathbf{R}^\nu} \left[\tilde{\tilde{u}}\Phi + \widetilde{\overline{\mathfrak{L}u}}\, P\Phi\right] dx = 0, \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)\right\} = [\textit{cf.}\ (5.10)] \\
&= \left\{u \mid u \in X(\mathcal{O});\ \int \left[\overline{u}\,\Phi + \overline{\mathfrak{L}u}\,\mathfrak{L}\Phi\right] dx = 0, \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)\right\} = [\textit{cf.}\ (2.2)] \\
&= \left\{u \mid u \in X(\mathcal{O});\ (\varphi, u)_{X(\mathcal{O})} = 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})\right\}.
\end{aligned}$$

5.8. On veut maintenant expliciter trois autres problèmes liés à P, $\mathcal{O}$, qui résulteront des problèmes équivalents aux problèmes 5.1, 5.2.

Supposons, pour un instant, que $\mathcal{O}$ et les coefficients de P soient « très réguliers ». On doit alors avoir, par rapport à un système convenable $\{S_j, T_j\}_j$ d' « opérateurs frontière », la « formule de Green » :

$$(5.30) \qquad (v, \overline{Pu})_{L^2(\mathcal{O})} - (P^\star v, \overline{u})_{L^2(\mathcal{O})} = \sum_j (S_j v, T_j \overline{u})_{L^2(\partial\mathcal{O})}, \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}).$$

Maintenant, si v est en outre dans $Y(\mathcal{O})$, on a (les « traces de v à l'extérieur de $\mathcal{O}$ » devant être nulles) $S_j v = 0$, $\forall j$; donc le deuxième membre de (5.30) est 0. On peut se poser le problème de savoir sous quelles hypothèses sur $\mathcal{O}$ et P, on a encore l'implication $v \in Y(\mathcal{O}) \Rightarrow S_j v = 0$, $\forall j$; une formulation (très faible) de ce problème est la suivante [*cf.* (5.10), (5.11)] :

Problème 5.3. — *Donner des conditions sur* $\mathcal{O}$ *et sur* P *telles qu'on ait*

$$(5.31) \qquad (v, \overline{\mathfrak{T}u})_{L^2(\mathcal{O})} = (\mathfrak{T}^\star v, \overline{u})_{L^2(\mathcal{O})}, \quad \forall\, u \in X(\mathcal{O}), \quad \forall\, v \in Y(\mathcal{O}).$$

Remarquons maintenant que, grâce à (5.25), on peut regarder formellement la relation $u \in X^0(\mathcal{O})$ comme l'ensemble des relations

$$(5.32) \qquad u \in L^2(\mathcal{O}); \qquad (I + \overline{\mathfrak{T}}^\star \mathfrak{T})u = 0; \qquad S_j(\mathfrak{T}u) = 0, \quad \forall j$$

et la dernière de ces relations peut être interprétée comme une « *condition de Neumann abstraite* », homogène, par rapport à l'opérateur $I + \overline{\mathfrak{T}}^\star \mathfrak{T}$.

On peut se poser la question de savoir si cette condition est suffisante pour donner des théorèmes d'unicité pour l'opérateur $I + \overline{\mathfrak{T}}^\star \mathfrak{T}$; sous forme précise, on se pose donc le :

Problème 5.4. — *Donner des conditions sur* $\mathcal{O}$ *et sur* P *telles qu'on ait* (5.26).

De façon analogue la relation $v \in Y^0(\mathcal{O})$ peut être interprétée comme l'ensemble des conditions

$$(5.33) \qquad v \in L^2(\mathcal{O}); \qquad (I + \overline{\mathfrak{T}} \mathfrak{T}^\star)v = 0; \qquad S_j v = 0, \quad \forall j$$

et on a donc une « *condition de Dirichlet abstraite* », homogène, par rapport à $I + \overline{\mathfrak{T}} \mathfrak{T}^\star$.

Si l'on veut savoir si cette condition est suffisante pour donner des théorèmes d'unicité, on est amené à poser le :

Problème 5.5. — *Donner des conditions sur* $\mathcal{O}$ *et sur* P *telles qu'on ait* (5.27).

5.9. On aura besoin des relations

$$(5.34) \qquad (v, \overline{P\varphi})_{L^2(\mathcal{O})} = (\mathfrak{T}^\star v, \overline{\varphi})_{L^2(\mathcal{O})}, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \quad \forall\, v \in Y(\mathcal{O});$$

$$(5.35) \qquad (\psi, \overline{\mathfrak{T}u})_{L^2(\mathcal{O})} = (P^\star \psi, \overline{u})_{L^2(\mathcal{O})}, \quad \forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \quad \forall\, u \in X(\mathcal{O}).$$

On démontre (5.34); (5.35) s'obtient de façon analogue. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$; et soit $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$ avec $\Phi_{|\mathcal{O}} = \varphi$. On aura, pour toute $v \in \mathrm{Y}(\mathcal{O})$,

$$\begin{aligned}(v, \overline{\mathrm{P}\varphi})_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} &= \int_{\mathcal{O}} v.\mathrm{P}\varphi\, dx = \int_{\mathbf{R}^\nu} \tilde{v}\mathrm{P}\Phi\, dx = \sum_\alpha \int_{\mathbf{R}^\nu} a_\alpha \tilde{v}\, \mathrm{D}^\alpha \Phi\, dx = [cf.\ (2.1)]\\ &= \sum_\alpha \langle a_\alpha \tilde{v}, \mathrm{D}^\alpha \Phi \rangle_{\mathbf{R}^\nu} = \Big\langle \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} \mathrm{D}^\alpha (a_\alpha \tilde{v}), \Phi \Big\rangle_{\mathbf{R}^\nu}\\ &= \langle \mathfrak{T}^\star \tilde{v}, \Phi \rangle_{\mathbf{R}^\nu} = [cf.\ (2.1)]\\ &= \int_{\mathbf{R}^\nu} \mathfrak{T}^\star \tilde{v}.\Phi\, dx = [\text{grâce au fait que supp } \mathfrak{T}^\star \tilde{v} \subseteq \overline{\mathcal{O}} \text{ et que } \mu_\nu(\partial\mathcal{O}) = 0]\\ &= \int_{\mathcal{O}} \mathfrak{T}^\star v.\Phi\, dx = (\mathfrak{T}^\star v, \overline{\varphi})_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Remarquons que si l'on connaît (5.23) [resp. 5.24)] on tire (5.31) grâce à (5.10) [resp. (5.11)] en prolongeant par continuité (5.34) [resp. (5.35)].

5.10. On va maintenant démontrer le :

Théorème 5.1. — *Sous les hypothèses* (5.6), (5.12), *les problèmes* 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 *sont équivalents* [*à savoir les relations* (5.23), (5.24), (5.31), (5.26), (5.27) *sont équivalentes*].

Démonstration. — On va démontrer les implications (5.31) $\Rightarrow$ (5.26) et (5.31) $\Rightarrow$ (5.27); puisqu'on a vu au n° 5.9 les implications (5.23) $\Rightarrow$ (5.31) et (5.24) $\Rightarrow$ (5.31), et au n° 5.7 les implications (5.26) $\Rightarrow$ (5.23) et (5.27) $\Rightarrow$ (5.24), le théorème sera alors démontré [30]. On se borne à montrer que (5.31) $\Rightarrow$ (5.26); de façon analogue on montre que (5.31) $\Rightarrow$ (5.27).

