ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. NOBILE

O. E. VILLAMAYOR

Sur la K -théorie algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 1, n° 4 (1968), p. 581-616

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1968_4_1_4_581_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA K-THÉORIE ALGÈBRIQUE

PAR A. NOBILE ET O. E. VILLAMAYOR.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
1. Les foncteurs T_i :	
1.1. Notations.....	582
1.2. Les foncteurs T_i	583
1.3. Construction des foncteurs T_i	584
2. Les foncteurs K_i et P_i :	
2.1. Définition des foncteurs K_i	587
2.2. Les foncteurs P'_i et P_i	589
2.3. Les foncteurs P_i et l'isomorphisme naturel $P_i \xrightarrow{\sim} K_i$	589
2.4. Démonstration du théorème 2.1.....	591
2.5. Le groupe $K_1(A)$	596
2.6. Rapports avec la K-théorie de Bass.....	598
2.7. Rapports entre $K_r(A)$ et matrices.....	600
3. La théorie relative :	
3.1. Les foncteurs L_i	601
3.2. Déformations.....	603
3.3. Les foncteurs K^p	605
3.4. Le groupe $G_r(\varphi)$	605
3.5. L'isomorphisme naturel $K^p(\varphi) \rightarrow G_r(\varphi)$	607
4. Suites exactes :	
4.1. Le foncteur Σ	608
4.2. Les applications β_r	609
4.3. Les applications α_r	610
4.4. Démonstration de l'exactitude.....	611
4.5. La deuxième suite exacte.....	614
4.6. La troisième suite exacte.....	615
BIBLIOGRAPHIE.....	616

En K-théorie topologique on définit les foncteurs K^{-i} en posant $K^{-i}(X) = K^0(S^i(X))$, où $S^i(X)$ est la $i^{\text{ème}}$ suspension de X . En K-théorie algébrique, l'espace X peut être remplacé par le spectre premier d'un anneau A et de dictionnaire usuel montre que K^0 est le groupe de Grothendieck de A -modules projectifs.

Mais, il n'y a maintenant rien qui puisse être défini et qui ressemble à la suspension. Évidemment, même si X est une variété affine, $S(X)$ n'est pas une variété algébrique, donc il n'y a pas d'analogue algébrique de la suspension.

Toutefois, si au lieu de la suspension on considère l'espace quotient Y de $X \times \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ étant la droite réelle) obtenue en réduisant à un point la section $X \times \{1\}$ et la section $X \times \{0\}$, alors Y est contractible à la suspension et $K^0(Y)$ est canoniquement isomorphe à $K^0(S(X))$.

L'image réciproque d'un espace fibré sur Y est un espace fibré sur $X \times \mathbf{R}$, trivial dans un voisinage de $X \times \{1\}$ et trivial dans un voisinage de $X \times \{0\}$. Réciproquement, un tel espace fibré définit un espace fibré sur Y .

D'autre part, la donnée d'espaces fibrés isomorphes sur Y n'est pas une condition suffisante pour qu'on ait des espaces fibrés isomorphes sur $X \times \mathbf{R}$, et les trivialisations sur $X \times \{1\}$ et $X \times \{0\}$ doivent intervenir.

On peut remplacer alors les fibrés sur Y par les triples $\{P, \alpha, \beta\}$ formés d'un fibré vectoriel P sur $X \times \mathbf{R}$ et de deux trivialisations

$$\alpha: P|_{X \times \{0\}} \rightarrow X \times F, \quad \beta: P|_{X \times \{1\}} \rightarrow X \times F$$

(F fibré) et maintenant on a des objets qu'on peut traduire en des termes algébriques. Ceci est, essentiellement, l'idée sous-jacente à ce travail.

La théorie peut s'étendre trivialement aux pré-schémas en utilisant le dictionnaire usuel.

Une suite exacte analogue à celle d'espace avec point base est développée dans 4.5.

1. Les foncteurs T_i .

1.1. NOTATIONS. — On désignera par $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers ≥ 0 , $\mathcal{R}_c$ la catégorie des anneaux commutatifs à élément unité, les morphismes étant les morphismes unitaires, $\mathcal{A}_b$ la catégorie des groupes abéliens, $\mathcal{G}$ la catégorie des groupes et Cat la catégorie dont les objets sont les catégories et les morphismes sont les foncteurs covariants.

On notera $GL(n, A)$ le groupe linéaire d'ordre n à coefficients dans A , i. e. le groupe formé des matrices inversibles $n \times n$ à coefficients dans A , muni du produit ordinaire de matrices.

Si $B = A[X_1, \dots, X_m]$ est l'anneau des polynômes en m indéterminées à coefficients dans A , et $C = A[Y_1, \dots, Y_{m-1}]$, on désignera par $\mu_i^e: B \rightarrow C$ ($e = 0, 1$) l'application définie par

$$\mu_i^e(X_i) = Y_i \quad (1 \leq i < t), \quad \mu_i^e(X_t) = e, \quad \mu_i^e(X_j) = Y_{j-1} \quad (t < j \leq m).$$

Soit $D(n, m, A)$ le sous-groupe de $GL(n, A[X_1, \dots, X_m])$ formé des

matrices M telles que $\mu_t^0(M) = \mu_t^1(M)$ ($1 \leq t \leq m$), i. e. des matrices $(a_{ij}(X_1, \dots, X_m))$ telles que

$$(a_{ij}(X_1, \dots, X_{t-1}, 0, X_{t+1}, \dots, X_m)) = (a_{ij}(X_1, \dots, X_{t-1}, 1, X_{t+1}, \dots, X_m)) \\ (t = 1, \dots, m).$$

Il est trivial de montrer que les applications $A \mapsto GL(n, A)$ (n entier fixé) et $A \mapsto D(n, m, A)$ (n et m étant des entiers fixés) sont des foncteurs de $\mathcal{R}_c$ vers $\mathcal{G}$.

1.2. LES FONCTEURS T_i . — Le but de ce paragraphe est celui de bâtir, par récurrence, une suite de foncteurs $T_i : \mathcal{R}_c \rightarrow Cat$ ($i \in \mathbf{N}$) vérifiant les conditions suivantes :

(a) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe un objet zéro, noté $o_i^A \in \text{Ob } T_i(A)$.

(b) Il existe des sommes directes et parmi les représentations d'une telle somme, il en existe une qui est canonique et $l \oplus o_i^A = l$, pour tout $l \in \text{Ob } T_i(A)$.

(c) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, il existe une application additive

$$\rho_i : \text{Ob } T_i(A) \rightarrow \mathbf{N}.$$

Plus précisément, $\rho_i(l \oplus l') = \rho_i(l) + \rho_i(l')$, quels que soient $l, l' \in \text{Ob } T_i(A)$ et si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et $\tilde{\varphi}_i : T_i(A) \rightarrow T_i(B)$ le foncteur correspondant, pour tout $l \in \text{Ob } T_i(A)$, on a $\rho_i(l) = \rho_i(\tilde{\varphi}_i(l))$, i. e. le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_i(A) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_i} & T_i(B) \\ & \searrow \rho_i & \swarrow \rho_i \\ & \mathbf{N} & \end{array}$$

est commutatif. La valeur $\rho_i(l)$ est appelée le *rang* de l .

(d) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe un objet $t_{i,A}^n \in \text{Ob } T_i(A)$, appelé l'objet *trivial de rang* n , satisfaisant aux conditions suivantes :

(d₁) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $\rho_i(t_{i,A}^n) = n$;

(d₂) Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et $\tilde{\varphi}_i : T_i(A) \rightarrow T_i(B)$ est le foncteur $T_i(\varphi)$, alors

$$\tilde{\varphi}_i(t_{i,A}^n) = t_{i,B}^n;$$

(d₃) Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $t_{i,A}^n \oplus t_{i,A}^m = t_{i,A}^{n+m}$;

(d₄) Il existe un anti-isomorphisme canonique

$$\Sigma : \text{Aut}(t_{i,A}^n) \rightarrow \text{Aut}(t_{i,A}^n);$$

(d₅) Si $\alpha \in \text{Aut}(t_{i,A}^n)$, $\beta \in \text{Aut}(t_{i,A}^m)$,

$$\alpha_1 = \Sigma(\alpha) \quad \text{et} \quad \beta_1 = \Sigma(\beta),$$

alors $\Sigma(\alpha \oplus \beta)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \oplus \beta$ est défini comme étant l'automorphisme composé

$$\ell_{i,A}^{n+m} \rightarrow \ell_{i,A}^n \oplus \ell_{i,A}^m \xrightarrow{\alpha+\beta} \ell_{i,A}^n \oplus \ell_{i,A}^m \rightarrow \ell_{i,A}^{n+m}.$$

(e) Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et $\tilde{\varphi}_i = T_i(\varphi) : T_i(A) \rightarrow T_i(B)$, quels que soient $l, l' \in \text{Ob } T_i(A)$, on a

$$\tilde{\varphi}_i(l \oplus l') = \tilde{\varphi}_i(l) \oplus \tilde{\varphi}_i(l') \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_i(o_i^A) = o_i^B.$$

1.3. CONSTRUCTION DES FONCTEURS T_i . — *Le foncteur T_0 .* — Le foncteur $T_0 : \mathcal{R}_c \rightarrow \text{Cat}$ donne, pour chaque anneau commutatif A à élément unité, une catégorie $T_0(A)$. Les objets de $T_0(A)$ sont les A -modules projectifs de type fini et de rang constant, les morphismes étant les applications A -linéaires.

Si $C \rightarrow B \rightarrow A$ sont des morphismes de $\mathcal{R}_c$, on identifie, moyennant des isomorphismes canoniques,

$$(P \otimes_C B) \otimes_B A \xrightarrow{\sim} P \otimes_C A, \quad A^n \oplus A^m \xrightarrow{\sim} A^{n+m}$$

et

$$(P \oplus P') \otimes_B A \xrightarrow{\sim} P \otimes_B A \oplus P' \otimes_B A.$$

Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$, alors $T_0(\varphi) : T_0(A) \rightarrow T_0(B)$ est le foncteur $\otimes_A B$. Donc, $T_0 : \mathcal{R}_c \rightarrow \text{Cat}$ est un foncteur covariant.

Pour démontrer les propriétés (a) à (e), on procède comme suit : (a) le module zéro; (b) somme directe de modules dont un représentant canonique est le module des paires; (c) on définit $\varphi_0(P) = \text{rang de } P$; (d) on prend $\iota_{0,A}^n = A^n$; (e) triviale.

Les foncteurs T_r . — Supposons qu'on ait déjà défini les foncteurs T_{r-1} satisfaisant aux propriétés (a) à (e).

Si $A[X_r]$ est l'anneau des polynômes en l'indéterminée X_r à coefficient dans A , on considère les applications composées

$$\begin{aligned} \pi_0 : A[X_r] &\rightarrow A[X_r]/(X_r) \rightarrow A, \\ \pi_1 : A[X_r] &\rightarrow A[X_r]/(X_r - 1) \rightarrow A, \end{aligned}$$

où la première application est la canonique et la seconde est l'unique application telle que l'application composée

$$A \xrightarrow{\iota} A[X_r] \xrightarrow{\pi_i} A \quad (i = 0, 1)$$

soit l'identité, ι étant l'injection canonique.

Soit $\tilde{\pi}_i = T_{r-1}(\pi_i)$ ($i = 0, 1$). On va définir la catégorie $T_r(A)$ comme suit. Les objets de $T_r(A)$ sont les triples (l, α_0, α_1) , où $l \in \text{Ob } T_{r-1}(A[X_r])$

et les $\alpha_i : \tilde{\pi}_i(l) \rightarrow t_{r-1, A}^n$ ($i = 0, 1$) des isomorphismes dans $T_{r-1}(A)$. Un morphisme dans $T_r(A)$, $\theta : (l, \alpha_0, \alpha_1) \rightarrow (l', \alpha'_0, \alpha'_1)$ est une paire de morphismes $\theta = (\varphi, a)$, où $\varphi : l \rightarrow l'$ est un morphisme de $T_{r-1}(A[X_r])$ et $a : t_{r-1, A}^n \rightarrow t_{r-1, A}^m$ est un morphisme de $T_{r-1}(A)$ de telle sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\pi}_i(l) & \xrightarrow{\tilde{\pi}_i(\varphi)} & \tilde{\pi}_i(l') \\ \alpha_i \downarrow & & \downarrow \alpha'_i \\ t_{r-1, A}^n & \xrightarrow{a} & t_{r-1, A}^m \end{array} \quad (i = 0, 1).$$

Il s'ensuit trivialement que $T_r(A)$ est une catégorie.

Si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$, on désignera par $\varphi(X) : A[X] \rightarrow B[X]$ l'homomorphisme induit par φ et par $T_r(\varphi) : T_r(A) \rightarrow T_r(B)$ le foncteur définit par

$$T_r(\varphi)(l, \alpha_0, \alpha_1) = (T_{r-1}(\varphi(X_r))(l), T_{r-1}(\varphi)(\alpha_0), T_{r-1}(\varphi)(\alpha_1))$$

pour tout objet $(l, \alpha_0, \alpha_1) \in \text{Ob } T_r(A)$. De plus, si (ψ, a) est un morphisme de $T_r(A)$, on pose

$$T_r(\varphi)(\psi, a) = (T_{r-1}(\varphi(X_r))(\psi), T_{r-1}(\varphi)(a)).$$

Donc, $T_r : \mathcal{R}_c \rightarrow \text{Cat}$ est un foncteur.

Démontrons maintenant que le foncteur T_r satisfait aux propriétés (a) à (e).

(a) Si $o_{r-1}^{A[X_r]}$ est l'objet zéro de $T_{r-1}(A[X_r])$, alors

$$T_{r-1}(\pi_i)(o_{r-1}^{A[X_r]}) = o_{r-1}^A \in \text{Ob } T_{r-1}(A) \quad (i = 0, 1),$$

une fois que T_{r-1} satisfait (e). Donc, α_0 et α_1 sont des applications nulles et l'on peut choisir l'objet zéro de $T_r(A)$ comme étant $o_r^A = (o_{r-1}^{A[X_r]}, o, o)$.

