ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN BRETAGNOLLE
DIDIER DACUNHA-CASTELLE

Application de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans des espaces L^p

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 4 (1969), p. 437-480
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_4_437_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 2, 1969, p. 437 à 480.

APPLICATION DE L'ÉTUDE DE CERTAINES FORMES LINÉAIRES ALÉATOIRES AU PLONGEMENT D'ESPACES DE BANACH DANS DES ESPACES L^p

PAR JEAN BRETAGNOLLE
ET DIDIER DACUNHA-CASTELLE.

INTRODUCTION ET PRINCIPAUX RÉSULTATS.

Dans cet article, nous développons certains résultats annoncés et brièvement démontrés dans les Notes ([10], [11]). Le problème essentiel est d'étudier quels sont parmi certains espaces de Banach, les espaces de type p. Les techniques utilisées sont des techniques d'analyse relevant pour l'essentiel d'idées probabilistes.

DÉFINITION. — Un espace normé B est dit de type $p (1 \leq p \leq \infty)$ s'il existe un plongement (application linéaire bicontinue) de B dans un certain espace $L^p(\mathfrak{X}, m)$.

En d'autres termes, si B est séparable, dire que B est de type p c'est dire que la dimension linéaire de B (au sens où Banach l'entend dans *Théorie des opérations linéaires*) est inférieure à celle de $L^p(\mathbf{R}, \mathcal{B}, dx)$.

Les premiers résultats (Banach, Zygmund) concernent les espaces l^q de type p. Dans notre travail avec J.-L. Krivine [12], complété par les travaux propres de Krivine [3], nous avons donné une condition nécessaire et suffisante simple pour que B soit de type p.

Le cas $p = \infty$ est trivial.

Le cas $1 \leq p \leq 2$ se traduit par la condition nécessaire et suffisante suivante : la fonction $x \to \|x\|^p$ est de type négatif sur B. Si $p > 2$, $p \neq 2n$, on a des conditions algébriques plus compliquées du même genre.

Pour $p = 2n$ le problème est un peu plus compliqué (*voir* [3]).

Cependant, ces conditions simples ne sont pas faciles à vérifier dans des cas concrets. Le cas concret que nous étudions ici contient en particulier le cas des espaces d'Orlicz.

Une idée qui se dégage de ce travail est que le problème du type d'un espace est lié à la définition d'un ordre convenable sur les fonctions de type négatif f réelles qui amène à passer naturellement de l'étude des espaces de type p à celle des espaces de type f avec une généralisation immédiate, f fonction d'Orlicz.

Indiquons les principales définitions et les résultats dans le cas particulier d'espaces de suites.

Soit B un espace de Banach de suites réelles $c = (c_n)_{n \in \mathbf{N}}$, soit d l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang.

Un espace B est dit ε-μ-invariant si :

1° d est dense dans B.

2° Si $(c_n)_{n \in \mathbf{N}} \in d$, $\|(c_n)\| = \|\varepsilon_n c_{\sigma(n)}\|$ pour tout choix de ε_n, $|\varepsilon_n|^2 = 1$, et tout choix de la permutation σ d'un nombre fini d'entiers.

L'exemple le plus simple de tels espaces est celui des espaces l_f, des suites $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} f(c_n) < \infty$, où f est une fonction définie sur $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f convexe, strictement croissante (dans la Ire partie nous développons ces définitions des espaces ε-μ-invariants et des espaces d'Orlicz).

Une forme aléatoire X sur **N** est une application $\mathrm{N} \to \mathrm{L}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$, espace des classes de variables aléatoires de $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$.

On note l_{X} l'espace des suites (c_n) telles que $\sum_{1}^{n} c_k \, \mathrm{X}(k)$ converge en probabilité, $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ la complétion de $\mathrm{X}(d)$ en probabilité, de même $l_{\mathrm{X},\alpha}$ et $[\mathrm{X}, \alpha]$ désigne respectivement l'espace des suites (c_n) qui convergent pour la métrique α et la complétion de $\mathrm{X}(d)$ pour cette métrique. Enfin, on note $\mathrm{K}(q, p)$ la classe des fonctions d'Orlicz (définies à une équivalence multiplicative près) telles que $\frac{f(x)}{x^q}$ soit décroissante, $\frac{f(x)}{x^p}$ soit croissante.

Le théorème principal est le suivant :

B *est de type* p *si et seulement si c'est un espace d'Orlicz tel que* $f \in \mathrm{K}(2, p)$.

La suite des résultats et le plan de ce travail sont les suivants (traduits en termes d'espaces de suites).

Dans la Ire partie, on étudie les espaces de Banach intervenant dans l'article, et on établit des correspondances entre les classes $\mathrm{K}(2, 0)$ et $\mathrm{K}(2, 1)$ avec des classes de fonctions de type négatif.

Dans la IIe partie, on étudie les espaces l_X, $l_{X,p}$, $l_{X,f}$. On montre qu'ils sont isomorphes aux sous-espaces $[X, P]$, $[X, p]$, $[X, f]$ de $L(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans le cas où la forme X est une suite de variables indépendantes et équidistribuées. La partie vraiment intéressante du point de vue probabiliste est celle qui consiste à étudier les cas d'égalité des espaces $[X, P]$, $[X, 1]$, $[X, p]$, $[X, f]$. On en déduit d'abord des critères de convexité pour $[X, P]$, de réflexivité pour $[X, 1]$, d'existence de moments et aussi la condition de plongement d'un espace L^p dans un espace L_f (problème inverse de celui étudié ici). Nous pensons exploiter ultérieurement cette méthode pour d'autres problèmes.

Dans la IIIe partie, on étend ces résultats au cas de variables échangeables.

Dans la IVe partie, on démontre le théorème principal en remarquant que si un espace B est de type p, on peut construire une forme X à accroissements échangeables et stable d'ordre p telle que $[X, P] = B$. La construction est un peu technique mais simple dans son principe.

En fait l'article est écrit dans le cas un peu plus difficile mais plus riche d'espaces fonctionnels. Les difficultés techniques ne sont pas beaucoup plus grandes, le seul ennui provient de la nécessité d'étudier la représentation des processus à accroissements échangeables, extensions de la notion de variables échangeables. Cela est fait dans l'appendice adjoint à l'article en suivant les idées de Krivine [3] sur les algèbres archimédiennes.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉFINITIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES CONCERNANT CERTAINES CLASSES DE FONCTIONS ET D'ESPACES DE BANACH.

1. q-ESPACES ET ESPACES D'ORLICZ; RAPPELS ET NOTATIONS (1).

1 (*a*). Sur l'ensemble des fonctions $R^{+*} \to R^{+*}$ continues, on définit la relation d'équivalence m par $q_1 \overset{m}{\simeq} q_2$ s'il existe des constantes strictement positives a, b, k_1, k_2, telles que

$$(m) \qquad a q_1(k_1 u) \leqq q_2(u) \leqq b q_1(k_2 u) \quad \text{pour tout } u \in R^{+*};$$

cependant si l'on restreint (m) à $u < u_0$ (resp. $u > u_0$) on notera (m_0) [resp. (m_∞)] la relation obtenue.

(1) Pour l'ensemble de ce paragraphe, on pourra consulter les articles [4] et [5] et le livre [2].

Nous utiliserons la notation suivante (peu correcte mais sans ambiguïté) : si (p) est une certaine propriété, nous écrirons $q \overset{m}{\sim} (p)$ s'il existe dans la m-classe de q une fonction ayant la propriété (p).

q-fonction ([4], [5]). — On désignera ainsi une fonction q équivalente à une fonction q_1 croissante, continue, $\lim q_1(u) = 0$, $\lim q_1(u) = \infty$. Si, de plus, q_1 est convexe $\left[\text{soit } \frac{q_1(u)}{u} \text{ croissante}\right]$ on dira que q est une *fonction d'Orlicz*.

1 (*b*). Espaces $L_f(V, \mathcal{B}, \mu)$ d'un espace mesuré [μ-mesure normale, c'est-à-dire que $(V, \mathcal{B}, \mu)$ est somme directe (de cardinal quelconque) d'espaces de mesure finie]. Si g est une classe de fonctions $V \to R^+$ (pour l'égalité μ-p. p.), on pose

$$I_f(g) = \int_V f(|g|)\, d\mu,$$

$$L_f = \{g;\ \text{il existe } \lambda,\ \lambda \in R^{+*} \text{ tel que } I_f(\lambda g) < \infty\}.$$

L_f est un espace vectoriel métrique [par exemple pour la distance $d_f(0, g) = \min\{\varepsilon,\ I_f\left(\frac{g}{\varepsilon}\right) < \varepsilon\}$] (*cf.* [5]).

Condition Δ_2. — $g \in (\Delta_2)$ s'il existe $k > 1$ tel que pour tout x, on ait

$$q(2x) \leq k\, q(x).$$

Convergence en moyenne. — On dira que g_n tend vers g en moyenne dans L_f si $I_f(|g - g_n|)$ tend vers zéro.

Proposition ([2], [5]). — $f \in \Delta_2$ *est une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout espace* $(V, \mathcal{B}, \mu)$, *la convergence en moyenne et la convergence pour la distance* d_f *soient équivalentes dans* $L_f(V, \mathcal{B}, \mu)$ *et que l'espace* $E(V, \mathcal{B}, \mu)$ *des fonctions étagées soit dense dans* L_f.

Espaces d'Orlicz. — Si f est une fonction d'Orlicz, alors L_f est un espace de Banach, de plus si $f \in (\Delta_2)$, nous pouvons prendre comme norme sur L_f la norme (dite de Luxembourg) :

$$\|g\| = \inf\{\varepsilon > 0,\ I_f\left(\frac{g}{\varepsilon}\right) \leq 1\}.$$

Espaces s-normés. — Nous appellerons s-norme ([5]) une métrique s-homogène $0 < s < 1$ $(\|\lambda g\|_s = |\lambda|^s \|g\|_s)$.

Proposition ([5]). — *La condition* $f(u) \overset{m}{\sim} q_1(u^s)$, *où* q_1 *est une fonction d'Orlicz est nécessaire et suffisante pour que* L_f *soit s-normé* $0 < s < 1$; *et on peut poser*

$$\|g\|_s = \inf\{\varepsilon,\ I_f\left(\frac{g}{\varepsilon^{\frac{1}{s}}}\right) \leq 1\}.$$

Remarque générale. — Si μ est diffuse, de masse infinie, nous nous intéresserons aux q-fonctions générales; si μ est finie (resp. si μ est la mesure de Haar sur Z) il n'y a lieu, pour l'étude de $L_f(\mu)$, de s'intéresser qu'aux valeurs de f sur $[1, \infty[$ (resp. aux valeurs sur $]0, 1]$). Dans toute la suite, nous nous intéresserons essentiellement aux deux cas suivants : μ mesure diffuse infinie, μ mesure de Haar sur Z, comme nous l'avons expliqué dans l'introduction.

2. Classes $K(p, p')$ et fonctions de type négatif.

2 (*a*) *Définition de* $K(p, p')$. — On désignera par $K(p, p')$, $p, p' \geqq 0$, l'ensemble des m-classes de fonctions q ayant la propriété suivante : il existe $f \in q$, $f_1 \in q$ telles que $\frac{f(u)}{u^p}$ soit décroissante et que $\frac{f_1(u)}{u^{p'}}$ soit croissante.

2 (*b*) *Fonctions de type négatif.* — Une fonction $\psi : R \to C$ est dite de *type négatif* si ψ est continue, $\psi(0) = 0$, et si, pour tout n, tout $t_i \in R$, tout $\rho_i \in R$ et $\sum_1^n \rho_i = 0$, on a

$$\sum_{i,j} \psi(t_i - t_j)\rho_i\rho_j \leqq 0.$$

La formule de Lévy-Khintchine ([1]) donne une représentation des fonctions de type négatif; pour la suite nous nous limiterons au cas réel ($\psi : R \to R$), on a alors

$$\psi(t) = \int_0^\infty (1 - \cos tx)\, dM(x) + \frac{\sigma^2}{2} t^2$$

où $\sigma \in R^+$ et dM est une mesure de Lévy sur R^+, c'est-à-dire que dM est telle que $\int_1^\infty dM < \infty$ et $\int_0^1 x^2\, dM(x) < \infty$. Nous appellerons fonction de Lévy associée à dM, la fonction

$$M(x) = \int_x^\infty dM(u).$$

2 (*c*) Les théorèmes suivants caractérisent les classes $K(2, 0)$ et $K(2, 1)$.

THÉORÈME I.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° $q \in K(2, 1)$;

2° *il existe une fonction de Lévy* N *telle que*

$$q \overset{m}{\sim} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u\, N(u)\, du + x \int_{\frac{1}{x}}^\infty N(u)\, du;$$

3° *il existe une fonction de Lévy* M *telle que*

$$q \overset{m}{\sim} x \int_0^\infty (1 - e^{-ux})\,\mathrm{M}(u)\,du;$$

4° *il existe une q-fonction* q_1 *telle que* $q_1(\sqrt{x})$ *soit concave et* $q \overset{m}{\sim} q_1$;

5° *il existe une fonction de type négatif* ψ, *telle que* $\frac{\psi(x)}{x} \overset{m}{\sim} q_1$ *croissante et* $q \overset{m}{\sim} \psi$.

Théorème I.2. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° $q \in \mathrm{K}(2, 0)$;

2° *il existe une mesure de Lévy* M *telle que* $q \overset{m}{\sim} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u\,\mathrm{M}(u)\,du$;

3° *il existe une fonction de type négatif* ψ, *telle que* $\psi \sim q_1$ *croissante et* $q \overset{m}{\sim} \psi$.

Démonstration :

(*a*) Théorème I.1 : Il est évident que $2 \to 1$ et $4 \to 1.1 \to 4$ (*cf.* [4]). $2 \leftrightarrow 3$, la *m*-équivalence se conservant par intégration, cela résulte de $(1 - e^{-ut})t \sim u$.

La démonstration élémentaire de $1 \to 2$ est assez longue, il est plus simple de montrer que $4 \to 2$ (*cf.* aussi [8], p. 333 et [4]).

La démonstration de $5 \leftrightarrow 1$ sera donnée dans le paragraphe II.3.

(*b*) Théorème I.2 : $2 \to 1$, évident; $1 \to 2$, élémentaire (*cf.* aussi [9]). $1 \leftrightarrow 3$, la démonstration sera donnée dans le paragraphe II.2.

3. Espaces de Banach ε-μ-invariants. Espaces de type p et f.

3 (*a*) *Espaces ε-invariants.* — On dit qu'un espace de Banach B de classes de fonctions mesurables sur $(\mathrm{V}, \mathcal{B}, \mu)$ [B, sous-espaces de $\mathrm{M}(\mathrm{V}, \mathcal{B}, \mu)$] est un espace ε-invariant si :

1° $\mathrm{E}(\mathrm{V}, \mathcal{B}, \mu)$, espace des fonctions étagées est dense dans B.

2° Pour toute fonction mesurable ε telle que $|\varepsilon| = 1$, pour tout $f \in \mathrm{B}$, on a $\varepsilon f \in \mathrm{B}$ et $\|\varepsilon f\| = \|f\|$.