Soit donc remplie (5.31); pour $u \in \mathrm{X}^0(\mathcal{O})$ on a [*cf.* (5.25)] $\mathfrak{T}u \in \mathrm{Y}(\mathcal{O})$; alors (5.31) avec $v = \overline{\mathfrak{T}u}$ donne [*cf.* toujours (5.25) : on a $\mathfrak{T}^\star v = \mathfrak{T}^\star \overline{\mathfrak{T}u} = -\overline{u}$] :

$$0 = (v, \overline{\mathfrak{T}u})_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} - (\mathfrak{T}^\star v, \overline{u})_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} = (\overline{\mathfrak{T}u}, \overline{\mathfrak{T}u})_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} + (\overline{u}, \overline{u})_{\mathrm{L}^2(\mathcal{O})} = \| u \|_{\mathrm{X}(\mathcal{O})};$$

d'où (5.26).

5.11. On va faire quelques remarques sur le théorème 5.1 et sur son utilisation.

Remarque 5.5. — Dans la suite, pour obtenir l'identité $\mathrm{P}_\mathrm{S} = \mathrm{P}_w$ relativement à certaines classes d'opérateurs P et d'ouverts $\mathcal{O}$, on va faire usage seulement de l'implication (5.24 *bis*) $\Rightarrow$ (5.23).

Toutefois il nous a semblé intéressant d'expliciter toutes les équivalences démontrées, puisque, comme on a vu, elles ont une interprétation évidente

[30] On veut donner une démonstration qui soit indépendante du lemme 5.1. En faisant usage du lemme 5.1 il suffirait (par exemple) de montrer que (5.31) $\Rightarrow$ (5.26) et seulement une des implications du n° 9.

en termes de problèmes aux limites attachés à $\mathcal{O}$, P. A ce propos, on remarquera que le lemme 5.1 donne un complément au théorème 5.1 en ce qui concerne l'équivalence entre les problèmes 5.4 et 5.5; plus précisément, ce lemme nous dit que, indépendamment du fait que les problèmes (5.32), (5.33) aient ou non une solution unique, les espaces des auto-solutions de ces problèmes ont même dimension (finie ou non).

REMARQUE 5.6. — Pour ce qui concerne l'implication (5.24) $\Rightarrow$ (5.23), on doit remarquer qu'elle a été employée comme résultat de base, dans presque tous les travaux cités dans l'introduction, pour obtenir l'identité $P_S = P_\omega$. La démonstration qu'on en a donnée aux n^{os} 5.6 et 5.7 est à peu près celle donnée dans Hörmander [13], Lions-Magenes [20] (avec quelques précisions sur $\mathcal{O}$ et sur les coefficients de P); le théorème 5.1 fournit une autre démonstration de cette implication.

REMARQUE 5.7. — En ce qui concerne les hypothèses (5.6), (5.12), sous lesquelles on a démontré le théorème 5.1, on peut remarquer que (5.6) a été nécessaire pour avoir (1.1), (1.2), (1.3); donc pour poser le problème; tandis que (5.12), nécessaire pour définir l'espace $Y(\mathcal{O})$, n'est pas *a priori* indispensable pour traiter le problème $P_S = P_\omega$; elle est toutefois nécessaire dans toute méthode qui, comme la nôtre, fait usage de l'implication (5.24) $\Rightarrow$ (5.23).

REMARQUE 5.8. — Supposons que, au lieu de (5.6), on ait

$$\text{(5.6 } bis\text{)} \qquad \left\{\begin{array}{l} a_\alpha \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^\nu), \quad \forall\, \alpha, \\ \exists\, p > 2 \\ \text{tel que} \quad b_\beta \in L^p(\mathbf{R}^\nu) + L^\infty(\mathbf{R}^\nu), \quad \forall\, \beta. \end{array}\right.$$

On vérifie alors que, outre à (5.22), on a (notations de la remarque 4.5)

$$\text{(5.22 } bis\text{)} \qquad \widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O})} \quad \textit{est un sous-espace de } \widetilde{Y(\mathcal{O})} \quad (^{31}),$$

donc on affaiblit (32) le problème 5.2 en posant le problème de donner des conditions sur $\mathcal{O}$ et P telles qu'on ait

$$\text{(5.24 } ter\text{)} \qquad \widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O})} \quad \textit{est dense dans } Y(\mathcal{O}).$$

On s'aperçoit aisément que (5.24 *ter*) est équivalente à (5.24 *bis*); en effet, il suffit de montrer que toute $\varphi \in \widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O})}$ peut être approchée dans $\widetilde{Y(\mathcal{O})}$ par des éléments de $\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}$, et dès que, k étant l'ordre de P, on a

$$\text{(5.36)} \qquad \|\varphi\|_{\widetilde{Y(\mathcal{O})}} \leq C\, \|\varphi\|_{H^k(\mathbf{R}^\nu) \cap W^{k, \frac{2p}{p-2}}(\mathbf{R}^\nu)}, \quad \forall\, \varphi \in \widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O})}$$

---

(31) Pour avoir (5.29 *bis*) on aurait pu imposer un peu moins que (5.6 *bis*), et plus précisément : $a_\alpha \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^\nu)$, $b_\beta \in L^2(\mathbf{R}^\nu) + L^\infty(\mathbf{R}^\nu)$, $\forall\, \alpha, \beta$. Toutefois, sous cette hypothèse on aurait des ennuis à cause de l'exposant $+\infty$ qui apparaîtrait dans la relation (5.36).

(32) On a évidemment l'implication (5.24 *bis*) $\Rightarrow$ (5.24 *ter*).

[$C = C(b_\beta)$ dépend des normes des b_β dans $L^p(\mathbf{R}^\nu) + L^\infty(\mathbf{R}^\nu)$, mais non de φ; l'obtention de (5.36) est immédiate] il suffit, pour l'implication (5.24 *ter*) $\Rightarrow$ (5.24 *bis*), de rappeler que si $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$, $\chi(0) = 1$, on a $\varphi(x) \cdot \chi\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi(x)$ dans $W^{k,q}(\mathbf{R}^\nu)$, quel que soit $q \in]1, +\infty[$, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}_{L^2}(\mathbf{R}^\nu)$ [33]; évidemment

$$\varphi(x) \cdot \chi\left(\frac{x}{n}\right) \in \widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})} \text{ si } \varphi \in \widetilde{\mathcal{D}_{L^2}(\mathcal{O})}.$$

REMARQUE 5.9 (*suite de la remarque* 4.4). — Soient $p, q \in]1, +\infty[$; et soient p', q' les exposants conjugués de p, q respectivement. Si l'on remplace la relation (5.6) par

$$\text{(5.6 ter)} \qquad a_\alpha \in L^q_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu); \qquad b_\beta \in L^{p'}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu)$$

et si l'on pose :

$$X_{p,q}(\mathcal{O}) = \{ u \mid u \in L^p(\mathcal{O});\ \mathcal{P}u \in L^q(\mathcal{O}) \} \qquad \text{[au lieu de (5.15)]};$$
$$Y_{q',p'}(\mathcal{O}) = \{ v \mid v \in L^{q'}(\mathcal{O});\ \mathcal{P}^\star\tilde{v} \in L^{p'}(\mathbf{R}^\nu) \} \qquad \text{[au lieu de (5.16)]},$$

on vérifie que l'on a

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) \subset X_{p,q}(\mathcal{O}); \qquad \mathcal{D}(\mathcal{O}) \subset Y_{q',p'}(\mathcal{O}) \quad \text{[au lieu de (5.24)]};$$

et l'on peut se poser des problèmes analogues aux problèmes 5.1, 5.2 (et aussi 5.3, 5.4, 5.5). Tout reste invariant, la seule différence étant que les produits scalaires dans L^2 doivent être remplacés par des antidualités $\langle\ ,\ \rangle_{L^p, L^{p'}}$, $\langle\ ,\ \rangle_{L^q, L^{q'}}$; en particulier, on a :

{ *Sous les hypothèses* (5.6 *ter*), (5.12), $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ *est dense dans* $X_{p,q}(\mathcal{O})$ *si et seulement si* $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ *est dense dans* $Y_{q',p'}(\mathcal{O})$.