(b) On pose

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l', \alpha'_0, \alpha'_1) = (l \oplus l', \alpha_0 \oplus \alpha'_0, \alpha_1 \oplus \alpha'_1).$$

(c) On définit

$$\rho_r(l, \alpha_0, \alpha_1) = \rho_{r-1}(l).$$

(d) Soit

$$t_{r, A}^n = (t_{r-1, A[X_r]}^n, \iota_0, \iota_1),$$

où $\iota_i : \tilde{\pi}_i(t_{r-1, A[X_r]}^n) \rightarrow t_{r-1, A}^n$ ($i = 0, 1$) est l'application identique. Les propriétés (d_1) , (d_2) et (d_3) découlent immédiatement. Pour (d_4) , on considère un automorphisme (ψ, a) de $(t_{r-1, A[X_r]}^n, \iota_0, \iota_1)$, i. e. une paire (ψ, a) d'automorphismes $\psi \in \text{Aut}(t_{r-1, A[X_r]}^n)$ et $a \in \text{Aut}(t_{r-1, A}^n)$. D'après l'hypothèse de

réurrence, ψ fournit une matrice $M \in D(n, r-1, A[X_r])$. Puisque ψ et a nous donnent le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} t_{r-1, A}^n & \xrightarrow{\tilde{\pi}_i(\psi)} & t_{r-1, A}^n \\ \text{id.} \downarrow & & \downarrow \text{id.} \\ t_{r-1, A}^n & \xrightarrow{a} & t_{r-1, A}^n \end{array}$$

il s'ensuit que $\tilde{\pi}_0(\psi) = \tilde{\pi}_1(\psi)$, i. e.

$$\tilde{\pi}_0(M) = \tilde{\pi}_1(M), \quad \text{donc } M \in D(n, r, A).$$

Réciproquement, toute matrice $M \in D(n, r, A)$ fournit un tel automorphisme. L'isomorphisme de groupes $\text{Aut}(t_{r, A}^n) \rightarrow D(n, r, A)$ suit de la commutativité du diagramme

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Aut}(t_{r, A}^n) & \longrightarrow & D(n, r, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Aut}(t_{r-1, A[X_r]}^n) & \longrightarrow & D(n, r-1, A[X_r]) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les inclusions naturelles et la flèche horizontale d'en bas est un isomorphisme, d'après l'hypothèse de récurrence.

La propriété (d_5) suit trivialement de l'hypothèse de récurrence et de la commutativité du diagramme ci-dessus. De même, pour (e) .

LEMME 1.1. — Si $l, l' \in \text{Ob } T_i(A)$, il existe un isomorphisme canonique $\gamma : l \oplus l' \rightarrow l' \oplus l$.

La démonstration se fait par récurrence sur i . Pour $i=0$, $\gamma : l \oplus l' \rightarrow l' \oplus l$ est l'isomorphisme canonique de A -modules $\gamma(x, x') = (x', x)$. Supposons le lemme vrai pour $i=r-1$. Si (l, α_0, α_1) et $(l', \alpha'_0, \alpha'_1)$ sont deux objets de $T_r(A)$, on a

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l', \alpha'_0, \alpha'_1) = (l \oplus l', \alpha_0 \oplus \alpha'_0, \alpha_1 \oplus \alpha'_1)$$

et

$$(l', \alpha'_0, \alpha'_1) \oplus (l, \alpha_0, \alpha_1) = (l' \oplus l, \alpha'_0 \oplus \alpha_0, \alpha'_1 \oplus \alpha_1).$$

Si, maintenant, $\varphi : l \oplus l' \rightarrow l' \oplus l$ est l'isomorphisme canonique dans $T_{r-1}(A[X_r])$ et

$$a : t_{r-1, A}^n \oplus t_{r-1, A}^m \rightarrow t_{r-1, A}^m \oplus t_{r-1, A}^n$$

est celui dans $T_{r-1}(A)$, alors (φ, a) est l'isomorphisme cherché dans $T_r(A)$.

LEMME 1.2. — Si $\varphi_1 : l_1 \rightarrow l'_1$ et $\varphi_2 : l_2 \rightarrow l'_2$ sont des isomorphismes dans $T_i(A)$, alors $\varphi_1 \oplus \varphi_2 : l_1 \oplus l_2 \rightarrow l'_1 \oplus l'_2$ est un isomorphisme dans $T_i(A)$.

Démonstration triviale.

LEMME 1.3. — La matrice de l'isomorphisme $\lambda : t_{i,A}^n \oplus t_{i,A}^n \rightarrow t_{i,A}^n \oplus t_{i,A}^n$ défini par $(x, y) = (y, x)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En effet, à partir du diagramme (1) on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(t_{r,A}^{2n}) & \xrightarrow{\quad} & D(2n, r, A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Aut}(t_{0,A[X_1, \dots, X_r]}^{2n}) & \xrightarrow{\quad} & \text{GL}(2n, A[X_1, \dots, X_r]) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des inclusions et

$$t_{0,A[X_1, \dots, X_r]}^{2n} = (A[X_1, \dots, X_r])^{2n}.$$

Le lemme est alors un résultat trivial d'algèbre linéaire.

LEMME 1.4. — Si $(t_{r-1,A[X_r]}^n, \alpha, \beta) \in \text{Ob } T_r(A)$, il existe des isomorphismes

$$(t_{r-1,A[X_r]}^n, \alpha, \beta) \approx (t_{r-1,A[X_r]}^n, \alpha\beta^{-1}, \text{id.}),$$

$$(t_{r-1,A[X_r]}^n, \alpha, \beta) \approx (t_{r-1,A[X_r]}^n, \text{id.}, \beta\alpha^{-1}).$$

Si $\lambda : A \rightarrow A[X_r]$ est l'inclusion naturelle et $T_{r-1}(\lambda) : T_{r-1}(A) \rightarrow T_{r-1}(A[X_r])$ le foncteur associé, on pose $\tilde{\beta} = T_{r-1}(\lambda)(\beta)$. Puisque $\beta \in \text{Aut}(t_{r-1,A}^n)$, alors

$$\tilde{\beta} \in \text{Aut}(t_{r-1,A[X_r]}^n)$$

et, en utilisant le fait que

$$\tilde{\pi}_i(t_{r-1,A[X_r]}^n) = t_{r-1,A}^n \quad (i = 0, 1),$$

on a $\tilde{\pi}_0(\tilde{\beta}) = \tilde{\pi}_1(\tilde{\beta}) = \beta$. La commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} t_{r-1,A}^n & \xrightarrow{\tilde{\pi}_0(\tilde{\beta})} & t_{r-1,A}^n \\ \beta \downarrow & & \downarrow \text{id.} \\ t_{r-1,A}^n & \xrightarrow{\text{id.}} & t_{r-1,A}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} t_{r-1,A}^n & \xrightarrow{\tilde{\pi}_1(\tilde{\beta})} & t_{r-1,A}^n \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha\beta^{-1} \\ t_{r-1,A}^n & \xrightarrow{\text{id.}} & t_{r-1,A}^n \end{array}$$

nous montre que $(\beta, \text{id.})$ est le premier des isomorphismes mentionnés. Le deuxième suit de façon analogue.

2. Les foncteurs K_i et P_i .

2.1. DÉFINITION DES FONCTEURS K_i . — Soient $A \in \text{Ob } \mathcal{R}_c$, $i \in \mathbb{N}$ un entier et G un groupe abélien. Une application $g : \text{Ob } T_i(A) \rightarrow G$ est appelée *additive* si $g(l \oplus l') = g(l) + g(l')$, quels que soient $l, l' \in \text{Ob } T_i(A)$.

Il est facile de montrer l'existence d'un tel g universel, i. e. d'un groupe abélien $K'_i(A)$ et d'une application additive $\nu_{i,A} : \text{Ob } T_i(A) \rightarrow K'_i(A)$ telle que pour tout groupe abélien G et pour toute application additive

$g : \text{Ob } T_i(A) \rightarrow G$, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $h : K'_i(A) \rightarrow G$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } T_i(A) & \xrightarrow{g} & G \\ \downarrow \nu_{i,A} & \nearrow h & \\ K'_i(A) & & \end{array}$$

En effet, K'_i est le groupe abélien dont les générateurs sont les objets de $T_i(A)$ et les relations sont $l \oplus l' - l - l'$, pour l et l' parcourant $\text{Ob } T_i(A)$. De plus, $\nu_{i,A}(l) = l$ pour tout $l \in \text{Ob } T_i(A)$.

On veut maintenant définir des applications canoniques $\varphi_{i,A} : K'_i(A) \rightarrow K'_{i-1}(A[X_i])$, qui sont des homomorphismes de groupes abéliens.

Pour $i=0$, on considère l'application rang d'un A -module projectif, $\text{Ob } T_0(A) \rightarrow \mathbf{Z}$. Si l'on pose $K'_{-1}(A) = \mathbf{Z}$, étant donné que l'application rang est additive, elle définit un homomorphisme de groupes abéliens $\varphi_{0,A} : K'_0(A) \rightarrow K'_{-1}(A)$.

Supposons maintenant $i \geq 1$. Si $(l, \alpha_0, \alpha_i) \in \text{Ob } T_i(A)$, on a

$$\nu_{i-1,A[X_i]}(l) \in K'_{i-1}(A[X_i]), \quad \text{car } l \in \text{Ob } T_{i-1}(A[X_i]).$$

Ceci induit une application $z_{i,A} : \text{Ob } T_i(A) \rightarrow K'_{i-1}(A[X_i])$ qui est, trivialement, additive. Il existe alors un unique homomorphisme de groupes abéliens $\varphi_{i,A} : K'_i(A) \rightarrow K'_{i-1}(A[X_i])$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } T_i(A) & \xrightarrow{z_{i,A}} & K'_{i-1}(A[X_i]) \\ \downarrow \nu_{i,A} & \nearrow \varphi_{i,A} & \\ K'_i(A) & & \end{array}$$

On remarque que K'_i est un foncteur covariant défini dans la catégorie $\mathcal{R}_c$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{A}_b$. En effet, si $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{R}_c$ et si l'on pose $\tilde{\varphi}_i = T_i(\varphi)$, l'application $\text{Ob } T_i(A) \rightarrow K'_i(B)$ définie par $l \mapsto \nu_{i,B} \tilde{\varphi}_i(l)$ est additive, car

$$\tilde{\varphi}_i(l \oplus l') = \tilde{\varphi}_i(l) \oplus \tilde{\varphi}_i(l'),$$

l et l' parcourant $\text{Ob } T_i(A)$. Ceci induit un homomorphisme de groupes abéliens

$$K'_i(\tilde{\varphi}_i) : K'_i(A) \rightarrow K'_i(B).$$

Toutes les vérifications sont, par la suite, triviales.

Il est aussi évident que l'application $A \mapsto K'_{i-1}(A[X_i])$ est aussi un foncteur, qu'on désignera par $\Omega_i : \mathcal{R}_c \rightarrow \mathcal{A}_b$. De plus, $\varphi_i : K'_i \rightarrow \Omega_i$ est une transformation naturelle.

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on pose, pour définition, $K_i(A) = \text{Ker}(\varphi_{i,A})$. Étant donné que φ_i est une transformation naturelle de foncteurs, alors K_i est aussi un foncteur.

2.2. LES FONCTEURS P'_i ET P_i . — On veut maintenant définir des foncteurs $P'_i, P_i: \mathcal{R}_c \rightarrow \mathcal{A}_b$ et démontrer, ultérieurement, qu'il existe un isomorphisme naturel $P_i \xrightarrow{\sim} K_i$ (cf. 2.3). Cette nouvelle définition de K_i nous permettra de travailler plus aisément avec ce foncteur.

On va, tout d'abord, définir une relation, notée $\sim$, entre les éléments de $\text{Ob } T_i(A)$. Si $l, l' \in \text{Ob } T_i(A)$, on dira que $l \sim l'$ s'il existe des objets triviaux $t, t' \in \text{Ob } T_i(A)$ tels que $l \oplus t \simeq l' \oplus t'$.

LEMME 2.1. — *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, compatible avec l'addition dans $\text{Ob } T_i(A)$.*

Que $\sim$ est une relation d'équivalence dans $\text{Ob } T_i(A)$, c'est trivial. Maintenant, si $l_1 \sim l'_1$ et $l_2 \sim l'_2$, il existe des objets triviaux t_1, t'_1, t_2 et t'_2 tels que

$$l_1 \oplus t_1 \simeq l'_1 \oplus t'_1, \quad l_2 \oplus t_2 \simeq l'_2 \oplus t'_2,$$

donc, d'après le lemme 1.2, on a

$$(l_1 \oplus t_1) \oplus (l_2 \oplus t_2) \simeq (l'_1 \oplus t'_1) \oplus (l'_2 \oplus t'_2).$$

D'après le lemme 1.1, on a aussi

$$(l_1 \oplus l_2) \oplus (t_1 \oplus t_2) \simeq (l'_1 \oplus l'_2) \oplus (t'_1 \oplus t'_2)$$

et la condition (d_3) nous montre que $l_1 \oplus l_2 \sim l'_1 \oplus l'_2$. Ceci achève la démonstration du lemme.

L'addition dans $\text{Ob } T_i(A)$ induit donc une structure de monoïde commutatif sur l'ensemble quotient $\text{Ob } T_i(A)/\sim$. On note $P'_i(A) = \text{Ob } T_i(A)/\sim$.

THÉORÈME 2.1. — *Le monoïde $P'_i(A)$ est muni d'une structure de groupe abélien.*

Ce théorème sera démontré en 2.4, mais déjà en 2.3 on l'utilise pour pouvoir comparer $P'_i(A)$ et $K_i(A)$.

2.3. LES FONCTEURS P_i ET L'ISOMORPHISME NATUREL $P_i \xrightarrow{\sim} K_i$.

LEMME 2.2. — *Il existe un isomorphisme canonique $K'_i(A) \xrightarrow{\sim} P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$.*

Désignons par $s_i: \text{Ob } T_i(A) \rightarrow P'_i(A)$ l'application canonique. L'application $\text{Ob } T_i(A) \rightarrow P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ définie par $l \mapsto (s_i(l), \varphi(l))$ étant additive, induit un unique homomorphisme de groupes abéliens $\varphi: K'_i(A) \rightarrow P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } T_i(A) & \longrightarrow & P'_i(A) \oplus \mathbf{Z} \\ \downarrow \nu_{i,A} & \nearrow \varphi & \\ K'_i(A) & & \end{array}$$

On définit maintenant une application $\psi : P'_i(A) \oplus \mathbf{Z} \rightarrow K'_i(A)$, en posant

$$\psi(s_i(l), m) = v_{i,A}(l) + (m - \rho(l)) v_{i,A}(t_{i,A}^1).$$

Pour montrer que ψ est bien définie, il suffit de prendre $l \oplus t_{i,A}''$ comme étant un autre représentant de $s_i(l)$. On a alors

$$\begin{aligned} & v_{i,A}(l \oplus t_{i,A}'') + (m - n - \rho(l)) v_{i,A}(t_{i,A}^1) \\ &= v_{i,A}(l) + v_{i,A}(t_{i,A}'') + (m - n - \rho(l)) v_{i,A}(t_{i,A}^1) \\ &= v_{i,A}(l) + n v_{i,A}(t_{i,A}^1) + (m - n - \rho(l)) v_{i,A}(t_{i,A}^1) \\ &= v_{i,A}(l) + (m - \rho(l)) v_{i,A}(t_{i,A}^1). \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de voir que φ et ψ sont des applications inverses l'une de l'autre. Donc, φ est un isomorphisme de groupes abéliens.

LEMME 2.3. — Soient $l, l' \in \text{Ob } T_i(A)$. Alors, $v_{i,A}(l) = v_{i,A}(l')$ si et seulement si, il existe un objet trivial $t \in \text{Ob } T_i(A)$ tel que $l \oplus t \simeq l' \oplus t$.