Remarque. — Dans la plupart des problèmes concernant les espaces de suites on remplace avantageusement la définition précédente par la suivante :

Soit (Z_n) une suite de variables de Bernoulli indépendantes $\left[\mathrm{P}(\mathrm{Z}_i = \pm 1) = \frac{1}{2}\right]$, alors on dit que B est ε′-invariant si

$$(c_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathrm{B} \qquad \text{implique} \quad \sum_1^\infty c_n \mathrm{Z}_n \in \mathrm{B} \quad \text{p.s.}$$

et pour toute suite de d,

$$\| (c_n) \| = (c_n Z_n) \| \quad \text{p. s.}$$

Exemples. — Les espaces L^p, $1 \leq p$, les espaces d'Orlicz L_f, $f \in \Delta_2$.

Nous allons préciser quelques propriétés de ces espaces.

LEMME 1. — *Sur* R^n, $n \geq 1$ *toute* ε-*norme* (*norme faisant de* R^n *un espace* ε-*invariant*) *est monotone pour l'ordre naturel.*

Démonstration. — Soient $(x_1, \ldots, x_n) < (y_1, \ldots, y_n)$ deux points de R^n, avec, par exemple, $x_1 < y_1$ et $x_i \leq y_i$ $(2 \leq i \leq n)$.

On a

$$x_1 = p y_1 + q(-y_1), \qquad p + q = 1,$$
$$\| (x_1, \ldots x_n) \| \leq \| (p y_1, p x_2, \ldots, p x_n) \| + \| q(-y_1), q x_2, \ldots, q x_n \|$$

et d'après la propriété ε :

$$\| x_1, \ldots, x_n \| \leq \| y_1, x_2, \ldots, x_n \|,$$

d'où le résultat par itération :

$$\| x_1, \ldots, x_n \| \leq \| y_1, y_2, \ldots y_n \|.$$

LEMME 2. — *Si* $g, h \in B$ *et* $gh = 0$ *alors* $\| g \| < \| g + h \|$.

En effet

$$g = \frac{1}{2}(g + h + g - h),$$

donc

$$\| g \| \leq \frac{1}{2} \| g + h \| + \| g - h \|$$
$$\leq \| g + h \| \qquad (\varepsilon\text{-propriété}).$$

Indiquons d'abord un résultat sur les ε-espaces de suites.

Si B *est un* ε-*espace de suites, si* $g \in B$ *et si* ${}^k g$ *est la suite* ε *tronquée à* $k(g(n)) = 0$ *pour* $n > k$, *alors :*

(i) ${}^k g \xrightarrow{B} g$;

(ii) *la norme est monotone sur* B *muni de l'ordre naturel* [$u < v$ *si* $u(n) \leq v(n)$ *pour* $n \in N^*$].

Comme E est dense dans B, il existe une suite $g_m \xrightarrow{B} g$, $g_m \in E$:

$$\| {}^k g - g \| \leq \| g - g_m \| + \| {}^k g_m - {}^k g \| + \| g_m - {}^k g_m \|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, pour m assez grand $\| g - g_m \| < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le lemme 2,

$$\| {}^k g - {}^k g_m \| = \| {}^k (g - g_m) \| \leq \| g - g_m \|.$$

Pour k assez grand, on a ${}^kf_m = f_m$ et donc pour k assez grand, $\| g - {}^kg \| \leqq \varepsilon$ donc ${}^kg \uparrow g$ dans B.

Soient maintenant f_m^n et $g \in B$, $f \leqq g$ implique ${}^kf \leqq {}^kg$ et, d'après ce qui précède, $\| {}^kf \| \leqq {}^kg \|$ (lemme 1) et par passage à la limite, $\| f \| \leqq \| g \|$.

Étudions maintenant le cas général.

PROPOSITION. — *Pour tout* $f \in B$ *espace-*ε *il existe une suite* f_k *de fonctions étagées telle que* $f_k \to f$ μ-p. s. *et dans* B. *De plus la norme est monotone sur* B [*muni de l'ordre naturel* $f \leqq g$ *si* $f(v) \leqq g(v)$ μ-p. s.].

Démonstration. — B est réticulé puisque f signe $f \in B$ (ε-propriété) et donc aussi $g \cup f$ et $g \cap f$.

(a) Soit $|f| \leqq m < \infty$ μ-p. s. et $f = 0$ en dehors d'un ensemble A, $\mu(A) < \infty$. Comme E est dense dans B il existe une suite $f_m \in E$ telle que $f_m \xrightarrow{B} f$.

On peut toujours choisir f_m à valeurs dyadiques [$f_m \in E$, d'après le lemme 1 il existe une suite à valeurs dyadiques (on se place dans l'espace de dimension finie associée à f_m), f_m^n telle que $f \uparrow f_m$ et donc $f_m^{m'} \xrightarrow{B} f$].

Soit ${}^kf$ une suite telle que ${}^kf \uparrow f$ μ-p. s. et $f - {}^kf < \frac{1}{k}$, k dyadique. Une telle suite existe d'après les hypothèses faites sur f dans (a). On a

$$\| {}^kf - f \| \leqq \| {}^kf - {}^kf_m \| + \| {}^kf_m - f_m \| + \| f_m - f \|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, pour m assez grand $\| f_m - f \| < \frac{\varepsilon}{4}$. Soit alors $k > k_1$ tel que ${}^kf_m - f_m = 0$ (ce qui est loisible puisque k est dyadique et que f_m ne prend qu'un nombre fini de valeurs dyadiques) :

$$ {}^kf - {}^kf_m = g + f - f_m \qquad \text{avec} \quad |g| \leqq \frac{2}{k}.$$

Donc

$$\| {}^kf - {}^kf_m \| < \| f - f_m \| + \| g \|.$$

Pour $k > k_2$:

$$\| g \| \leqq \frac{2}{k} \| 1_A \| \leqq \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{et donc} \quad {}^kf \uparrow f \quad \mu\text{.p.s. et dans B.}$$

(b) Soit maintenant $0 < f < m$. f étant mesurable, est nulle en dehors d'une infinité dénombrable d'ensembles A_i, $\mu(A_i) < \infty$ [puisque μ est normale, *cf.* § 1 (b)]. Soit $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$,

$$f = f 1_{A_i} + f 1_{V - A_i} \in B \qquad \text{et aussi} \quad f 1_{A_i} - f 1_{V - A_i} \in B \quad (\varepsilon\text{-propriété}),$$

donc $f 1_{A_i} \in B$.

Pour tout i il existe k_i tel que

$$\| k_i(f\,1_{A_i}) - f\,1_{A_i} \| \leq \frac{\varepsilon_n}{2^i}, \quad (\varepsilon_n \to 0), \quad \text{d'après } (a),$$

donc si l'on pose $g_n = \sum_{i=1}^{\infty} {}^{k(n)} f\,1_{A_i}$, on a

$$g_n \uparrow f \quad \mu\text{-p.s.}, \qquad g_n \in E \qquad \text{et} \qquad g_n \xrightarrow{B} f.$$

(c) f est quelconque. Soit $A_n = \{ v, n \leq f(v) < n+1 \}$. Soit $\varepsilon_p \to 0$. D'après (a) et (b) il existe une suite ${}^{k_n(p)} f\,1_{A_i} \in E$ telle que

$$\| {}^{k_n(p)}(f\,1_{A_n}) - f\,1_{A_n} \| \leq \frac{\varepsilon_p}{2^n},$$

donc si

$$g_p = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{k_n(p)}(f\,1_{A_n}),$$

$$g_p \in E \qquad \text{et} \qquad g_p \uparrow f \quad \mu\text{-p.s.}, \qquad g_p \xrightarrow{B} f.$$

On démontre de même la monotonie de la norme.

(3 b) *Espaces μ-invariants.* — Soit B un espace de Banach de fonctions mesurables sur $(V, \mathcal{B}, \mu)$ [B, sous-espace de $M(V, \mathcal{B}, \mu)$].

B est dit *μ-invariant* si :

(i) E est dense dans B;

(ii) si $f \in E$, $\|\tau f\| = \|f\|$ pour tout $\tau \in \mathcal{G}$ groupe des automorphismes d'algèbre de $\mathcal{B}$ conservant la mesure μ;

$$\text{si} \quad f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, 1_{(A_i)}, \qquad \tau f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, 1_{\tau(A_i)}.$$

L'espace B est dit *ε-μ-invariant* s'il est ε-invariant et μ-invariant (*).

Exemple. — Les espaces L^p, L_f, etc.

Dans le cas des espaces de suites, ces définitions coïncident avec celles de ε-σ-invariance données dans l'introduction.

(3 c) *Plongements, espaces de type f et de type p.*

Définition. — On dira qu'une application linéaire Z d'un espace vectoriel normé B dans un espace vectoriel C est un *plongement* de B dans C de bornes (m, M) si

$$0 < m = \inf_{x \in B} \frac{\| Z(x) \| C}{\| x \|_B} \leq \sup_{x \in B} \frac{\| Z(x) \| C}{\| x \|_B} = M < \infty.$$

Si $m = M = 1$, on a une isométrie.

(*) Dans le cas où μ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ ces espaces sont dits invariants par réarrangements, dans la littérature classique.

Soit f une classe de fonctions d'Orlicz. Un espace de Banach B sera dit de type f s'il existe un espace mesuré $(\mathfrak{X}, m)$ et un plongement $B \to L_f(X, m)$. Dans le cas où $f(x) = x^p$ $(0 < p \leqq \infty)$, on dira espace de type p.

Remarque. — Dans nos travaux [3], [10], [11], [12] dans la définition de type p, nous avons imposé que l'injection soit une isométrie. Nous abandonnerons ce point de vue ici car sur les espaces d'Orlicz il n'y a pas de norme privilégiée. Cependant comme on le verra au cours de la démonstration du théorème principal, on a la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Si* B *est un* ε-μ-*espace* (*en particulier si* B *est un espace d'Orlicz*) *de type* p, *on peut toujours choisir sur* B *une norme équivalente à la norme donnée, qui soit encore* ε-μ-*invariante, telle que* $B \to L_p(\mathfrak{X}, m)$ *soit une isométrie pour cette norme.*

Nous commençons par étudier le problème suivant : à quelle condition un espace L^p est-il de type f ?

PROPOSITION I.3. — (*a*) *Si* $1 \leqq p \leqq 2$, *une condition suffisante pour que* L^p *soit de type* f *est que*

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx < \infty \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqq p < 2,$$

$$f \in \Delta_2 \qquad \textit{pour} \quad p = 2.$$

(*b*) *Une condition nécessaire et suffisante pour que* L^q *soit de type* p *est*

$$p \leqq q \leqq 2 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq 2.$$

Démonstration. — La partie (*b*) a été démontrée dans [12]. La démonstration de (*a*) est très simple. Le résultat sera d'ailleurs amélioré dans la deuxième partie.

Soit X la forme linéaire aléatoire stable (*cf.* [12] pour ces formes) définie sur $L^p(V, \mathcal{B}, \mu)$ par

$$-\log E \exp i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X(f_j) = \left\| \sum_j \lambda_j f_j \right\|_p^p \qquad \text{pour} \quad f_j \in L^p \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Alors L^p et L_X [complétion de $X(L^p)$ en probabilité] sont isomorphes ([12], III^e partie).

Soit $\bar{p}(.)$ la densité de la loi stable de fonction caractéristique $\exp\text{-}|t|^p$; $p \leqq 2$. La condition cherchée résulte de l'homogénéité de $\bar{p}$.

Supposons, par exemple, $p = 2$, $f \in \Delta_2$. Soit X une forme gaussienne, et

$$\int f(X(g))\, dP < \infty \qquad \text{équivaut à} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, \|g\|_2} \int f(x) \exp - \frac{x^2}{2\, \|g\|_2^2}\, dx < \infty,$$

ce qui est toujours vrai si $f \in \Delta_2$ $\left[\text{et même si } f \in L^1\left(\exp - \frac{x^2}{2a} dx\right)\right]$.

On a alors

$$\|X(g)\|_{L_f(\Omega,\mathfrak{A},P)} = \theta(g)$$
$$= \inf\left\{\theta,\ \int f\left(\frac{X(g)}{\theta}\right) dP \leq 1\right\}$$
$$= \inf\left\{\theta,\ \int f(x) \exp - \frac{x^2\theta^2}{2\|g\|_2^2}\,\frac{\theta\, dx}{\sqrt{2\pi}\,\|g\|_2} \leq 1\right\}$$

et donc si

$$\theta' = \inf\left\{\theta,\ \int f\left(\frac{x}{\theta}\right) \exp - \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \leq 1\right\},$$

on a

$$\|g\|_2 = \theta'\theta(g).$$

L'application $\frac{1}{\theta}X$ de L^2 dans $L_f(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ est donc une isométrie.

La même démonstration vaut pour $1 \leq p < 2$, mais si $g \in L^p$, pour que $X(g) \in L_f(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ il faut que

$$\int f(x)\,\bar{p}\left(\frac{x}{\|g\|_p}\right)\frac{dx}{\|g\|_p} < \infty$$

soit

$$\int_1^\infty f(x)\,\frac{dx}{x^{p+1}} < \infty.$$

Revenons maintenant aux espaces L^p.

Théorème I.4 (*de finitude*). — *Pour que* B *soit de type* $p\,(1 \leq p < \infty)$, *il faut et il suffit qu'il existe des constantes* m, M *et un plongement* (m, M) *de tout sous-espace* F *de dimension finie de* B *dans un espace* $L^p(V_F, \mathcal{B}_F, \mu_F)$.

La démonstration de ce théorème est identique à celle que l'on trouve dans ([12], p. 246) à ceci près qu'il faut remplacer l'isométrie i par un plongement (m, M).

Application aux espaces d'Orlicz.

Théorème I.5. — *Pour qu'un espace d'Orlicz* $L_f(V, \mathcal{B}, \mu)$ *soit de type* p, *il suffit que* $L_f(\mathbf{R}, \mathcal{B}, dx)$ *soit de type* p.

En effet, tout sous-espace de dimension finie de $L_f(V, \mathcal{B}, \mu)$ est isométrique à un certain sous-espace de $L_f(\mathbf{R}, \mathcal{B}, dx)$ (élémentaire). Donc, s'il existe un plongement (m, M) de $L_f(\mathbf{R}, \mathcal{B}, dx)$ dans $L^p(\mathfrak{X}, m)$, il existe un tel plongement de tout sous-espace de dimension finie de $L_f(V, \mathcal{B}, \mu)$ dans L^p, donc de $L_f(V, \mathcal{B}, \mu)$.

Dans la suite nous donnerons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $L_f(V, \mathcal{B}, \mu)$ soit de type p, lorsque $d\mu = dx$ sur R.

DEUXIÈME PARTIE.

Formes linéaires aléatoires a accroissements indépendants et homogènes. Intégrabilités de divers types pour une telle forme.

1. Formes linéaires aléatoires. Généralités et définition de certaines classes particulières de formes. — Soient F un espace vectoriel, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, $L(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace des classes de variables aléatoires (pour l'égalité P-p. s.). Une forme linéaire aléatoire X sur F est une application linéaire $F \to L$.

Soit $(V, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, E l'espace des classes de fonctions étagées, M les classes de fonction mesurable (classes pour l'égalité μ-p. p.).