5.12. On va brièvement montrer de quelle façon on peut généraliser le théorème 5.1 au cas où P est remplacé par une matrice d'opérateurs.

Soient m, n deux entiers positifs; q, r vont désigner les indices variant respectivement entre 1 et m, 1 et n.

Pour tout (q, r) on se donne un nombre fini d'éléments de $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu)$, $\{a^{q,r}_\alpha\}_\alpha$; et on désigne par $((P^{q,r})) = ((P^{q,r}(x, D)))$ la matrice $m \times n$ d'opérateurs dont l'élément de place (q, r) est donné par

$$P^{q,r} = \sum_\alpha a^{q,r}_\alpha D^\alpha.$$

On suppose (*cf.* ce qu'on a fait au nº 5.1) que l'on ait aussi

$$P^{q,r} = \sum_\beta D^\beta(b^{q,r}_\beta), \qquad \text{avec} \quad b^{q,r}_\beta \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu);$$

---

[33] *Cf.*, par exemple, Hörmander ([15], th. 2.2.11) pour des résultats semblables.

et on pose

$$\mathcal{R}^{q,r}u = \sum_{\beta} D^{\beta}(b_{\beta}^{q,r}u), \quad \forall\, u \in L^2(\mathbf{R}^{\nu}); \qquad \mathcal{R}^{\star q,r}v = \sum_{\alpha}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(a_{\alpha}^{q,r}v), \quad \forall\, v \in L^2(\mathbf{R}^{\nu}),$$

$$\mathcal{R}_r\vec{u} = \sum_{q=1}^{m}\mathcal{R}^{q,r}u_q; \qquad \mathcal{R}\vec{u} \equiv \{\mathcal{R}_r u\}_{r=1,\dots,n}, \quad \forall\, \vec{u} \equiv \{u_q\}_{q=1,\dots,m} \in \{L^2(\mathbf{R}^{\nu})\}^m;$$

$$\mathcal{R}_q^{\star}\vec{v} = \sum_{r=1}^{n}\mathcal{R}^{\star q,r}v_r; \qquad \mathcal{R}^{\star}\vec{v} \equiv \{\mathcal{R}_q^{\star}\vec{v}\}_{q=1,\dots,m}, \quad \forall\, \vec{v} \equiv \{v_r\}_{r=1,\dots,n} \in \{L^2(\mathbf{R}^{\nu})\}^n.$$

On se donne $\mathcal{O}$ vérifiant (5.12) et (toujours en supprimant le symbole de restriction à $\mathcal{O}$) on pose

$$\overrightarrow{X(\mathcal{O})} = \left\{\vec{u} \,\middle|\, \vec{u} \in \{L^2(\mathcal{O})\}^m;\ \mathcal{R}\vec{u} \in \{L^2(\mathcal{O})\}^n\right\};$$

$$\overrightarrow{Y(\mathcal{O})} = \left\{\vec{v} \,\middle|\, \vec{v} \in \{L^2(\mathcal{O})\}^n;\ \mathcal{R}^{\star}\tilde{\vec{v}} \in \{L^2(\mathbf{R}^{\nu})\};^m\right\};$$

$$\widetilde{\overrightarrow{Y(\mathcal{O})}} = \left\{\tilde{\vec{v}} \,\middle|\, \vec{v} \in \overrightarrow{Y(\mathcal{O})}\right\}.$$

La même démonstration que celle du théorème 5.1 (il suffit d'ajouter des vecteurs !) donne le :

Théorème 5.2. — *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, les relations suivantes sont équivalentes :*

$$\{\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})\}^m \quad \textit{est dense dans } \overrightarrow{X(\mathcal{O})},$$

$$\{\widetilde{\mathcal{D}(\mathcal{O})}\}^n \quad \textit{est dense dans } \widetilde{\overrightarrow{Y(\mathcal{O})}},$$

$$\left(\vec{v},\, \overline{\mathcal{R}\vec{u}}\right)_{\{L^2(\mathcal{O})\}^n} = \left(\mathcal{R}^{\star}\vec{v},\, \bar{\vec{u}}\right)_{\{L^2(\mathcal{O})\}^m}, \quad \forall\, v \in \overrightarrow{Y(\mathcal{O})}, \quad \forall\, u \in \overrightarrow{X(\mathcal{O})},$$

$$\vec{u} \in \overrightarrow{X(\mathcal{O})}, \qquad \tilde{\vec{u}} + \mathcal{R}^{\star}\widetilde{\mathcal{R}\vec{u}} = 0 \quad \textit{dans } \{\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{\nu})\}^m \quad \textit{implique } \vec{u} = 0,$$

$$\vec{v} \in \overrightarrow{Y(\mathcal{O})}, \qquad \vec{v} + \mathcal{R}\,\overline{\mathcal{R}^{\star}\vec{v}} = 0 \quad \textit{dans } \{\mathcal{D}'(\mathcal{O})\}^n \quad \textit{implique } \vec{v} = 0.$$

Remarque 5.10. — On peut naturellement interpréter le théorème 5.2 en termes d'équivalence entre plusieurs problèmes liés à $\mathcal{O}$, $((\mathrm{P}^{q,r}))$.

Remarque 5.11. — Relativement au théorème 5.2 on peut faire des remarques analogues aux remarques 5.8, 5.9.

6. Applications a quelques types d'opérateurs.

6.1. On va maintenant étudier quelques classes d'opérateurs P et d'ouverts $\mathcal{O}$ pour lesquels, en combinant les résultats des n$^{\text{os}}$ 4 et 5, on est en mesure d'obtenir l'identité entre P_s et P_w.

On remarquera d'abord que, des théorèmes 4.1 et 5.1, on déduit tout de suite :

THÉORÈME 6.1. — *Soit* P *un opérateur du type* (5.1), *tel que, avec les notations* (5.2), *on ait* (5.6).

Soit $\mathcal{O}$ *de type* $\overline{\mathrm{T}}$ [34]; *et supposons que* [notations (5.11), (5.19)] *pour toute* $v \in \mathrm{Y}(\mathcal{O})$ *l'on puisse représenter* $\mathfrak{T}^\star \overline{v}$ *sous la forme* (4.5); (4.2) *étant remplie. Supposons en outre que l'on ait*

$$\widetilde{\mathrm{Y}(\mathcal{O})} = \mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O}) \quad ([35]), \tag{6.1}$$

et que (4.8) *ait lieu.*

Alors on a $\mathrm{P}_{\mathrm{S}} = \mathrm{P}_w$.