Si $v_{i,A}(l) = v_{i,A}(l')$, l'isomorphisme $\varphi : K'_i(A) \xrightarrow{\sim} P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ entraîne que

$$(s_i(l), \rho(l)) = (s_i(l'), \rho(l')).$$

Donc, $s_i(l) = s_i(l')$ et ceci veut dire qu'il existe des objets triviaux $t, t' \in \text{Ob } T_i(A)$ tels que $l \oplus t \simeq l' \oplus t'$. D'autre part, l'égalité $\rho(l) = \rho(l')$ entraîne $\rho(t) = \rho(t')$ et étant donné que les objets triviaux sont déterminés par le rang, on peut prendre $t = t'$. Donc, $l \oplus t \simeq l' \oplus t$. La réciproque est triviale.

LEMME 2.4. — L'isomorphisme $\varphi : K'_i(A) \xrightarrow{\sim} P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ envoie $K_i(A)$ dans l'ensemble des paires $(q, o) \in P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$. Si $i \geq 1$, $q = s_i(l, \alpha_0, \alpha_1)$ et il existe un objet trivial $t \in \text{Ob } T_{i-1}(A[X_i])$ tel que $l \oplus t$ soit isomorphe à un objet trivial de $T_{i-1}(A[X_i])$. Si $i = 0$, q parcourt $P'_0(A)$.

Supposons $i \geq 1$. D'après le lemme 2.3, tout élément de $K_i(A)$ peut s'écrire sous la forme $v_{i,A}(l, \alpha_0, \alpha_1) - v_{i,A}(l', \alpha'_0, \alpha'_1)$. Le théorème 2.1 nous dit qu'il existe un élément $(l'', \alpha''_0, \alpha''_1) \in \text{Ob } T_i(A)$ tel que

$$s_i(l', \alpha'_0, \alpha'_1) + s_i(l'', \alpha''_0, \alpha''_1) = s_i(t, \iota, \iota),$$

donc, d'après une modification convenable de $(l'', \alpha''_0, \alpha''_1)$ et (t, ι, ι) , on peut écrire

$$(l', \alpha'_0, \alpha'_1) \oplus (l'', \alpha''_0, \alpha''_1) = (t, \iota, \iota).$$

Si l'on pose

$$(l''', \alpha'''_0, \alpha'''_1) = (l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l'', \alpha''_0, \alpha''_1),$$

l'élément $v_{i,A}(l, \alpha_0, \alpha_1) - v_{i,A}(l', \alpha'_0, \alpha'_1)$ de $K_i(A)$ s'écrit sous la forme

$$v_{i,A}(l''', \alpha'''_0, \alpha'''_1) - v_{i,A}(t, \iota, \iota)$$

et son image par $\varphi_{i,A}$ est

$$(s_i(l''', \alpha_0''', \alpha_1'''), \rho(t)) - (s_i(t, \iota, \iota), \rho(t)) = (s_i(l''', \alpha_0''', \alpha_1'''), 0).$$

Puisque $K_i(A) = \text{Ker}(\varphi_{i,A})$, alors $\nu_{i-1, A[X_i]}(l''') = \nu_{i-1, A[X_i]}(t)$ et ceci équivaut à dire qu'il existe un objet trivial $t' \in \text{Ob } T_{i-1}(A[X_i])$ tel que $l''' \oplus t' \simeq t \oplus t'$ (cf. lemme 2.3), i. e. tel que $l''' \oplus t'$ soit trivial.

Réciproquement, si $(s_i(l, \alpha_0, \alpha_1), 0) \in P'_i(A) \oplus \mathbf{Z}$ et s'il existe un objet trivial $t' \in \text{Ob } T_{i-1}(A[X_i])$ tel que $l \oplus t'$ soit isomorphe à un objet trivial $t \in \text{Ob } T_{i-1}(A[X_i])$, $l \oplus t' \simeq t$, alors

$$s_i(l, \alpha_0, \alpha_1) + s_i(t', \iota, \iota) = s_i(t, \beta_0, \beta_1),$$

donc

$$\varphi_{i,A}(\nu_{i,A}(t, \beta_0, \beta_1) - \nu_{i,A}(t, \iota, \iota)) = (s_i(t, \beta_0, \beta_1), 0) = (s_i(l, \alpha_0, \alpha_1), 0).$$

Le cas $i = 0$ est analogue.

Donc, le sous-ensemble de $P'_i(A)$ formé des éléments $s_i(l, \alpha_0, \alpha_1)$ tels que, il existe des objets triviaux t et t' satisfaisant $l \oplus t' \simeq t$ est un sous-groupe de $P'_i(A)$ canoniquement isomorphe à $K_i(A)$. On le note $P_i(A)$. Si $i = 0$, on pose $P_0(A) = P'_0(A)$.

2.4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. — On dira qu'un élément $\alpha = (a_{ij}) \in \text{GL}(n, A)$ est une *matrice élémentaire* si pour tout i , $a_{ii} = 1$ et s'il existe une paire unique (r, s) , $r \neq s$, telle que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $(i, j) \neq (r, s)$.

Par la suite, on note $a_{rs} = b \in A$.

Il est évident que l'inverse d'une matrice élémentaire est une matrice élémentaire. Désignons par $E(n, A)$ le sous-groupe de $\text{GL}(n, A)$ engendré par les matrices élémentaires.

LEMME 2.5. — Si $\alpha \in E(n, A)$, il existe une matrice $\alpha(X) \in \text{GL}(n, A[X])$ telle que $\alpha(0) = \text{id}$. et $\alpha(1) = \alpha$.

On remarque, tout d'abord, que si $\alpha \in E(n, A)$, alors $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$, où les α_i sont des matrices élémentaires.

Supposons que $\alpha \in E(n, A)$ soit élémentaire, disons

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & & & b \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$\alpha(X) = \begin{pmatrix} 1 & & & bX \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant on voit que si $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_m$, où les α_i sont élémentaires, alors $\alpha(X) = \alpha_1(X) \dots \alpha_m(X)$ et la matrice $\alpha(X) \in \text{GL}(n, A[X])$ satisfait aux conditions du lemme.

Remarque. — Si l'on prend $b(1-X)$ à la place de bX , on démontre l'existence d'une matrice $\alpha'(X) \in GL(n, A[X])$ telle que $\alpha'(0) = \alpha$ et $\alpha'(1) = \text{id}$.

LEMME 2.6 (Lemme de Whitehead). — Si $\alpha, \beta \in GL(n, A)$, alors

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{mod } E(2n, A)],$$

ces congruences étant valables si on les prend toutes à droite ou toutes à gauche modulo $E(2n, A)$.

La démonstration complète de ce lemme peut être vue dans Bass (cf. [1], p. 10). Toutefois, on va la brosser rapidement afin d'obtenir un corollaire dont on aura besoin.

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \rho &= \beta - 1, & \gamma &= \begin{pmatrix} \beta\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \delta &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \\ \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & (\beta\alpha)^{-1}\rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \tau_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -\alpha^{-1}\rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta^{-1}\rho\alpha & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

alors $\tau = \tau_1(\sigma^{-1}\tau_2\sigma)\tau_3 \in E(2n, A)$. Il s'ensuit que $\gamma\tau = \delta$. En particulier,

$$\begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in E(2n, A),$$

donc

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad [\text{mod } E(2n, A)].$$

Finalement,

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad [\text{mod } E(2n, A)].$$

Pour les congruences à gauche, il suffit de voir que tous les sous-groupes utilisés sont invariants par transposition.

On remarque que, dans cette démonstration, si $\alpha, \beta \in D(n, r, A)$, les matrices de $E(2n, A[X_1, \dots, X_r])$ qui donnent les congruences, sont dans $D(2n, r, A)$. Donc,

COROLLAIRE. — Si $\alpha, \beta \in D(n, r, A)$, les congruences du lemme de Whitehead peuvent être considérées modulo $D(2n, r, A) \cap E(2n, A)$.

Démonstration du théorème 2.1. — On sait déjà que $P_i(A)$ est un monoïde commutatif. Pour achever la démonstration du théorème 2.1, il suffit

alors de démontrer l'existence de l'inverse, i. e. que pour tout objet $l \in \text{Ob } T_i(A)$, il existe un objet $l' \in \text{Ob } T_i(A)$ tel que $l \oplus l' = t_{i,A}^n$ pour un entier n convenable. La démonstration se fait par récurrence sur i .

Pour $i=0$, le résultat est trivial, car les objets de $T_0(A)$ sont les A -modules projectifs de type fini et les objets triviaux de $T_0(A)$ sont les A -modules libres de type fini.

Supposons le théorème vrai pour $i=r-1$ et soit $(l, \alpha_0, \alpha_1) \in \text{Ob } T_r(A)$. Alors $l \in \text{Ob } T_{r-1}(A[X_r])$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un objet $m \in \text{Ob } T_{r-1}(A[X_r])$ tel que $l \oplus m = t_{r-1, A[X_r]}^n$, où n est un entier convenable.

Considérons maintenant l'application $\varphi_j : A[X_r] \rightarrow A$ définie par $\varphi_j(X_r) = j$ ($j=0, 1$) et soit $m_j = T_{r-1}(\varphi_j)(m)$ ($j=0, 1$).

Si l'on considère un objet arbitraire $m' \in \text{Ob } T_{r-1}(A[X_r])$ tel que $l \in m' = t_{r-1, A[X_r]}^k$, où k est un entier convenable, alors

$$l_0 \oplus m'_0 \simeq t_{r-1, A}^n \oplus m' \simeq t_{r-1, A}^k$$

(et, de même, pour m'_1). Donc, $m = m' \oplus t_{r-1, A[X_r]}^n$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- (a) $l \oplus m \simeq t_{r-1, A[X_r]}^s$, s étant un entier convenable;
- (b) m_0 et m_1 sont isomorphes à $t_{r-1, A}^k$.

En additionnant, au besoin, un objet trivial (t, ι, ι) , ce qui ne change pas l'image de (l, α_0, α_1) ou de (m, δ_0, δ_1) dans $P'_r(A)$, on peut supposer que $\varphi_{r-1}(l) = \varphi_{r-1}(m)$.

Soit $p = m \oplus t_{r-1, A[X_r]}^k$. On va définir des isomorphismes

$$\beta_j : p_j \rightarrow t_{r-1, A}^k \quad (j=0, 1)$$

tels que $(p, \beta_0, \beta_1) \oplus (t_{r-1, A[X_r]}^{2k}, \iota, \iota)$ donne la solution du problème.

Donnons-nous un isomorphisme

$$\theta : l \oplus m \rightarrow t_{r-1, A[X_r]}^{2k}$$

et soit $\theta_j = T_{r-1}(\varphi_j)(\theta)$ ($j=0, 1$). Si

$$c : m \oplus t_{r-1, A[X_r]}^k \rightarrow t_{r-1, A[X_r]}^k \oplus m$$

est l'isomorphisme de changement d'ordre, on notera

$$c_j = T_{r-1}(\varphi_j)(c) \quad (j=0, 1).$$

On a donc des isomorphismes

$$p_0 = (m \oplus t_{r-1, A[X_r]}^k)_0 = m_0 \oplus t_{r-1, A}^k \xrightarrow{c_0} t_{r-1, A}^k \oplus m_0 \xrightarrow{\alpha_0^{-1} \oplus \iota} l_0 \oplus m_0 = (l \oplus m)_0 \xrightarrow{\theta_0} t_{r-1, A}^{2k}$$

et, de même, pour $p_1 \rightarrow t_{r-1, A}^{2k}$.

Soit $\beta_j = \theta_j(\alpha_j^{-1} \oplus \iota) c_j$ ($j = 0, 1$) et démontrons que

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (p, \beta_0, \beta_1) \oplus (t_{r-1, A}^{3k}, \iota, \iota) = t_{r, A}^{6k},$$

ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Considérons l'isomorphisme

$$l \oplus p \oplus t_{r-1, A}^{3k} \rightarrow t_{r-1, A}^{6k}$$

défini par

$$\begin{aligned} l \oplus p \oplus t_{r-1, A}^{3k} &\rightarrow l \oplus (m \oplus t_{r-1, A}^k) \oplus t_{r-1, A}^{3k} \rightarrow (l \oplus m) \oplus t_{r-1, A}^k \oplus t_{r-1, A}^{3k} \\ &\rightarrow t_{r-1, A}^{2k} \oplus t_{r-1, A}^k \oplus t_{r-1, A}^{3k} \rightarrow t_{r-1, A}^{6k}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$l' = p \oplus t_{r-1, A}^{3k}, \quad \gamma_0 = \beta_0 \oplus \iota, \quad \gamma_1 = \beta_1 \oplus \iota$$

et si l'on définit d_j par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} (l \oplus l')_j & \xrightarrow{(\theta \oplus \iota)_j} & t_{r-1, A}^{6k} \\ \alpha_j \oplus \gamma_j \downarrow & & \downarrow d_j \\ t_{r-1, A}^{6k} & \xrightarrow{\text{id.}} & t_{r-1, A}^{6k} \end{array} \quad (j = 0, 1),$$

alors $\theta \oplus \iota$ nous donne un isomorphisme

$$(l, \alpha_0, \alpha_1) \oplus (l', \gamma_0, \gamma_1) \rightarrow (t_{r-1, A}^{6k}, d_0, d_1).$$

Par la suite, on doit montrer qu'il existe un isomorphisme

$$(t_{r-1, A}^{6k}, d_0, d_1) \rightarrow (t_{r-1, A}^{6k}, \iota, \iota).$$

Puisque d_0 et d_1 sont des automorphismes de $t_{r-1, A}^{6k}$, ils peuvent être identifiés à des matrices de $D(6k, r-1, A)$. On va montrer qu'il existe une matrice $f \in D(6k, r-1, A)$ telle que

$$d_0 \equiv f \quad \text{et} \quad d_1 \equiv f \quad (\text{mod } E(6k, A[X_1, \dots, X_{r-1}]) \cap D(6k, r-1, A)).$$

Or les applications d_j peuvent être factorisées par

$$\begin{array}{ccc} t_{r-1, A}^{6k} & \xrightarrow{d_j} & t_{r-1, A}^{6k} \\ \theta_j^{-1} \oplus \iota \downarrow & & \downarrow \iota \oplus \theta_j \oplus \iota \\ l_j \oplus m_j \oplus t_{r-1, A}^{4k} & & t_{r-1, A}^k \oplus (l \oplus m)_j \oplus t_{r-1, A}^{3k} \\ \iota \oplus c_j \oplus \iota \downarrow & & \downarrow \alpha_j \oplus \iota \\ l_j \oplus t_{r-1, A}^k \oplus m_j \oplus t_{r-1, A}^{3k} & \xrightarrow{\iota \oplus \alpha_j^{-1} \oplus \iota} & l_j \oplus (l_j \oplus m_j) \oplus t_{r-1, A}^{3k} \end{array}$$

et étant donné que l_j et m_j sont isomorphes à $t_{r-1, A}^k$, en choisissant ces isomorphismes, toutes ces applications peuvent être considérées comme

des automorphismes de $t_{r-1, A[X_r]}^{6k}$, donc comme des matrices de $D(6k, r-1, A)$. De plus, d'après le lemme 1.3, $c_0 = c_1 = c$.

