ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES DIXMIER

Sur la représentation régulière d'un groupe localement compact connexe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 2, nº 3 (1969), p. 423-436
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1969_4_2_3_423_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 2, 1969, p. 423 à 436.

SUR LA REPRÉSENTATION RÉGULIÈRE D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT CONNEXE

PAR JACQUES DIXMIER.

Soient G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar invariante à gauche, π la représentation régulière de G dans $L^2(G)$ et A l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$. Si G est unimodulaire, R. Godement et I. E. Segal ont démontré, simultanément et indépendamment, que A est semi-finie ([13], [22]). Si G n'est pas unimodulaire, on connaît des exemples où A n'est pas semi-finie; toutefois, R. Godement et I. E. Segal ont conjecturé que A est encore semi-finie lorsque G est *connexe*. Cette conjecture vient d'être établie par L. Pukanszky [20] lorsque G est un groupe de Lie résoluble. Nous allons dans le présent article établir la conjecture générale :

THÉORÈME. — *Soient* G *un groupe localement compact connexe*, π *sa représentation régulière. L'algèbre de von Neumann engendrée par* $\pi(G)$ *est semi-finie.*

L'essentiel du travail concerne le cas où G est un groupe de Lie. La méthode est une extension naturelle de celle de Pukanszky, que cet auteur a bien voulu nous communiquer avant publication. (Il faut noter que, pour G groupe de Lie résoluble, Pukanszky obtient son théorème comme corollaire de résultats beaucoup plus précis qui ne sont pas généralisés ici.)

QUELQUES NOTATIONS. — Soient G un groupe de Lie réel, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et $g \in G$. On note Ad g l'opération adjointe de g dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et si G est connexe, on note Ad $(g; \mathfrak{n})$ la restriction de Ad g à $\mathfrak{n}$.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et $x \in \mathfrak{g}$. On note ad x l'opération adjointe de x dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on note ad $(x; \mathfrak{n})$ la restriction de ad x à $\mathfrak{n}$.

Soient B un espace borélien, R une relation d'équivalence dans B. On dit que R est régulière si B/R est dénombrablement séparé. Soit G un groupe opérant dans B par automorphismes de la structure borélienne. On dit que G opère régulièrement dans B si la relation d'équivalence définie par G dans B est régulière.

Soit G un groupe topologique. On note Aut(G) le groupe des automorphismes de G, Int(G) le groupe des automorphismes intérieurs de G.

On recommande la lecture de l'introduction à [1].

1. Le nilradicalisé d'un groupe de Lie.

1.1. Lemme. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique* o, $\mathfrak{r}$ *son radical. Si* $\mathfrak{r}$ *est nilpotent,* $\mathfrak{g}$ *est unimodulaire.*

Si $x \in \mathfrak{r}$, $(\mathrm{ad}\, x)(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}$, donc $\mathrm{ad}\, x$ est nilpotent et par suite $\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\, x) = 0$. Soit $\mathfrak{l}$ une section de Levi de $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{l} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$, donc $\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}\, y) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{l}$. Or, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{r}$.

1.2. Lemme. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique* o, $\mathfrak{n}$ *son plus grand idéal nilpotent. Posons* $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$.

(i) $\mathfrak{h}$ *est un idéal caractéristique de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *soit commutatif.*

(ii) *Le radical de* $\mathfrak{h}$ *est* $\mathfrak{n}$.

(iii) $\mathfrak{h}$ *est unimodulaire.*

(iv) *Pour toute section de Levi* $\mathfrak{l}$ *de* $\mathfrak{g}$, *on a* $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$.

(i) est évident.

Soient $\mathfrak{l}$ une section de Levi de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ le radical de $\mathfrak{g}$. On a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$ ([4], p. 81, prop. 6 et p. 64, remarque 2). Donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{l} + \mathfrak{n} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + \mathfrak{l} + \mathfrak{n}\\ &= ([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{l}, \mathfrak{r}]) + [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] + [\mathfrak{g}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{n}\\ &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n} = \mathfrak{h} \supset [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] + \mathfrak{n} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n},\end{aligned}$$

ce qui prouve (iv) et (ii). Enfin, (iii) résulte de (ii) et du lemme 1.1.

1.3. Définition. — *Dans les conditions du lemme* 1.2, *on dira que* $\mathfrak{h}$ *est le nilradicalisé de* $\mathfrak{g}$.

1.4. Lemme. — *Soient* G *un groupe de Lie réel simplement connexe,* Z *son centre,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie,* $\mathfrak{h}$ *le nilradicalisé de* $\mathfrak{g}$, H *le sous-groupe analytique de* G *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$ (*de sorte que* H *est fermé distingué dans* G), φ *le morphisme canonique de* G *sur* G/H. *Alors* $\varphi(Z)$ *est discret dans* G/H.

(La démonstration suivante, plus simple que ma démonstration initiale, est due à A. Borel.)

Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$ conformément aux notations de 1.2. Alors $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{n}; \mathfrak{g})$ est algébrique parce que les éléments de $\mathrm{ad}\,(\mathfrak{n}; \mathfrak{g})$ sont nilpotents ([6], p. 123, prop. 14), et ad $(\mathfrak{l}; \mathfrak{g})$ est algébrique parce que $\mathfrak{l} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ ([5], p. 177, th. 15), donc ad $(\mathfrak{h}; \mathfrak{g})$ est algébrique ([5], p. 175, th. 14). Donc Ad $(H; \mathfrak{g})$ est fermé dans le groupe linéaire de $\mathfrak{g}$. Par suite HZ, qui est l'image réciproque de Ad $(H; \mathfrak{g})$ par Ad, est fermé dans G. Il en résulte que $\varphi(Z)$ est fermé dans G/H. Mais l'algèbre de Lie de Z est contenue dans $\mathfrak{n}$. L'algèbre de Lie de $\varphi(Z)$ est donc $\{0\}$, d'où le lemme.