REMARQUE 6.1. — Évidemment l'hypothèse (6.1) du théorème 6.1 est difficile à vérifier. En appliquant le théorème 4.3 au lieu du théorème 4.1 on peut avoir un énoncé plus simple (mais le théorème obtenu a alors un champ d'applications plus restreint) :

THÉORÈME 6.2. — *Soit* P *un opérateur différentiel linéaire, du type* (5.1); *et soit* k *l'ordre de* P. *On suppose* [notations (5.2)] :

$$\begin{aligned} &a_\alpha \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^\nu)\ \forall\, \alpha; \quad b_\beta \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu) \quad \textit{pour } |\beta| = k;\\ &b_\beta \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\nu) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textit{pour } |\beta| < k. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Soit $\mathcal{O}$ *de type* $\overline{\mathrm{T}}$; *et supposons que l'on ait*

$$\widetilde{\mathrm{Y}(\mathcal{O})} \subset \mathrm{H}^{k-1}(\mathbf{R}^\nu). \tag{6.3}$$

Alors on a $\mathrm{P}_{\mathrm{S}} = \mathrm{P}_w$.

6.2. L'extension au cas où P est remplacé par une matrice d'opérateurs est immédiate.

Comme on a déjà fait au n° 4.4 on va se borner [36] au cas des matrices d'opérateurs d'ordre $\leqq 1$. A partir des théorèmes 4.2, 5.2, on a :

THÉORÈME 6.3. — *Soient* m, n *deux entiers positifs; et soient données les fonctions*

$$a_j^{q,r} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu)\,;\ b^{q,r} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\nu) \qquad (j = 1, \ldots, \nu;\ q = 1, \ldots, m;\ r = 1, \ldots, n). \tag{6.4}$$

---

[34] *Cf.* la remarque 4.2. On remarquera que, grâce à (5.14), on peut appliquer le théorème 5.1.

[35] Algébriquement et topologiquement [$\mathrm{D}(\mathfrak{T}^\star; \mathcal{O})$ a été défini dans (4.6)]. On remarquera qu'on est en train d'imposer à P* une propriété de « domination » par rapport aux opérateurs Q_{ij}, R_i.

[36] Soit pour simplicité de notations, soit pour simplicité d'énoncé : ce cas correspond au théorème 6.2 ($k = 1$) au lieu du théorème 6.1.

Soit P *l'opérateur* (*matriciel, linéaire non borné*) *de* $\{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^m$ *dans* $\{L^2(\mathbf{R}^\nu)\}^n$ *défini par*

$$P\vec{\varphi} = \left\{ \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{\nu} a_j^{q,r} D_j \varphi_q + b^{q,r} \varphi_q \right) \right\}_{r=1,\ldots,n}, \qquad \forall \vec{\varphi} = \{\varphi_q\}_{q=1,\ldots,m} \in \{\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)\}^m.$$

Pour tout $\mathcal{O}$ *de type* $\overline{T}$ *on a* $P_S = P_w$.

Démonstration. — Il suffit de poser, pour tous les j, q, r :

$$c^{q,r} = -a_j^{q,r}; \qquad d^{q,r} = b^{q,r} - \sum_{j=1}^{\nu} D_j a_j^{q,r} \tag{6.5}$$

et de remarquer que l'opérateur noté $\mathfrak{L}^\star$ au nº 5.12 coïncide avec l'opérateur défini par (4.13); et que l'on a $D(\mathfrak{L}^\star; \mathcal{O}) = \overrightarrow{\widetilde{Y(\mathcal{O})}}$ [*cf.* aussi, pour une question analogue, (5.20)].

C. Q. F. D.

Remarque 6.2. — Dès que, pour appliquer le théorème 4.2, on a besoin des relations (4.11), les hypothèses (6.4) sont nécessaires [tandis que, pour ce qui concerne le théorème 5.2, il aurait suffit que $a_j^{q,r}$, $b_j^{q,r}$, $c_j^{q,r}$, $d_j^{q,r} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu)$].

Remarque 6.3. — Le théorème 6.3 a été démontré par Friedrichs (*cf.* [10], théor. 4.2) sous une hypothèse de « contractibilité » sur $\mathcal{O}$ (au lieu de l'hypothèse « $\mathcal{O}$ est de type $\overline{T}$ »).

6.3. Revenons au cas où P est un opérateur (et non une matrice d'opérateurs) et donnons quelques exemples d'applications des théorèmes 6.1 et 6.2.

D'abord si P est à coefficients constants, le théorème 6.1 est évidemment applicable; toutefois dans ce cas le résultat est connu (*cf.* Hörmander [13]) sous l'hypothèse que $\mathcal{O}$ soit de type T (au lieu de $\overline{T}$).

Soit maintenant P « de type principal » (*cf.*, par exemple, Hörmander [14], nº 6), à coefficients $C^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ (pour simplifier; on pourrait supposer beaucoup moins).

On sait alors (*cf.* toujours Hörmander [14], corollaire 6.1) que pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^\nu$ il existe $\delta_{x_0} > 0$ tel que l'on ait l'implication suivante (k = ordre de P) :

$$u \in L^2(\mathbf{R}^\nu), \qquad P^\star u \in L^2(\mathbf{R}^\nu), \qquad \operatorname{supp} u \subset S(x_0; \delta_{x_0}) \Rightarrow u \in H^{k-1}(\mathbf{R}^\nu).$$

Il est alors évident que si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^\nu$, de type $\overline{T}$, tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset S(x_0; \delta_{x_0})$ pour un $x_0 \in \mathbf{R}^\nu$ convenable, on a (6.3); (6.2) étant remplie [37] le théorème 6.2 est applicable.

---

[37] Après modification éventuelle des coefficients de P hors de $\overline{\mathcal{O}}$.

Remarque 6.4. — Pour des résultats semblables, les espaces $L^2(\mathbf{R}^\nu)$ étant remplacés par les espaces $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^\nu)$, *cf.* Hörmander [14]).

6.4. Soit P un opérateur du type (5.1) à coefficients $C^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ (toujours pour simplifier); supposons P formellement hypoelliptique (*cf.* par exemple Hörmander [16]); et soit $\mathcal{O}$ de type $\overline{\mathrm{T}}$. Alors [38] on connaît l'existence de c_{ij}, d_i vérifiant (4.2) [*cf.* [37]] et de Q_{ij}, R_i vérifiant (4.1) tels que $\mathfrak{L}^\star$ soit donné par (4.5) et que (6.1) soit remplie (*cf.* par exemple, Hörmander [16], ou bien Hörmander [15], théor. 7.4.1); le théorème 6.1 est donc applicable.

Remarque 6.5. — Pour des résultats semblables, toujours sous l'hypothèse « $\mathcal{O}$ de type T » (au lieu de $\overline{\mathrm{T}}$), *cf.* Hörmander [13], en particulier la remarque qui suit le théorème 2. Pour le cas où P est elliptique, on consultera : Birman [4] pour l'ordre 2; et Lions-Magenes [20] pour l'ordre quelconque; pour P parabolique, *cf.* Lions-Magenes [19].