En appliquant le lemme de Whitehead, on a

$$\begin{aligned} d_j &= (\iota \oplus 0_j \oplus \iota) (\alpha_j \oplus \iota) (\iota \oplus \alpha_j^{-1} \oplus \iota) (\iota \oplus c \oplus \iota) (0_j^{-1} \oplus \iota) \\ &= (\iota \oplus c \oplus \iota) (0_j^{-1} \oplus \iota) (0_j \oplus \iota) (\alpha_j \oplus \iota) (\alpha_j^{-1} \oplus \iota) = \iota \oplus c \oplus \iota \end{aligned}$$

et $\iota \oplus c \oplus \iota$ est une matrice à coefficients dans A . On peut donc écrire

$$d_j = (\iota \oplus c \oplus \iota) h_j, \quad \text{avec } h_j \in D(6k, r-1, A) \cap E(6k, A).$$

Le lemme 2.5 nous dit qu'il existe une matrice $h' \in GL(6k, A[X_1, \dots, X_r])$ telle que $h'_j = h_j$. Si l'on pose $e = (\iota \oplus c \oplus \iota) h'$, on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} t_{r-1, A}^{6k} & \xrightarrow{e_j} & t_{r-1, A}^{6k} \\ d_j \downarrow & & \downarrow \text{Id.} \\ t_{r-1, A}^{6k} & \xrightarrow{\text{Id.}} & t_{r-1, A}^{6k} \end{array} \quad (j=0, 1).$$

Ceci nous fournit l'isomorphisme

$$(t_{r-1, A[X_r]}^{6k}, d_0, d_1) \rightarrow (t_{r-1, A[X_r]}^{6k}, \iota, \iota)$$

et le théorème est démontré.

LEMME 2.7. — Soit $(l, \alpha_0, \iota) \in \text{Ob } T_r(A)$, $r \geq 1$. Si l admet un complément trivial, i. e. s'il existe un objet trivial $t_{r-1, A[X_r]}^n$ tel que

$$l \oplus t_{r-1, A[X_r]}^n \simeq t_{r-1, A[X_r]}^k,$$

k étant un entier convenable, alors

$$s_r(l, \alpha_0, \iota) = s_r(l, \alpha_j^{-1}, \iota).$$

Étant donné que

$$s_r(l, \alpha_0, \iota) = s_r((l, \alpha_0, \iota) \oplus t_{r, A}^n),$$

on peut supposer que l soit trivial, i. e. que

$$(l, \alpha_0, \iota) = (t_{r-1, A[X_r]}^n, \beta_0, \iota).$$

D'autre part,

$$(t_{r-1, A[X_r]}^n, \beta_0, \iota) \oplus (t_{r-1, A[X_r]}^n, \beta_0^{-1}, \iota) \oplus (t_{r-1, A[X_r]}^{2n}, \iota, \iota) = (t_{r-1, A[X_r]}^{4n}, \beta_0 \oplus \beta_0^{-1} \oplus \iota, \iota)$$

et à $\beta_0 \oplus \beta_0^{-1} \oplus \iota : t_{r-1, A}^{4n} \rightarrow t_{r-1, A}^{4n}$ correspond la matrice $\begin{pmatrix} \beta_0 & 0 \\ \beta_0^{-1} & 1 \end{pmatrix}$. D'après le lemme de Whitehead, cette matrice est équivalente à la matrice identité. La même méthode utilisée dans la fin de la démonstration du théorème 2.1 montre que $(t_{r-1, A[X_r]}^{4n}, \beta_0 \oplus \beta_0^{-1} \oplus \iota, \iota)$ est isomorphe à $(t_{r-1, A[X_r]}^{4n}, \iota, \iota)$. Donc,

$$s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \beta_0, \iota) + s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \beta_0^{-1}, \iota) = 0.$$

LEMME 2.8 (Multiplicativité).

$$s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha, \iota) + s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \beta, \iota) = s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha\beta, \iota).$$

En effet,

$$s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha\beta, \iota) = s_r((t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha\beta, \iota) (t_{r-1, A[X_r]}^n, \iota, \iota)) = s_r(t_{r-1, A[X_r]}^{2n}, \alpha\beta \oplus \iota, \iota).$$

Comme précédemment, à $\alpha\beta \oplus \iota$ correspond la matrice $\begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, laquelle est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Par un argument similaire à celui déjà utilisé, on montre qu'il existe un isomorphisme

$$(t_{r-1, A[X_r]}^{2n}, \alpha\beta \oplus \iota, \iota) \rightarrow (t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha \oplus \beta, \iota).$$

Donc,

$$s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha\beta, \iota) = s_r(t_{r-1, A[X_r]}^{2n}, \alpha \oplus \beta, \iota) = s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha, \iota) + s_r(t_{r-1, A[X_r]}^n, \beta, \iota).$$

LEMME 2.9. — Soit $(t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha_0, \alpha_1) \in \text{Ob } T_r(A)$ et supposons qu'il existe

$$\varphi(X_r) \in D(n, r-1, A[X_r]) \quad \text{tel que} \quad \varphi(0) = \alpha_0 \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \alpha_1.$$

Alors

$$(t_{r-1, A[X_r]}^n, \alpha_0, \alpha_1) \simeq (t_{r-1, A[X_r]}^n, \iota, \iota).$$

L'isomorphisme

$$\varphi(X_r) : t_{r-1, A[X_r]}^n \rightarrow t_{r-1, A[X_r]}^n$$

nous donne, d'après l'hypothèse faite, la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} t_{r-1, A}^n & \xrightarrow{\varphi(j)} & t_{r-1, A}^n \\ \alpha_j \downarrow & & \downarrow \text{id.} \\ t_{r-1, A}^n & \xrightarrow{\text{id.}} & t_{r-1, A}^n \end{array} \quad (j=0, 1).$$

2.5. LE GROUPE $K_1(A)$. — Dans ce numéro, il s'agira d'étudier de plus près le foncteur K_1 .

L'ensemble $\text{Ob } T_1(A)$ est l'ensemble des triples (P, α_0, α_1) , où P est un $A[X]$ -module projectif de type fini et de rang constant et

$$\alpha_0 : P_0 = P \otimes_{A[X]} (A[X]/(X)) = P/XP \rightarrow A^n$$

et

$$\alpha_1 : P_1 = P \otimes_{A[X]} (A[X]/(X-1)) = P/(X-1)P \rightarrow A^n$$

sont des A -isomorphismes. On peut encore dire que $\text{Ob } T_1(A)$ est l'ensemble des triples avec $P, A[X]$ -projectif, P/XP et $P/(X-1)P$, A -libres et où les isomorphismes peuvent être interprétés comme étant le choix d'une base ordonnée dans chacun d'eux.

Un isomorphisme $(P, \alpha_0, \alpha_1) \xrightarrow{\sim} (Q, \beta_0, \beta_1)$ n'est autre qu'un isomorphisme $P \xrightarrow{\sim} Q$ qui envoie, tout en respectant l'ordre, la base choisie dans P/XP en la base choisie dans Q/XQ (et, de même, modulo $X-1$).

On peut donner maintenant une autre description de K_1 . Si $GL(n, A)$ est le groupe linéaire d'ordre n sur A , il existe une inclusion naturelle

$$\lambda_n : GL(n, A) \rightarrow GL(n+1, A)$$

définie par $\lambda_n(a_{ij}) = (b_{ij})$, avec $a_{ij} = b_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$, $b_{i, n+1} = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $b_{n+1, n+1} = 1$. Soit

$$GL(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} GL(n, A).$$

On définit une application $f_n : GL(n, A) \rightarrow K_1(A)$ en posant, pour tout $a \in GL(n, A)$,

$$f_n(a) = s(t_{1, A[X]}^n, a, \iota).$$

Puisque, pour tout $a \in GL(n, A)$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\lambda_n(a)) &= s(t_{0, A[X]}^{n+1}, \lambda_n(a), \iota) = s(t_{0, A[X]}^n, a, \iota) + s(t_{0, A[X]}^1, \iota, \iota) \\ &= s(t_{0, A[X]}^n, a, \iota) = f_n(a), \end{aligned}$$

alors f_{n+1} prolonge f_n et les f_n définissent donc une application — par ailleurs, un homomorphisme de groupes — $f : GL(A) \rightarrow K_1(A)$, lequel est, de toute évidence, surjectif. On veut caractériser $\text{Ker}(f)$.

On définit, tout d'abord, le groupe $F_0(A)$ comme étant le sous-groupe de $GL(A)$ engendré par les éléments $\varphi(0) \varphi(1)^{-1}$, φ parcourant $GL(A[X])$. On voit que $F_0(A)$ est un sous-groupe invariant de $GL(A)$, car pour tout $a \in GL(A)$,

$$a \varphi(0) \varphi(1)^{-1} a^{-1} = (a \varphi)(0) \cdot ((a \varphi)(1))^{-1} \in F_0(A).$$

On remarque que $a \varphi$ est le produit dans $GL(A[X])$, une fois qu'on a identifié a à son image par l'application canonique $GL(A) \rightarrow GL(A[X])$.

D'après le lemme 1.4 et l'isomorphisme $(t^n, \varphi(0), \varphi(1)) \xrightarrow{\sim} (t^n, \iota, \iota)$ défini par φ , on a

$$f(\varphi(0) \varphi(1)^{-1}) = s(t^n, \varphi(0) \varphi(1)^{-1}, \iota) = s(t^n, \varphi(0), \varphi(1)) = 0.$$

Donc, la restriction de f à $F_0(A)$ est nulle et, par passage au quotient, f induit un homomorphisme de groupes $\bar{f} : GL(A)/F_0(A) \rightarrow K_1(A)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} GL(A) & \xrightarrow{f} & K_1(A) \\ \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ GL(A)/F_0(A) & & \end{array}$$

où la flèche verticale est canonique.

Nous allons montrer que $\bar{f}$ est un isomorphisme et, pour ce faire, on définit une application $\bar{g} : K_1(A) \rightarrow GL(A)/F_0(A)$ en posant $\bar{g}(s(t^n, a, \iota)) = \bar{a}$,

$\bar{a}$ étant la classe de a modulo $F_0(A)$. Il est clair que tout objet de $K_1(A)$ peut être représenté par un objet de la forme $(t^n, a, \iota) \in \text{Ob } T_1(A)$ et la chose à vérifier est donc que $\bar{g}$ est bien définie. En effet, si $s(t, a, \iota) = s(t', b, \iota)$, on peut supposer que $t = t'$ (car sinon on y additionne un objet trivial), i. e. que $(t, a, \iota) \simeq (t, b, \iota)$. Il existe donc $\varphi \in GL(A[X])$, $\varphi : t \rightarrow t$, et $d : A^n \rightarrow A^n$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi(0)} & A^n \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ A^n & \xrightarrow{d} & A^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varphi(1)} & A^n \\ \text{id.} \downarrow & & \downarrow \text{id.} \\ A^n & \xrightarrow{d} & A^n \end{array}$$

Ceci nous montre que $d = \varphi(1)$ et que

$$b = da \varphi(0)^{-1} = \varphi(1) a \varphi(0)^{-1} = \varphi(1) \varphi(0)^{-1} a z,$$

avec

$$z \in [GL(A), GL(A)] = E(A) \subset F_0(A).$$

Si l'on pose

$$\psi(X) = a^{-1} \varphi(1 - X) \in GL(A[X]),$$

on peut écrire

$$b = aa^{-1} \varphi(1) \varphi(0)^{-1} a z = a \psi(0) \psi(1)^{-1} z,$$

i. e. $\bar{b} = \bar{a}$ dans $GL(A)/F_0(A)$.

Exemple. — Soient A un anneau euclidien et A^* le groupe multiplicatif de A . Il existe alors un isomorphisme canonique $K_1(A) \xrightarrow{\sim} A^*$.

En effet, considérons l'application déterminant $d : GL(A) \rightarrow A^*$. Alors, $F_0(A) \subset \text{Ker}(d)$, car si $a = \varphi(0) \varphi(1)^{-1}$, puisque $\varphi \in GL(A[X])$, le déterminant de φ est inversible dans $A[X]$, donc c'est une unité dans A . Ceci nous montre que $d(\varphi(0)) = d(\varphi(1))$ et, par suite, $d(a) = 1$.

Réciproquement $\text{Ker}(d) \subset F_0(A)$, car si $d(a) = 1$, a est un produit de matrices élémentaires $a = \beta_1 \dots \beta_r$. Donc, $\varphi = \beta_1(X) \dots \beta_r(X)$ nous donne

$$\varphi(0) = a, \quad \varphi(1) = 1 \quad \text{et} \quad a = \varphi(0) \varphi(1)^{-1} \in F_0(A).$$

2.6. RAPPORTS AVEC LA K-THÉORIE DE BASS. — Dans [1], Bass définit un foncteur K^1 (on le notera ici K_B^1) et démontre qu'il est isomorphe à $GL(A)/E(A)$, où $E(A) = [GL(A), GL(A)]$. Puisqu'on a un épimorphisme $GL(A) \rightarrow K_1(A)$, avec $K_1(A)$ abélien, ceci induit un épimorphisme $B : K_B^1(A) \rightarrow K_1(A)$ qui est, de plus, une transformation naturelle de foncteurs.

D'après [2], on dira qu'un anneau commutatif à élément unité A est un *anneau régulier*, s'il est noethérien et si tout A -module admet une résolution projective finie.

THÉORÈME 2.2. — *Si A est un anneau régulier, $B : K_B^1(A) \rightarrow K_1(A)$ est un isomorphisme de groupes abéliens.*

Pour le démontrer, on aura besoin de quelques lemmes préliminaires ainsi que de la définition suivante : on dira qu'une matrice a est *unipotente* si $a = 1 + c$, où c est une matrice nilpotente. Il s'ensuit que si a est unipotente, alors $a \in \text{GL}(A)$. En particulier, les matrices élémentaires sont unipotentes.

Désignons par $\text{Un}(A)$ le sous-groupe de $\text{GL}(A)$ engendré par les matrices unipotentes. Il est clair que $E(A) \subset \text{Un}(A)$ et $\text{Un}(A)$ est un sous-groupe normal de $\text{GL}(A)$. Donc $\text{GL}(A)/\text{Un}(A)$ est un groupe abélien. On note $K_1^*(A) = \text{GL}(A)/\text{Un}(A)$.

LEMME 2.10. — Soient A un anneau et $\lambda : A \rightarrow A[X]$ l'inclusion canonique. Alors $K_1^*(\lambda) : K_1^*(A) \rightarrow K_1^*(A[X])$ est un isomorphisme.

Soit $\pi_0 : A[X] \rightarrow A$ l'homomorphisme de A -algèbres défini par $\pi_0(X) = 0$. On a le diagramme commutatif de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} K_1^*(A) & \xrightarrow{K_1^*(\lambda)} & K_1^*(A[X]) \\ & \searrow \text{id.} \quad \swarrow K_1^*(\pi_0) & \\ & K_1^*(A) & \end{array}$$

Donc, $K_1^*(A[X]) = K_1^*(A) \oplus H$, où $H = \text{Ker}(K_1^*(\pi_0))$. On veut montrer que $H = 0$.