L. Pukanszky me signale qu'il a obtenu il y a longtemps, mais non publié, la proposition suivante :

1.5. Proposition (L. Pukanszky). — *Soient* G *un groupe de Lie réel connexe,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie,* $\mathfrak{h}$ *le nilradicalisé de* $\mathfrak{g}$, H *le sous-groupe analytique de* G *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$. *Alors* H *est un sous-groupe fermé de* G.

Soient G_1 le revêtement universel de G, Z le centre de G_1, π le morphisme canonique de G_1 sur G, K le noyau de π. L'algèbre de Lie de G_1 est $\mathfrak{g}$. Soit H_1 le sous-groupe analytique de G_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On a $H = \pi(H_1)$, donc $\pi^{-1}(H) = \pi^{-1}(\pi(H_1)) = H_1 K$. Soit φ le morphisme canonique de G_1 sur G_1/H_1. Alors $\varphi(Z)$ est discret dans G_1/H_1 (lemme 1.4). Donc $\varphi(K)$ est discret dans G_1/H_1 et par suite fermé dans G_1/H_1. Donc $H_1 K = \varphi^{-1}(\varphi(K))$ est fermé dans G_1. Cela prouve que H est fermé dans G.

1.6. Définition. — *Dans les conditions de la proposition* 1.5, *on dira que* H *est le nilradicalisé de* G.

1.7. Proposition. — *Soient* G *un groupe de Lie réel connexe,* H *son nilradicalisé.*

(i) H *est un sous-groupe de Lie fermé connexe distingué de* G, *tel que* G/H *soit commutatif.*

(ii) *Le radical de* H *est nilpotent.*

(iii) H *est unimodulaire.*

Cela résulte de la proposition 1.5 et du lemme 1.2.

2. Deux critères pour qu'un groupe soit de type I.

2.1. Pour G résoluble, la proposition suivante se trouve dans [21], 2.2.

Proposition. — *Soient* G *un groupe de Lie réel,* G_0 *sa composante neutre. On suppose que* G *est localement isomorphe à un groupe algébrique linéaire réel, et que* G/G_0 *est fini. Alors* G *est de type* I.

La proposition est évidente si $\dim G = 0$. Supposons-la établie pour les groupes de dimension $< \dim G$.

Soient G_1 un groupe algébrique linéaire réel tel que G soit localement isomorphe à G_1. Soit G_2 la composante neutre de G_1. Soit G_3 le revêtement universel de G_2. Soit π une représentation unitaire factorielle fortement continue de G_3 dans un espace hilbertien séparable. Nous allons prouver que π est de type I. Il en résultera que G_3 est de type I, donc que G_0, qui est isomorphe à un quotient de G_3, est de type I, donc que G est de type I ([7], lemme 3). Désormais, on ne parlera plus de G ni de G_0.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G_1; c'est une algèbre de Lie algébrique, qui s'identifie à l'algèbre de Lie de G_2 et de G_3. Il existe un idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$, formé d'endomorphismes nilpotents, tel que $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ soit réductive ([6], p. 107, th. 3). Le sous-groupe analytique N de G_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est fermé, simplement connexe et nilpotent ([6], p. 123, prop. 14). Soient $\mathfrak{a}$ un idéal commutatif de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$, et A le sous-groupe analytique de G_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$; ce sous-groupe est fermé, simplement connexe, distingué et commutatif; soient $\mathfrak{a}^\star$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{a}$ et $\hat{A}$ le groupe des caractères de A. Pour tout $x \in G_1$, soient $\rho(x)$ l'application $a \mapsto xax^{-1}$ de A dans A, $\rho'(x)$ l'automorphisme de $\hat{A}$ dual de $\rho(x)$, $\sigma(x) = \mathrm{Ad}\,(x; \mathfrak{a})$, et $\sigma'(x)$ le contragrédient de $\sigma(x)$. Alors l'application exponentielle de $\mathfrak{a}$ sur A est un isomorphisme φ de groupes topologiques qui transforme $\sigma(x)$ en $\rho(x)$; donc l'isomorphisme dual de φ transforme $\sigma'(x)$ en $\rho'(x)$. Comme l'application $x \mapsto \sigma'(x)$ est une représentation rationnelle de G_1, G_2 opère régulièrement dans $\mathfrak{a}^\star$ d'après un théorème de C. Chevalley (pour une esquisse de démonstration, *cf.* [8], p. 183). Donc G_2 opère régulièrement dans $\hat{A}$. Or les automorphismes de A définis par les éléments de G_3 sont les mêmes que les automorphismes de A définis par les éléments de G_2. Donc G_3 opère régulièrement dans $\hat{A}$. Il résulte de là ([18], p. 302, th. 9.1) que $\pi \mid A$ est concentrée sur une G_3-orbite Ω. (Le dernier alinéa recopie à peu de chose près [7], p. 326, l. 15-37.)

Premier cas. — Supposons qu'on puisse choisir $\mathfrak{a}$ de manière que Ω ne soit pas réduite à un point. Soit $\omega \in \Omega$. Soient S_1, S_2, S_3 les stabilisateurs de ω dans G_1, G_2, G_3. Alors S_1 est algébrique ([6], p. 28, cor. 2). Les