Remarque 6.6. — On a supposé que les coefficients de P soient $C^\infty(\mathbf{R}^\nu)$ pour ne pas alourdir l'exposé avec des hypothèses « optimales »; toutefois, un des avantages de cette méthode par rapport à d'autres est le fait qu'elle permet une plus grande généralité sur les coefficients; par exemple, rappelons qu'une des méthodes pour traiter le problème $P_S = P_w$ (*cf.* Lions-Magenes [20], chap. 5, rem. 11.1) est basée sur le fait que l'opérateur P^{-1} redonne « toute la régularité » perdue en appliquant P [par exemple : si P est elliptique d'ordre $2m$, on a $\widetilde{Y(\mathcal{O})} \subset H^{2m}(\mathbf{R}^\nu)$]; dans notre méthode on a besoin seulement de « toute la régularité moins 1 » [dans l'exemple : $\widetilde{Y(\mathcal{O})} \subset H^{2m-1}(\mathbf{R}^\nu)$; *cf.* (6.3)]. Cela peut évidemment permettre une plus grande généralité sur les coefficients.

Remarque 6.7. — Une autre conséquence (plus intéressante) de ce qu'on a dit à la fin de la remarque 6.5 est le fait que notre méthode s'applique à opérateurs P non nécessairement hypoelliptiques [39], on a déjà vu des exemples de cela aux n$^{\text{os}}$ 6.2, 6.3 et au n° 3 (opérateur du 2$^{\text{e}}$ ordre en deux variables, de type hyperbolique); on va montrer, au n° 7, que la méthode s'applique aux opérateurs hyperboliques « du type des ondes » (en un nombre quelconque de variables).

Remarque 6.8. — On peut naturellement faire des considérations analogues à celles faites aux remarques 2.1, 4.4, 4.5, 5.8, 5.9.

---

[38] On travaille « par composantes », selon la remarque 4.2.

[39] Donc, tels que P^{-1} ne redonne pas toute la régularité perdue en appliquant P.

7. Applications aux opérateurs du type des ondes.

7.1. Soit $I =]a, b[$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle de $\mathbf{R}^1$; et soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On fera usage des notations suivantes :

$C^k([a, b]; \mathcal{H}) = \{f | f : t \to f(t)$ est une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, continue sur $[a, b]$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $k\}$;

$L^2(a, b; \mathcal{H})$ = espace des classes de fonctions $t \to f(t)$ définies (presque partout) dans $]a, b[$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, fortement mesurables et telles que $\int_a^b \|f(t)\|^2_{\mathcal{H}} dt < +\infty$;

$H^k(a, b; \mathcal{H}) = \{f | f \in L^2(a, b; \mathcal{H}); f^{(k)} \in L^2(a, b; \mathcal{H})\}$ [40].

Rappelons qu'on a

$$H^{k+1}(a, b; \mathcal{H}) \subset C^k([a, b]; \mathcal{H}) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{7.1}$$ [41].

7.2. Dorénavant on va supposer $\nu > 1$; on posera $n = \nu - 1$; et, changeant un peu les notations, on désignera par $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ le point de $\mathbf{R}^n$ et par (x, t) $(t \in \mathbf{R}^1)$ le point de $\mathbf{R}^\nu = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$.

On considérera souvent les fonctions de (x, t) définies sur $\mathbf{R}^\nu$ comme fonctions de t à valeurs fonctions de x; ainsi on écrira indifféremment $L^2(\mathbf{R}^\nu)$ et $L^2(\mathbf{R}^1; L^2(\mathbf{R}^n))$.

Soit donné un opérateur différentiel linéaire, du 2^e ordre, à coefficients « suffisamment réguliers », et « du type des ondes », à savoir :

$$Pu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{7.2}$$

où $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ est une forme définie positive.

Relativement à un tel P, et à un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbf{R}^\nu$, on va étudier le problème « $P_S = P_w$ ».

Il est bien connu que, cet opérateur n'étant pas hypoelliptique, on ne peut pas espérer avoir $\widetilde{Y(\mathcal{O})} \subset H^2(\mathbf{R}^\nu)$; donc la méthode citée à la remarque 6.6 ne peut pas être appliquée. Au contraire, on va montrer que, sous des hypothèses convenables, on a $\widetilde{Y(\mathcal{O})} \subset H^1(\mathbf{R}^\nu)$; on pourra donc appliquer le théorème 6.2.

---

[40] Les dérivées sont prises au sens de $\mathcal{D}'(a, b; \mathcal{H})$ (distributions sur $]a, b[$, à valeurs dans $\mathcal{H}$; *cf.* Schwartz [25]). On montre que si $f \in H^k(a, b; \mathcal{H})$ on a : $f^{(j)} \in L^2(a, b; \mathcal{H})$, $j = 0, 1, \ldots, k$.

[41] C'est-à-dire tout $f \in H^{k+1}(a, b; \mathcal{H})$ est (p. p.) égale à un élément $F \in C^k([a, b]; \mathcal{H})$; pour t_0 fixé dans $[a, b]$, et $j = 0, 1, \ldots, k$, on écrira $f^{(j)}(t_0)$ au lieu de $F^{(j)}(t_0)$.

On se donne donc $\mathcal{O}$ de type $\overline{\mathrm{T}}$; on peut (*cf.* remarque 4.2) travailler sur les composantes connexes de $\overline{\mathcal{O}}$; et tout se réduit, après une translation éventuelle en t, à donner des conditions sur les coefficients de P qui assurent [outre la validité de (5.6) et (6.2)] que l'on ait

$$\mathrm{Y}(\mathbf{R}^n\times\,]0,\,\mathrm{T}[)\subset \mathrm{H}^1(\mathbf{R}^n\times\,]0,\,\mathrm{T}[). \qquad \forall\,\mathrm{T}\in\,]0,\,+\infty[\tag{7.3}$$

Remarque 7.1 (*suite aux remarques* 4.5, 5.8). — Comme on voit directement, à partir de (7.3), l'hypothèse que chacun des $\mathcal{O}^{(n)}$ (notations de la remarque 4.3) soit borné est immédiatement remplaçable par l'hypothèse que chacun des $\mathcal{O}^{(n)}$ soit borné en t; cette dernière restriction est essentielle si l'on veut appliquer la méthode qui suit; *cf.* toutefois la remarque 7.7.

7.3. Pour un peu simplifier les notations et les calculs on va choisir P plus simple que (7.2).

Plus précisément, on pose

$$\mathrm{A}u=\mathrm{A}(x,\,t,\,\mathrm{D}_x)\,u=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,\,t)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \tag{7.4}$$

où les coefficients a_{ij} vérifient

$$a_{ij}(x,\,t)\in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^\nu) \qquad (i,\,j=1,\,\ldots,\,n); \tag{7.5}$$

$$a_{ij}(x,\,t)=\overline{a_{ji}(x,\,t)}, \quad \forall\,(x,\,t)\in\mathbf{R}^\nu \qquad (i,\,j=1,\,\ldots,\,n); \tag{7.6}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{il existe } \alpha>0 \textit{ tel que, } \forall\,(x,\,t)\in\mathbf{R}^\nu, \textit{ on a}\\[4pt] \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\,t)\,\xi_i\xi_j\geqq\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \forall\,\xi=(\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n)\in\mathbf{R}^n.\end{array}\right. \tag{7.7}$$

Ceci posé, on définit P posant

$$\mathrm{P}u=\mathrm{P}(x,\,t,\,\mathrm{D}_x,\,\mathrm{D}_t)\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mathrm{A}(x,\,t,\,\mathrm{D}_x)\,u. \tag{7.8}$$