Définition. — Une fonction $g \in M$ est dite X-intégrable (en probabilité) ou $(X - P)$ intégrable s'il existe une variable aléatoire Z ayant la propriété suivante :

1° Il existe une suite g_n, $g_n \in E$,

$$g_n \to g \quad \mu\text{-p. s.}, \qquad X(g_n) \to Z \quad \text{en probabilité.}$$

2° Pour toute suite h_n, $h_n \in E$, $h_n \to g$ μ-p. s. telle que $X(h_n)$ converge en probabilité, alors $X(h_n) \to Z$.

Z sera dite l'intégrale de g et l'on posera $Z = X(g)$.

Définition. — Nous dirons qu'une forme X définie sur E est à accroissements indépendants si pour toute suite finie $f_1, \ldots, f_n$ d'éléments de E, étrangers deux à deux $(f_i f_j = 0,\ i \neq j)$, les variables $X(f_1), \ldots, X(f_n)$, sont indépendantes et si, de plus, $f_n \to 0$ (μ-p. s.) implique $X(f_n) \to 0$ (P-p. s.).

De telles formes sont aussi appelées mesures aléatoires, leur étude est faite dans [13].

Définition. — Nous dirons qu'une forme X définie sur E, est homogène ou μ-invariante si elle est invariante en loi pour les automorphismes d'algèbre conservant μ, et si elle est continue en probabilité, c'est-à-dire si $\tau \in \mathcal{T}$ groupe des automorphismes de $\mathcal{B}$ conservant μ, $\{X(f_1), \ldots, X(f_n)\}$ et $\{X(\tau f_1), \ldots, X(\tau f_n)\}$ ont la même loi dans R^n et si $f_n \to 0$ en μ-mesure, $X(f_n) \to 0$ en probabilité.

Définition. — Une forme X définie sur E sera dite ε-invariante (ou symétrique) si pour toute suite $f_1, \ldots, f_n \in E$, tout $\varepsilon \in M$ tel que $|\varepsilon| = 1$, la loi de $\{X(\varepsilon f_1), \ldots, X(\varepsilon f_n)\}$ est la même que celle de $\{X(f_1), \ldots, X(f_n)\}$.

2. Formes a accroissements indépendants et homogènes. — Nous allons maintenant étudier les formes à accroissements indépendants,

homogènes et symétriques sur $E(V, \mathcal{B}, \mu)$ la caractérisation de ces formes est donnée par la proposition suivante :

Proposition. — *Si μ a une partie diffuse de masse infinie, toute forme à accroissements indépendants homogènes et symétriques est associée à une fonction de type négatif réelle sur* R *et réciproquement.*

Remarque. — Si μ est la mesure de Haar sur Z (espaces de suites), il faut remplacer type négatif par type positif. Dans le cas général la situation est plus compliquée, en particulier si μ est diffuse et finie, la correspondance n'est plus biunivoque.

La démonstration de cette proposition est élémentaire, la partie directe est triviale, la réciproque résulte du théorème de Kolmogorov (*cf.* [7], p. 149) en définissant la loi de $(X(1_{A_1}), \ldots, X(1_{A_n}))$, $A_j \in \mathcal{B}$, $j=1$, par

$$E \exp it \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X(1_{A_j}) = \exp - \sum_{k=1}^{R(n)} \mu(B_k)\psi\left(\sum_{j=1}^{n} t\lambda_j \rho_j^k\right),$$

où B_k est la partition de $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ engendrée par les A_j et

$$g_k^j = \begin{cases} 1 & \text{si } B_k \subset A_j, \\ 0 & \text{si } B_k \cap A_j = \emptyset. \end{cases}$$

La continuité de X est immédiate.

Proposition. — *Soit*

$$\psi(t) = \int_0^\infty (1 - \cos tx)\, dM(x) + \frac{\sigma_2}{2} t^2 \qquad \text{alors} \quad X = X_1 + X_2,$$

où X_1 est la forme à accroissements indépendants associée au terme intégral, et X_2 la forme gaussienne associée à $\frac{\sigma^2}{2}t^2$; X_1 et X_2 sont indépendantes c'est-à-dire que, quelles que soient les suites finies $\{f_i\}$, $\{g_j\}$ de E, *les familles $X_1(f_i)$ et $X_2(g_j)$ sont indépendantes.*

Démonstration immédiate. — Pour simplifier nous supposerons dorénavant μ diffuse de masse infinie. Tous les théorèmes restent vrais pour μ mesure de Haar sur Z, mais il n'en est pas ainsi pour μ quelconque. Nous noterons $[X(E), P]$ la complétion de $X(E)$ pour la métrique de la convergence en probabilité.

Définition. — Soit $f \in M(V, \mathcal{B}, \mu)$. Nous dirons que f est X-*intégrable* s'il existe une suite $f_n \in E$, telle que

(1) $$f_n \to f \quad \mu\text{-p. s.};$$

(2) $$X(f_n) \to Z \in L(\Omega, \mathfrak{A}, P).$$

Nous désignerons par L_X l'ensemble des fonctions X-intégrables.

THÉORÈME II.1.

1° *f étant fixée, Z est indépendant de la suite f_n;*

2° $[X(E), P] = \{ X(f), f \text{ X-intégrable} \} = X(L_X)$;

3° L_X *est un q-espace ou* $q \in \Delta_2$ *et est donnée par*

$$q_X(x) = x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u^2 \, dM(u) \qquad (\text{si } \sigma = 0)$$

$$= x^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} u^2 \, dM(u) \wedge 1 \right) \qquad (\text{si } \sigma > 0),$$

dM étant la mesure de Lévy associée à X.

Remarques :

(*a*) On peut aussi caractériser L_X par

$$L_X = \left\{ g ; \int_v \psi(tg(v)) \, d\mu(v) \text{ est continue en } t \text{ sur } R \right\}.$$

(*b*) 1° et 2° sont encore valables si X n'est pas homogène.

Démonstration. — Soit

$$\Lambda = \{ h, h \in M ; d(0, h) < \infty \} \qquad \text{ou} \qquad d^2(0, h) = \int_{V \times R} (x^2 h^2(v) \wedge 1) \, d\mu(v) \, dM(x).$$

LEMME. — *$d(h_1, h_2) = d(0, h_1 - h_2)$ définit une distance pour laquelle Λ est un espace vectoriel complet,* E *est dense dans* Λ.

De plus la fonction $u \to d(0, uh)$ est croissante sur R^+, continue en 0, $d(0, uh) \leqq (u \vee 1) \, d(0, h)$. En effet, de $|a - b| \wedge 1 \leqq |a - c| \wedge 1 + |c - b| \wedge 1$ on déduit par intégration que d est une distance.

Soit g_n une (Λ, d)-suite de Cauchy. Comme

$$\lim_{m, n} \int_{R \times E} x^2 (g_n(v) - g_m(v))^2 \, d\mu(v) \, dM(x) = 0$$

il existe h tel que $g_n \to h$ en μ-mesure.

Soit g'_n une sous-suite telle que $g'_m - h$ μ-p. s. D'après le lemme de Fatou, on a

$$\int_{R \times E} \lim \int (1 \wedge x^2 g'^2_m(v)) \, d\mu(v) \, dM(x) \leqq \lim (1 \wedge x^2 g'^2_m(v)) \, d\mu(v) \, dM(x) < \infty,$$

donc $h \in \Lambda$. Soit $h_m \in E$, $h_m h$ μ-p. s. $(hh_m \geqq 0)$. Le théorème de Lebesgue montre alors que $d(h_m, h) \to 0$ donc E est dense dans Λ. Le reste du lemme est immédiat, en remarquant que pour $u^2 \geqq 1$,

$$u^2 a^2 \wedge 1 \leqq u^2 (a^2 \wedge 1).$$

Soit d_f une distance associée à la convergence en probabilité; soit $(g_n) \in \mathrm{E}$ telle que $(\mathrm{X}(g_n))$ soit une d_f-suite de Cauchy. Posons

$$\psi_f(t) = -\log \mathrm{E} \exp it \mathrm{X}(f); \qquad f \in \mathrm{E},$$

on a alors $\psi_{g_n - g_m}(t) \to 0$ uniformément sur tout compact, donc

$$\frac{1}{t} \int_0^t \psi_{g_n - g_m}(s)\, ds \to 0$$

soit

$$\frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathrm{E} \times \mathrm{R}} [1 - \cos x (g_n(v) - g_m(v))]\, d\mu(v)\, d\mathrm{M}(x)\, ds \to 0$$

ou

$$\int_{\mathrm{E} \times \mathrm{R}} [1 \wedge t^2 x^2 (g_n(v) - g_m(v))^2]\, d\mu(v)\, d\mathrm{M}(x) \to 0$$

$$\left(\text{car } 1 - \frac{\sin x}{x} \overset{m}{\approx} 1 \wedge x^2\right),$$

donc g_n est une (Λ, d)-suite de Cauchy.

Réciproquement, comme $\psi_{g_n - g_m}(t) \leqq d^2(tg_n, tg_m)$, si g_n est une (Λ, d) suite de Cauchy, alors $\mathrm{X}(g_n)$ est une d_p-suite de Cauchy. De plus, $\psi_g(t) = \int \psi(tg(v))\, d\mu(v)$ existe et est continue si $g = \lim_n g_n$ [dans (Λ, d)]. On peut donc poser $\mathrm{X}(g) \overset{\mathrm{P}}{=} \lim_n \mathrm{X}(g_n)$. Il reste à montrer que $\mathrm{X}(g)$ est indépendante du choix de (g_n). Soit $h_m \in \mathrm{E}$, $gh_m \geqq 0$, $h_m \uparrow g$ μ-p. s.; $g, h_m \in \Lambda$, d'après le théorème de Lebesgue $h_m \xrightarrow{\Delta} g$, et $\lim \psi_{h_m}(t) = \psi_g(t)$.

De plus :

$$\begin{aligned} \psi_{h_m - g_n}(t) &\leqq d^2(th_m, tg_n) \\ &\leqq [d(th_m, tg) + d(tg, tg_n)]^2, \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{X}(h_m) - \mathrm{X}(g_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$; $\mathrm{X}(g)$ est donc déterminée par g. La forme de q provient de la formule

$$\int_{\mathrm{V} \times \mathcal{R}} (x^2 h^2(v) \wedge 1)\, d\mu(v)\, d\mathrm{M}(x) = \int_{\mathrm{V}} q(h(v))\, d\mu(v);$$

$q(\lambda)$ est croissante, $q(2\lambda) \leqq 2q(\lambda)$, on a $q \in \Delta_2$. Le théorème est démontré si $\sigma = 0$. Si $\sigma \neq 0$, on a $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$, X_2 partie gaussienne,

$$[\mathrm{X}_2, \mathrm{P}] = \mathrm{L}^2(\mathrm{V}, \mathcal{B}, \mu) \qquad \text{et donc} \quad \mathrm{L}_{\mathrm{X}} = \mathrm{L}_{\mathrm{X}_1} \cap .\mathrm{L}^2$$

Démonstration de $1 \leftrightarrow 3$ *du théorème* I.2 *du paragraphe* 2. — Supposons que ψ soit de type négatif et croissante (à une m-équivalence près) et soit x

la forme associée. On sait que

$$L_X = \left\{ f, \int \psi(tf(v))\, d\mu(v) \text{ est continue en } t \right\}$$

mais de la croissance de ψ, on déduit que

$$L_X = \left\{ f, \int \psi(tf(v)\, d\mu(v) < \infty \text{ pour un } t \right\}$$

et donc $\psi \sim q$ fonction déterminante de L_X, soit $5 \to 1$.

Supposons maintenant que $q \in K(2, 0)$. On sait (puisque $1 \leftrightarrow 2$) que q peut s'écrire

$$q(x) \sim x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u\, M(u)\, du$$

ou encore

$$q(x) \sim \int (x^2 u^2 \wedge 1)\, dM(u),$$

or, pour tout a, il est facile de vérifier que $x^2 a^2 \wedge 1$ est $\overset{m}{\sim} 1 - e^{-a^2 - x^2}$, d'où le résultat $1 \to 3$.

3. Formes a valeurs dans L^p et L_f, $f \in K(2, 0)$. — On considère les formes à accroissements indépendants homogènes et symétriques à valeurs dans un sous-espace de Banach B de $L(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour les applications que nous avons en vue ici et dans un travail à publier ultérieurement, nous nous intéressons au cas $B = L_f(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $p < \infty$. Dans l'article [9], on trouve des résultats analogues à ceux du théorème II.1 dans le cas particulier $p = 1$. Les calculs du paragraphe sont élémentaires, mais on y voit bien l'intérêt de choisir pour $f \in K(2, 0)$ une représentation de type négatif.

Définition. — Si f est une q-fonction, si X est une forme définie sur $E(V, \mathcal{B}, \mu)$ à valeurs dans $L_f(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on désigne par $[X, f]$ la complétion de $X(E)$ dans l'espace L_f (qui est complet pour la métrique introduite dans la partie I).

Définition. — On dira que g est $(X - f)$-intégrable s'il existe une variable Z qui ait les propriétés suivantes :

1° il existe g_n, $g_n \in E$, $g_n \to g$ μ-p. s. et $X(g_n) \to Z$ dans $L_f(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$;

2° pour toute suite h_n, $h_n \to g$ μ-p. s. telle que $X(h_n)$ converge dans L_f alors $X(h_n) \to Z$ dans $L_f(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Nous désignerons dans la suite par $L_{X,f}$, l'espace des fonctions (X, f) intégrables.

THÉORÈME II.2. — *Soit* $f \in K(2, 0)$ *ou* $f(x) = x^p$, $p < \infty$.

1° *Le complété* $[X, f]$ *de* $X(E)$ *dans* $L_f(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *est égal à* $\{X(g), g : (X, f)$ *intégrable*$\}$ *et aussi à* $X(L_{X,f})$.

2° $L_{X,f}$ *est un q-espace* $L_{q(X,f)}(V, \mathcal{B}, \mu)$.

Si $f(x) \in K(2, 1)$ *alors* $q_{X,f} \in K(2, 1)$.

Si $f(x) = x^p$ *alors* $q_{X,f} \in K(2, 1)$ *et pour* $p \leqq 2$, $q_{X,f} \in K(2, p)$.

Si $f(x) \in K(2, 0)$, $q_{X,f} \in K(2, 0)$ *et dans tous les cas* $q_{X,f} \in \Delta_2$.

Enfin on a la formule générale

$$q_{X,f}(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} u^2\, dM(u) + \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} f(\lambda u)\, dM(u).$$

Démonstration. — On suppose $\sigma^2 = 0$ pour la forme X.

Premier cas : $f \in K(2, 0)$ et $X(E) \subset L_f(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. On a

$$E\, f(X(g)) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\, dF_{X(g)}(x), \qquad g \in E$$

$$\iint_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+} (1 - \cos ux)\, dM(u)\, dF_{X(g)}(x),$$

où M est la fonction de Lévy de f puisque d'après le théorème I.2 on peut considérer f comme de type négatif et la représenter sous la forme

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}^+} (1 - \cos ux)\, dM(u).$$

Donc

$$E f(X(g)) = \int_{\mathbf{R}^+} (1 - \varphi_{X(g)}(u))\, dM(u) \quad (\varphi_{X(g)}(u) = E \exp iuX(g))$$

$$= \int_{\mathbf{R}^+} (1 - \exp - \psi_{X(g)}(u))\, dM(u).$$

Or dM est intégrable à l'infini comme mesure de Lévy et donc

$$\int_1^{\infty} (1 - \exp - \psi_{X(g)}(u))\, dM(u) \leqq 2M(1).$$

Soit

$$E f(X(g)) = \int_0^1 (1 - \exp - \psi_{X(g)}(u))\, dM(u) + O_M(1).$$

Montrons que $X(g_m)$ converge dans L_f si et seulement si :

1° $\psi_{X(g_m)}(u)$ converge vers une fonction continue non nulle.