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d] & & \\
S_6 \arrow[r] & S_7 \arrow[r] & S_5 \arrow[r] \arrow[d] & S_3 \arrow[d] & \\
 & & S_4 \arrow[r] & S_2 \arrow[r] & S_1
\end{tikzcd}$$

groupes S_1 et S_2 ont même composante neutre S_4. Soit τ le morphisme canonique de G_3 sur G_2. On a $S_3 = \tau^{-1}(S_2)$; soient $S_5 = \tau^{-1}(S_4)$, S_6 la composante neutre de S_5, et $K = \mathrm{Ker}\,\tau \subset S_5$. On a $\tau(S_6) = S_4$, donc $S_5 = S_6 K$. Le groupe K est commutatif de type fini, donc il existe un sous-groupe S_7 de S_5 tel que $S_7 \supset S_6$, que S_7/S_6 soit fini, et que $K/(K \cap S_7)$ soit isomorphe à $\mathbf{Z}^n$; alors il existe un sous-groupe K' de K, isomorphe à $\mathbf{Z}^n$, tel que $K' \cap S_7 = \{e\}$ et tel que toute classe de S_5 modulo S_7 rencontre K'; comme K est central dans G_3, on a $S_5 = S_7 \times K'$. Comme $\Omega \neq \{\omega\}$, on a $\dim S_3 < \dim G_3$, donc $\dim S_4 < \dim G_4$. D'autre part, S_6 est localement isomorphe à S_4 donc à S_4. D'après l'hypothèse de récurrence, S_7 est de type I. Donc $S_5 = S_7 \times K'$ est de type I ([16], p. 200, cor.). Or S_4/S_4 est fini, donc S_2/S_4 est fini, donc S_3/S_5, qui est isomorphe à S_2/S_4, est fini. Donc S_3 est de type I ([7], lemme 3). Or ([18], p. 297, th. 8.1) la représentation π est de même type qu'une représentation unitaire fortement continue de S_3. Ainsi, π est de type I.

Deuxième cas. — Supposons que, pour tout idéal commutatif $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{n}$, $\pi \mid A$ soit scalaire. On prouve alors que π est de type I, à peu près exactement comme dans [7], depuis la p. 327, l. 14 jusqu'à la p. 328, l. 2.

2.2. *Remarque.* — Il est prouvé dans [7] que la composante neutre d'un groupe algébrique linéaire réel est de type I. Mais rappelons qu'on peut construire deux groupes de Lie connexes localement isomorphes dont l'un est de type I et l'autre pas.

2.3. Proposition. — *Soit* H *un groupe de Lie réel connexe dont le radical* N *est nilpotent.*

(i) H *est de type* I.

(ii) *L'action de* H *dans* $\hat{\mathrm{N}}$ *est régulière.*

Soient $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H, $\mathfrak{n}$ le radical de $\mathfrak{h}$. Par hypothèse, $\mathfrak{n}$ est nilpotent. D'après le théorème d'Ado, il existe un espace vectoriel réel V de dimension finie tel que $\mathfrak{g}$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(\mathrm{V})$, et que les éléments de $\mathfrak{n}$ soient des endomorphismes nilpotents de V. Alors $\mathfrak{n}$ est algébrique ([6], p. 123, prop. 14) donc $\mathfrak{h}$ est algébrique ([6], p. 129, prop. 19). Soit $H_1 \subset GL(V)$ un groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Alors H est localement isomorphe à H_1 donc de type I (prop. 2.1). Soit H_2 la composante neutre de H_1. On a $\mathrm{Ad}(H; \mathfrak{n}) = \mathrm{Ad}(H_2; \mathfrak{n})$. D'après le théorème de Chevalley déjà utilisé, H_2 opère régulièrement dans le dual $\mathfrak{n}^*$ de $\mathfrak{n}$. Donc H opère régulièrement dans $\mathfrak{n}^*$. Or l'espace borélien $\hat{\mathrm{N}}$ s'identifie d'après la théorie de Kirillov à une partie fermée de $\mathfrak{n}^*$ stable pour l'action de H, donc H opère régulièrement dans $\hat{\mathrm{N}}$.

3. Existence de mesures invariantes.

3.1. Lemme. — *Soient* K *un groupe localement compact séparable commutatif,* χ *un caractère continu* > 0 *de* K, S *un espace borélien standard. On suppose que* K *opère régulièrement dans* S *par une application borélienne* $(k, s) \mapsto ks$ *de* $K \times S$ *dans* S. *Soit* μ *une mesure positive* σ*-finie sur* S. *On suppose que* $k(\mu) = \chi(k)\,\mu$ *pour tout* $k \in K$. *Alors il existe une fonction* *borélienne* m *sur* S, *telle que* $m(s) > 0$ *presque partout et telle que, pour tout* $k \in \mathrm{K}$, *on ait* $m(ks) = \chi(k)\, m(s)$ *presque partout.*

a. Soit π l'application canonique de S sur S/K. Soient ν une mesure positive finie équivalente à μ, et $\nu' = \pi(\nu)$. D'après [17], p. 143, th. 6.2, il existe une partie borélienne ν'-négligeable de S/K de complémentaire standard. On peut donc supposer désormais que S/K est standard. D'après [17], p. 143, th. 6.3, il existe une partie borélienne ν'-négligeable N de S/K et une application borélienne φ de (S/K) — N dans S telle que $\varphi(x) \in x$ pour tout $x \in (\mathrm{S/K}) - \mathrm{N}$. En remplaçant S par $\mathrm{S} - \pi^{-1}(\mathrm{N})$, on peut donc supposer désormais que φ est définie dans S/K tout entier. D'après [17], p. 139, th. 3.2, $\mathrm{T} = \varphi(\mathrm{S/K})$ est une partie borélienne standard de S. Soit ψ l'application $(k, t) \mapsto kt$ de $\mathrm{K} \times \mathrm{T}$ dans S. Cette application est borélienne surjective. Soit R la relation d'équivalence définie par ψ dans $\mathrm{K} \times \mathrm{T}$, et munissons $(\mathrm{K} \times \mathrm{T})/\mathrm{R}$ de la structure borélienne quotient de celle de $\mathrm{K} \times \mathrm{T}$. Alors la bijection ψ' de $(\mathrm{K} \times \mathrm{T})/\mathrm{R}$ sur S déduite de ψ par passage au quotient est borélienne. Donc $(\mathrm{K} \times \mathrm{T})/\mathrm{R}$ est dénombrablement séparé et par suite analytique ([17], p. 141, cor.). D'après [17], p. 140, th. 4.2, ψ' est un isomorphisme borélien. Ainsi S s'identifie à $(\mathrm{K} \times \mathrm{T})/\mathrm{R}$ muni de la structure borélienne quotient.