Il sera commode dans la suite de désigner par $\mathrm{P}^\star$ l'opérateur adjoint de P par rapport à l'antidualité entre $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^\nu)$ et $\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$ [au lieu de la dualité entre ces espaces ([42])]. Avec une convention analogue pour $\mathrm{A}^\star$, on aura alors

$$\mathrm{A}^\star(x,\,t,\,\mathrm{D}_x)=\mathrm{A}(x,\,t,\,\mathrm{D}_x); \qquad \mathrm{P}^\star(x,\,t,\,\mathrm{D}_x,\,\mathrm{D}_t)=\mathrm{P}(x,\,t,\,\mathrm{D}_x,\,\mathrm{D}_t). \tag{7.9}$$

Remarque 7.2. — On doit distinguer entre l'utilisation de la convention ci-dessus et de la relation (7.6) : grâce à de telles relations, on a (7.9),

---

([42]) Donc, $\mathrm{P}^\star$ est défini ici par $\langle \mathrm{P}^\star\varphi,\,\psi\rangle_{\mathbf{R}^\nu}=\langle\varphi,\,\mathrm{P}\psi\rangle$ pour $\varphi,\,\psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^\nu)$ (où, comme d'habitude, $\langle u,\,v\rangle_{\mathbf{R}^\nu}=\int_{\mathbf{R}^\nu}u(x,\,t)\,v(x,\,t)\,dx\,dt$, pour u, v régulières).

qui nous permettra d'écrire une seule fois quelques résultats relatifs à A, A*, ou à P, P*; toutefois si l'on veut éliminer la convention relative à P* [43] il suffit de répéter pour A*, P* les raisonnements qu'on va faire sur A, P; et tout va marcher, avec des complications seulement formelles; tandis que l'hypothèse (7.6) est strictement nécessaire dans la suite. Ainsi les résultats qu'on va obtenir peuvent être généralisés à la forme (7.2) de P [dès que (7.9) n'est pas indispensable]; et il suffira de garder l'hypothèse (7.5).

REMARQUE 7.3. — Grâce à (6.5) on peut expliciter P sous les deux formes (5.1) et (5.3); et (5.5) est remplie; on pourrait donc introduire les opérateurs $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^\star$ comme on a fait au n° 5.2 (et de façon analogue les opérateurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\star$ prolongeant A, A*); toutefois, pour simplifier un peu l'écriture, on notera toujours P, A au lieu de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^\star$ et $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\star$ respectivement.

7.4. On va montrer la relation (valable pour tout $T \in]0, +\infty[$) :

$$(7.10)\quad \begin{cases} \textit{Si } u(x, t) \in H^2(0, T; L^2(\mathbf{R}^n)) \textit{ vérifie } Pu \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[), \\ \textit{on a } u \in H^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[). \end{cases}$$

Pour avoir (7.10) il suffit [44] de démontrer que :

$$(7.11)\quad \begin{cases} \textit{Si } w(x, t) \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[) \textit{ est telle qu'il existe } f(x, t) \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[) \\ \textit{de façon que } (w, Av)_{L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[)} = (f, v)_{L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[)} \\ \textit{pour toute } v \in L^\infty(0, T; H^2(\mathbf{R}^n)), \textit{ alors on a } w \in L^2(0, T; H^2(\mathbf{R}^n)). \end{cases}$$

Remarquons qu'on a (*cf.* par exemple Agmon [1] [45]),

$$(7.12)\quad \begin{cases} \textbf{\textit{Il existe }} \lambda_0 \textbf{\textit{ réel tel que, }} \forall t \in \mathbf{R}^1, \textbf{\textit{ l'application }} u \to Au + \lambda_0 u \textbf{\textit{ est un isomorphisme}} \\ \textbf{\textit{surjectif de }} H^2(\mathbf{R}^n) \textbf{\textit{ sur }} L^2(\mathbf{R}^n). \end{cases}$$

Étant donnés w, f comme en (7.11), soit alors $u(x, t) \in H^2(\mathbf{R}^n)$ (p. p. en t) la solution de

$$A(x, t, D_x)\, u(x, t) + \lambda_0 u(x, t) = f(x, t) + \lambda_0 w(x, t)$$

[qui existe grâce à (7.12)]. On vérifie aisément que l'on a, pour presque tout $t \in]0, T[$

$$(u(x, t) - w(x, t), A(x, t, D_x)\, v(x) + \lambda_0 v(x))_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 0, \quad \forall v(x) \in H^2(\mathbf{R}^n),$$

---

[43] Et cette convention est inutile [dès que l'on n'aura plus (7.9)] quand on veut passer à la forme (7.2) de P.

[44] On prendra dans (7.11) : $f = Pu - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[)$; et $w = u$; (7.10) suivra grâce à la relation :

$$H^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[) = L^2(0, T; H^2(\mathbf{R}^n)) \cap H^2(0, T; L^2(\mathbf{R}^n)).$$

[45] En effet, les coefficients a_{ij} sont uniformément continus grâce à (7.6), (2.4).

d'où, encore grâce à (7.12), $u(x, t) = w(x, t)$ (p. p.) : c'est-à-dire que, pour presque tout t, $w(x, t) = u(x, t) \in H^2(\mathbf{R}^n)$.

On en déduit [la seule difficulté étant désormais la mesurabilité à valeurs $H^2(\mathbf{R}^n)$ de $t \to w(., t)$], par un procédé identique à celui employé dans Lions-Magenes ([20], chap. 5, dém. du lemme 2.1), $w(x, t) \in L^2(0, T; H^2(\mathbf{R}^n))$; d'où (7.11) et donc (7.10) est démontrée.

7.5. Explicitons la formule suivante, valable pour tout $T \in]0, +\infty[$:

$$\{u \mid u \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[) ;\ Pu \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[)\} \subset C^1([0, T]; H^{-2}(\mathbf{R}^n)) \quad (7.13)$$ [46].

Il suffit en effet de montrer que toute u dans le premier membre de (7.13) vérifie

$$u \in L^2(0, T; H^{-2}(\mathbf{R}^n)) \ [47], \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, T; H^{-2}(\mathbf{R}^n));$$

puis on applique (7.1). Or on a $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Pu - Au$ et, dès que

$$Pu \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[) \subset L^2(0, T; H^{-2}(\mathbf{R}^n)) \quad [cf.\ (47)]$$

il suffit de montrer que $Au \in L^2(0, T; H^{-2}(\mathbf{R}^n))$; et cette relation s'obtient par transposition, à partir de :

$$A \in \mathcal{L}(L^2(0, T; H^2(\mathbf{R}^n)), L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[))$$

[que l'on vérifie directement grâce à (7.5)].

7.6. On va rappeler quelques résultats relatifs au « problème de Cauchy » :

$$\begin{cases} Pu = f & \textit{dans } \mathbf{R}^n \times]0, T[, \\ u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0 & \textit{dans } \mathbf{R}^n, \end{cases} \tag{7.14}$$

et à son « adjoint » :

$$\begin{cases} Pv = g & \textit{dans } \mathbf{R}^n \times]0, T[, \\ v(x, T) = v'_t(x, T) = 0 & \textit{dans } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{7.15}$$

Si l'on pose :

$$\mathfrak{U} = \{u \mid u \in H^1(\mathbf{R}^n \times]0, T[) ;\ Pu \in L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[) ;\ u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0\}$$ [48],

---

[46] Où, comme d'habitude, $H^{-2}(\mathbf{R}^n)$ désigne l'espace dual de $H^2(\mathbf{R}^n)$. On pourrait préciser la formule [remplaçant $H^{-2}(\mathbf{R}^n)$ par un espace plus petit], mais dans la suite il sera suffisant d'avoir (7.13).