2° $\lim_n \int_0^1 \psi_{X(g_m)}(u)\, dM(u) < \infty$.

La condition $\psi_{g_m}(u)$ est nécessaire puisque $X(g_m)$ converge en loi. De plus, on sait qu'il faut que $Ef(X(g_m))$ soit uniformément borné, ce qui nécessite :

$$\overline{\lim_n} \int_0^1 (1 - \exp - \psi_{X(g(m))})\, dM(u) < \infty.$$

Mais $\psi_{X(g_m)}(u)$ convergeant uniformément sur $(0, 1)$ vers une fonction continue, cette condition équivaut à

$$\overline{\lim_m} \int_0^1 \psi_{X(g_m)}(u)\, dM(u) < \infty.$$

La condition est nécessaire. Elle est suffisante puisque $1 - e^{-u} < u$. On a alors

$$\int_0^1 \psi_{X(g)}(u)\, dM(u) = \iiint_{[0,1]\times\mathbf{R}^+\times V} (1 - \cos u x g(v))\, dM(u)\, dN(x)\, d\mu(v),$$

où

$$\psi(u) = \int (1 - \cos xu)\, dN(x).$$

Montrons alors que

$$\int_0^1 \psi(ug)\, dM(u)\, d\mu(v) \overset{m}{\sim} \iint_{\{|xg| \leqq 1\}} x^2 g^2\, dN(x)\, d\mu(v) + \iint_{\{|xg| \geqq 1\}} f(xg(v))\, dN(x)\, d\mu(v).$$

On a $1 - \cos ux\, g(v) \sim 1 \cap u^2 x^2 g^2(v)$, donc

$$\int_{\{xg<1\}\times[0,1]} (1 - \cos uxt)\, dM(u)\, dN(x)\, d\mu(v)$$

$$\overset{m}{\sim} \int_{(xg<1)} x^2 g^2(v)\, dN(x)\, d\mu(v) \qquad \text{puisque} \quad \int_0^1 u^2\, dM(u) < \infty \qquad (dM, \text{ mesure de Lévy}),$$

$$\int_{(xg>1)\cap(xgu<1)} (1 - \cos uxt)\, dM(u)\, dN(x)\, d\mu(v)$$

$$= \iint_{\mathbf{R}^+\times V} x^2 g^2(v) \left(\int_{u=0}^{\frac{1}{xg(v)}} u^2\, dM(u) \right) dN(x)\, d\mu(v).$$

Enfin

$$\int_{(xg(v)u>1)} (1 - \cos uxt)\, dM(u)\, dN(x)\, d\mu(v) \overset{m}{\sim} \iint_{\mathbf{R}^+\times V} \left(\int_{\frac{1}{xg(v)}}^{\infty} dM(u) \right) dN(x)\, d\mu(v)$$

or d'après le théorème II.2, on a

$$f(x) \overset{m}{\sim} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u^2\, dM(u) + \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} dM(u),$$

d'où le résultat cherché.

Des calculs élémentaires permettent de vérifier que $q_{X,f} \in \Delta^2$ et $q_{X,f} \in K(2, 0)$ si l'on pose, comme dans le théorème,

$$q_{X,f}(x) = x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} dN(u) + \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} f(xu)\, dN(u).$$

On a donc

$$q_{X,f}(x) \overset{m}{\simeq} \int_0^1 \psi(xu)\, dM(u).$$

On sait que $X(g_n) \to Z$ dans L_f équivaut à

$$\psi_{X(g_n)} \to \psi_Z \qquad \text{et} \qquad \iint_{\substack{0\\ V}}^{1} \psi(g_n(v)u)\, dM(u)\, d\mu(v) < K$$

soit donc à

$$\lim_{m,n} \int q_{X,f}(g_n(v) - g_m(v))\, d\mu(v) = 0.$$

Compte tenu de ces remarques, le théorème II.2 se démontre par des méthodes en tous points analogues à celles utilisées au paragraphe 2.

Deuxième cas : $p = 2n$, $n \in N^\star$, on a alors

$$E\left|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j X(1_{A_j})\right|^{2n} = \sum_{k=1}^{n} d_k^n \left\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_j 1_{A_j}\right\|_{2k}^{2n}$$

où l'indice $2k$ désigne la norme prise dans L^{2k} et d_k^n est une constante, on a donc

$$L_{(X,p)} = L^2 \cap \ldots \cap L^{2k} \cap \ldots \cap L^{2n} = L^2 \cap L^{2n}.$$

Troisième cas : $p > 2$, $p \neq 2n$, $n \in N^\star$.

Soit alors $n \in N$ tel que $2n < p < 2n+2$. Posons

$$P_n(x) = 1 - \cos x - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

On a

$$E|X(g)|^p = \frac{1}{c_p} \int_R \frac{1 - \exp - \psi_g(t) - \sum_{1}^{n} (-1)^k m_{2k}(g) \frac{t^{2k}}{2k!}}{t^{p+1}}\, dt,$$

où

$$c_p = \int \frac{p_n(u)}{u^{p+1}}\, du \qquad \text{et} \qquad m_{2k}(g) = E\,X(g)^{2k}.$$

Un raisonnement analogue à celui fait dans le cas $p < 2$ et des calculs élémentaires montrent que si $X(g_m)$ converge en probabilité, alors $E|X(g_m)^p$ reste borné si et seulement si

$$\sup_m \int_0^1 \frac{\psi(g_m t) - \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{\mu_{2k}(g_m)}{2k!}}{t^{p+1}} dt$$

et

$$\sup_k \sup_m \mu_{2k}(g_m) < \infty \qquad \text{où} \quad \mu_{2k}(g_m) = \psi_g^{(2k)}(0).$$

Posant

$$\hat{f}_{X,p}(x) = x^{n+2} \int_0^{\frac{1}{x}} u^{2n+1} N(u)\, du + x^p \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^{p-1} N(u)\, du$$

et

$$f_{X,p}(x) = x^2 \vee \ldots \vee x^{2n} \vee \hat{f}_{X,p}(x) \overset{m}{\simeq} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u\, N(u)\, du + x^p \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^{p-1} N(u)\, du,$$

on obtient alors que

$$\sup_m E|X(g_m)|^p < \infty \qquad \text{équivaut à} \quad \sup_m \int f_{X,p}(g_m)\, d\mu < \infty.$$

On démontre ensuite le théorème comme dans le cas $p < 2$.

Application. — Fin de la démonstration du théorème I.2.

Il s'agit de montrer que : $f \in K(2, 1) \Leftrightarrow f \overset{m}{\simeq} \psi$ de type négatif, $\frac{\psi(x)}{x}$ croissante $[(1) \Leftrightarrow (5)]$.

$5 \Rightarrow 1$: soit $\frac{\psi(x)}{x}$ fonction croissante donc L_ψ est un espace d'Orlicz. Soit X la forme associée à ψ. Comme ψ est croissante, la continuité de $\int \psi(u\, g(t))\, d\mu(t)$ est équivalente à $\int \psi(ug(t_0))\, d\mu(u) < \infty$ en un point $t_0 \neq 0$. Donc $\psi \overset{m}{\simeq} q_X$; donc $\frac{\psi(x)}{x^2} \overset{m}{\simeq}$ fonction décroissante et donc $\psi \in K(2, 1)$.

$1 \Rightarrow 5$: si $f \in K(2, 1)$, il existe une forme aléatoire X telle que $L_f = L_{X,1}$; mais si ψ est la fonction de type négatif associée à X, on a (*voir* expression de la norme dans L^1) :

$$f(x) \overset{m}{\simeq} \int_0^1 \psi(xu) \frac{du}{u^2},$$

qui est de type négatif, donc $f \overset{m}{\simeq} \psi_1$ de type négatif.

4. Comparaison des espaces L_X et $L_{X,p}$. Réflexivité de $L_{X,1}$. Convexité de L_X. — On se propose de montrer un certain nombre de résultats qui paraissent intéressants en eux-mêmes (théorème II.2) ou qui sont utiles pour la suite (théorème II.4). L'inégalité (★) qui permet de démontrer les théorèmes 2, 3 et 4 est utile dans d'autres problèmes.

Théorème II.3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° $[X(E), P] = [X(E), 1]$ (ce sont les mêmes E. V. T., l'identité étant bicontinue).

2° $[X(E), 1]$ *est réflexif* (*ou la boule unité de* $[X, 1]$ *est équi-intégrable*).

3° *Il existe* $p > 1$ *tel que* $[X, 1] = [X, p]$ *et les* p*-normes sont équivalentes sur* $[X, 1]$ *pour* $1 \leqq p \leqq p$.

Théorème I.3. — *Si* $[X, P] = [X, p]$ *pour* $0 < p < 2$, *alors il existe* $\delta > 0$ *tel que* $E\,|\,X(f)\,|^{p+\delta} < \infty$ *pour tout* $f \in E$ *et* $[X, P] = [X, p']$ *pour* $p \leqq p' \leqq p + \delta$ (autrement dit l'égalité se prolonge à un certain ouvert de $[0, 2[$, bien, qu'*a priori*, on ne sache pas s'il existe des moments d'ordre supérieur à p).

Théorème II.4. — *Si* $f \in K(2, p)$, $p > 1$, *alors il existe une forme* X *à accroissements indépendants homogènes symétriques telle que*

$$L_f = L_{[X,P]} = L_{[X,p']} \quad \text{pour tout } p' < p.$$

Démonstration. — Soit $0 < p < 2$. Supposons $[X, P] = [X, p]$. Nous allons d'abord montrer une inégalité utile dans la suite. Comme $[X, P] = [X, p]$ d'après la caractérisation de ces espaces comme q-espaces, il existe $k > 0$ tel que pour $0 < x < 1$:

$$x^p \int_{x^{-1}}^{\infty} u^{p-1}\, N(u)\, du \leqq k\, x^2 \int_0^{x^{-1}} u\, N(u)\, du.$$

Par intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned}\int_{x^{-1}}^{A} u^{\delta} u^{p-1}\, N(u)\, du &= \left(-\, u^{+\delta} \int_u^{\infty} v^{p-1}\, N(v)\, dv\right)_{x^{-1}}^{A} \\ &\quad + \int_{x^{-1}}^{A} \delta\, u^{\delta-1} \left(\int_u^{\infty} v^{p-1}\, N(v)\, dv\right) du \\ &\leqq -\, A^{\delta} \int_A^{\infty} u^{p-1}\, N(u)\, du + x^{-\delta} \int_{x^{-1}}^{\infty} u^{p-1}\, N(u)\, du \\ &\quad + \int_{x^{-1}}^{A} k u^{p+\delta-3} \left(\int_0^{u} v\, N(v)\, dv\right) du\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{k\delta}{2-p-\delta}\right) \int_{x^{-1}}^{A} u\, u^{p-1}\, N(u)\, du &\leqq k \left(1 + \frac{\delta}{2-p-\delta}\right)^{2-p-\delta} x \int_{x^{-1}}^{\infty} u\, N(u)\, du \\ &\quad - A^{\delta} \int_A^{\infty} u^{p-1}\, N(u)\, du - \left(\int_0^{A} v\, N(v)\, dv\right) \left(\frac{k\,\delta A}{2-p-\delta}\right)^{p+\delta-2}\end{aligned}$$

Soit δ assez petit pour que $1 > \frac{k\delta}{2-p-\delta} > 0$ on obtient alors l'inégalité

$$(\bigstar)\ \sup_{A} \int_{x^{-1}}^{A} u^{\delta} u^{p-1} \mathrm{N}(u)\, du \leq \frac{k(2-p)}{2-p-\delta-k\delta} x^{2-p-\delta} \int_0^{x^{-1}} u \mathrm{N}(u)\, du.$$

Appliquons cette inégalité dans le théorème 5.1; on a $1 \Rightarrow 3$; le théorème II.3 est démontré.

On déduit aussi le théorème II.4 de la manière suivante : soit $p > 1$, $\frac{f(x)}{x^p}$ croissante, donc $\frac{f(x)}{x}$ est aussi croissante et d'après le théorème I.2 du paragraphe I.2, il existe une fonction de Lévy N telle que

$$f(x) \overset{m}{\sim} x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u \mathrm{N}(u)\, du + x \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \mathrm{N}(u)\, du$$

mais (on peut toujours choisir f dérivable) de $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x^p}\right) \geq 0$, on obtient

$$\int_{x^{-1}}^{\infty} \mathrm{N}(u)\, du \leq \frac{2-p}{p-1} x \int_0^{x^{-1}} u \mathrm{N}(u)\, du$$

et donc on a $[X, P] = [X, 1]$ et, de plus, la constante k de l'inégalité $(\bigstar)$ vaut ici $k = \frac{2-p}{p-1}$ l'inégalité en δ s'écrit alors $\delta < p-1$ et on a

$$x^{1+\delta} \int_{x^{-1}}^{\infty} u^{p'-1} \mathrm{N}(u)\, du \leq \frac{2-p}{p-1-\delta} x^2 \int_0^{x^{-1}} u \mathrm{N}(u)\, du$$

et donc pour tout $p' < p$:

$$x^{p'} \int_{x^{-1}}^{\infty} u^{p'-1} \mathrm{N}(u)\, du \leq \frac{2-p}{p-p'} x^2 \int_0^{x^{-1}} u \mathrm{N}(u)\, du,$$

d'où le théorème [et aussi une majoration de $\mathrm{E}|X(f)|^{p'}$]. Pour terminer la démonstration du théorème, on remarque que $3 \to 2$ est évident puisque tout sous-espace d'un L^p, $p > 1$ est réflexif (on obtient aussi que la boule unité de $[X, 1]$ est équi-intégrable). Il reste à montrer que $2 \to 1$, par exemple.

Supposons $[X, 1]$ réflexif. On sait qu'en tant qu'E. V. T. $[X, 1]$ est isomorphe à $L_{f_{X,1}}$. Ce dernier est donc un espace d'Orlicz réflexif. Or il est connu que la condition nécessaire et suffisante (2) pour qu'un Orlicz L_f soit réflexif est que f satisfasse la condition Δ_2^* suivante : il existe $l > 1$ tel que

$$f(x) \leq \frac{1}{2l} f(lx).$$

Écrivant alors que $f_{X,1} \in \Delta_2^*$ il vient pour un certain $l > 1$,

$$2l\left[\int_0^{x^{-1}} u \mathrm{N}(u)\, du + x \int_{x^{-1}}^{\infty} \mathrm{N}(u)\, du\right] \leq l^2 x^2 \int_0^{(xl)^{-1}} u \mathrm{N}(u)\, du + lx \int_{[lx]^{-1}}^{\infty} \mathrm{N}(u)\, du$$

soit

$$lx\int_{x^{-1}}^{\infty} \mathrm{N}(u)\,du \leq l^2 x^2 \int_0^{[lx]^{-1}} u\,\mathrm{N}(u)\,du + lx\int_{(lx)^{-1}}^{x^{-1}} \mathrm{N}(u)\,du - 2l^2x^2\int_0^{x^{-1}} u\,\mathrm{N}(u)\,du,$$

où

$$x\int_{x^{-1}}^{\infty} \mathrm{N}(u)\,du < (l-2)\int_0^{x^{-1}} u\,\mathrm{N}(u)\,du,$$

d'où le résultat puisque cette condition équivaut (avec $k = l - 2$) à $[\mathrm{X}, \mathrm{P}] = [\mathrm{X}, 1]$.