Si $a \in \text{GL}(A[X])$, on peut écrire $a = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$, où les a_i sont des matrices à coefficients dans A . Tout d'abord on montre que $a \equiv b_0 + b_1 X \pmod{E(A[X])}$. En effet,

$$\begin{aligned} a &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + \dots + a_d X^d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} a_0 + \dots + a_d X^d & X^{d-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_0 + \dots + a_{d-1} X^{d-1} & X^{d-1} \\ a_d X^d & 1 \end{pmatrix} = a' \end{aligned}$$

et a' est un polynôme de degré $d-1$ dont les coefficients sont des matrices à coefficients dans A . En répétant le procédé un certain nombre de fois, on trouve une matrice $b = b_0 + b_1 X$ et $a \equiv b \pmod{E(A[X])}$. Donc, a et b représentent le même élément dans $K_1^*(A[X])$.

On remarque que $b \in \text{GL}(A[X])$ entraîne $b_0 \in \text{GL}(A)$. D'autre part, $b \in H$ entraîne $0 = K_1^*(\pi_0)(b) = b_0$ et ceci veut dire que

$$b_0 \in \text{Un}(A) \subset \text{Un}(A[X]).$$

Donc, $b = b_0(1 + cX)$ et $1 + cX \in \text{GL}(A[X])$. On va montrer que la matrice c est nilpotente. En effet, la relation

$$(1 + cX)(d_0 + d_1 X + \dots + d_r X^r) = 1$$

entraîne $c^{r+1} = 0$. Ceci veut dire que

$$1 + cX \in \text{Un}(A[X]), \quad \text{donc } b \in \text{Un}(A[X]).$$

On a ainsi montré que b est un zéro dans $K_1^*(A[X])$.

LEMME 2.11. — *Pour tout objet A de $\mathcal{R}_c$, on a $Un(A) = F_0(A)$.*

En effet, si $\pi_j : A[X] \rightarrow A$ est l'homomorphisme défini par

$$\pi_j(X) = j \quad (j = 0, 1),$$

on en induit l'homomorphisme de groupes abéliens

$$K_1^*(\pi_j) : K_1^*(A[X]) \rightarrow K_1^*(A) \quad (j = 0, 1).$$

Donc, $K_1^*(\pi_0) K_1^*(\lambda) = K_1^*(\pi_1) K_1^*(\lambda) = \text{id.}$, où $\lambda : A \rightarrow A[X]$ est l'inclusion canonique. Étant donné que $K_1^*(\lambda)$ est un isomorphisme, alors $K_1^*(\pi_0) = K_1^*(\pi_1)$, donc, pour tout $\varphi \in GL(A[X])$, $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ représentent le même élément dans $K_1^*(A)$. Ceci nous montre que $\varphi(0) \varphi(1)^{-1} \in Un(A)$ et, par suite, $F_0(A) \subset Un(A)$.

Réciproquement, si $b = 1 + c$, avec c nilpotente, alors $b(X) = 1 + cX$ nous donne $b(0) = 1$ et $b(1) = b$, i. e. $b \in F_0(A)$. Ceci nous montre que $Un(A) \subset F_0(A)$.

COROLLAIRE. — *On a $K_1(A) = K_1^*(A)$ et l'application canonique $K_1(A) \rightarrow K_1(A[X])$ est un isomorphisme.*

Démonstration du théorème 2.2. — Dans ([2], th. 3 et corollaire), on démontre, sous les hypothèses du théorème, que $Un(A) = E(A)$.

2.7. RAPPORTS ENTRE $K_r(A)$ ET MATRICES. — Les résultats démontrés dans 2.5 et une partie de 2.6 sont des cas particuliers d'une situation plus générale.

Fixons un entier $r \in \mathbf{N}$. Il existe une inclusion naturelle

$$\lambda_n : D(n, r, A) \rightarrow D(n+1, r, A),$$

induite par l'inclusion

$$GL(n, A[X_1, \dots, X_r]) \rightarrow GL(n+1, A[X_1, \dots, X_r])$$

définie dans 2.5. Notons

$$D_r(A) = \bigcup_{n \geq 0} D(n, r, A).$$

Considérons l'application

$$f_n^r : D(n, r, A) \rightarrow K_{r+1}(A) \quad \text{définie par} \quad f_n^r(a) = s(t_{r,A[X]}^n, a, \iota).$$

Une démonstration analogue à celle de 2.5 nous montre que

$$f_n^r(a) = f_{n+1}^r(\lambda_n(a)),$$

donc les f_n^r , n parcourant $\mathbf{N}$, définissent une application $f^r : D_r(A) \rightarrow K_{r+1}(A)$. D'après le lemme 2.8, f^r est un homomorphisme de groupes. De plus, $f^r : D_r(A) \rightarrow K_{r+1}(A)$ est surjectif, car

$$s_{r+1}(t, \alpha_0, \alpha_1) = s_{r+1}(t, \alpha_0 \alpha_1^{-1}, t).$$

Ceci étant, on peut définir le groupe $F_r(A)$ comme étant le sous-groupe de $D_r(A)$ engendré par les éléments $\varphi(o) \varphi(1)^{-1}$, φ parcourant $D_r(A[X])$. On voit que $F_r(A)$ est un sous-groupe invariant de $D_r(A)$ [la démonstration est analogue à celle faite pour $F_0(A)$] et si $a \in F_r(A)$, alors $f^r(a) = o$. Donc, f^r induit un homomorphisme de groupes $f : D_r(A)/F_r(A) \rightarrow K_{r+1}(A)$. Montrons que f est un isomorphisme.

Désignons par $Un_r(A)$ le sous-groupe de $D_r(A)$ engendré par les matrices unipotentes de $D_r(A)$ et soit $K_{r+1}^*(A) = D_r(A)/Un_r(A)$. Étant donné que Un_r et D_r sont des foncteurs et que l'inclusion $Un_r \rightarrow D_r$ est une transformation naturelle, alors $K_{r+1}^* : \mathcal{R}_c \rightarrow \mathcal{A}_b$ est un foncteur. Les lemmes 2.10 et 2.11 peuvent alors être traduits de la façon suivante :

LEMME 2.12. — *L'homomorphisme $K_{r+1}^*(\lambda) : K_{r+1}^*(A) \rightarrow K_{r+1}^*(A[X])$ est un isomorphisme.*

LEMME 2.13. — *Pour tout $r \in \mathbf{N}$, $Un_r(A) = F_r(A)$.*

COROLLAIRE. — *On a $K_{r+1}(A) = K_{r+1}^*(A)$ et l'application canonique*

$$K_{r+1}(A) \rightarrow K_{r+1}(A[X])$$

est un isomorphisme.

3. La théorie relative.

3.1. LES FONCTEURS L_i . — Désignons par $\mathcal{H}_c$ la catégorie dérivée de $\mathcal{R}_c$, i. e. les objets de $\mathcal{H}_c$ sont les morphismes de $\mathcal{R}_c$ et un morphisme $\varphi \rightarrow \varphi'$ dans $\mathcal{H}_c$, où $\varphi : A \rightarrow B$ et $\varphi' : C \rightarrow D$ sont deux morphismes de $\mathcal{R}_c$, est une paire de morphismes (f, g) de $\mathcal{R}_c$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{\varphi'} & D \end{array}$$

On va définir les foncteurs $K_i^b : \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{A}_b$, appelés les *foncteurs K_i relatifs*, et construire, pour tout morphisme $\varphi : A \rightarrow B$ de $\mathcal{R}_c$, une suite exacte reliant $K_i^b(\varphi)$, $K_i(A)$ et $K_i(B)$.

Tout d'abord, on définit les foncteurs $L_i: \mathcal{H}_c \rightarrow \text{Cat}$. Pour tout objet $\varphi \in \text{Ob } \mathcal{H}_c$, $\varphi: A \rightarrow B$, $L_i(\varphi)$ est une catégorie dont les objets sont les triples (m, α, m') tels que :

- a. $m, m' \in \text{Ob } T_i(A)$;
- b. $z_{i,A}(m) = z_{i,A}(m')$, où $z_{i,A} = \varphi_{i,A} \cdot \varphi_{i,A}$;
- c. Si l'on pose $mB = T_i(\varphi)(m)$, $\alpha: mB \rightarrow m'B$ est un isomorphisme de la catégorie $T_i(B)$.

Un morphisme $(m, \alpha, m') \rightarrow (l, \beta, l')$ de la catégorie $L_i(\varphi)$ est une paire de morphismes (λ, μ) de $T_i(A)$, $\lambda: m \rightarrow l$, $\mu: m' \rightarrow l'$, rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} mB & \xrightarrow{\alpha} & m'B \\ \downarrow \lambda B & & \downarrow \mu B \\ lB & \xrightarrow{\beta} & l'B \end{array}$$

Soit $(f, g): \varphi \rightarrow \varphi'$ un morphisme de $\mathcal{H}_c$ et considérons le foncteur $L_i(f, g): L_i(\varphi) \rightarrow L_i(\varphi')$ défini par

$$\begin{aligned} L_i(f, g)(m, \alpha, m') &= (T_i(f)(m), T_i(g)(\alpha), T_i(f)(m')), \\ L_i(f, g)(\lambda, \mu) &= (T_i(f)(\lambda), T_i(g)(\mu)). \end{aligned}$$

Il existe une somme dans $L_i(\varphi)$ définie par

$$(m, \alpha, m') \oplus (l, \beta, l') = (m \oplus l, \alpha \oplus \beta, m' \oplus l')$$

et celle-ci est une somme au sens catégorie. On peut définir dans $\text{Ob } L_i(\varphi)$ une structure de groupoïde en posant

$$(m, \alpha, l) \cdot (l, \beta, p) = (m, \beta\alpha, p).$$

Il est clair que (m, ι, m) [resp. (l, ι, l)] est l'identité à gauche (resp. à droite) pour (m, α, l) , où ι est l'application identique.

On appellera *identité* tout objet de la forme (m, ι, m) et *automorphisme*, tout objet de la forme (m, α, m) . Dans le cas d'un automorphisme (t, α, t) , où $t = t_{i,A}^n$ est trivial, α est un automorphisme de $tB = t_{i,B}^n$, donc il peut être identifié à une matrice de $D(n, i, B)$.

Les groupes $K_i^n(\varphi)$ naissent de cette catégorie, les identités de $L_i(\varphi)$ s'envoyant sur le zéro de $K_i^n(\varphi)$. L'application canonique $\text{Ob } L_i(\varphi) \rightarrow K_i^n(\varphi)$ étant additive, tout objet (m, α, l) est équivalent à un objet de la forme $(m, \alpha, l) \oplus (l', \iota, l')$ et l'on peut donc prendre $l' \oplus l' = t$ soit un

objet trivial de $T_i(A)$. Si l'on pose $m' = m \oplus l'$, alors (m, α, l) est équivalent à (m', α, t) , où t est trivial.

3.2. DÉFORMATIONS. — On notera $L_{i,A}^n$ le sous-ensemble de $\text{Ob} L_i(A)$ formé d'objets $(l, \alpha, t_{i,A}^n)$, où l'on pose $L_i(A) = L_i(\varphi)$, φ étant un objet de $\mathcal{H}_c$ de source A et de but B .

Soient $\sigma = (m, \alpha, t_{i,A}^n)$ et $\sigma' = (m', \alpha', t_{i,A}^n)$ deux objets de $L_{i,A}^n$. On dira que σ se *déforme* en σ' s'il existe un automorphisme ψ de $t_{i,B[X_{i+1}]}^n$ (lequel peut être identifié à une matrice de $D(n, i, B[X_{i+1}])$) et un isomorphisme $\theta : m \rightarrow m'$ de $T_i(A)$ tels que :

a. il existe $\gamma \in \text{Aut}(t_{i,A}^n)$, avec $\gamma B = \psi(o)$;

b. le diagramme

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} mB & \xrightarrow{\alpha} & t_{i,B}^n \\ \theta B \downarrow & & \downarrow \psi(1) \\ m'B & \xrightarrow{\alpha'} & t_{i,B}^n \end{array}$$

est commutatif.

La paire (ψ, θ) s'appellera une *déformation* et l'on notera $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ le fait que σ se déforme en σ' .

La notion de déformation peut être interprétée de la façon suivante : si l'on pose

$$\beta(X_{i+1}) = \psi^{-1}(\alpha' B(X_{i+1})) (\theta B(X_{i+1})),$$

le diagramme

$$\begin{array}{ccc} mB[X_{i+1}] & \xrightarrow{\beta(X_{i+1})} & t_{i,B[X_{i+1}]}^n \\ \theta B(X_{i+1}) \downarrow & & \downarrow \psi \\ m'B[X_{i+1}] & \xrightarrow{\alpha' B(X_{i+1})} & t_{i,B[X_{i+1}]}^n \end{array}$$

est commutatif.

Pour $X_{i+1} = 1$, on a le diagramme (2) et pour $X_{i+1} = 0$, on a un isomorphisme $(m, \beta(o), t_{i,A}^n) \xrightarrow{\sim} (m', \alpha', t_{i,A}^n)$, car $\psi(o) = \gamma B$. Donc, l'objet $(m, \alpha, t_{i,A}^n)$ et la paire (ψ, θ) représentent une sorte de déformation homotopique d'un isomorphisme.

LEMME 3.1. — Si $\sigma \simeq \sigma'$, $\tau \simeq \tau'$ et $\sigma \rightsquigarrow \tau'$, alors $\sigma \rightsquigarrow \tau$.

En effet, posons

$$\sigma = (l, \alpha, t), \quad \sigma' = (l', \alpha', t), \quad \tau = (m, \beta, t) \quad \text{et} \quad \tau' = (m', \beta', t),$$

où $t = t_{i,A}^n$. Par définition, il existe des isomorphismes

$$\gamma_1 : l \rightarrow l', \quad \gamma_2 : m' \rightarrow m, \quad \theta : l' \rightarrow m' \quad \text{et} \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 : t \rightarrow t$$

dans $T_r(A)$ et un automorphisme $\varphi \in \text{Aut}(t_{r, B[X_{r+1}]}^n)$ tels que $\varphi(o) = \lambda_0 B$ et les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 lB & \xrightarrow{\alpha} & t_{r, B}^n \\
 \gamma_1 B \downarrow & & \downarrow \lambda_1 B \\
 l'B & \xrightarrow{\alpha'} & t_{r, B}^n \\
 0B \downarrow & & \downarrow \varphi(1) \\
 m'B & \xrightarrow{\beta'} & t_{r, B}^n \\
 \gamma_2 B \downarrow & & \downarrow \lambda_2 B \\
 mB & \xrightarrow{\beta} & t_{r, B}^n
 \end{array}$$

soient commutatifs.

Donc, pour

$$\psi = (\lambda_2 B(X_r)) \varphi(\lambda_1 B(X_r)) \in \text{Aut}(t_{r, B[X]}^n) \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_2 \lambda_0 \lambda_1,$$

la paire (ψ, λ) est une déformation $\sigma \rightsquigarrow \tau$.