b. Il existe sur S une topologie d'espace localement compact polonais telle que : 1° la structure borélienne donnée soit la structure borélienne sous-jacente à la topologie; 2° μ soit une mesure de Radon. D'après [2], p. 68, prop. 3, la relation d'équivalence définie par K dans S est μ-mesurable. Donc ([2], p. 67, prop. 2 et p. 64, th. 2) il existe, pour tout $y \in \mathrm{S/K}$, une mesure positive σ-finie μ_y sur $\pi^{-1}(y)$ telle que

$$\int_{\mathrm{S}} f(s)\, d\mu(s) = \int_{\mathrm{S/K}} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(s)\, d\mu_y(s)$$

pour toute fonction borélienne positive f sur S. En outre, si $(\mu'_y)_{y \in \mathrm{S/K}}$ est une autre famille de mesures avec les mêmes propriétés, on a $\mu'_y = \mu_y$ presque partout pour ν' sur S/K.

Soit $k \in \mathrm{K}$. On a, pour toute fonction borélienne positive f sur S,

$$\begin{aligned}\chi(k) \int_{\mathrm{S}} f(s)\, d\mu(s) &= \int_{\mathrm{S}} f(s)\, d(k\mu)(s) \\ &= \int_{\mathrm{S}} f(ks)\, d\mu(s) = \int_{\mathrm{S/K}} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(ks)\, d\mu_y(s).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{S}} f(s)\, d\mu(s) &= \int_{\mathrm{S/K}} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(ks)\, \chi(k)^{-1}\, d\mu_y(s) \\ &= \int_{\mathrm{S/K}} d\nu'(y) \int_{\pi^{-1}(y)} f(s)\, \chi(k)^{-1}\, dk\mu_y(s).\end{aligned}$$

Il existe donc une partie borélienne ν'-négligeable N_k de S/K telle que

$$y \notin N_k \Rightarrow k(\mu_y) = \chi(k)\mu_y.$$

Soit $(k_1, k_2, \ldots)$ une suite dense dans K. Soit N la réunion, ν'-négligeable, des N_{k_i}. On a

$$y \notin N \Rightarrow k_i(\mu_y) = \chi(k_i)\mu_y \quad \text{pour tout } i.$$

Or il existe sur $\pi^{-1}(y)$ une structure d'espace homogène de K telle que la structure borélienne de $\pi^{-1}(y)$ soit sous-jacente à la topologie de cet espace homogène ([1], p. 16, prop. 3.7). Alors $k \mapsto k(\mu_y)$ est une fonction vaguement continue de k. Donc

$$y \notin N \Rightarrow k(\mu_y) = \chi(k)\mu_y \quad \text{pour tout } k \in K.$$

En remplaçant S par $S - \pi^{-1}(N)$, on est ramené à prouver le lemme quand $N = \emptyset$.

c. Soient $(k_1, t_1) \in K \times T$, $(k_2, t_2) \in K \times T$ tels que $\psi(k_1, t_1) = \psi(k_2, t_2)$, c'est-à-dire $k_1 t_1 = k_2 t_2$. Cela entraîne $t_1 = t_2$ et $k_2^{-1} k_1(t_1) = t_1$. Comme K est commutatif, $k_2^{-1} k_1$ laisse fixes tous les points de Kt_1. Donc, si $y = \pi(t_1)$, on a $(k_2^{-1} k_1)(\mu_y) = \mu_y$ et par suite $\chi(k_2^{-1} k_1) = 1$, $\chi(k_1) = \chi(k_2)$. Compte tenu de la conclusion de (a), il existe une fonction borélienne m sur S telle que $m(kt) = \chi(k)$ pour tout $(k, t) \in K \times T$, d'où $m(s) > 0$ pour tout $s \in S$. Si $k, k' \in K$, et $t \in T$, on a

$$m(k(k't)) = m((kk')t) = \chi(kk') = \chi(k)\chi(k') = \chi(k)\, m(k't)$$

donc $m(ks) = \chi(k)\, m(s)$ pour tout $(k, s) \in K \times S$.

3.2. *Remarque*. — La conclusion du lemme 3.1 peut s'exprimer en disant que la mesure $m.\mu$ est positive, équivalente à μ, et *invariante* par K (d'où le titre du paragraphe). Toutefois, c'est sous la forme 3.1 que nous utiliserons le résultat.

4. Quelques lemmes.

4.1. Définition. — *Soient* H *un groupe localement compact séparable*, N *un sous-groupe fermé distingué de type* I *de* H, A *une partie de* $\hat{N}$. *On notera* $\hat{H}_A$ *l'ensemble des* $\pi \in \hat{H}$ *tels que* $\pi \mid N$ *soit concentré sur* A.

4.2. Lemme. — *Soient* H *un groupe localement compact séparable*, N *un sous-groupe fermé distingué de type* I *de* H, A *une partie de* $\hat{N}$.

(i) *Si* A *est fermée dans* $\hat{N}$, $\hat{H}_A$ *est fermée dans* $\hat{H}$.

(ii) *Si* A *est ouverte dans* $\hat{N}$ *et stable pour l'action de* H, $\hat{H}_A$ *est ouverte dans* $\hat{H}$.

(iii) *Si* A *est ouverte dans son adhérence relativement à* $\hat{N}$ *et stable pour l'action de* H, $\hat{H}_A$ *est ouverte dans son adhérence relativement à* $\hat{H}$.

(i) Supposons A fermée dans $\hat{N}$. Soit $\pi \in \hat{H}$ un point adhérent à $\hat{H}_A$. Alors $\pi \mid N$ est faiblement contenu dans $\hat{H}_A \mid N$ ([9], p. 371, cor.) donc dans A. Soient μ une mesure positive sur $\hat{N}$ dont la classe est associée à $\pi \mid N$, et S le support (fermé) de μ. Si $\sigma \in S$, σ est faiblement contenue dans $\pi \mid N$ ([10], p. 252, lemme 3.1), donc $\sigma \in A$. Ainsi, μ est concentrée sur A, et $\pi \in \hat{H}_A$. Donc $\hat{H}_A$ est fermée dans $\hat{H}$.