Donnons maintenant un théorème sur la structure de $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$.

Théorème II.5. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $[\mathrm{X}(\mathrm{E}), \mathrm{P}]$ *soit un E. V. T. L. C. est que* $\dfrac{f_{\mathrm{X}}(x)}{x} \overset{m}{\simeq} q_1(x)$, q_1 *croissante.*

(S'il en est ainsi, il existe une forme X_1 à accroissements indépendants, homogènes et symétriques, telle $[\mathrm{X}, \mathrm{P}] = [\mathrm{X}_1, 1]$ et donc $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ est isomorphe à l'espace d'Orlicz $\mathrm{L}_{f_{\mathrm{X}_1,1}}$.)

Démonstration. — La condition est suffisante :

En effet, on sait alors que $f_{\mathrm{X}} \in \mathrm{K}(2, 1)$ (§ 2) et donc il existe une forme X_1 telle que

$$f_{\mathrm{X}_1,1} \overset{m}{\simeq} f_{\mathrm{X}} \qquad \text{soit} \quad \mathrm{L}_{f_{\mathrm{X}}} = \mathrm{L}_{f_{\mathrm{X}_1,1}}.$$

La condition est nécessaire : ceci résulte d'un théorème de Mazur-Orlicz [6] sur les q-espaces (la démonstration directe est d'ailleurs immédiate).

Le théorème suivant caractérise les fonctions ψ telles que $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ soit un E. V. T. L. C.

Théorème II.6. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ *soit un E. V. T. L. C. est que* $\dfrac{\psi(x)}{x} \overset{m}{\simeq}$ *fonction croissante.*

La condition suffisante est immédiate : si ψ est croissante, $\psi \overset{m}{\simeq} q_{\mathrm{X}}$ donc $\dfrac{q_{\mathrm{X}}(x)}{x} \overset{m}{\simeq}$ fonction croissante et donc $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ est un E. V. T. L. C.

Supposons réciproquement que X, P soit un E. V. T. L. C. Alors on sait que $\dfrac{q_{\mathrm{X}}(x)}{x} \overset{m}{\simeq}$ fonction croissante. Mais comme on ne sait pas, *a priori* que $\psi \overset{m}{\simeq}$ fonction croissante, on ne peut conclure. On peut écrire

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x\int_0^{\infty} \sin ux\,\mathrm{M}(u)\,du \\ &\leq x^2\int_0^{\frac{\pi}{x}} u\,\mathrm{M}(u)\,du = o\left(q_{\mathrm{X}}\left(\frac{x}{\pi}\right)\right).\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que par suite de la décroissance de M et de la périodicité du sinus, on a pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$\psi(x) \geqq x \int_0^{\frac{\theta}{x}} \sin ux \, M(u)\, du + x \int_{\frac{\pi-\theta}{x}}^{\frac{\pi}{x}} \sin ux \, M(u)\, du$$

$$\geqq x^2 \frac{\sin\theta}{\theta} \int_0^{\frac{\theta}{x}} u\, M(u)\, du - \theta \sin\theta \, M\left(\frac{\pi-\theta}{x}\right).$$

Mais

$$\frac{q\left(\frac{x}{\theta}\right)}{\frac{x}{\theta}} > k \frac{q\left(\frac{x}{\pi-\theta}\right)}{\frac{x}{\pi-\theta}} \geqq \frac{k' M\left(\frac{\pi-\theta}{x}\right)}{\frac{x}{\pi-\theta}}$$

puisque $\frac{q(x)}{x} \overset{m}{\sim}$ fonction croissante et ceci implique que

$$\int_0^{\frac{1}{x}} u\, M(u)\, du - \frac{1}{x^2} M\left(\frac{1}{x}\right) \geqq 0$$

donc

$$q\left(\frac{x}{\theta}\right) \geqq \frac{k(\pi-\theta)}{2\theta} M\left(\frac{\pi-\theta}{x}\right) \geqq 2\, M\left(\frac{\pi-\theta}{x}\right),$$

pour θ bien choisi, et donc $\psi(x) \geqq k(\theta)\, q\left(\frac{x}{\theta}\right)$ où θ, $k(\theta)$ sont des constantes convenables et, donc $\psi \overset{m}{\sim} q_X$.

Pour terminer, appliquons les résultats des théorèmes II.2 et II.3 au problème de la recherche des espaces L^p qui sont de type f.

THÉORÈME II.7. — *Si* $f \in K(2, 1)$ *et si* $\frac{f(x)}{x^p} \overset{m}{\sim} \uparrow$ *alors* $L^{p'}$ *est de type* f *pour* $p' > p$ $(1 \leqq p \leqq 2)$.

(*Remarque :* Nous montrerons dans un autre travail que cette condition est en fait suffisante pour que L^p soit de type f, elle est aussi nécessaire si μ est une mesure diffuse infinie, mais ces démonstrations nécessitent des techniques différentes de celles utilisées ici.)

Démonstration. — Soit Z la forme stable homogène, à accroissements indépendants, telle que $\psi_Z(t) = |t|^{p'}$ et donc $dN(u) = \frac{du}{u^{p'+1}}$ on a, en appliquant II.3,

$$[X, P] = [Z, p] \qquad \text{car} \quad x^p \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{du}{u^{1+p'-p}} = \frac{(p'-p)\, x^2}{p'-1} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{u^2\, du}{u^{p'+1}} \leqq K_p x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{u^2}{u^{p'+1}}\, du.$$

Mais si l'on considère $[Z, f]$, d'après ce qui précède, on a

$$q_{Z,f} = x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u^{1-p'}\,du + \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} f(xu)\,\frac{du}{u^{1+p'}}.$$

Or pour $u > 1$ [si $f(1) = 1$ pour se fixer les idées], on a $f(u) < u$, donc

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} f(xu)\,d\mathrm{N}(u) < x^p \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^p\,d\mathrm{N}(u)$$

et par suite

$$[Z, f] = [Z, p] = [Z, P].$$

TROISIÈME PARTIE.

Intégrabilité pour une forme ε-μ-invariante.

Les différents résultats de cette partie n'ont aucun intérêt par eux-mêmes, il s'agit uniquement de lemmes techniques.

Soit μ une mesure diffuse infinie et X une forme ε-μ-invariante sur $\mathrm{E}(\mathrm{V}, \mathcal{B}, \mu)$. On note L_X l'espace des fonctions X-intégrables (*voir* II^e partie, § 1).

D'après les résultats de l'appendice sur la représentation des formes ε-μ-invariantes, il existe un espace compact $\mathcal{S}$ et une mesure de Radon ν sur $\mathcal{S}$ telle que

$$\mathrm{X} = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{X}^{\mathrm{S}}\,d\nu(\mathrm{S}),$$

X^{S} est une forme à accroissements indépendants, cette égalité signifiant que pour toutes fonctions boréliennes bornées f_i $(i = 1, \ldots, n)$, et toutes fonctions étagées g_i, $g_i \wedge g_j = 0$ $(i \neq j)$, on a

$$\mathrm{E} f_1(\mathrm{X}(g_1)) \ldots f_n(\mathrm{X}(g_n)) = \int_{\mathcal{S}} \Pi_i f_i(\mathrm{X}^{\mathrm{S}}(g_i))\,d\nu(\mathrm{S}).$$

On dira que $f \in \bigcap_\nu \mathrm{L}_\mathrm{S}$ si $f \in \mathrm{L}_\mathrm{S}$ ν-p.s. Il est clair que $\bigcap_\nu \mathrm{L}_\mathrm{S}$ est un espace vectoriel.

Théorème III.1. — *Si* $f_m \to f$ *μ-p. s. et* $\mathrm{X}(f_m) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathrm{Z}$.

1° Z *est indépendante de la suite* f_m *choisie*.

2° L_X *est isomorphe à* $[\mathrm{X}(\mathrm{E}), \mathrm{P}]$, *complétion de* $\mathrm{X}(\mathrm{E})$ *pour la métrique de la convergence en probabilité*.

3° $\mathrm{L}_\mathrm{X} = \bigcap_\nu \mathrm{L}_\mathrm{S}$.

Démonstration. — Soit g_n une suite d'éléments de E telle que $X(g_n) \xrightarrow{P} Z$, posons

$$\Phi_n(t) = \mathrm{E}\exp it\, X(g_n)\,; \qquad \Phi_{n,m}(t) = \mathrm{E}\exp it\, X(g_m - g_n)\,;$$

on a donc

$$1 - \Phi_{n,m}(t) \to 0 \quad (n,\ m \to \infty), \qquad \text{uniformément pour} \quad t \in (-\mathrm{A}, \mathrm{A}),$$

soit

$$\int_{\mathcal{S}} \left[1 - \exp\left[\int_{\mathrm{V}} \psi^{\mathrm{S}}(t(g_n(v)) - g_m(v))\, d\mu(v) \right] \right] d\nu(\mathrm{S}) \to 0$$

où $\exp - \psi^{\mathrm{S}}$ est la fonction caractéristique de S. Comme $1 - e^{-u} \overset{m}{\simeq} 1 \cap u$, on a

$$\int [1 \cap \int \psi^{\mathrm{S}}(t(g_n(v)) - g_m(v))\, d\mu(v)]\, d\nu(\mathrm{S}) \to 0$$

soit encore

$$\int \psi^{\mathrm{S}}(t(g_n(v)) - g_m(v))\, d\mu(v) \to 0 \quad \text{en } \nu\text{-mesure.}$$

D'après l'étude faite au paragraphe II.2, on a encore

$$\int 1 \cap \mathrm{A}^2 x^2 (g_n(v) - g_m(v))^2\, d\mu(v)\, d\mathrm{M}^{\mathrm{S}}(x) \to 0 \quad \text{en } \nu\text{-mesure}$$

(où M^{S} est la mesure de Lévy de S) ou enfin $\int f_{\mathrm{S}}(g_n - g_m)\, d\mu \to 0$ en ν-mesure, f_{S} q-fonction associée à S (*cf.* § II.2).

Il existe donc une sous-suite $g_{m'}$, telle que $g_{m'}$ converge vers zéro dans $\mathrm{L}_{f_{\mathrm{S}}}$ ν-p. s. Soit alors g une limite μ-p. s. de $g_{m'}$. $g_{m'} \to g$ dans L_{f_s}, ν-p. s., donc, $g \in \bigcap_{\nu} \mathrm{L}_{f_s} = \bigcap_{\nu} \mathrm{L}_{\mathrm{S}}$ et g est X-intégrable.

Soit maintenant $g \in \bigcap_{\nu} \mathrm{L}_{\mathrm{S}} = \bigcap_{\nu} \mathrm{L}_{f_s}$; soit $h_m \in \mathrm{E}$, $h_m \to g$ μ-p. s. et dans L_{S} ν-p. s.

On a

$$\exp - \int \psi^{\mathrm{S}}(t h_m)\, d\mu \to \exp - \int \psi^{\mathrm{S}}(tg)\, d\mu \qquad \text{uniformément pour} \quad |t| < \mathrm{A}.$$

Donc $\Phi_n \to \Phi$, $X(h_m) \xrightarrow{P} Z$. D'après la première partie de la démonstration, si $g_m \to g$, de $g_m - h_n \to 0$ dans L_{f_s} ν-p. s., on déduit que $X(g_m - h_m) \xrightarrow{P} 0$ et donc que $X(g)$ ne dépend pas de la suite (g_m) choisie.

THÉORÈME III.2. — *Si* L_{X} *est un espace de Banach* ε-μ-*invariant, il existe une forme à accroissements indépendants* S *et une forme à accroissements indépendants* S_1 *telles que* $\mathrm{L}_{\mathrm{X}} = \mathrm{L}_{\mathrm{S}_0} = \mathrm{L}_{\mathrm{S}_1, 1}$.

La démonstration est fondée sur les lemmes suivants :

LEMME III.1. — *Si* X *est* ε-μ-*invariante*, $X = \int_{\mathcal{S}} X^S \, d\nu(S)$, *il existe une forme* ε-μ-*invariante* X, $\hat{X} = \int_{\mathcal{S}} X^S \, d\hat{\nu}(S)$ *telle que* $\hat{\nu}$ *soit atomique et que* $L_{\hat{X}} = L_X$.

Démonstration du lemme. — Soit $g \in \bigcap_{\nu} L_S$ et soit f^S la q-fonction associée à X^S (*voir* § 3). Alors $\int f^S(g) \, d\mu < \infty$ ν-p. s., soit M^S la mesure de Lévy associée à ψ^S, on a (*cf.* § II.2) :

$$f^S(\lambda) = \lambda^2 \int_0^{\frac{1}{x}} x \, M^S(x) \, dx,$$

$q^s(x)$ et $M^S(x)$ sont mesurables [pour le couple (S, x)] puisque $M^0(x)$ est mesurable pour tout x [par transformation de Fourier puisque $\psi^0(t)$ est mesurable pour tout t], $\mathcal{S}$ étant munie de la σ-algèbre la plus petite rendant toutes les applications $\hat{f} : \mathcal{S} \to R$ définies par $f(S) = S(f)$ mesurables [$f \in C(\mathbf{R})$ et $M^S(.)$ est monotone donc $M^S(x)$ et $f^S(x)$ sont mesurables].

Posons $M^S(x) = 2^k$ si $2^n < x \leq 2^{n+1}$ et $2^k < M^S(2^n) \leq 2^{k+1}$, n, $k \in Z$. L'ensemble de toutes les fonctions $\hat{M}(.)$ est dénombrable; soit $(M_j, j \in N)$ cet ensemble. Considérons alors l'application $S \to l(S)$ de $(\mathcal{S}, \nu)$ dans N définie par $l(S) = j$ si $M^S(.) = M_j$; l est mesurable (le choix de j ne faisant intervenir que la valeur de M aux points 2^n), de plus de par le choix de M, on a

$$f^{l(S)}(x) \leq f^S(x) \leq 2 f^{l(S)}(x) \qquad \text{avec} \quad f^{l(S)}(x) = \lambda^2 \int_0^{\frac{1}{x}} x \, M_{l(S)}(x) \, dx.$$

Posons $\bar{\nu} = \nu \circ 1$, $\hat{\nu}$ est portée par un ensemble dénombrable de $\mathcal{S}$, à savoir $\{S, S \in \mathcal{S}, M^S \in \{M_j, j \in N\}\}$; $\hat{\nu}$ est atomique et définit une forme linéaire X par

$$\hat{X} = \int_{\mathcal{S}} S \, d(S).$$

Comme $1 \leq \dfrac{f^{l(S)}(\lambda)}{f^S(\lambda)} \leq 2$, on a

$$\int f^S(g) \, d\mu < \infty, \quad \nu\text{-p.s.} \iff \int f^{l(S)}(g) \, d\mu < \infty, \quad \nu\text{-p.s.}$$
$$\iff \int f^S(g) \, d\mu < \infty, \quad \hat{\nu}\text{-p.s.}$$

et donc $\bigcap_{\nu} L_S = \bigcap_{\hat{\nu}} L_S$ soit $L_X = L_{\hat{X}}$.