LEMME 3.2. — *La notion de déformation induit sur $L_{r, A}^n$ une relation d'équivalence.*

On remarque que $\sigma \rightsquigarrow \sigma$ est trivial, car c'est la déformation (id., id.). Si $(\varphi, \theta) : \sigma \rightsquigarrow \sigma'$, alors $(\varphi^{-1}, \theta^{-1}) : \sigma' \rightsquigarrow \sigma$. Finalement, si

$$(\varphi_1, \theta_1) : \sigma \rightsquigarrow \sigma' \quad \text{et} \quad (\varphi_2, \theta_2) : \sigma' \rightsquigarrow \sigma''$$

et si l'on pose $\psi = \varphi_2 \varphi_1$ et $\lambda = \theta_2 \theta_1$, alors $(\psi, \lambda) : \sigma \rightsquigarrow \sigma''$.

LEMME 3.3. — *Si $\sigma = (l, \alpha, t)$ et $\varepsilon = (t, \beta, t)$ sont deux objets de $L_{r, A}^n$ et si l'on considère la déformation $(\varphi, 1) : \varepsilon \rightsquigarrow (t, \iota, t)$, alors $\sigma \varepsilon \rightsquigarrow \sigma$.*

Il suffit de voir que la déformation $(\varphi, 1)$ nous donne $\varphi(o) = 1$, $\varphi(1) = \beta$, donc, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 lB & \xrightarrow{\alpha} & t_{r, B}^n \\
 \text{id.} \downarrow & & \downarrow \varphi(1) = \beta \\
 lB & \xrightarrow{\beta \alpha} & t_{r, B}^n
 \end{array}$$

LEMME 3.4. — *Si $\sigma = (t, \beta, t)$, $\beta \in E(n, B)$, il existe une déformation $(\varphi, 1) : \sigma \rightsquigarrow (t, \iota, t)$.*

On prend $\varphi^{-1} = \beta(X)$, où $\beta(X)$ a été défini dans le lemme 2.5.

LEMME 2.5. — *Si $\sigma \rightsquigarrow \sigma'$ et $\tau \rightsquigarrow \tau'$, alors $\sigma \oplus \tau \rightsquigarrow \sigma' \oplus \tau'$.*

En effet, si $(\varphi_1, \gamma_1) : \sigma \rightsquigarrow \sigma'$ et $(\varphi_2, \gamma_2) : \tau \rightsquigarrow \tau'$, alors

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2, \gamma_1 \oplus \gamma_2) : \sigma \oplus \tau \rightsquigarrow \sigma' \oplus \tau'.$$

3.3. LES FONCTEURS K_r^p . — Soit G un groupe abélien. On dira qu'une application $f : \text{Ob } L_r(\varphi) \rightarrow G$ est *additive* (resp. *multiplicative*) si $f(\sigma \oplus \sigma') = f(\sigma) \oplus f(\sigma')$ [resp. $f(\sigma\sigma') = f(\sigma) \oplus f(\sigma')$], où $\sigma\sigma'$ est le produit défini dans 3.1], quels que soient σ et σ' dans $\text{Ob } L_r(\varphi)$. De plus, on dira que f est *invariante par déformation* si $\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma'$ entraîne $f(\sigma) = f(\sigma')$.

On veut construire une paire $(\Lambda_r(\varphi), K_r^p(\varphi))$ formée d'un groupe abélien $K_r^p(\varphi)$ et d'une application $\Lambda_r(\varphi) : \text{Ob } L_r(\varphi) \rightarrow K_r^p(\varphi)$ qui soit additive, multiplicative et invariante par déformation. De plus, la paire $(\Lambda_r(\varphi), K_r^p(\varphi))$ doit résoudre le problème universel correspondant.

Le groupe $K_r^p(\varphi)$ est obtenu en faisant le quotient du groupe abélien libre engendré par $\text{Ob } L_r(\varphi)$ par le sous-groupe engendré par les relations $\sigma \oplus \sigma' - \sigma - \sigma'$, $\sigma\sigma' - \sigma - \sigma'$ et $\sigma - \sigma'$ si $\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma'$, σ et σ' parcourant $\text{Ob } L_r(\varphi)$. On prend pour $\Lambda_r(\varphi)$ l'application canonique $\text{Ob } L_r(\varphi) \rightarrow K_r^p(\varphi)$.

Si $(f, g) : \varphi \rightarrow \varphi'$ est un morphisme de $\mathcal{H}_c$, on considère le foncteur $L_r(f, g) : L_r(\varphi) \rightarrow L_r(\varphi')$. Il est clair que

$$\begin{aligned} L_r(f, g)(\sigma \oplus \sigma') &= L_r(f, g)(\sigma) \oplus L_r(f, g)(\sigma'), \\ L_r(f, g)(\sigma\sigma') &= L_r(f, g)(\sigma) L_r(f, g)(\sigma') \end{aligned}$$

et

$$L_r(f, g)(\sigma) \xrightarrow{\sim} L_r(f, g)(\sigma')$$

si $\sigma \xrightarrow{\sim} \sigma'$, σ et σ' parcourant $\text{Ob } L_r(\varphi)$. Donc, l'application composée

$$\Lambda_r(\varphi') \cdot L_r(f, g) : \text{Ob } L_r(\varphi) \rightarrow \text{Ob } L_r(\varphi') \rightarrow K_r^p(\varphi')$$

est additive, multiplicative et invariante par déformation. Elle induit donc un unique homomorphisme de groupes abéliens

$$K_r^p(f, g) : K_r^p(\varphi) \rightarrow K_r^p(\varphi').$$

C'est trivial de montrer que $K_r^p : \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{A}_b$ est un foncteur.

3.4. LE GROUPE $G_r(\varphi)$. — Dans l'ensemble $\text{Ob } L_r(\varphi)$, on dira qu'un objet $\sigma = (l, \alpha, l')$ est *équivalent* à un objet $\tau = (m, \beta, m')$, et l'on note $\sigma \sim \tau$, s'il existe des identités, $z, z' \in \text{Ob } L_r(\varphi)$ et des isomorphismes

$$\sigma \oplus z \simeq \sigma_1 = (l_1, \alpha_1, l'_1), \quad \tau \oplus z' \simeq \tau_1 = (m_1, \beta_1, m'_1)$$

tels que $\sigma_1 \xrightarrow{\sim} \tau_1$. Il est clair que si $\sigma \simeq \tau$, alors $\sigma \sim \tau$.

On veut montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence et que la somme directe dans $L_r(\varphi)$ induit une structure de groupe dans l'ensemble quotient $\text{Ob } L_r(\varphi)/\sim$.

LEMME 3.6. — La relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble $\text{Ob } L_r(\varphi)$.

Si $\sigma = (l, \alpha, l') \in \text{Ob } L_r(\varphi)$, on sait qu'il existe un objet $m \in \text{Ob } T_r(\varphi)$ et un objet trivial $t \in \text{Ob } T_r(A)$ tels que $l' \oplus m = t$. Donc

$$(l, \alpha, l') \oplus (m, \iota, m) = (l \oplus m, \alpha \oplus \iota, t) \quad \text{et} \quad (l \oplus m, \alpha \oplus \iota, t) \xrightarrow{\sim} (l \oplus m, \alpha \oplus \iota, t)$$

(cf. lemme 3.2). Ceci nous montre que $\sigma \sim \sigma$, quel que soit $\sigma \in \text{Ob } L_r(\varphi)$.

Si $\sigma \sim \sigma'$, alors $\sigma' \sim \sigma$. En effet, si $\sigma \sim \sigma'$, il existe des identités $z, z' \in \text{Ob } L_r(\varphi)$ telles que $\sigma \oplus z \xrightarrow{\sim} \sigma' \oplus z'$. D'après le lemme 3.2, $\sigma' \oplus z' \xrightarrow{\sim} \sigma \oplus z$ et ceci nous montre que $\sigma' \sim \sigma$.

Soient $\sigma \sim \sigma'$ et $\sigma' \sim \sigma''$. Si

$$\sigma = (l, \alpha, m), \quad \sigma' = (l', \alpha', m') \quad \text{et} \quad \sigma'' = (l'', \alpha'', m''),$$

l'hypothèse entraîne l'existence d'identités $z_j = (h_j, \iota, h_j)$ ($1 \leq j \leq 4$) et les isomorphismes

$$\begin{aligned} \sigma \oplus z_1 &\simeq (g, \gamma, t), & \sigma' \oplus z_2 &\simeq (g_1, \gamma_1, t) \\ \sigma' \oplus z_3 &\simeq (g', \gamma', t') & \text{et} & \quad \sigma'' \oplus z_4 \simeq (g'_1, \gamma'_1, t') \end{aligned}$$

tels que

$$(g, \gamma, t) \xrightarrow{\sim} (g_1, \gamma_1, t) \quad \text{et} \quad (g', \gamma', t') \xrightarrow{\sim} (g'_1, \gamma'_1, t').$$

Dans les notations employées ici, t veut dire un certain $t''_{r,A}$ et t' , $t''_{r,A}$. Il est clair que, en additionnant une identité convenable, on peut supposer $n = n'$, donc $t = t'$.

Les isomorphismes $\sigma' \oplus z_2 \simeq (g_1, \gamma_1, t)$ et $\sigma' \oplus z_3 \simeq (g', \gamma', t)$ entraînent $m' \oplus h_2 \simeq t$ et $m' \oplus h_3 \simeq t$. Donc, $\varphi_{r,A}(h_2) = \varphi_{r,A}(h_3)$ et d'après le lemme 2.3, il existe un objet trivial t_1 tel que $h_2 \oplus t_1 \simeq h_3 \oplus t_1$. En additionnant (t_1, ι, t_1) aux quatre objets, s'il le faut, on peut supposer $h_2 = h_3$, donc $z_2 = z_3$. Finalement, $\sigma \oplus z_1 \xrightarrow{\sim} \sigma' \oplus z_2 \xrightarrow{\sim} \sigma'' \oplus z_4$. Le lemme 3.2 nous montre alors que $\sigma \sim \sigma''$.

LEMME 3.7. — *La somme dans $\text{Ob } L_r(\varphi)$ induit sur l'ensemble quotient $G_r(\varphi) = \text{Ob } L_r(\varphi)/\sim$ une structure de groupe abélien.*

On remarque, tout d'abord, que si $\sigma \sim \sigma'$ et $\tau \sim \tau'$, alors $\sigma \oplus \tau \sim \sigma' \oplus \tau'$. Ceci suit directement de la définition de la relation d'équivalence $\sim$ et du lemme 3.5. La somme de $\text{Ob } L_r(\varphi)$ induit donc une loi de composition sur $G_r(\varphi)$ par laquelle $G_r(\varphi)$ devient un monoïde commutatif. Il suffit donc de démontrer l'existence de l'inverse.

On désignera par -1 l'automorphisme de $t''_{r,B}$ correspondant à la matrice $-I$ de $D(n, r, B)$, d'après l'isomorphisme $\text{Aut}(t''_{r,B}) \rightarrow D(n, r, B)$, où I désigne la matrice unité de $D(n, r, B)$. Posons $t = t''_{r,A}$ et soit (l, α, t) un représentant d'un élément de $G_r(\varphi)$.

Soient $-\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$. (-1) et $\sigma' = (t, -\alpha^{-1}, l)$. On a

$$\sigma \oplus \sigma' = (l \oplus t, \alpha \oplus (-\alpha^{-1}), t \oplus l).$$

Puisque $lB \simeq tB$, alors $\alpha : lB \rightarrow tB$ peut être représenté par une matrice, notée encore α , donc

$$\sigma \oplus \sigma' \simeq \left(l \oplus t, \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, l \oplus t \right) \quad \text{et} \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in D(2n, r, A).$$

On peut écrire $\mu = \beta_1 \dots \beta_s$, où les β_i sont des matrices élémentaires. On note $\mu(X) = \beta_1(X) \dots \beta_s(X)$, les $\beta_i(X)$ ayant été définies dans le lemme 2.5. Il s'ensuit que la paire $(\mu(X), 1)$ est la déformation

$$(l \oplus t, \mu, l \oplus t) \xrightarrow{\sim} (l \oplus t, 1, l \oplus t).$$

C'est évident que toutes les identités de $\text{Ob } L_r(\varphi)$ sont envoyées sur le zéro de $G_r(\varphi)$.

3.5. L'ISOMORPHISME NATUREL $K_r^D(\varphi) \rightarrow G_r(\varphi)$.

LEMME 3.8. — Soit $\Lambda_r(\varphi) : \text{Ob } L_r(\varphi) \rightarrow K_r^D(\varphi)$.

- (i) Pour toute identité $z = (m, \iota, m)$, $\Lambda_r(\varphi)(z) = 0$.
- (ii) Pour tout automorphisme $\sigma = (m, \beta, m)$ tel que $mB = t_{r,B}''$ et $\beta \in E(n, B)$, on a $\Lambda_r(\varphi)(\sigma) = 0$.

En effet, étant donné que $zz = z$ et que $\Lambda_r(\varphi)$ est multiplicative, on a

$$\Lambda_r(\varphi)(z) = \Lambda_r(\varphi)(zz) = \Lambda_r(\varphi)(z) + \Lambda_r(\varphi)(z).$$

Donc, $\Lambda_r(\varphi)(z) = 0$.

D'après les hypothèses de (ii), il existe un objet h tel que $m \oplus h = t_{r,A}''$. Donc,

$$\Lambda_r(\varphi)(m, \beta, m) = \Lambda_r(\varphi)((m, \beta, m) \oplus (h, \iota, h)) = \Lambda_r(\varphi)(t, \gamma, t),$$

où $t = t_{r,A}''$ et $\gamma = \beta \oplus \iota \in E(n, B)$. Mais on sait que $(t, \gamma, t) \xrightarrow{\sim} (t, \iota, t)$ et $\Lambda_r(\varphi)$ étant invariante par déformation, il s'ensuit que $\Lambda_r(\varphi)(m, \beta, m) = 0$.

On peut maintenant construire l'isomorphisme $h_r(\varphi) : K_r^D(\varphi) \rightarrow G_r(\varphi)$.

Soit $R_r(\varphi) : \text{Ob } L_r(\varphi) \rightarrow G_r(\varphi)$ l'application canonique. Elle est, de toute évidence, additive et invariante par déformation. On veut montrer que $R_r(\varphi)$ est aussi multiplicative.

Soient $\sigma = (l, \alpha, s)$ et $\sigma' = (t, \beta, m)$ deux objets de $L_r(\varphi)$. En additionnant une identité, s'il le faut, on peut supposer que $s = t = t_{r,A}''$. D'autre part, il existe un isomorphisme évident $\sigma \simeq -\sigma = (l, -\alpha, s)$. Ceci étant, on va comparer

$$\sigma\sigma' = (l, \beta\alpha, m) \quad \text{et} \quad -\sigma \oplus \sigma' = (l \oplus t, -\alpha \oplus \beta, t \oplus m).$$

Si $z = (t, \iota, t)$, on a $\sigma\sigma' \oplus z = (l \oplus t, \beta\alpha \oplus \iota, m \oplus t)$ et l'on peut supposer que $m \oplus t \simeq t_{r,A}''$, n' étant un entier convenable. Maintenant, il suffit tout simplement de montrer qu'il existe une déformation $-\sigma \oplus \sigma' \xrightarrow{\sim} \sigma\sigma' \oplus z$.