(ii) Supposons A ouverte dans $\hat{N}$ et stable pour l'action de H. Si $\pi \in \hat{H}$, la classe de mesure associée à $\pi \mid N$ est concentrée soit sur A soit sur $\hat{N} - A$ ([18], p. 295, th. 7.6). Donc $\hat{H} - \hat{H}_A$ est l'ensemble des $\pi \in \hat{H}$ tels que $\pi \mid N$ soit concentré sur $\hat{N} - A$ et par suite est fermé dans $\hat{H}$ d'après (i).

(iii) Soit B l'adhérence de A dans $\hat{N}$. Supposons A ouverte dans B et stable pour l'action de H. Comme $\hat{N}$ est un H-espace topologique ([12], p. 889, lemma 1.3), B est stable pour l'action de H. Il existe une partie ouverte C de $\hat{N}$ telle que $A = B \cap C$. Pour tout $h \in H$, on a $A = hA = B \cap hC$, donc $A = B \cap \left(\bigcup_{h \in H} hC \right)$. On peut donc supposer que C est stable pour l'action de H. Alors $\hat{H}_B$ est fermée d'après (i), $\hat{H}_C$ est ouverte d'après (ii), et $\hat{H}_A = \hat{H}_B \cap \hat{H}_C$.

4.3. Lemme. — *Soient* H *un groupe localement compact séparable de type* I, N *un sous-groupe fermé distingué de type* I *de* H. *Soit* B *un groupe localement compact. Pour tout* $b \in B$, *soit* $\rho(b)$ *un automorphisme de* H *laissant stable* N. *On suppose que* ρ *est un morphisme de* B *dans* Aut (H), *que l'application* $(b, h) \mapsto \rho(b)\, h$ *de* $B \times H$ *dans* H *est continue, et que* $\rho(B) \supset \mathrm{Int}\,(H)$.

On fait d'autre part les hypothèses suivantes :

a. H *opère régulièrement dans* $\hat{N}$.

b. B *opère régulièrement dans* $\hat{N}$.

c. Pour toute B-*orbite* Ω *dans* $\hat{N}$, B *opère régulièrement dans* $\hat{H}_\Omega$.

Alors B *opère régulièrement dans* $\hat{H}$.

Soit $\pi \in \hat{H}$. Puisque H opère régulièrement dans $\hat{N}$, $\pi \mid N$ est concentrée sur une H-orbite Φ dans $\hat{N}$ ([18], p. 302, th. 9.1). Soit $\Omega = \bigcup_{b \in B} b\Phi$. Puisque $\rho(B) \supset \mathrm{Int}(H)$, Ω est une B-orbite dans $\hat{N}$. D'après [12], p. 889, lemma 1.3, $\hat{N}$ est un H-espace topologique et un B-espace topologique, et $\hat{H}$ est un B-espace topologique. Puisque B opère régulièrement dans $\hat{N}$, Ω est ouverte dans son adhérence relativement à $\hat{N}$ ([11], p. 124, th. 1). D'après le lemme 4.2 (iii), $\hat{H}_\Omega$ est ouverte dans son adhérence relativement à $\hat{H}$. Donc $\hat{H}_\Omega$ est localement quasi-compacte et est « almost Hausdorff » au sens de [11]. On a $\pi \in \hat{H}_\Omega$, et B opère régulièrement dans $\hat{H}_\Omega$ par hypothèse. Donc $B\pi$ est ouverte dans son adhérence relativement à $\hat{H}_\Omega$

([11], *loc. cit.*). Il existe des parties ouvertes U, U′ et des parties fermées F, F′ de $\hat{H}$ telles que $\hat{H}_\Omega = U \cap F$ et $B\pi = \hat{H}_\Omega \cap U' \cap F'$. Donc

$$B\pi = (U \cap U') \cap (F \cap F'),$$

de sorte que $B\pi$ est ouverte dans son adhérence relativement à $\hat{H}$. Par suite, B opère régulièrement dans $\hat{H}$ ([11], *loc. cit.*).

4.4. Lemme. — *Soient* V *un espace vectoriel réel de dimension finie,* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathcal{L}(V)$, $\mathfrak{n}$ *son plus grand idéal nilpotent,* $\mathfrak{h}$ *son nilradicalisé. Soient* $\mathfrak{a}$ *la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de* $\mathcal{L}(V)$ *contenant* $\mathfrak{g}$, *et* $\mathfrak{r}$ *le radical de* $\mathfrak{a}$. *On a* $[\mathfrak{r}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$.

On sait que $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ([5], p. 173, th. 13). Donc, si $\mathfrak{l}$ est une section de Levi de $\mathfrak{a}$, on a

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \supset \mathfrak{r} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{r} + [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \supset \mathfrak{r} + \mathfrak{l} = \mathfrak{a},$$

d'où $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$. D'autre part, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{a}]$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{a}$ contenu dans $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ donc dans $\mathfrak{h}$, de sorte que $[\mathfrak{r}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{n}$.

4.5. — Lemme. — *On utilise les notations du lemme* 4.4. *On suppose de plus que les éléments de* $\mathfrak{n}$ *sont nilpotents, de sorte que* $\mathfrak{h}$ *est algébrique. Soient* G *un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$, H *son nilradicalisé,* N *le radical de* H. *Soit* $A \subset GL(V)$ *le groupe algébrique irréductible d'algèbre de Lie* $\mathfrak{a}$. *Il existe des sous-groupes de Lie fermés* B, C *de* A *possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Si* $b \in B$, *il existe un automorphisme* $\rho(b)$, *évidemment unique, de* H, *tel que l'automorphisme correspondant de* $\mathfrak{h}$ *soit* $\operatorname{Ad}(b; \mathfrak{h})$.