LEMME III.2. — *Si* L_X *est un Banach* B ε-μ-*invariant,* $\hat{\nu}$ *étant atomique, on a*

$$\sup_{\substack{g\in E\\ \|g\|_B<1}} \int f^S(g)\,d\mu = \alpha(S) < \infty, \quad \hat{\nu}\text{-p.s.}$$

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi; il existe alors un atome A_0 et une suite de fonctions $g_k \in E$, $(g_k \geq 0)$, telles que

$$\|g_k\|_B \leq \frac{1}{2^k}$$

et pour $S \in A_0$,

$$\int_V f^S(g_k)\,d\mu \geq 1,$$

l'existence des g_k étant assurée par l'inégalité :

$$f^S(\lambda) \leq f^S(2\lambda) \leq 4 f^S(\lambda)$$

qui implique que

$$\sup_{g\in E,\ \|g\|_B\leq r} \int f^S(g)\,d\mu = \infty \quad \text{pour tout } r,$$

dès que cette relation vaut pour $r = 1$.

Comme μ est de masse infinie et diffuse et que les fonctions g_k sont étagées, il est facile de construire une suite g'_k telle que $g'_k g'_j = 0$ pour $k \neq j$, et que chacune des g'_k se déduise de g_k par automorphisme de $(\mathcal{B}, \mu)$ (il suffit de construire les g'_k de proche en proche).

Posons alors $g = \sum_1^\infty g'_k$; $\|g\| \leq \sum_1^\infty \|g'_k\| \leq 1$ puisque $\|g'_k\| = \|g_k\|$ mais $g \notin \bigcap_{\hat{\nu}} L_S$ car $\int f^S(g)\,d\mu = \sum_1^\infty \int f^S(g_k)\,d\mu = \infty$ sur A_0, donc $B \neq \bigcap_{\hat{\nu}} L_S$.

Démontrons alors le théorème : si $L_X = B$, $L_{\hat{X}} = B$, et donc

$$\int_{\mathcal{S}\times V} f^S(g)\left(1 \wedge \frac{1}{\alpha(S)}\right) d\mu\, d\hat{\nu}(S) < \infty.$$

Posons alors

$$f(\lambda) = \int f^S(\lambda)\left(1 \wedge \frac{1}{\alpha(S)}\right) d\hat{\nu}(S),$$

$$M(\lambda) = \int M^S(\lambda)\left(1 \wedge \frac{1}{\alpha(S)}\right) d\hat{\nu}(S).$$

De l'inégalité $f(\lambda) \leq f(2\lambda) \leq 4f(\lambda)$ on déduit que si f est infinie au point λ_0, elle est infinie partout, ce qui impliquerait que pour tout $g \in B$, on ait

$$\int_{\mathcal{S}\times V} f^S(g(v))\left(1 \wedge \frac{1}{\alpha(S)}\right) d\hat{\nu}(S)\, d\mu(v) = \infty,$$

ce qui contredit la définition de d. Donc f est finie, f est une q-fonction et l'existence de f assure que la fonction associée M est une fonction de Lévy $\left[\mathrm{M} \text{ décroissante, } \mathrm{M}(\infty) = 0,\ \int_0^1 \lambda\, \mathrm{M}(\lambda)\, d\lambda < \infty\right]$, $\hat{\nu}$ étant atomique, il est clair que $g \in \bigcap_{\hat{\nu}} \mathrm{L}_{\mathrm{S}}$ équivaut à $g \in \mathrm{L}_{\mathrm{S}}$ pour tout S, ce qui équivaut encore à $\int f^{\mathrm{S}}(g(\nu)) \left(1 \wedge \frac{1}{\alpha(\mathrm{S})}\right) d\hat{\nu}(\mathrm{S})\, d\mu(\nu) < \infty$, où $g \in \mathrm{L}_{\mathrm{S}_0}$, si S_0 est la forme à accroissements indépendants définie par sa fonction caractéristique $\exp - \psi(t)$, avec $\psi(t) = \int (1 - \cos tx)\, d(-\mathrm{M}(x))$. Donc, par le raisonnement de complétion habituel, L_{S}, B, $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_0}$ sont isomorphes. Mais B est un E. V. T. L. C., donc $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_0} = \mathrm{L}_{\mathrm{S}_1, 1}$, pour une certaine forme S_1 d'après les résultats du paragraphe 4 (IIe partie).

QUATRIÈME PARTIE.

ε-μ-ESPACES ET ESPACES D'ORLICZ DE TYPE p, $1 \leq p \leq 2$.

Nous démontrons dans cette partie le théorème principal de ce travail.

THÉORÈME IV.1. — *Soit μ une mesure diffuse, infinie (où la mesure $\bar{\delta}$ sur* N). *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach ε-μ-invariant soit de type p ($1 \leq p < 2$) est que :*

(i) B *soit un espace d'Orlicz* L_f;

(ii) $f \in \mathrm{K}(2, p)$.

COROLLAIRE. — *Si μ est quelconque, cette même condition est suffisante pour qu'un espace L_f soit de type p.*

En fait cette condition $f \in \mathrm{K}(2, p)$ est aussi nécessaire si μ est diffuse, finie (il suffit de modifier un peu la démonstration ci-dessous). La démonstration de ce théorème utilise *les formes linéaires aléatoires stables d'ordre p.*

DÉFINITION. — Soit F un espace vectoriel, X une forme linéaire aléatoire sur F, X dite *stable d'ordre p* si pour toute famille finie $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de F, la loi de $(\mathrm{X}(f_1), \ldots, \mathrm{X}(f_n))$ (sur R^n) est stable symétrique d'ordre p (pour tout ce qui concerne les lois, *voir* [12]).

Nous allons d'abord montrer le théorème suivant :

THÉORÈME IV.2. — *Si* B *est un espace de Banach ε-μ-invariant (μ mesure diffuse infinie) de type p ($1 \leq p < 2$), il existe une forme* X *stable d'ordre p sur* B, *ε-μ-invariante et telle que* $[\mathrm{X}, \mathrm{P}] = \mathrm{B}$.

COROLLAIRE. — B *est un espace d'Orlicz de type* I.

Nous ferons la démonstration dans le cas où $(V, \mu) = (\mathbf{R}, dx)$.

Le cas général en résulte immédiatement; en effet, si B n'est pas séparable, il contient (puisque μ est normale) un sous-espace séparable de dimension infinie. La condition nécessaire résulte alors du cas séparable. La condition suffisante résulte du théorème de finitude de la condition de plongement (théorème I.5).

Soit B un espace de Banach de fonctions mesurables sur $(\mathbf{R}, dx)$. On suppose que B est ε-μ-invariant, c'est-à-dire que si ε est une fonction sur $\mathbf{R}$, $|\varepsilon| = 1$, et τ est un automorphisme de l'algèbre $\mathcal{B}$ conservant la mesure, on a $\|f\| = \tau\varepsilon f\|$. Considérons la partition de l'intervalle $[-n, n]$ en $2n\,2^n = p(n)$ intervalles disjoints I_j, $j = 1, \ldots, n\,2^{n+1}$ à extrémités dyadiques. Soit F_n l'espace vectoriel des fonctions f étagées qui s'écrivent :

$$f = \sum_1^{p(n)} \lambda_j\, 1_{I_i^n} \qquad \text{et} \qquad F = V_n F_n.$$

LEMME. — F *est dense dans* B.

Puisque $E(R, \mathcal{B}, dx)$ est dense dans B (par hypothèse), il suffit de montrer que F est dense dans E, ce qui est immédiat.

Supposons que B se plonge dans un espace $L^p(\mathfrak{X}, \Pi)$. Soit J ce plongement de bornes m et M, on posera $\hat{f} = J(f)$ si $f \in B$. Notre but est de ramener l'étude de B à celle d'un espace $\{\{X, P\}\}$, où X est une forme linéaire aléatoire ε-μ-invariante.

(a) On désigne par $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de n éléments. $\mathfrak{S}_{p(n)}$ opère de manière évidente sur F_n en permutant les intervalles I_j^n.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{p(n)}$; on a

$$m \leq \frac{\left\| \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j\, 1_{I_j^n} \right\|_B}{\left\| \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j\, \hat{1}_{I_j^n} \right\|_p} \leq M,$$

d'où, puisque sur B la norme est invariante lorsque l'on fait opérer σ;

$$m \leq \frac{\left\| \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j\, \hat{1}_{I_j^n} \right\|_p}{\left\| \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j\, \hat{1}_{I_{\sigma(j)}^n} \right\|_p} \leq M$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_{p(n)}$.

La formule

$$-\log \mathrm{E} \exp i \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j \mathrm{X}(1_{I_j^n}) = \left\| \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j \hat{1}_{I_j^n} \right\|_p$$

définit sur F_n une forme aléatoire stable d'ordre p, puisque la fonction $\hat{f} \to \|\hat{f}\|_p$ est de type négatif sur tout espace L^p (*voir* [12], parties 1 et 3). Mais en général cette forme n'est pas ε-μ-invariante [c'est-à-dire que les variables $\mathrm{X}(1_{I_j^n})$ ne sont pas échangeables]. Nous allons la modifier de manière à la rendre μ-invariante.

$$\text{Soit } f \in \mathrm{F}_n ;\; f = \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j 1_{I_j^n}.$$

Comme nous voulons nous ramener à un espace F de suites; si $f \in \mathrm{F}_n$, on aura aussi $f \in \mathrm{F}_{n+1}$ en écrivant $f = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (dans F_n) :

$$f = \underbrace{0}_{2^n \text{ fois}},\quad \lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_n, \quad \underbrace{0}_{2^n \text{ fois}}, \qquad (\text{dans } \mathrm{F}_{n+1})$$

et ainsi on peut considérer f comme élément de F_p, $p \geq n$, donc $\mathrm{F} = \lim_n \uparrow \mathrm{F}_n$.

L'idée naturelle est alors la suivante : si l'on pose

$$\mathrm{N}_n\left(\sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j 1_{I_j^n}\right) = \frac{1}{(p(n))!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p(n)}} \left\| \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j \hat{1}_{I_{\sigma(j)}^n} \right\|_1,$$

on peut définir $p(n)$ variables X_j^n échangeables par la formule

$$-\log \mathrm{E} \exp i \sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j \mathrm{X}_j^n = \mathrm{N}_n\left(\sum_{j=1}^{p(n)} \lambda_j 1_{I_j^n}\right).$$

Mais le plongement n'étant pas une isométrie, il n'y a pas, en général, de recollement [puisque $\|\hat{\lambda}_1, \hat{0}\|_p \neq \|0, \hat{\lambda}_1\|_p$ donc $\mathrm{N}_2(\lambda, 0) \neq \mathrm{N}_1(\lambda)$] c'est-à-dire que $\mathrm{N}_n(f) \neq \mathrm{N}_{n+1}(f)$ pour $f \in \mathrm{F}_n$, et l'on ne peut appliquer le théorème de Kolmogorov pour construire X sur F. Il faut donc modifier cette construction.

(b) Soit l'espace des suites $\lambda = (\lambda_i)$ bornées; $i \in \mathrm{N}^\star$. Soit $\mathfrak{S}$ le groupe des permutations de N ne déplaçant qu'un nombre fini d'entiers, $\mathfrak{S}_n$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}$ ne déplaçant que les n premiers entiers (spécialisation du groupe $\mathfrak{S}_n$ introduit plus haut) :

$$\mathfrak{S} = \lim_n \uparrow \mathfrak{S}_n,$$

$\mathfrak{S}$ opère de manière évidente sur l.

On se propose de construire une mesure invariante (moyenne) de $\mathfrak{S}$ groupe d'opérateurs sur l.

Soit θ_n la mesure qui affecte à chaque point du groupe $\mathfrak{S}_n$ à $n\,!$ éléments la masse $\frac{1}{n!}$ On pose

$$\theta_n(\lambda) = \int_{\mathfrak{S}_n} \sigma(\lambda)\, d\theta_n(\sigma)$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{1}^{n} \sigma(\lambda).$$

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur N. On définit θ par

$$\theta\lambda = \lim_{\mathfrak{U}} \theta_n(\lambda)$$

[$\theta_n(l)$ est une suite constante à n éléments, c'est-à-dire un nombre $\bar{\lambda}_n$]. On a

$$\theta\,1 = 1.$$

La suite des mesures θ_n sur $\mathfrak{S}_n$ converge donc (faiblement sur l) vers une mesure θ sur $\mathfrak{S}$, θ est $\mathfrak{S}$-invariante, car

$$\theta\sigma\lambda = \theta_n\sigma\lambda \qquad \text{si} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

pour tout λ, et θ_n est $\mathfrak{S}_n$-invariante (bien entendu θ n'est pas unique !).

Dans le cas où l est remplacé par $\hat{F} = \bigcup_n \hat{F}_n$, il faut modifier un peu cette construction; pour n assez grand, on a $f \in \hat{F}_n$ et $f \in \hat{F}_p$, $p \geqq n$. On écrira donc de même :

$$\theta \hat{f} = \lim_{\mathfrak{U}} \theta_n \hat{f} \qquad [\theta_n \hat{f} \text{ définie pour } n > n(\hat{f})].$$

(*d*) Soit alors F, son image $\hat{F}$ dans $L_p(\mathfrak{X}, \mathcal{M})$ et $\overline{F}$ l'image de $\hat{F}$ par la construction précédente, c'est-à-dire que $\bar{f} = \theta f$. Soit J' cette dernière application.

Puisque B est ε-μ-invariant, d'après la définition de θ_n, on a

$$\inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p(n)}} \frac{\|\sigma(\hat{f})\|_p}{\|f\|_B} \leqq \frac{\|\theta_n(\hat{f})\|_p}{\|f\|_B} \leqq \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p(n)}} \frac{\|\sigma f\|_p}{\|f\|_B}$$

soit

$$m^2 \leqq \frac{\|\hat{f}\|}{\|f\|_B} \leqq M^2.$$

$\left(\text{Comme } \|\hat{f}\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|\theta_n \hat{f}\|_p, \text{ on a } m \leqq \frac{\|\bar{f}\|}{\|f\|_p} \leqq M\right)$.

La construction du processus X à accroissements échangeables est maintenant facile.

On pose

$$\mathrm{N}_{p(n)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_{p(n)}) = -\log \exp i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{X}(1_{I_j^n})$$
$$= \| \lambda_1 1_{I_1^n} + \ldots + \lambda_{p(n)} 1_{I_{p(n)}^n} \|.$$

Les fonctions $\mathrm{N}_{p(n)}$ sont de type négatif, continues en $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p(n)}$ puisque limites suivant l'ultrafiltre $\mathfrak{U}$ de fonctions de type négatif.