Or, en choisissant les isomorphismes $lB \rightarrow tB$ et $mB \rightarrow tB$, α et β peuvent être représentés par des matrices. Donc, $-\alpha \oplus \beta$ (resp. $\beta \alpha \oplus 1$) peut être représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\text{resp.} \begin{pmatrix} \beta \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

On sait qu'il existe une matrice $\mu \in E(n, B) \cap D(n, r, B)$ telle que

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \beta \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et ceci nous montre que $(\mu(X), 1)$ est la déformation cherchée, où $\mu(X)$ a été définie dans le lemme 3.7.

On a ainsi montré que $R_r(\varphi)$ est multiplicative.

D'après la propriété universelle du couple $(\Lambda_r(\varphi), K_r^D(\varphi))$, il existe un unique homomorphisme de groupes abéliens $h_r(\varphi) : K_r^D(\varphi) \rightarrow G_r(\varphi)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } L_r(\varphi) & \xrightarrow{R_r(\varphi)} & G_r(\varphi) \\ \Lambda_r(\varphi) \downarrow & \nearrow h_r(\varphi) & \\ K_r^D(\varphi) & & \end{array}$$

THÉORÈME 3.1. — *L'homomorphisme $h_r(\varphi) : K_r^D(\varphi) \rightarrow G_r(\varphi)$ est un isomorphisme de groupes abéliens.*

On définit une application $h'_r(\varphi) : G_r(\varphi) \rightarrow K_r^D(\varphi)$ par

$$h'_r(\varphi) (R_r(\varphi) (l, \alpha, m)) = \Lambda_r(\varphi) (l, \alpha, m).$$

Il suffit de démontrer que cette application est bien définie, car elle est l'inverse de $h_r(\varphi)$.

En effet, si $\sigma \sim \sigma'$, il existe des identités z et z' et des isomorphismes $\sigma \oplus z \simeq \tau$, $\sigma' \oplus z' \simeq \tau'$ tels que $\tau \simeq \tau'$. Donc,

$$\Lambda_r(\varphi) (\sigma) = \Lambda_r(\varphi) (\sigma \oplus z) = \Lambda_r(\varphi) (\tau) = \Lambda_r(\varphi) (\tau') = \Lambda_r(\varphi) (\sigma' \oplus z') = \Lambda_r(\varphi) (\sigma').$$

4. Suites exactes.

4.1. LE FONCTEUR Σ . — Dans ce paragraphe, on va montrer l'existence d'un foncteur Σ défini dans la catégorie $\mathcal{H}_c$ à valeurs dans la catégorie des suites exactes infinies de groupes abéliens.

Si $\varphi \in \text{Ob } \mathcal{H}_c$, $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$, on aura une suite exacte de groupes abéliens

$$\begin{aligned} \Sigma(\varphi) : \quad \dots \longrightarrow K_{r+1}(B) &\xrightarrow{\alpha_r} K_r^D(\varphi) \xrightarrow{\beta_r} K_r(A) \xrightarrow{K_r(\varphi)} K_r(B) \\ &\xrightarrow{\alpha_{r-1}} K_{r-1}^D(\varphi) \longrightarrow \dots \longrightarrow K_0^D(\varphi) \xrightarrow{\beta_0} K_0(A) \longrightarrow K_0(B), \end{aligned}$$

où les applications α_r et β_r seront définies par la suite.

On doit montrer que cette suite est exacte et que si $(f, g) : \varphi \rightarrow \varphi'$ est un morphisme de $\mathcal{H}_c$, $\varphi' : A' \rightarrow B'$, on a une application $\Sigma(f, g) : \Sigma(\varphi) \rightarrow \Sigma(\varphi')$ entre suites exactes, i. e. le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & K_{r+1}(B) & \xrightarrow{\alpha_r} & K_r^D(\varphi) & \xrightarrow{\beta_r} & K_r(A) & \xrightarrow{K_r(\varphi)} & K_r(B) & \xrightarrow{\alpha_{r-1}} & K_{r-1}^D(\varphi) & \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow K_{r+1}(g) & & \downarrow K_r^D(f, g) & & \downarrow K_r(f) & & \downarrow K_r(g) & & \downarrow K_{r-1}^D(f, g) & \\ \dots & \longrightarrow & K_{r+1}(B') & \xrightarrow{\alpha_r} & K_r^D(\varphi') & \xrightarrow{\beta_r} & K_r(A') & \xrightarrow{K_r(\varphi')} & K_r(B') & \xrightarrow{\alpha_{r-1}} & K_{r-1}^D(\varphi') & \longrightarrow \dots \end{array}$$

commute.

4.2. LES APPLICATIONS β_r . — On rappelle que les objets de $L_r(\varphi)$ sont les triples (l, α, l') , avec

$$l, l' \in \text{Ob } T_r(A), \quad z_{r,A}(l) = z_{r,A}(l')$$

et $\alpha : T_r(\varphi)(l) \rightarrow T_r(\varphi)(l')$ est un isomorphisme.

L'application $\bar{\beta}_r : \text{Ob } L_r(\varphi) \rightarrow K_r(A)$ définie par

$$\bar{\beta}_r(l, \alpha, l') = v_{r,A}(l) - v_{r,A}(l')$$

est additive, multiplicative et invariante par déformation. Il existe alors un unique homomorphisme de groupes abéliens $\beta_r : K_r^D(\varphi) \rightarrow K_r(A)$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Ob } L_r(\varphi) & \xrightarrow{\bar{\beta}_r} & K_r(A) \\ \downarrow \Lambda_r(\varphi) & \nearrow \beta_r & \\ K_r^D(\varphi) & & \end{array}$$

Un calcul direct de β_r , pour $r \geq 1$, peut être obtenu comme suit : on considère les isomorphismes $h_r(\varphi) : K_r^D(\varphi) \rightarrow G_r(\varphi)$ (cf. 3.5) et $\theta_r : K_r(A) \rightarrow P_r(A)$ (cf. 2.3) et l'on définit une application $\beta'_r : G_r(\varphi) \rightarrow P_r(A)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} K_r^D(\varphi) & \xrightarrow{\beta_r} & K_r(A) \\ h_r(\varphi) \downarrow & & \downarrow \theta_r \\ G_r(\varphi) & \xrightarrow{\beta'_r} & P_r(A) \end{array}$$

Un élément de $G_r(\varphi)$ est une classe de triples, parmi lesquelles il existe toujours une de la forme $(l, \alpha, t_{r,A}^n)$, avec $z_{r,A}(l) = z_{r,A}(t_{r,A}^n)$.

Si $s_r : \text{Ob } T_r(A) \rightarrow P'_r(A)$ est l'application définie dans 2.2,

$$s_r(l) \in P_r(A) \subset P'_r(A) \quad \text{pour tout } l \in \text{Ob } T_r(A).$$

En d'autres termes, on doit montrer que si $l = (l', \alpha_0, \alpha_1)$, il existe des objets triviaux t, t' avec $l' \oplus t \simeq t'$.

En effet, de $z_{r,A}(l) = z_{r,A}(t_{r,A}^n)$ et en rappelant que $t_{r,A}^n = (t_{r-1,A[X_r]}, \iota, \iota)$, on a

$$\nu_{r-1,A[X_r]}(\ell') = \nu_{r-1,A[X_r]}(t_{r-1,A[X_r]}^n).$$

Le lemme 2.3 nous dit alors qu'il existe un objet trivial t tel que

$$\ell' \oplus t \simeq t_{r-1,A[X_r]}^n \oplus t,$$

et l'on a ce qu'il nous faut.

Un calcul nous montre que $s_r(l)$ est indépendant du représentant $(l, \alpha, t_{r,A}^n)$ choisi, pour un élément de $G_r(\varphi)$. Ceci induit donc un homomorphisme de groupes abéliens $\beta'_r : G_r(\varphi) \rightarrow P_r(A)$. La commutativité du diagramme ci-dessus est maintenant triviale.

4.3. LES APPLICATIONS α_r . — Si $x \in P_{r+1}$, étant donné que $P_{r+1}(B)$ est canoniquement isomorphe à $K_{r+1}(B)$, on peut choisir un élément

$$(t_{r,B[X_r]}^n, \alpha, \beta) \in \text{Ob } T_{r+1}(B)$$

de telle sorte que l'on ait

$$s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^n, \alpha, \beta) = x.$$

Puisqu'on a fixé des isomorphismes $\tilde{\pi}_j(t_{r,B[X_r]}^n) \rightarrow t_{r,B}^n$ ($j = 0, 1$), alors

$$\alpha\beta^{-1} : t_{r,B}^n \rightarrow t_{r,B}^n$$

et l'on posera

$$\alpha_r(x) = \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha\beta^{-1}, t_{r,A}^n) \in K_r^D(\varphi).$$

Il faut démontrer que $\alpha_r : P_{r+1}(B) \rightarrow K_r^D(\varphi)$ est bien définie. Soit

$$s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^n, \alpha, \beta) = s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^{n'}, \alpha', \beta').$$

Étant donné qu'il s'agit de triples triviaux tels que

$$(t_{r,B[X_r]}^n, \alpha, \beta) \oplus t_{r+1,B}^k \simeq (t_{r,B[X_r]}^{n'}, \alpha', \beta') \oplus t_{r+1,B}^{k'},$$

il suffit de démontrer que

$$\Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha\beta^{-1}, t_{r,A}^n) = \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n \oplus t_{r,A}^k, (\alpha \oplus \iota)(\beta \oplus \iota)^{-1}, t_{r,A}^n \oplus t_{r,A}^k).$$

Or, $\Lambda_r(\varphi)$ étant additive, on a

$$\begin{aligned} & \Lambda_r(\varphi)((t_{r,A}^n, \alpha\beta^{-1}, t_{r,A}^n) \oplus (t_{r,A}^k, \iota, t_{r,A}^k)) \\ &= \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha\beta^{-1}, t_{r,A}^n) + \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^k, \iota, t_{r,A}^k) \\ &= \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha\beta^{-1}, t_{r,A}^n), \end{aligned}$$

car $\Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^k, \iota, t_{r,A}^k) = 0$, une fois qu'il s'agit d'une identité.

Deuxième chose à démontrer : si

$$(t_{r,B[X_r]}^n, \alpha, \beta) \simeq (t_{r,B[X_r]}^n, \alpha', \beta'),$$

alors

$$\Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha\beta^{-1}, t_{r,A}^n) = \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha'\beta'^{-1}, t_{r,A}^n).$$

En effet, désignons par (ψ, a) l'isomorphisme plus haut mentionné, i. e. $\psi : t_{r, B[X_r]}^n \rightarrow t_{r, B[X_r]}^n$ est un isomorphisme rendant commutatif les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} t_{r, B}^n & \xrightarrow{\psi(0)} & t_{r, B}^n \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ t_{r, B}^n & \xrightarrow{a} & t_{r, B}^n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} t_{r, B}^n & \xrightarrow{\psi(1)} & t_{r, B}^n \\ \beta \downarrow & & \downarrow \beta' \\ t_{r, B}^n & \xrightarrow{a} & t_{r, B}^n \end{array}$$

Il est clair que $\alpha' = a\alpha\psi(0)^{-1}$ et $\beta' = a\beta\psi(1)^{-1}$, donc

$$(t_{r, A}^n, \alpha'\beta'^{-1}, t_{r, A}^n) = (t_{r, A}^n, a\alpha\psi(0)^{-1}\psi(1)\beta^{-1}a^{-1}, t_{r, A}^n).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \Lambda_r(\varphi)(t_{r, A}^n, \alpha'\beta'^{-1}, t_{r, A}^n) &= \Lambda_r(\varphi)(t_{r, A}^n, aa^{-1}, t_{r, A}^n) \\ &+ \Lambda_r(\varphi)(t_{r, A}^n, \alpha\beta^{-1}, t_{r, A}^n) + \Lambda_r(\varphi)(t_{r, A}^n, \psi(0)^{-1}\psi(1), t_{r, A}^n), \end{aligned}$$

une fois que $\Lambda_r(\varphi)$ est multiplicative et que $K_r^n(\varphi)$ est abélien.

On voit que $\Lambda_r(\varphi)(t_{r, A}^n, aa^{-1}, t_{r, A}^n) = 0$, car $aa^{-1} = 1$ (identité). Montrons que

$$\Lambda_r(\varphi)(t_{r, A}^n, \psi(0)^{-1}\psi(1), t_{r, A}^n) = 0.$$

En effet, si l'on pose $\theta = \psi(0)^{-1}\psi(1) \in \text{Aut}(t_{r, B[X_r]}^n)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} t_{r, B}^n & \xrightarrow{\psi(0)^{-1}\psi(1)} & t_{r, B}^n \\ \text{id.} \downarrow & & \downarrow \theta(1) \\ t_{r, B}^n & \xrightarrow{\text{id.}} & t_{r, B}^n \end{array}$$

est commutatif et $\psi(0) = \text{id.}$ [donc $\psi(0) = \gamma B$ avec $\gamma = \text{id.}$]. Ceci nous montre que $(t_{r, A}^n, \psi(0)^{-1}\psi(1), t_{r, A}^n)$ se déforme en une identité et notre assertion est démontrée, car $\Lambda_r(\varphi)$ est invariante par déformation.

4.4. DÉMONSTRATION DE L'EXACTITUDE. — On a ainsi construit une suite de groupes abéliens

$$\dots \rightarrow K_{r+1}(A) \xrightarrow{K_{r+1}(\varphi)} K_{r+1}(B) \xrightarrow{\alpha_r} K_r^D(\varphi) \xrightarrow{\beta_r} K_r(A) \xrightarrow{K_r(\varphi)} K_r(B) \rightarrow \dots$$

et l'on veut démontrer que cette suite est exacte.

4.4.1. *Exactitude en $K_r(A) = P_r(A)$.* — a. Montrons que

$$\text{Im}(\beta_r) \subset \text{Ker}(K_r(\varphi))$$

ou encore, $K_r(\varphi) \cdot \beta_r = 0$. Ceci est évidemment équivalent à $K_r(\varphi) \cdot \beta'_r = 0$.