(ii) *Pour tout* $g \in G$, *soit* $\sigma(g)$ *l'automorphisme* $h \mapsto ghg^{-1}$ *de* H. *Alors* $\sigma(G) \subset \rho(B)$.

(iii) $\rho(B)$ *laisse stable* N *et opère régulièrement dans* $\hat{N}$.

(iv) *Le groupe d'automorphismes de* $\hat{H}$ *défini par* $\rho(B)$ *est commutatif.*

(v) $C \subset B$, *et* $\rho(B) = \sigma(H).\rho(C)$.

(vi) *Pour tout* $c \in C$ *et tout* $h \in H$, *on a* $\rho(c)\, h \in hN$.

Soit H_1 le sous-groupe algébrique irréductible de A d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Soient H_2 la composante neutre de H_1, H_3 le revêtement universel de H_2, η le morphisme canonique de H_3 sur H_2. Comme H et H_3 ont même algèbre de Lie, H_3 est aussi le revêtement universel de H; soient θ le morphisme canonique de H_3 sur H, et $K = \operatorname{Ker} \theta \subset H_3$.

Comme $\mathfrak{h} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, H_1 est distingué dans A. Pour tout $a \in A$, soit $\rho_1(a)$ l'automorphisme $h_1 \mapsto a h_1 a^{-1}$ de H_1; soit $\rho_2(a)$ la restriction de $\rho_1(a)$ à H_2; soit $\rho_3(a)$ l'automorphisme de H_3 qui définit $\rho_2(a)$ par passage au quotient. L'application $(a, h_1) \mapsto \rho_1(a)\, h_1$ de $A \times H_1$ dans H_1

est rationnelle. Donc l'ensemble B' des $a \in A$ tels que $\rho_1(a)$ laisse fixe chaque point de $\eta(K)$ est un sous-groupe algébrique de A. Soit B la composante neutre de B'. Montrons que B possède les propriétés (i) à (iv) du lemme.

Pour tout $k \in K$, on a $\rho_1(B')\,\eta(k) = \{\eta(k)\}$, donc $\rho_3(B')\,k \subset k.(\mathrm{Ker}\,\eta)$; comme $\rho_3(B)\,k$ est connexe, on a $\rho_3(B)\,k = \{k\}$. Donc, pour tout $b \in B$, il existe un automorphisme $\rho(b)$ de H qui a même application tangente en e que $\rho_1(b)$; cette application tangente est $\mathrm{Ad}\,(b;\,\mathfrak{h})$. Cela prouve (i).

Soit $x \in \mathfrak{g}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\exp_A \lambda x$ et $\exp_G \lambda x$ ont la même opération adjointe dans $\mathfrak{h}$, à savoir $\exp \mathrm{ad}\,(\lambda x;\,\mathfrak{h})$. Donc $\rho_3(\exp_A \lambda x)$ définit par passage au quotient l'automorphisme $\sigma(\exp_G \lambda x)$ de H. Par suite, $\exp_A \lambda x \in B'$, de sorte que $\exp_A x \in B$; en outre, $\rho(\exp_A x) = \sigma(\exp_G x)$. Ainsi, $\sigma(\exp_G x) \subset \rho(B)$. Comme G est connexe, on en déduit que $\sigma(G) \subset \rho(B)$. Cela prouve (ii). On voit en même temps que $\exp_A(\mathfrak{g}) \subset B$. Donc $H_2 \subset B$.

Comme $\mathfrak{n}$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{h}$, $\rho(B)$ laisse stable N. L'opération adjointe de B' dans $\mathfrak{n}$ est rationnelle, donc la relation d'équivalence définie par B dans $\mathfrak{n}^*$ est régulière (théorème de Chevalley); donc $\rho(B)$ opère régulièrement dans $\hat{N}$ (qui s'identifie comme espace borélien à une partie fermée de $\mathfrak{n}^*$). Cela prouve (iii).

Soit B_1 le groupe des commutateurs de B. On a $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$, donc tout élément de $\rho(B_1)$ est de la forme $\sigma(h)$ avec un $h \in H$. Or l'action de H sur $\hat{H}$ est triviale. Donc l'action de $\rho(B_1)$ sur $\hat{H}$ est triviale. Cela prouve (iv).

Soient R le radical de A et $C = R \cap B$. Alors C est un sous-groupe de Lie fermé de A. Prouvons (v) et (vi). Puisque $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ (lemme 4.4), tout élément de B suffisamment voisin de e est de la forme rh avec $r \in R$, $h \in H_2 \subset B$, d'où $r \in R \cap B = C$. Comme B est connexe, $B = H_2 C$, d'où $\rho(B) = \rho(H_2)\,\rho(C) = \sigma(H)\,\rho(C)$. Cela prouve (v).

On a $[\mathfrak{r}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{n}$ (lemme 4.4). Soit N_1 le sous-groupe de Lie connexe de A d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Soit $r \in R$. Pour tout $h \in H_2$, on a $rhr^{-1} \in hN_1$. Si de plus $r \in B$, on a donc $\rho(r)\,h' \in h'N$ pour tout h' dans H suffisamment voisin de e. Comme H est connexe, on voit que $\rho(r)\,h' \in h'N$ pour tout $h' \in H$. Cela prouve (vi).

4.6. Lemme. — *On conserve les notations des lemmes* 4.4 *et* 4.5. *Si* B *et* C *possèdent les propriétés du lemme* 4.5, *alors* B *opère régulièrement dans* $\hat{H}$.