[47] Relation immédiate, dès qu'on a $L^2(\mathbf{R}^n) \subset H^{-2}(\mathbf{R}^n)$ et donc

$$L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[) = L^2(0, T; L^2(\mathbf{R}^n)) \subset L^2(0, T; H^{-2}(\mathbf{R}^n)).$$

[48] *Cf.* (7.13) pour le sens de cette relation.

espace qu'on suppose muni de la norme du graphe, on a (*cf.*, par exemple, Lions [18], chap. 8, théor. 1.1 et chap. 9, ex. 1.1),

(7.16) $\{$ *L'application* $u \to \mathrm{P}u$ *est un isomorphisme surjectif de* $\mathfrak{U}$ *sur* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[)$.

Si, de plus, on suppose que

$$\frac{\partial^2 a_{ij}(x, t)}{\partial t^2} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^\nu) \qquad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{7.17}$$

on a, en ce qui concerne le problème (7.14), le résultat de régularité que voici (*cf.* toujours Lions [18], chap. 8, théor. 1.2) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Si} \quad u \in \mathfrak{U}, \ \dfrac{\partial \mathrm{P}u}{\partial t} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[) \text{ (49)}, \quad (\mathrm{P}u)(x, 0) = 0, \textit{ on a} \\ \qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[). \end{array} \right. \tag{7.18}$$

De (7.18), (7.10), on tire

$$\textit{Si } u \in \mathfrak{U}, \ \frac{\partial \mathrm{P}u}{\partial t} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[), \ (\mathrm{P}u)(x, 0) = 0, \quad \textit{on a } u \in \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[). \tag{7.19}$$

7.7. Puisque, comme on le vérifie aisément,

$$\{ f \mid f \in \mathrm{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)) ; f(x, 0) = 0 \} \quad [\textit{cf.} (7.1)]$$

est dense dans $\mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n))$, on peut interpréter (7.19), soit sous la forme

$$\mathfrak{U} \cap \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[) \quad \textit{est dense dans } \mathfrak{U}, \tag{7.20}$$

soit encore sous la forme

$$\mathrm{P}(\mathfrak{U} \cap \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[)) \quad \textit{est dense dans } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[).$$

Puisque le problème (7.15) diffère du problème (7.14) seulement par l'orientation de l'axe t, on aura pour ce problème des résultats analogues à ceux rappelés pour le problème (7.14); en particulier, en désignant par $\mathfrak{V}$ l'espace [analogue à l'espace $\mathfrak{U} \cap \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T})$]

$$\mathfrak{V} = \{ v \mid v \in \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[) ; v(x, \mathrm{T}) = v'_t(x, \mathrm{T}) = 0 \},$$

la dernière relation obtenue pour le problème (7.14) se traduit dans la relation

$$\textit{L'ensemble } \{ \mathrm{P}v \mid v \in \mathfrak{V} \} \quad \textit{est dense dans } \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[). \tag{7.21}$$

7.8. De (7.20) on déduit [50] :

$$(u, \mathrm{P}v)_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[)} = (\mathrm{P}u, v)_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[)}, \quad \forall u \in \mathfrak{U}, \quad \forall v \in \mathfrak{V}. \tag{7.22}$$

---

(49) Et donc $\mathrm{P}u \in \mathrm{H}^1(0, \mathrm{T}; \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^\nu))$; et $(\mathrm{P}u)(x, 0)$ a un sens; *cf.* (7.1).

(50) (7.22) est évidente pour $u \in \mathfrak{U} \cap \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^n \times]0, \mathrm{T}[)$, et se prolonge aux $u \in \mathfrak{U}$ grâce à (7.20).

On doit avoir aussi [51]

(7.23) $(w, Pv)_{L^2(\mathbf{R}^n\times]0,T[)} = (Pw, v)_{L^2(\mathbf{R}^n\times]0,T[)}, \quad \forall w \in Y(\mathbf{R}^n\times]0,T[), \quad \forall v \in \mathcal{V}.$

Soit maintenant $w \in Y(\mathbf{R}^n\times]0,T[)$; on résout (7.14) avec $f = Pw$; on trouve $u \in \mathcal{U}$ unique [*cf.* (7.16)] qui, grâce à (7.22) et (7.23), est liée à w par la relation

$$(u, Pv)_{L^2(\mathbf{R}^n\times]0,T[)} = (w, Pv)_{L^2(\mathbf{R}^n\times]0,T[)}, \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

c'est-à-dire

$$(u - w, Pv)_{L^2(\mathbf{R}^n\times]0,T[)} = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

De (7.21), on déduit (théorème de Hahn-Banach) que $w = u$; c'est-à-dire tout élément de $Y(\mathbf{R}^n\times]0,T[)$ est en fait dans $\mathcal{U}$; d'où

(7.24) $$Y(\mathbf{R}^n\times]0,T[) \subset H^1(\mathbf{R}^n\times]0,T[).$$

7.9. On a donc vu que, si l'on se restreint à la forme (7.8) [au lieu de (7.2)] de P, quand (7.5), (7.6), (7.7) et (7.17) sont remplies, on a (7.3) [*cf.* (7.24)]. Puisque, évidemment, la convention faite pour avoir (7.9) ne change pas la conclusion du théorème 6.2, on a obtenu :

THÉORÈME 7.1. — *Sous les hypothèses* (7.5), (7.6), (7.7), (7.17), *et avec les notations* (7.4), (7.8), *on a* $P_S = P_w$ *par rapport à tout ouvert* $\mathcal{O}$ *de type* $\overline{T}$.

REMARQUE 7.4. — Comme on a déjà dit, beaucoup des restrictions imposées à P dans l'énoncé ci-dessus peuvent être éliminées; *cf.* à ce propos le n° 7.10.

REMARQUE 7.5. — En ce qui concerne les opérateurs hyperboliques, pour avoir la relation $P_S = P_w$, il semble que l'on devait se borner ou bien au cas d'opérateurs à coefficients constants (*cf.* alors Hörmander [13]), ou bien au cas d'ouverts « suffisamment petits » (et le résultat étant alors de caractère local; *cf.* Hörmander [14]).

7.10. La méthode suivie pour obtenir (7.24) peut être schématisée de la façon suivante :

On considère trois types de solutions de (7.14) :

a. Solutions « très régulières » (les éléments de $\mathcal{U} \cap H^2(\mathbf{R}^n\times]0,T[)$) qu'on va appeler *solutions ordinaires.*

b. Solutions « moins régulières » (les éléments de $\mathcal{U}$) qu'on obtient en considérant la fermeture, par rapport à des normes convenables, du graphe

[51] (7.23) est évidente pour $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}^n\times]0,T[})$, et se prolonge par continuité à $H^2(\mathbf{R}^n\times]0,T[)$, donc à $\mathcal{V}$.

de P (restreint aux solutions ordinaires; *cf.* (7.20) qui signifie exactement que le graphe de P dans $\mathcal{U} \times L^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[)$ est la fermeture dans cet espace du graphe de P, si l'on considère, pour domaine de P,

$$D(P) = \mathcal{U} \cap H^2(\mathbf{R}^n \times]0, T[).$$

On va appeler ces solutions *solutions généralisées fortes.*

c. Solutions « très faibles » obtenues par dualité : on se donne un espace de fonctions « test » (l'espace $\mathcal{V}$) et on considère les couples $\{u, f\}$ tels que (par rapport à des dualités convenables) on ait $\langle u, Pv \rangle = \langle f, v \rangle$ pour toute fonction test v. On appellera ces solutions *solutions généralisées faibles.*

Ceci posé, les espaces de solutions des trois types étant convenablement choisis, on doit démontrer :

I. Une formule de Green [*cf.* (7.22)] qui assure que toute solution généralisée forte est aussi solution généralisée faible.