Or, si $x \in K_r^D(\varphi)$, $x = \Lambda_r(\varphi)(l, \alpha, t_{r, A}^n)$, donc

$$(K_r(\varphi) \cdot \beta'_r)(x) = K_r(\varphi)(s_r(l)) = s_r(lB).$$

Puisque $\alpha : lB \rightarrow t_{r,B}^n$ est un isomorphisme, alors

$$s_r(lB) = s_r(t_{r,B}^n) = 0.$$

b. On va montrer que $\text{Ker}(K_r(\varphi)) \subset \text{Im}(\beta_r)$. Considérons tout d'abord le cas $r > 0$. Soit $y \in K_r(A)$, $y = s_r(t_{r-1,A[X_r]}^n, \alpha, \beta)$ tel que $K_r(\varphi)(y) = 0$. On a

$$s_r(t_{r-1,A[X_r]}^n, \alpha B, \beta B) = 0.$$

Il existe alors un objet trivial $(t_{r-1,B[X_r]}^k, \iota, \iota)$ tel que

$$(t_{r-1,B[X_r]}^{n+k}, \alpha B \oplus \iota, \beta B \oplus \iota) \simeq (t_{r-1,B[X_r]}^{n+k}, \iota, \iota).$$

Soit θ cet isomorphisme et prenons

$$\sigma = ((t_{r-1,A[X_r]}^{n+k}, \alpha \oplus \iota, \beta \oplus \iota), \theta, (t_{r-1,A[X_r]}^{n+k}, \iota, \iota)) \in \text{Ob } L_r(\varphi).$$

Il est clair que $z = \Lambda_r(\varphi)(\sigma) \in K_r^b(\varphi)$ et, par suite,

$$\beta_r(z) = \bar{\beta}_r(\sigma) = s_r(t_{r-1,A[X_r]}^{n+k}, \alpha \oplus \iota, \beta \oplus \iota) = s_r(t_{r-1,A[X_r]}^n, \alpha, \beta) = y.$$

Si $r=0$ et si P est un A -module projectif de type fini tel que $s_0(P) = x \in K_0(A)$, alors $K_r(\varphi)(x) = 0$ entraîne l'existence de B -modules libres $B^k, B^{k'}$ tels que $(P \otimes_A B) \oplus B^k \simeq B^{k'}$. Soit θ cet isomorphisme. Si l'on prend $\sigma = (P \oplus A^k, \theta, A^{k'})$, alors $z = \Lambda_0(\varphi)(\sigma) \in K_0^b(\varphi)$, donc

$$\beta_0(z) = \bar{\beta}_0(\sigma) = s_0(P \oplus A^k) = s_0(P) = x.$$

4.4.2. *Exactitude en $K_r^b(\varphi)$.* — a. Montrons, tout d'abord, que $\beta_r \alpha_r = 0$. Or, si $x \in K_{r+1}(B)$, alors

$$x = s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^n, \alpha, \iota),$$

d'après le lemme 1.4. Donc,

$$\beta_r \alpha_r(x) = \beta_r \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha, t_{r,A}^n) = c_{r,A}(t_{r,A}^n) - c_{r,A}(t_{r,A}^n) = 0.$$

b. Soit $\sigma = (l, \alpha, t) \in \text{Ob } L_r(\varphi)$ tel que $\beta_r \Lambda_r(\varphi)(\sigma) = 0$. Alors,

$$0 = \beta_r \Lambda_r(\varphi)(\sigma) = s_r(l) - s_r(t) = s_r(l), \quad \text{car } s_r(t) = 0.$$

Il existe alors un objet trivial $t_{r,A}^k$ vérifiant $l \oplus t_{r,A}^k = t_{r,A}^{k'}$, k' étant un entier convenable. Ceci nous montre que

$$\begin{aligned} \Lambda_r(\varphi)(l, \alpha, t) &= \Lambda_r(\varphi)((l, \alpha, t) \oplus (t_{r,A}^k, \iota, t_{r,A}^k)) \\ &= \Lambda_r(\varphi)(l \oplus t_{r,A}^k, \alpha \oplus \iota, t \oplus t_{r,A}^k) \\ &= \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^{k'}, \alpha', t_{r,A}^{k'}) = \alpha_r(s_r(t_{r,B[X_r]}^{k'}, \alpha', \iota)), \end{aligned}$$

où l'on pose $\alpha' = \alpha \oplus \iota$.

4.4.3. *Exactitude en $K_{r+1}(B)$.* — a. Si $x \in K_{r+1}(A) = P_{r+1}(A)$, x est de la forme

$$x = s_{r+1}(t_{r,A[X_r]}^n, \alpha, \iota).$$

Alors

$$\begin{aligned}\alpha_r K_{r+1}(\varphi)(x) &= \alpha_r K_{r+1}(\varphi) s_{r+1}(t_{r,A[X_r]}^n, \alpha, \iota) \\ &= \alpha_r s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^n, \alpha B, \iota) = \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha B, t_{r,A}^n).\end{aligned}$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} t_{r,B}^n & \xrightarrow{\alpha B} & t_{r,B}^n \\ \alpha B \downarrow & & \downarrow \text{id.} \\ t_{r,B}^n & \xrightarrow{\text{id.}} & t_{r,B}^n \end{array}$$

étant commutatif, on en déduit que $(\alpha B, \text{id.})$ nous donnent un isomorphisme

$$(t_{r,A}^n, \alpha B, t_{r,A}^n) \rightarrow (t_{r,A}^n, \iota, t_{r,A}^n), \quad \text{donc} \quad \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \alpha B, t_{r,A}^n) = \Lambda_r(\varphi)(t_{r,A}^n, \iota, t_{r,A}^n) = 0.$$

Ceci nous montre que $\alpha_r K_{r+1}(\varphi)(x) = 0$.

b. Soit

$$y \in K_{r+1}(B), \quad y = s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^n, \beta, \iota),$$

tel que $\alpha_r(y) = 0$, i. e. tel que $R_r(t_{r,A}^n, \beta, t_{r,A}^n) = 0$.

On remarque que si $\omega \in \text{Ob } L_r(\varphi)$ est tel que $R_r(\omega) = 0$, il existe une identité (m, ι, m) , un isomorphisme

$$(3) \quad \omega \oplus (m, \iota, m) \xrightarrow{\theta\psi} (t_{r,A}^k, \gamma, t_{r,A}^k),$$

et une déformation

$$(t_{r,A}^k, \gamma, t_{r,A}^k) \xrightarrow{\sim} (t_{r,A}^k, \iota, t_{r,A}^k).$$

Mais, si l'isomorphisme (3) est vérifié, il doit être vérifié pour un $m = t_{r,A}^{k'}$ trivial et

$$R_r(\omega \oplus (t_{r,A}^{k'}, \iota, t_{r,A}^{k'})) = \alpha_r(y), \quad \text{car} \quad s_{r+1}((t_{r,B[X_r]}^n, \beta, \iota) \oplus (t_{r,B[X_r]}^{k'}, \iota, \iota)) = y.$$

Soit $x \in K_{r+1}(A)$. On peut écrire

$$x = s_{r+1}(t_{r,A[X_r]}^k, \theta^{-1}, \psi^{-1}),$$

donc

$$y + K_{r+1}(\varphi)(x) = s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^{k+k}, \beta \oplus \iota \oplus \theta^{-1}B, \iota \oplus \psi^{-1}B)$$

et le lemme de Whitehead nous montre que

$$s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^{2k}, \beta \oplus \iota \oplus \theta^{-1}B, \iota \oplus \psi^{-1}B) = s_{r+1}(t_{r,B[X_r]}^k, (\beta \oplus \iota) \cdot \theta^{-1}B, \psi^{-1}B).$$

D'autre part, la paire $(\text{id.}, \psi B)$ nous fournit un isomorphisme

$$(t_{r,B[X_r]}^k, (\beta \oplus \iota) \cdot \theta^{-1}B, \psi^{-1}B) \simeq (t_{r,B[X_r]}^k, \gamma, \iota),$$

comme on peut le voir, d'après la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} t_{r,B}^k & \xrightarrow{\beta \oplus \iota} & t_{r,B}^k \\ \theta B \downarrow & & \downarrow \psi B \\ t_{r,B}^k & \xrightarrow{\gamma} & t_{r,B}^k \end{array}$$

On a donc $y + K_{r+1}(\varphi)(x) = s_{r+1}(t_{r, B[X_r]}^k, \gamma, \iota)$. De plus,

$$(t_{r, A}^k, \gamma, t_{r, A}^k) \xrightarrow{\sim} (t_{r, A}^k, \iota, t_{r, A}^k).$$

Il existe donc des automorphismes $\Gamma \in \text{Aut}(t_{r, B[X_r]}^k)$ et $\lambda, \rho \in \text{Aut}(t_{r, A}^k)$, avec $\rho B = \Gamma(o)$ et tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} t_{r, B}^k & \xrightarrow{\gamma} & t_{r, B}^k \\ \lambda B \downarrow & & \downarrow \Gamma(1) \\ t_{r, B}^k & \xrightarrow{\text{id.}} & t_{r, B}^k \end{array}$$

soit commutatif. Puisque la paire $(\Gamma, \text{id.})$ nous fournit un isomorphisme

$$(t_{r, B[X_r]}^k, \iota, \gamma^{-1}) \simeq (t_{r, B[X_r]}^k, \rho^{-1} B, \lambda^{-1} B),$$

alors

$$\begin{aligned} y + K_{r+1}(\varphi)(x) &= s_{r+1}(t_{r, B[X_r]}^k, \gamma, \iota) = s_{r+1}(t_{r, B[X_r]}^k, \iota, \gamma^{-1}) \\ &= s_{r+1}(t_{r, B[X_r]}^k, \rho^{-1} B, \lambda^{-1} B) = s_{r+1}(t_{r, B[X_r]}^k, \lambda B, \rho B). \end{aligned}$$

Si l'on pose $y' = y + K_{r+1}(\varphi)(x)$ et $z = s_{r+1}(t_{r, A[X_r]}^k, \lambda, \rho)$, alors

$$y' = K_{r+1}(\varphi)(z), \quad \text{donc} \quad y = y' - K_{r+1}(\varphi)(x) \in \text{Im}(K_{r+1}(\varphi)).$$

4.5. LA DEUXIÈME SUITE EXACTE. — Les propriétés fonctorielles de Σ sont évidentes. Si l'on considère le diagramme commutatif de morphismes de $\mathcal{R}_c$,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow \mu \quad \swarrow \xi & \\ & F & \end{array}$$

on a, dans $\mathcal{H}_c$, les morphismes $(\varphi, \text{id.}) : \mu \rightarrow \xi$ et $(\text{id.}, \xi) : \varphi \rightarrow \mu$. Ceci nous donne donc les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & K_{r-1}(B) & \xrightarrow{\alpha_r^\varphi} & K_r^D(\varphi) & \xrightarrow{\beta_r^\varphi} & K_r(A) & \xrightarrow{K_r(\varphi)} K_r(B) \longrightarrow \dots \\ & \downarrow K_{r+1}(\xi) & & \downarrow K_r^D(\text{id.}, \xi) & & \downarrow \text{id.} & & \downarrow K_r(\xi) \\ \dots \longrightarrow & K_{r+1}(F) & \xrightarrow{\alpha_r^\mu} & K_r^D(\mu) & \xrightarrow{\beta_r^\mu} & K_r(A) & \xrightarrow{K_r(\mu)} K_r(F) \longrightarrow \dots \\ & \downarrow \text{id.} & & \downarrow K_r^D(\varphi, \text{id.}) & & \downarrow K_r(\varphi) & & \downarrow \text{id.} \\ \dots \longrightarrow & K_{r+1}(F) & \xrightarrow{\alpha_r^\mu} & K_r^D(\mu) & \xrightarrow{\beta_r^\mu} & K_r(A) & \xrightarrow{K_r(\mu)} K_r(F) \longrightarrow \dots \\ & \downarrow \text{id.} & & \downarrow K_r^D(\varphi, \text{id.}) & & \downarrow K_r(\varphi) & & \downarrow \text{id.} \\ \dots \longrightarrow & K_{r+1}(F) & \xrightarrow{\alpha_r^\xi} & K_r^D(\xi) & \xrightarrow{\beta_r^\xi} & K_r(B) & \xrightarrow{K_r(\xi)} K_r(F) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Si l'on pose $\delta_r = \alpha_{r-1}^\varphi \cdot \beta_r^\xi : K_r^D(\xi) \rightarrow K_{r-1}^D(\varphi)$, on obtient la suite de groupes abéliens

$$\dots \longrightarrow K_{r+1}^D(\xi) \xrightarrow{\delta_{r+1}} K_r^D(\varphi) \xrightarrow{K_r^D(\text{id.}, \xi)} K_r^D(\mu) \xrightarrow{K_r^D(\varphi, \text{id.})} K_r^D(\xi) \xrightarrow{\delta_r} K_{r-1}^D(\varphi) \longrightarrow \dots$$

et l'on veut démontrer qu'elle est exacte.

La seule chose à vérifier c'est que l'application composée

$$K_r^p(\varphi) \rightarrow K_r^p(\mu) \rightarrow K_r^p(\xi)$$

est nulle, les autres vérifications de la démonstration étant des conséquences triviales des deux diagrammes ci-dessus en appliquant la méthode du « diagram chasing ».

Si $x \in K_r^p(\varphi)$, on peut écrire

$$x = \Lambda_r(\varphi)(m, 0, m'), \quad \text{donc} \quad K_r^p(\text{id.}, \xi)(x) = \Lambda_r(\mu)(m, T_r(\xi)(0), m').$$

Soit

$$z = K_r(\varphi, \text{id.}) \cdot K_r^p(\text{id.}, \xi)(x) = \Lambda_r(\xi)(T_r(\varphi)(m), T_r(\xi)(0), T_r(\varphi)(m')).$$

Celui-ci est un triple de la forme $(m_1, \theta_1 F, m'_1)$, donc la paire $(\theta_1, \text{id.})$ nous fournit un isomorphisme $(m_1, \theta_1 F, m'_1) \simeq (m'_1, \iota, m'_1)$. Il s'ensuit que

$$z = \Lambda_r(\xi)(m'_1, \iota, m'_1) = 0.$$

4.6. LA TROISIÈME SUITE EXACTE. — Considérons la fibration naturelle $\Phi : \mathcal{H}_c \rightarrow \mathcal{H}_c$ donnée par $\Phi(\mu) = \text{but de } \mu$. La fibre $\mathcal{H}_c^F$ au-dessus de $F \in \text{Ob } \mathcal{R}_c$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}_c$ dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{R}_c$ ayant F pour but et, si $\mu, \xi \in \text{Ob } \mathcal{H}_c^F$, alors $\varphi \in \text{Hom}(\mu, \xi)$ si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow \mu & \swarrow \xi \\ & F & \end{array}$$

est commutatif.

Ceci est exactement la traduction de la théorie des espaces avec point base.

Si l'on pose $K_r^\mu(A) = \text{Ker}(K_r(\mu))$, on a la suite exacte de groupes abéliens

$$K_{r+1}(F) \rightarrow K_r^p(\mu) \rightarrow K_r^\mu(A) \rightarrow 0.$$

Donc la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & K_{r+1}(F) & \xleftarrow{\text{id.}} & K_{r+1}(F) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & K_r^p(\varphi) & \rightarrow & K_r^p(\mu) & \rightarrow & K_r^p(\xi) \rightarrow K_{r-1}^p(\varphi) \rightarrow \dots \\ & & \searrow & & \downarrow & & \swarrow \\ & & & & K_r^\mu(A) & \rightarrow & K_r^\xi(B) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

nous montre l'exactitude de la suite

$$\dots \rightarrow K_r^D(\varphi) \rightarrow K_r^E(A) \rightarrow K_r^E(B) \rightarrow K_{r-1}^D(\varphi) \rightarrow \dots,$$

où les flèches sont évidentes.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. BASS, *K-theory and stable algebra*, Publ. Math. I. H. E. S., 22, 1964, p. 489-544.
- [2] H. BASS, A. HELLER et R. G. SWAN, *The Whitehead group of a polynomial extension*
 Publ. Math. I. H. E. S., 22, 1964, p. 61-80.

(Manuscrit reçu le 20 février 1968).