Montrons qu'on peut appliquer le lemme 4.3. D'abord, H est localement compact séparable, N est fermé distingué dans H, H et N sont de type I (prop. 2.3). Le groupe B est localement compact, $\rho(B)$ laisse stable N, ρ est un morphisme de B dans Aut (H). L'application $(b, x) \mapsto \mathrm{Ad}\,(b;\,\mathfrak{h})\,x$ de $B \times \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h}$ est continue, donc l'application

$(b, h) \mapsto \rho(b)\, h$ de $B \times H$ dans H est continue en (e, e) et par suite partout. On a $\rho(B) \supset \mathrm{Int}(H)$ d'après le lemme 4.5 (ii). Le groupe H opère régulièrement dans $\hat{N}$ (prop. 2.3). Le groupe B opère régulièrement dans $\hat{N}$ [lemme 4.5 (iii)]. Soit Ω une B-orbite dans $\hat{N}$. Il nous suffit maintenant de prouver que $\rho(B)$ opère régulièrement dans $\hat{H}_\Omega$; comme H opère trivialement dans $\hat{H}$, il suffit même, d'après le lemme 4.5 (v), de prouver que $\rho(C)$ opère régulièrement dans $\hat{H}_\Omega$.

Soit $\omega \in \Omega$. Le stabilisateur S de ω dans H est un sous-groupe fermé de H ([1], p. 16, prop. 3.7) contenant N. Soit α un 2-cocycle de Mackey, obstruction pour l'extension de ω à S. Pour tout $c \in C$, le stabilisateur de $c\omega$ dans H est $\rho(c)\,(S)$ donc est égal à S d'après le lemme 4.5 (vi); comme 2-cocycle de Mackey relatif à $c\omega$, on peut prendre le transformé de α par $\rho(c) \mid S$, et ce transformé est égal à α d'après le lemme 4.5 (vi) puisque α est trivial sur N. Soit β le 2-cocycle de S/N déduit de α par passage au quotient.

Soit $(S/N, \beta)^\wedge$ l'espace borélien des β-représentations unitaires irréductibles de S/N. D'après [18], p. 300, th. 8.3, il existe une bijection canonique

$$\Phi : \quad C\omega \times (S/N, \beta)^\wedge \to \hat{S}_{C\omega}.$$

D'autre part, d'après le lemme 4.5 (v), on a $\Omega = B\omega = HC\omega$, donc ([18], p. 297, th. 8.1) l'opération d'induction est une bijection

$$\Psi : \quad \hat{S}_{C\omega} \to \hat{H}_\Omega.$$

Puisque H est de type I, $(S/N, \beta)$ est de type I ([18], p. 302, th. 8.4), donc $(S/N, \beta)^\wedge$ est standard. Les orbites de C dans $\mathfrak{n}^*$ sont des réunions dénombrables d'ensembles compacts donc sont boréliennes; il résulte de là que $C\omega$ est une partie borélienne de $\hat{N}$. On est dans les conditions d'application de [1], p. 107, th. 7 (le rôle de H dans cet énoncé étant tenu ici par B); on en conclut que $\hat{S}_{C\omega}$ est standard et que Φ est un isomorphisme borélien. D'après [10], p. 257, th. 4.1, Ψ est continue. D'après [17], p. 139, th. 3.2, Ψ est un isomorphisme borélien.

L'action de $\rho(C)$ sur $\hat{H}_\Omega$ s'effectue par transport de structure. Transformant cette action par $\Psi \circ \Phi$, on obtient l'action de $\rho(C)$ sur $C\omega \times (S/N, \beta)^\wedge$ par transport de structure, c'est-à-dire l'application

$$(\rho(c), (c'\omega, \lambda)) \to (cc'\omega, \lambda).$$

Il est clair que $\rho(C)$ opère régulièrement dans $C\omega \times (S/N, \beta)^\wedge$ donc dans $\hat{H}_\Omega$ puisque $\Psi \circ \Phi$ est un isomorphisme borélien.

5. Démonstration du théorème.

5.1. Lemme (L. Pukanszky). — *Soient* G *un groupe localement compact séparable,* Δ *sa fonction module,* π *sa représentation régulière,* H *un sous-*

groupe fermé distingué unimodulaire de type I *de* G, *tel que* G/H *soit unimodulaire. Soit* μ *la mesure de Plancherel sur* $\hat{\mathrm{H}}$. *On suppose qu'il existe une fonction borélienne* m *sur* $\hat{\mathrm{H}}$, *telle que* $m(s) > 0$ *presque partout et telle que, pour tout* $g \in \mathrm{G}$, *on ait* $m(gs) = \Delta(g)\, m(s)$ *presque partout. Alors l'algèbre de von Neumann engendrée par* $\pi(\mathrm{G})$ *est semi-finie.*

Cf. [20], lemme 2′.

5.2. Lemme. — *Soit* G *un groupe de Lie réel connexe,* π *sa représentation régulière. L'algèbre de von Neumann engendrée par* $\pi(\mathrm{G})$ *est semi-finie.*

Soit Δ la fonction module de G. Soit H le nilradicalisé de G. C'est un sous-groupe distingué fermé unimodulaire de G tel que G/H soit commutatif (prop. 1.7); ce sous-groupe est de type I (prop. 1.7 et 2.3). Soit ν une mesure de Haar de H, et μ la mesure de Plancherel correspondante sur $\hat{\mathrm{H}}$.

Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{n}$ son plus grand idéal nilpotent. Il existe un espace vectoriel réel V de dimension finie et une identification de $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(\mathrm{V})$ telle que les éléments de $\mathfrak{n}$ soient nilpotents. Introduisons alors toutes les notations des lemmes 4.4 et 4.5.