II. Un théorème d'existence de solutions généralisées fortes qui doivent être « suffisamment régulières »; dans le cas concret le théorème d'existence est (7.16); les solutions sont « suffisamment régulières » d'après la définition de $\mathcal{U}$ [sous-espace de $H^1(\mathbf{R}^n \times]0, T[)$; et il s'agit de solutions fortes grâce à (7.19)].

III. Un théorème d'unicité pour les solutions généralisées faibles [donné ici par (7.21)].

Des résultats de ce type sur les solutions de (7.14) [P étant plus général que (7.8)] ont été obtenus, sous forme abstraite, dans [2], [3]; et, en appliquant ces résultats, on peut traiter le problème pour P donné par (7.2), avec moins d'hypothèses que celles du théorème 7.1; toutefois (dans [2], [3] les résultats étant relatifs à des équations différentielles abstraites), pour ne pas alourdir l'exposé en traduisant ces résultats au cas concret considéré ici, on a préféré employer les relations (7.16), (7.18) qui sont bien connues [52].

Remarque 7.6. — La méthode schématisée ici est de caractère général et montre que le problème de la coïncidence entre les prolongements fort et faible de P peut se ramener à un problème analogue relatif à une réalisation convenable de P.

Remarque 7.7. — Pour P donné par (7.8), ou plus généralement par (7.2), la considération d'autres problèmes que (7.14) pourrait peut-être éliminer (complètement; *cf.* remarque 7.1) la restriction « $\mathcal{O}$ borné »

---

[52] Un travail sur les applications concrètes des résultats de [2], [3] est en cours de rédaction et va paraître aux *Rendiconti Istituto Lombardo.*

dans (4.7); par exemple, on pourrait poser [au lieu du problème de Cauchy (7.14)] le problème aux limites :

$$\mathrm{P}u = f \quad dans\ \mathbf{R}^n \times]a, b[\,; \qquad u(x, a) = u(x, b) = 0 \quad dans\ \mathbf{R}^n;$$

on peut espérer passer à la limite pour $a, -b$ tendant vers $-\infty$, les conditions aux limites étant alors remplacées par des conditions de sommabilité sur $t \to \| u(.t) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)} + \| u'_t(., t) \|^2_{\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^n)}$; il faut naturellement mettre sur pieds les résultats de base sur les trois types de solutions (*cf.* I, II, III).

REMARQUE 7.8 (*suite aux remarques* 2.1, 4.4, 5.9). — La généralisation au cas où l'on considère $\mathrm{P} : \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^\nu) \to \mathrm{L}^q(\mathbf{R}^\nu)$ $(1 < p < +\infty\,;\ 1 < q < +\infty\,;$ $\mathcal{O}$ régulier; si $\mathcal{O}$ est « de type cylindrique » on peut aussi différencier par rapport aux variables x, t les exposants de sommabilité) est liée à l'obtention de résultats des types I, II, III, pour les solutions correspondantes à un problème aux limites convenable, qui soit bien posé pour des espaces de ce type.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. AGMON, *Lectures on elliptic value problems*, Van Nostrand, Math. Studies, Princeton, 1965.

[2] C. BAIOCCHI, *Soluzioni ordinarie e generalizzate del problema di Cauchy per equazioni differenziali astratte lineari del secondo ordine in spazi di Hilbert* (*Ric. Mat.*, vol. 16, 1967, p. 27-95).

[3] C. BAIOCCHI, *Sulle equazioni differenziali astratte lineari del primo e secondo ordine negli spazi di Hilbert* (*Ann. Mat.*, vol. 26, 1967, p. 233-304).

[4] M. S. BIRMAN, *Sur la théorie des problèmes aux limites générales pour les équations différentielles elliptiques* (*Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 92, 1953, p. 205-208) (en russe).

[5] F. E. BROWDER, *La théorie spectrale des opérateurs aux dérivées partielles du type elliptique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1958, p. 526-529).

[6] E. A. CODDINGTON, *Generalized Sturm-Liouville theory*, Lectures of Instructional Conference on Differential Equations, Edinburgh, 1967.

[7] J. DENY et J.-L. LIONS, *Les espaces du type Beppo Levi* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 5, 1955, p. 305-370).

[8] G. FICHERA, *Premesse ad una teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali*, Cours de l'I. N. A. M., Veschi, Rome, 1956.

[9] G. FICHERA, *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari* (*Rend. Acc. Naz. Lincei*, vol. 8, 1956, fasc. I, p. 46-55; fasc. II, p. 1-7).

[10] K. O. FRIEDRICHS, *The identity of weak and strong extensions of differential operators* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 60, 1944, p. 132-151).

[11] K. O. FRIEDRICHS, *On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations* (*Comm. P. A. Math.*, vol. 6, 1953, p. 299-325).

[12] E. GAGLIARDO, *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili* (*Ric. Mat.*, vol. 7, 1958, p. 102-137).

[13] L. HÖRMANDER, *Definition of maximal differential operators* (*Ark. for Mat.*, vol. 3, 1958, p. 501-504).

[14] L. HÖRMANDER, *Weak and strong extensions of differential operators* (*Comm. P. A. Math.*, vol. 14, 1961, p. 371-379).

[15] L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operator*, Springer, 1963.
[16] L. HÖRMANDER, *Differential operator of principal type* (*Math. Ann.*, vol. 140, 1960, p. 124-146).
[17] V. A. IL'IN, *Sur l'approximation des fonctions des espaces* $W_{k,p}(D)$ *par les fonctions continûment différentiables* (*Dokl. Acad. Nauk S. S. S. R.*, t. 137, 1961, p. 1214-1217).
[18] J.-L. LIONS, *Équations différentielles opérationnelles*, Springer, 1961.
[19] J.-L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*. VI (*J. Anal. Mat.*, t. 11, 1963, p. 165-188).
[20] J.-L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1968.
[21] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Académie Tchécoslovaque des Sciences, Prague, 1967.
[22] L. P. NIZNIK, *Sur les spectres des opérateurs différentiels généraux* (*Dokl. Acad. Nauk S. S. S. R.*, t. 134, 1959, p. 517-519) (en russe).
[23] J. PEETRE, *Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels* (*Med. Lund. Univ. Mat. Sem.*, t. 16, 1959, p. 1-122).
[24] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I et II, Hermann, 1950-1951.
[25] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I et II (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 1-139; t. 8, 1958, p. 1-209).

(Manuscrit reçu le 20 mars 1969.)

Claudio BAIOCCHI,
Istituto Matematico-Università,
Pavia (Italia).