Par ailleurs, $\mathrm{N}_{p(n)}$ est invariante par $\mathfrak{S}_{p(n)}$ et la famille $\mathrm{N}_{p(n)}$ est compatible, c'est-à-dire que

$$\mathrm{N}_{p(n+1)}\Big(\underbrace{0}_{2^n \text{ fois}}, \lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p(n)}, \lambda_{p(n)}, \underbrace{0}_{2^n \text{ fois}}\Big) = \mathrm{N}_{p(n)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p(n)}).$$

La forme linéaire aléatoire $\mathrm{X} : \mathrm{F} \to \mathrm{L}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$ est donc bien définie, ε-μ-invariante et stable d'ordre p. On sait que L_x et $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ sont isomorphes lorsque L_x est muni de sa q-distance et $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ de la distance de la convergence en probabilité, à condition que $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ soit isomorphe à un espace de Banach (théorème III.2). Or les relations suivantes montrent que B et $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ tous deux complétions de E, sont isomorphes :

$$m^2 \leqq \frac{\| g_n - g_m \|_{\mathrm{B}}}{\| g_n - g_m \|_p} \leqq \mathrm{M}^2 \qquad \text{et} \qquad -\log \mathrm{E} \exp it(\mathrm{X}(g_n) - \mathrm{X}(g_m)) = t \| g_n - g_m \|_p^p.$$

Donc l'identité est un isomorphisme de L_x et B. Mais, on sait qu'alors il existe S_0 et S_1 à accroissements indépendants telles que (§ II.4) $\mathrm{L}_\mathrm{X} = \mathrm{L}_{\mathrm{S}_0} = \mathrm{L}_{\mathrm{S}_1, 1}$ et donc B est un espace d'Orlicz de type 1.

Le théorème est maintenant démontré dans le cas de $(\mathcal{B}, \mu)$ séparable diffuse infinie (la même démonstration pourrait être faite dans le cas général en prenant un ultrafiltre sur un ensemble ordonné de cardinal supérieur à $\aleph_0$).

Remarque. — Toutes les constructions de ce chapitre sont plus faciles à voir dans le cas des espaces de suites. En particulier l'étude de $[\mathrm{X}, \mathrm{P}]$ est immédiate en utilisant le résultat classique suivant.

Soit $\varphi_k(t)$ une suite des fonctions caractéristiques réelles. Alors, ou bien $\Pi_k \varphi_k(t)$ converge (uniformément pour $-1 \leqq t \leqq 1$) ou bien $\Pi_k |\varphi_k(t)| \to 0$, presque partout.

L'espace F est simplement l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang, l'espace F_n des suites nulles à partir du rang n, et le processus X une suite de variables aléatoires stables d'ordre 1 en dépendance symétrique. En particulier il est facile de montrer que si B est de classe p, $\mathrm{B} \subset l^2$.

Pour démontrer le théorème principal, on est donc ramené à démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME IV.3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* L_f *soit de type* p, $1 \leqq p < 2$ *est que* $f \in \mathrm{K}(2, p)$.

Le théorème est déjà démontré pour $p = 1$, puisque tout espace de Banach ε-μ-invariant de type $p(1 \leqq p \leqq 2)$ étant un espace d'Orlicz L_f avec $f \in K(2, 1)$, la partie nécessaire est démontrée, la partie suffisante résulte de la deuxième partie, si $f \in K(2, 1)$, on a vu qu'il existait S forme à accroissements indépendants telle que $L_f = L_{S,1}$.

Passons à la démonstration du théorème pour $1 \leqq p < 2$.

ÉTUDE DE LA CONDITION NÉCESSAIRE.

DÉFINITION. — Nous dirons qu'une suite $g_1, \ldots, g_n$ d'éléments de L_f, espace d'Orlicz, est ε-invariante si

$$\int f(\varepsilon_1 g_1 + \ldots + \varepsilon_n g_n)\, d\mu = \int f(g_1 + \ldots + g_n)\, d\mu$$

pour tout choix de ε_i, $|\varepsilon_i| = 1$.

Le lemme qui suit montre que la moyenne d'une suite $g_1, \ldots, g_n$ ne peut pas croître trop vite, de manière précise, pas plus vite que la moyenne d'une suite d'éléments étrangers.

LEMME. — *Si $g_1, \ldots, g_n$ est ε-invariante dans L_f, $f \in K(2, 0)$, on a*

$$\int f(|g_1 + \ldots + g_n|)\, d\mu \leqq C \sum_{i=1}^{n} \int f(|g_i|)\, d\mu,$$

où C ne dépend que de f.

Démonstration. — Si (g_i) est ε-invariante, on a

$$\begin{aligned}\int f(g_1 + \ldots + g_n)\, d\mu &= E \int f(|g_1 Z_1 + \ldots + g_n Z_n|)\, d\mu \\ &= \int E f(|g_1 Z_1 + \ldots + g_n Z_n|)\, d\mu,\end{aligned}$$

où (Z_i), $i = 1, \ldots, n$, est une suite de variables de Bernoulli indépendantes. Comme $f \in K(2, 0)$, on a (*voir* I$^{\text{re}}$ partie),

$$f(\lambda) \overset{m}{\sim} \int_R (1 - e^{-u^2 \lambda^2})\, dM(u),$$

où M est une fonction de Lévy; donc

$$\int f(|g_1 + \ldots + g_n|)\, d\mu \leqq C(f) \int\int E \left[1 - \exp - u^2 \left(\sum_{i=1}^{n} g_i(v) Z_i \right) \right]^2 d\mu(v)\, dM(u).$$

Or

$$E \exp - \left(\sum_1^n x_i Z_i \right)^2 = E \left[\exp - \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i Z_i \right)^2 \prod_{i=1}^{n-1} \operatorname{ch} x_i x_n Z_i \times \exp - x_n^2 \right].$$

Comme $\operatorname{ch} x > 1$, et en intégrant de proche en proche, il vient

$$E\left[1 - \exp - \left(\sum_{1}^{n} x_i Z_i\right)\right]^2 \leq 1 - \exp - \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} 1 - \exp - x_j^2 \int E\left[1 - \exp - u^2 \left(\sum_{1}^{n} x_i Z_i\right)\right]^2 dM(u)$$
$$\leq D(f) \sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

où $D(f)$ ne dépend que de f; et donc

$$\int f(|g_1 + \ldots + g_n|)\, d\mu \leq CD \int \sum_{i=1}^{n} f(|g_i|)\, d\mu.$$

Remarque. — Une méthode probabiliste permet, dans le cas de L^p, d'avoir un résultat analogue, dans le sens minoration, le rôle extrêmal étant joué là par les variables gaussiennes et indépendantes. En effet, si $(g_i)_{i=1,n}$ est ε-invariante dans L^p, on a

$$\int |g_1 + \ldots + g_n|^p\, d\mu \geq C(p) \left(\sum_{j=1}^{n} \int g_i^2\, d\mu\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise la représentation des lois stables (*voir* [12], Ire partie) qui permet d'assurer l'existence d'une mesure ν_g sur la sphère S^n de R^n telle que

$$\int |\lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_n g_n|^p\, d\mu = \int_{S^n} |\lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_n s_n|^p\, d\nu(s_1, \ldots, s_n)$$

pour tout λ_i, $\lambda_i \in R$.

Donc

$$\int |g_1 + \ldots + g_n|^p\, d\mu = \int_{S^n} E\,|s_1 Z_1 + \ldots + s_n Z_n|^p\, d\nu.$$

Mais, on a vu (IIe partie de ce travail) que

$$E\,|s_1 Z_1 + \ldots + s_n Z_n|^p = \int_R \frac{1 - \prod_{j=1}^{n} \cos s_j t}{t^{p+1}}\, dt.$$

Il est immédiat, puisque $\sum_{i=1}^{n} s_i^2 = 1$, que l'on a

$$E\,|s_1 Z_1 + \ldots + s_n Z_n|^p \leq C(p),$$

constante indépendante des s_i.

$$\int_{S^n} d\nu(s_1, \ldots, s_n) = \int_{S^n} (s_1^2 + \ldots + s_n^2)\, d\nu(s_1, \ldots, s_n).$$

Mais ν étant une mesure bornée (sur un compact), on a

$$\left[\int_{S^n} (s_1^2 + \ldots + s_n^2)\, d\nu\right]^{\frac{1}{2}} \geqq \left[\int (s_1^p + \ldots + s_n^p)\, d\nu\right]^{\frac{1}{p}};$$

on obtient alors l'inégalité cherchée en remarquant que

$$\int |s_j|^p\, d\nu_g(S_1, \ldots, S_n) = \int |g_j|^p\, d\mu.$$

LEMME. — *On dira que* $g_1, \ldots, g_n$ *est une suite presque* ε*-invariante dans* L^p *s'il existe* m, M, $0 < m < M < \infty$ *et*

$$m \leqq \frac{\left\|\sum_i \varepsilon_i g_i\right\|^p}{\left\|\sum_i g_i\right\|^p} \leqq M.$$

Alors les inégalités du lemme précédent restent vraies en remplaçant $C(p)$ par $\frac{M}{m} C(p)$.

Posons en effet :

$$N(\lambda_1 g_1, \ldots, \lambda_n g_n) = E\left|\sum_i Z_i g_i \lambda_i\right|^p.$$

$N(\lambda_1 g_1, \ldots, \lambda_n g_n)$ est de type négatif, homogène d'ordre p et donc on a, par la représentation déjà citée des lois stables,

$$\begin{aligned} N(g_1, \ldots, g_n) &= \int_{S^n} |s_1 + \ldots + s_n|^p\, d\nu = \int_{S^n} E\,|s_1 Z_1 + \ldots + s_n Z^n|^p\, d\nu \\ &\leqq C(p) \int_{S^n} \sum_i |s_i|^p\, d\nu \\ &\leqq C(p) \sum_i N(g_i), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j g_j\right\|^p}{\sum_i \left\|g_i\right\|^p} \leqq \frac{\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j g_j\right\|^p}{N(g_1, \ldots, g_n)} \, \frac{N(g_1, \ldots, g_n)}{\sum_i N(g_i)} \, \frac{\sum_i N(g_i)}{\sum_i \left\|g_i\right\|^p} \leqq \frac{M}{m} C(p).$$

Démontrons maintenant la condition nécessaire du théorème. Supposons que $\frac{f(x)}{x^p} \overset{m}{\sim}$ fonction croissante.

Il faut distinguer deux cas :

Premier cas : Il existe deux suites λ_k, λ'_k telles que

$$\lambda_k \to 0, \qquad \lambda'_k \to 0, \qquad \frac{\lambda_k}{\lambda'_k} \to 0, \qquad \frac{f(\lambda_k)}{\lambda_k^p} > k \frac{f(\lambda'_k)}{\lambda'^p_k}.$$

Deuxième cas : Mêmes hypothèses mais ici $\lambda_k \to \infty$ et $\lambda'_k \to \infty$.

Traitons le premier cas (condition nécessaire pour que l_f soit de type p).

Posons

$$n_k = \frac{\lambda'^p_k}{\lambda_k^p}, \qquad N_k = \frac{1}{f(\lambda'_k)},$$

on a

$$\begin{aligned} \lambda_j^{i,k} &= \lambda'_k \quad \text{pour} \quad N_k(i-1) \leq j \leq N_k i \qquad (1 \leq i \leq n_k) \\ &= 0 \quad \text{dans les autres cas.} \end{aligned}$$

Soit $f^{i,k}$ la suite $(\lambda_j^{i,k})_{j \in \mathrm{N}}$ et

$$g^k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} f^{i,k} = (g_j^k)_{j \in \mathrm{N}}.$$

On a

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(\lambda_j^{i,k}) = o(1) \qquad \text{donc} \quad \| f^{i,k} \|_{l_f} = o(1) \quad (< 2).$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} f(g_j^k) &= N_k f\left(\frac{\lambda'_k}{\frac{1}{n_k^p}} \right) n_k \\ &= k, \end{aligned}$$

donc $g^k \to \infty$ dans l_j.

Supposons alors l_f de type p. Soit J le plongement de bornes (m, M) $l_f \xrightarrow{J} L^p$, et soit $\hat{g} = J(g)$. La suite $\hat{f}^{\nu,k}$ est presque ε-invariante, donc

$$\frac{\left\| \sum_{i=1}^{n_k} \hat{f}^{i,k} \right\|_p^p}{\sum_{i=1}^{n_k} \left\| \hat{f}^{i,k} \right\|_p^p} \leq C(p) \frac{M}{m}$$

soit

$$\left\| \sum_{1}^{n_k} \hat{f}^{i,k} \right\|_p^p \leq 2 C \frac{M}{m} n_k,$$

d'où $\| \hat{g}^k \|_p^p \leq 2 C \frac{M}{m}$, ce qui contredit $g^k \to \infty$.

Deuxième cas [condition nécessaire pour $L_f(R, dx)$].

Soit n_k intervalles de R disjoints, n_k et N_k étant définis comme précédemment à partir de λ_k et λ'_k, on pose $f^{i,k}(x) = \lambda'_k$ sur le premier intervalle de longueur $N_k (1 \leqq i \leqq n_k)$ et $f^{i,k}(x) = 0$ ailleurs. Le reste de la démonstration se fait comme dans le premier cas.

Étude de la condition suffisante. — Posons

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{g(t)}{t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x)}{x^p} = \frac{g(t)}{t}, \qquad p > 1.$$

Alors $g(t) \in K(2,1)$ et $x^{2p} = t$; d'après le théorème I.1, il existe une fonction de Lévy N telle que :

$$g(t) = t^2 \int_0^{\frac{1}{t}} y\, N(y)\, dy + t \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} N(y)\, dy.$$

On vérifie par dérivation que les deux égalités

$$\int_0^{\frac{1}{t}} y\, N(y)\, dy = \int_0^{\frac{1}{x}} y\, M(y)\, dy \qquad \text{et} \qquad \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} N(y)\, dy = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} y^{p-1} M(y)\, dy$$

définissent une même fonction M, qui est de Lévy et donc finalement

$$f(x) = x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} u\, M(u)\, du + x^p \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^{p-1} M(u)\, du.$$

Si X est la forme aléatoire associée à M, on a $L_{X,p} = L_f$. Remarquons que l'on obtient ainsi le théorème de représentation de $K(2, p)$.

APPENDICE.

Algèbres archimédiennes et représentations des formes ε-μ-invariantes.

Cet appendice se trouve à l'écart de l'ensemble de ce travail. Il a pour but de démontrer le théorème de représentation des formes ε-μ-invariantes dans le cas d'une mesure μ diffuse infinie, de manière à généraliser le résultat classique sur les suites de variables aléatoires en dépendance symétrique. La méthode utilisée des algèbres archimédiennes est très générale, elle permet d'obtenir des théorèmes analogues pour des processus positifs ou des formes à valeurs non réelles. Elle nous a été suggérée par J.-L. Krivine.

Définition d'une algèbre archimédienne [3]. — Soit $\mathcal{A}$ une algèbre réelle, commutative avec élément unité 1, $\mathcal{P}$ un ensemble dit préordre d'éléments de $\mathcal{A}$ dits ≥ 0, tel que $1 \in \mathcal{L}$, $-1 \notin \mathcal{L}$, $f, g \in \mathcal{L}$ implique $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}$, $fg \in \mathcal{L}$ (pour $\lambda, \mu \in R^+$). L'algèbre $\mathcal{A}$ est archimédienne si, pour tout $x \in \mathcal{A}$, il existe un entier n_x tel que $n_x 1 - x = y \in \mathcal{L}$.