Soit B_1 le groupe des commutateurs de B. Pour $b \in \mathrm{B}_1$, $\rho(b)$ opère trivialement dans $\hat{\mathrm{H}}$ [lemme 4.5 (iv)]. Le stabilisateur de tout point de $\hat{\mathrm{H}}$ dans B est fermé ([1], p. 16, prop. 3.7). Donc $\rho(\overline{\mathrm{B}}_1)$ opère trivialement dans $\hat{\mathrm{H}}$. Soit $\mathrm{K} = \mathrm{B}/\overline{\mathrm{B}}_1$. C'est un groupe localement compact séparable commutatif. Il opère régulièrement dans $\hat{\mathrm{H}}$ (lemme 4.6). Il existe un caractère continu $\chi > 0$ de B tel que $\rho(b)\nu = \chi(b)^{-1}\nu$ pour tout $b \in \mathrm{B}$, d'où $\rho(b)\mu = \chi(b)\mu$ pour tout $b \in \mathrm{B}$. D'après le lemme 3.1, il existe une fonction borélienne m sur $\hat{\mathrm{H}}$, telle que $m(s) > 0$ presque partout, et telle que, pour tout $b \in \mathrm{B}$, on ait $m(bs) = \chi(b)\, m(s)$ presque partout. Soit $g \in \mathrm{G}$. Il existe $b \in \mathrm{B}$ tel que $\sigma(g) = \rho(b)$. Alors

$$\chi(b)^{-1}\nu = \rho(b)\nu = \sigma(g)\nu = (\operatorname{mod}\sigma(g))^{-1}\cdot\nu = \Delta(g)\,\nu \quad ([3], \text{p. } 61, \text{cor.}),$$

donc $\chi(b)^{-1} = \Delta(g)$. Ainsi, pour $g \in \mathrm{G}$, on a $m(gs)^{-1} = \Delta(g)\, m(s)^{-1}$ presque partout. D'après le lemme 5.1, $\pi(\mathrm{G})$ engendre une algèbre de von Neumann semi-finie.

5.3. Lemme. — *Soient* G *un groupe localement compact connexe,* K *un sous-groupe distingué compact de* G, ρ *une représentation unitaire irréductible (de dimension finie) de* K, σ *la représentation unitaire de* G *induite par* ρ. *On suppose que* G/K *est un groupe de Lie. Alors l'algèbre de von Neumann engendrée par* $\sigma(\mathrm{G})$ *est semi-finie.*

Soit $\mathrm{K}' = \operatorname{Ker}\rho$. Comme G est connexe, K′ est distingué dans G ([14], p. 515, th. 3). Soit ρ' la représentation de K/K′ déduite de ρ par passage au quotient. Soit σ' la représentation unitaire de G/K′ induite par ρ'. Alors σ' est la représentation déduite de σ par passage au quotient. Comme ρ' est une sous-représentation de la représentation régulière de K/K', σ' est une sous-représentation de la représentation régulière de G/K', ([15], p. 113, th. 4.2 et p. 123, th. 10.1). Or G/K et K/K' sont des groupes de Lie, donc G/K' est un groupe de Lie, connexe puisque G est connexe. Donc l'algèbre de von Neumann engendrée par $\sigma(G) = \sigma'(G/K')$ est semi-finie (lemme 5.2).

5.4. Démonstration du théorème. — D'après [19], p. 175, theorem, il existe un sous-groupe distingué compact K de G tel que G/K soit un groupe de Lie. Soit ρ la représentation régulière gauche de K. On a $\rho = \bigoplus_{i \in I} \rho_i$, où chaque ρ_i est irréductible. Soit π_i la représentation unitaire de G induite par ρ_i. D'après [15], *loc. cit.*, on a $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$. D'après le lemme 5.3, l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_i(G)$ est semi-finie. Donc l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi(G)$ est semi-finie.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Auslander et C. C. Moore, *Unitary representations of solvable Lie groups* (*Mem. Amer. Math. Soc.*, n° 62, 1966).

[2] N. Bourbaki, *Intégration vectorielle* (*Act. Sci. Ind.*, n° 1281, Paris, Hermann, 1959).

[3] N. Bourbaki, *Mesure de Haar* (*Act. Sci. Ind.*, n° 1306, Paris, Hermann, 1963).

[4] N. Bourbaki, *Algèbres de Lie* (*Act. Sci. Ind.*, n° 1285, Paris, Hermann, 1960).

[5] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, t. 2 (*Act. Sci. Ind.*, n° 1152, Paris, Hermann, 1951).

[6] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, t. 3 (*Act. Sci. Ind.*, n° 1226, Paris, Hermann, 1955).

[7] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 7, 1957, p. 315-328).

[8] J. Dixmier, *Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 94, 1966, p. 181-206).

[9] J. M. G. Fell, *The dual spaces of* C*-*algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 94, 1960, p. 365-403).

[10] J. M. G. Fell, *Weak containment and induced representations of groups* (*Can. J. Math.*, vol. 14, 1962, p. 237-268).

[11] J. Glimm, *Locally compact transformation groups* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 101, 1961, p. 124-138).

[12] J. Glimm, *Families of induced representations* (*Pacific J. Math.*, vol. 12, 1962, p. 885-911).

[13] R. Godement, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires* (*J. Math. pures et appl.*, t. 30, 1951, p. 1-110).

[14] K. Iwasawa, *On some types of topological groups* (*Ann. Math.*, vol. 50, 1949, p. 507-558).

[15] G. W. Mackey, *Induced representations of locally compact groups* (*Ann. Math.*, vol. 55, 1952, p. 101-139).

[16] G. W. Mackey, *Induced representations of locally compact groups*, II, *The Frobenius reciprocity theorem* (*Ann. Math.*, vol. 58, 1953, p. 193-221).

[17] G. W. Mackey, *Borel structure in groups and their duals* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 85, 1957, p. 134-165).

[18] G. W. Mackey, *Unitary representations of group extensions* (*Acta Math.*, vol. 99, 1958, p. 265-311).

[19] D. Montgomery et L. Zippin, *Topological transformation groups* (*Intersc. tracts in pure and appl. math.*, Interscience Publishers, New-York, 1955).

[20] L. Pukanszky, *Sur la représentation régulière des groupes de Lie résolubles connexes*, I et II (*C. R. Acad. Sc.*, t. 268, série A, 1969, p. 1077-1079 et 1172-1173 et article à paraître).

[21] L. Pukanszky, *Characters of algebraic solvable groups* (*J. Functional Analysis*, vol. 3, 1969, p. 435-494).

[22] I. E. Segal, *An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups* (*Ann. Math.*, vol. 52, 1950, p. 272-292).

(Manuscrit reçu le 21 avril 1969.)

Jacques Dixmier,
64, rue Gay-Lussac,
75-Paris, 5e.