THÉORÈME ([3]). — *Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des formes* T *linéaires positives sur une algèbre archimédienne $\mathcal{A}$, telles que* $T(1) = 1$, *alors pour tout* $T \in \mathcal{T}$ *il existe une mesure de Radon μ sur le spectre $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ telle que* $T = \int_{\mathcal{S}} S \, d\mu(S)$ *le spectre $\mathcal{S}$ étant constitué des éléments extrémaux du convexe compact* T, *c'est-à-dire des homomorphismes de $\mathcal{A}$ dans* R.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre complexe munie d'une involution, on dira qu'elle est archimédienne si l'algèbre réelle des éléments autoadjoints est elle-même archimédienne. L'analogue du théorème précédent est immédiat.

PREMIER EXEMPLE PROBABILISTE D'APPLICATION DU THÉORÈME. — *Suites de variables échangeables.* — Une suite de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ est dite échangeable (ou en dépendance symétrique) si la loi de $(X_{n_1}, \ldots, X_{n_p})$ est indépendante du choix du p-uplet $(n_1, \ldots, n_p)$, $n_i \neq n_j$ pour $j \neq i$, $n_i \in N^\star$.

(Si l'on désigne par $\tilde{\delta}$ la mesure constituée de la masse unité en chaque point de $N^\star$, les suites échangeables sont les formes $\tilde{\delta}$-invariantes sur $N^\star$.)

Montrons par la méthode des algèbres archimédiennes qu'une telle forme est mélange de formes à accroissements indépendants et homogènes [ce que l'on traduit d'ordinaire en disant que les X_n sont conditionnellement indépendantes par rapport à la σ-algèbre des événements symétriques ([7], p. 136)].

Soit $\{f_j\}$, $j \in J$, une base algébrique de l'espace $C(\mathbf{R})$ des fonctions continues ayant une limite à l'infini. On suppose que $1 \in \{f_j\}$.

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre (réelle ou complexe) des polynômes formels par rapport aux f_j. Un polynôme du premier degré $P = \sum_1^n a_i f_i$ sera dit positif si et seulement si la fonction (sur R) définie par $x \to P(x) = \sum_1^n a_i f_i(x)$ est ≥ 0.

Posons

$$\mathcal{L} = \left\{ P \in \mathcal{A},\ \text{P s'écrit d'au moins une manière sous la forme} \right.$$

$$P = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} P_{ij};$$

$$\left. P_{ij},\ \text{polynôme positif du premier degré} \right\}.$$

Il est facile de voir que $\mathfrak{P}$ est un préordre et que $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ est une algèbre archimédienne. Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables échangeables, à partir de cette suite, on définit une forme linéaire T sur $\mathfrak{A}$ par

$$T(f_1 f_2, \ldots, f_n) = E f_1(X_1) f_2(X_2) \ldots f_n(X_n);$$

on a clairement $T(1) = 1$, $T \geqq 0$ (la dépendance symétrique assure, en particulier, que cette formule est compatible avec la commutativité de l'algèbre $\mathfrak{A}$).

On a donc $T = \int_{\mathcal{S}} S \, d\mu(S)$, où $\mathcal{S}$ est le spectre de $\mathfrak{A}$ et μ une mesure de Radon sur $\mathcal{S}$. Les éléments de $\mathcal{S}$ sont les homomorphismes de $\mathfrak{A}$ dans R.

A S est associée une mesure $\overline{S}$ $[\text{par } f_i \to \overline{S}(f_i)]$; S ne charge pas $\{\infty\}$: en effet, soit $f_n \in C(R)$, $0 \leqq f_n \leqq 1$ et $\lim_n f_n = 1$ p. p.

D'après le théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_n \int S(f_n) \, d\mu(S) = \lim_n T(f_n) \qquad \text{donc} \quad \lim_n S(f_n) = 1 \quad \mu\text{-p. s.}$$

A S on peut associer aussi une suite de variables X_n^S indépendantes équidistribuées par la formule

$$S(f_1) \ldots S(f_n) = E f_1(X_1^S) \ldots f_n(X_n^S)$$

pour toute suite finie $f_1, \ldots, f_n$, en particulier

$$\Phi_S(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = E \exp i \sum \lambda_j X_j = \int_{\mathcal{S}} \prod_{j=1}^{n} \Phi_S(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \, d\mu(S),$$

où

$$\Phi_S(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = E \exp i \sum \lambda_j X_j^S.$$

Nous écrirons l'égalité (valable pour tout choix de $f_1, \ldots, f_n$) :

$$E f_1(X_1) \ldots f_n(X_n) = \int_{\mathcal{S}} E f_1(X_1^S) \ldots f_n(X_n^S) \, d\mu(S)$$

sous la forme

$$X = \int_{\mathcal{S}} X^S \, d\mu(S),$$

soit :

Toute forme δ-invariante sur $(N, \tilde{\delta})$ est mélange de formes à accroissements indépendants et homogènes.

Cas de μ mesure diffuse infinie. Représentation des formes μ-invariantes. — Soit toujours $(f_j)_{j\in J}$ une base algébrique de $C(R)$, $1\in(f_j)$. Soit (f_j, t) l'ensemble des couples (f_j, t), $f_j\in(f_j)$ et $t\in D_+^*$ ensemble des nombres dyadiques strictement positifs, et soit $(z_{0,t})$, $\theta\in R^*$, $t\in D_+^*$ des variables distinctes des précédentes. Soit $\mathfrak{A}$ l'algèbre (complexe) des polynômes par rapport aux $f_{j,t}$, $z_{0,t}$, $\mathcal{J}$ l'idéal engendré par les polynômes de la forme $z_{0,t}z_{0,t'} - z_{\theta,t+t'}$, $\theta\in R^*$, $t\in D_+^*$.

On munit $\mathfrak{A}/\mathcal{J}$ d'une structure d'algèbre archimédienne de la manière suivante :

Un polynôme du premier degré

$$P = a_0 + \sum_1^n a_i f_{i,t} + \sum_{j=1}^n b_j z_{0_j,t}$$

est dit positif si et seulement si

$$a_0 + \sum_i a_i f_i(x) + \sum_j b_j \exp i\theta_j x \geqq 0 \quad (\text{sur } R).$$

$\mathfrak{A}$ est muni de l'involution

$$(a f_{i,t})^* = (\bar{a} f_{j,t})^*; \qquad (b\, z_{0,t})^* = b\, z_{-0,t};$$

$\mathfrak{P}_1$ sera alors l'ensemble des polynômes P qui s'écrivent d'au moins une manière sous la forme $P = \sum_i \prod_j P_{ij}$, P_{ij}, polynôme du premier degré $\geqq 0$, $\mathfrak{P}_1$ est un préordre (de polynômes « réels »).

Soient $\mathfrak{P}$ le préordre $\mathfrak{P}_1 \cup \ldots \mathcal{J} \cup (-\mathcal{J})$ et $(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}') = (\mathfrak{A}/\mathcal{J}, \mathfrak{P}/\mathcal{J})$. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ étant archimédienne, il en est de même de $(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$. Soit alors X une forme μ-invariante sur $E(V, \mathcal{B}, \mu)$, μ mesure diffuse de masse infinie. La formule

$$\begin{aligned} &T(f_{1,t_1} \times \ldots \times f_{n,t_n} \times z_{0_{n+1},t_{n+1}} \times \ldots \times z_{0_{n+p},t_{n+p}}) \\ &\quad = E[f_1 X(1_{\Delta_1}) \times \ldots \times (1_{\Delta_n}) \exp i\theta_{n+1} X(1_{\Delta_{n+1}}) \times \ldots \times \exp i\theta_{n+p} X(1_{\Delta_{n+p}})], \end{aligned}$$

où $\Delta_i\in\mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n+p$, $\Delta_i\Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\mu(\Delta_i) = t_i$ associe à X une forme linéaire positive T sur $\mathfrak{A}$ (en étendant par linéarité la définition à tous les polynômes) et $T(1) = 1$ (l'existence des ensembles Δ_i est assurée parce que μ est de masse infinie et diffuse).

Nous pouvons alors appliquer le théorème de représentation à la forme T' induite par T sur $(\mathfrak{A}', \mathfrak{P}')$. On a $T' = \int_{\mathcal{S}} S\, d\mu(S)$, où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des caractères réels de $\mathfrak{A}$.

$S(f_i, t) = \bar{S}_t(f_i)$ définit, à t fixé, une forme linéaire positive sur $C(R)$ et on montre, comme dans le cas discret, que S_t ne change pas $\{\infty\}$.

Comme $\bar{S}_t(1)=1$, $\bar{S}_t$ définit (ν-p. s.) une probabilité sur R. On pose

$$S(z_{0,t})=\Phi_S(0, t);$$

$$\sum_i\sum_j \Phi_S(\theta_i-\theta_j, t)\rho_i\rho_j = S\left(\sum_i\sum_j \rho_i\rho_j z_{\theta_i-\theta_j, t}\right)$$

et comme $\sum_i\sum_j \rho_i\rho_j z_{\theta_i-\theta_j, t}$ est un polynôme positif du premier degré, on voit que $\Phi_S(., t)$ est de type positif pour tout t.

De plus, $\Phi_S(\theta, t)\,\Phi_S(\theta, t')=\Phi_S(\theta, t+t')$ (multiplicativité de S).

Comme $t\in D_+^*$, S_t définit un semi-groupe de convolution fortement continu. Donc $\Phi(\theta, t)=\exp - t\,\psi(\theta)$.

A chaque S on peut associer une forme X^S à accroissements indépendants et on écrit $X=\int_{\mathcal{S}} X^S\, d\nu(S)$, au sens où, pour tout $f_1, \ldots, f_n \in C(R)$, on a

$$E[f_1(X(1_{\Delta_1}))\ldots f_n(X(1_{\Delta_n}))] = \int_{\mathcal{S}} E f_1(X^S(1_{\Delta_1}))\ldots f_n(X^S(1_{\Delta_n}))\, d\nu(S)$$

et en particulier $\Delta_i \in \mathcal{B}$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ pour $i\neq j$;

$$E \exp i\sum_{j=1}^n \theta_j X(1_{A_j}) = \int_{\mathcal{S}} \exp - \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\,\psi(\theta_j, S)\, d\nu(S) \qquad \text{si} \quad \Phi_S = \exp - \psi_S.$$

Remarques. — 1° Sur le cas de μ-mesure diffuse finie.

La démonstration précédente ne vaut plus car il est impossible de trouver des ensembles $\Delta_1, \ldots, \Delta_h$ disjoints pour fabriquer une forme linéaire respectant la commutativité de l'algèbre. Par ailleurs, l'exemple suivant suggère que le résultat est faux dans ce cas.

Soit $((0, 1), dx)$ et Y une variable uniformément répartie sur $[0, 1]$, X_t le processus échelon, pour $t\in[0, 1]$, c'est-à-dire $X(1_A)=1_A(Y)$.

Ce processus est dx-invariant, et ne semble pas pouvoir être considéré comme mélange de processus à accroissements indépendants.

2° Il y a le même rapport entre processus échangeables sur R^+ et variables échangeables, qu'entre processus à accroissements indépendants et variables indépendantes; un processus échangeable sur R^+ étant défini par $Y(t)=X(1_{0,t})$, X forme dx-invariante. Une suite $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de variables échangeables sera dite infiniment divisible (dans l'ensemble des suites de variables échangeables) si pour tout $p\in N$, il existe une suite (Y_k^p), $k\in N$ de variables échangeables, telles que

$$X_k = Y_{kp+1}^p + \ldots + Y_{k(p+1)}^p.$$

Alors, à tout processus à accroissements échangeables, on peut associer une suite indéfiniment divisible et réciproquement.

ε-invariance des formes μ-invariantes.

Proposition. — *Soit* X *une forme* μ*-invariante admettant la représentation* $X = \int_{\mathcal{S}} X^S \, d\nu(S)$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° X *est* ε*-invariante* (*voir* § II.1);

2° X^S *est symétrique* (ε*-invariante*) ν*-p. s.*

Démontrons le résultat, par exemple, dans le cas où $(V, \mu) = (N^\star, \overline{\delta})$. Alors (1) équivaut à (3) :

3° La loi de $\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2$ est indépendante du choix de ε_i, $|\varepsilon_i|^2 = 1$, $i = 1, 2$. En effet,

$$\Phi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{E}\exp i(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \int_{\delta} |\varphi_S(\lambda_1)|.|\varphi_S(\lambda_2)| \, d\nu(S),$$

$$\int |\varphi_S(\lambda) - \varphi_S(-\lambda)|^2 \, d\nu(S) = \Phi_2(\lambda, \lambda) + \Phi_2(-\lambda, -\lambda) - \Phi_2(\lambda, -\lambda) - \Phi_2(-\lambda, \lambda) = 0$$

donc

$$\varphi_S(\lambda) = \varphi_S(-\lambda) \quad \nu\text{-p. s.}, \qquad \lambda \in Q,$$

et donc φ est paire puisque continue. La réciproque est évidente.

Remarque. — Ce type de méthode est très général. Il permet de montrer, par exemple, que toute forme à valeurs dans R^+, est mélange de subordinateurs, etc. L'espace des valeurs de la forme est peu important pour les démonstrations.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] B. W. Gnedenko et A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for sums of independent tandom variables*, Addison-Wesley, 1954.

[2] M. A. Krasnoselski et Ya. B. Ruticki, *Convex functions, Orlicz spaces*, Noordhoff, 1961 (Groningen).

[3] J.-L. Krivine, *Thèse*, Paris, 1967 (à paraître).

[4] W. Matuszewska, *On generalized Orlicz-spaces* (*Bull. Acad. Sc. Pol.*, Ser. Sci. math. astronom. phys., vol. 8, 1960, p. 349-353).

[5] W. Matuszewska, *Regularity increasing functions in connection with* L*-spaces* (*Studia Math.*, vol. 21, 1962, p. 159-164).

[6] W. Matuszewska et Orlicz, *A note on the theory of s-normes spaces and* φ*-integrable functions* (*Studia Math.*, vol. 21, 1961, p. 107-115).

[7] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris.

[8] K. Urbanik, *Prediction problems for strictly stationary processes* (5° *Berkeley Symposium*, vol. 2, part I, p. 235-257).

[9] K. Urbanik et W. A. Woyczinski, *Bull. Acad. Sc. Pol.*, vol. 15, 1967, p. 3-11.

[10] J. Bretagnolle et D. Dacunha-Castelle, *C. R. Acad. Sc.*, t. 264, série A, 1967, p. 877-881.

[11] J. Bretagnolle et D. Dacunha-Castelle, *C. R. Acad. Sc.*, t. 265, série A, 1967, p. 474-477.

[12] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle et J.-L. Krivine, *Lois stables et espaces* L^p (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, série B, vol. II, n° 3, 1966, p. 231-263).

[13] A. Prékopa, *On stochastic set functions*, I (*Acta Math. Ac. Sc. Hungar.*, vol. 7, 1956, p. 215-263).

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1968.)

Jean Bretagnolle,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
rue Descartes, 67-Strasbourg.

Didier Dacunha-Castelle,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
rue Descartes, 67-Strasbourg.