ZENON MOSZNER

Sur une notion de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 83, nº 3 (1966), p. 191-200
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_3_191_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 83, 1966, p. 191 à 200.

SUR UNE NOTION DE LA RARÉFACTION D'UN ENSEMBLE DE MESURE NULLE

PAR M. ZENON MOSZNER.

INTRODUCTION. — Dans son livre [1], Borel a introduit (p. 163-199, 294-295 et 301) trois notions de la raréfaction d'un ensemble linéaire de mesure nulle. L'objet de cette Note sont les résultats (signalés dans la Note [4]) concernant la première notion de la raréfaction, légèrement modifiée par M. M. Fréchet dans sa Note [2].

NOTIONS. — La notion de la raréfaction en question se base sur la comparaison des rapidités des convergences de deux séries convergentes aux termes positifs $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu$.

On dit, d'accord avec Fréchet [2], que *la série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ *converge plus rapidement que la série* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ $\left[\text{en symbole Rap}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu\right) > \text{Rap}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu\right)\right]$, si

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} v_\nu}{\sum_{\nu=n}^{\infty} u_\nu} > 1.$$

Soit E un ensemble linéaire de mesure lebesguienne nulle. Nous comprenons par *suite majorante* de E une suite d'intervalles ouverts $\{\mathcal{J}_\nu\}$ dont la série des longueurs $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\mathcal{J}_\nu|$ est convergente et qui recouvre l'ensemble E de manière que chaque point de E appartienne à une infinité d'intervalles de $\{\mathcal{I}_\nu\}$. Borel a démontré qu'il existe, pour chaque ensemble E de mesure nulle et seulement pour un ensemble de cette sorte, des suites majorantes de E.

Enfin E et F étant de mesure nulle l'*ensemble* E *est dit plus raréfié que l'ensemble* F (en symbole $\operatorname{Rar} E > \operatorname{Rar} F$) s'il existe une suite majorante de E dont la série des longueurs converge plus rapidement que la série des longueurs de toute suite majorante de F. Si la relation $\operatorname{Rar} F > \operatorname{Rar} E$ n'a pas lieu, on dit que *l'ensemble* E *est au moins si raréfié que* F (en symbole $\operatorname{Rar} E \geqq \operatorname{Rar} F$).

Si ni $\operatorname{Rar} E > \operatorname{Rar} F$ ni $\operatorname{Rar} F > \operatorname{Rar} E$, nous disons que *les ensembles* E *et* F *ont le même ordre de raréfaction.*

Évidemment :

I. *Si* $E \subset F$, *on a* $\operatorname{Rar} E \geqq \operatorname{Rar} F$.

La classe des ensembles de raréfaction ω^{-1}. — L'ensemble ayant le même ordre de raréfaction qu'un ensemble réduit à un point, sera appelé, pour abréger, l'ensemble de raréfaction ω^{-1} (1).

Évidemment pour qu'un ensemble E soit de raréfaction ω^{-1} il faut et il suffit qu'il existe, pour chaque série convergente $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ aux termes positifs, une suite majorante $\{\mathcal{I}_\nu\}$ de E telle que la relation

$$\operatorname{Rap}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu\right) > \operatorname{Rap}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\mathcal{I}_\nu|\right)$$

n'a pas lieu.

Il est évident que

II. *Tout sous-ensemble d'un ensemble de raréfaction* ω^{-1} *est aussi un ensemble de raréfaction* ω^{-1}.

Désignons par K la famille des ensembles contenus dans les ensembles du type F_σ et de mesure nulle. Il est facile à démontrer qu'un ensemble appartient à K si et seulement s'il est la réunion d'une famille au plus dénombrable d'ensembles dont la mesure de Peano-Jordan est nulle (ou, en d'autres termes, d'ensembles dont les fermetures sont de mesure nulle).

Est exact le théorème suivant :

III. *Chaque ensemble qui appartient à* K *est de raréfaction* ω^{-1}.

---

(1) Le symbole $\frac{1}{\omega}$ (que nous écrirons, pour plus de commodité, sous la forme ω^{-1}) est introduit par Borel dans le livre [1] (p. 187), où il donne une représentation symbolique de la raréfaction. Pour cette représentation, *voir* aussi la Note [3] de M. Fréchet.

Démonstration. — D'après II, il suffit de démontrer que chaque ensemble E du type F_σ et de mesure zéro est de raréfaction ω^{-1} (²). Posons

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu,$$

où E_ν est un ensemble fermé et borné et où chaque ensemble E_ν se répète dans la suite $E_1, E_2, \ldots$ une infinité de fois. Évidemment les ensembles E_ν sont de mesure Peano-Jordan nulle.

Prenons à présent en considération une série convergente $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$ aux termes positifs.

Nous pouvons définir par l'induction une suite infinie croissante de nombres entiers $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n \ldots$ et une suite infinie d'intervalles ouverts $\{\mathcal{J}_i\}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ tels que

$$E_{n+1} \subset \left(\bigcup_{i=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} \mathcal{J}_i \right) \quad \text{et} \quad \sum_{i=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} |\mathcal{J}_i| < u_{\alpha_n+1} \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots.$$

Il en résulte que la suite $\{\mathcal{J}_i\}$ est une suite majorante de E et, de plus, que

$$\sum_{i=\alpha_n+1}^{\infty} |\mathcal{J}_i| \leqq \sum_{i=\alpha_n+1}^{\infty} u_i \quad \text{pour chaque } n.$$

Nous aurons

$$\frac{\sum_{i=\alpha_n+1}^{\infty} |\mathcal{J}_i|}{\sum_{i=\alpha_n+1}^{\infty} u_i} \leqq 1;$$

alors

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} |\mathcal{J}_\nu|}{\sum_{\nu=n}^{\infty} u_\nu} \leqq 1;$$

donc $\operatorname{Rap}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu\right) > \operatorname{Rap}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |\mathcal{J}_\nu|\right)$ n'a pas lieu. Le théorème III est ainsi démontré.

(²) Ce théorème est démontré par M. Choquet dans une lettre à M. Fréchet et, simultanément et indépendamment par moi (*voir* [3], p. 2034).

Pour expliquer en quelque sorte la structure des ensembles de la classe K, considérons certaines familles apparentées, à savoir la famille H des ensembles dont les fermetures sont de mesure nulle, la famille M des ensembles qui sont du type F_σ et de mesure nulle et la famille R des ensembles de 1^re catégorie et de mesure nulle.

Évidemment :

$$\left.\begin{matrix} M \\ H \end{matrix}\right\} \subset H \cup M \subset K \subset R \quad (^3).$$

Nous allons démontrer qu'*aucune des inclusions précédentes ne peut être remplacée par l'identité.*

En effet, remarquons qu'il existe un sous-ensemble Z_1 de l'ensemble ternaire de Cantor C, qui n'est pas du type F_σ, d'où $M \neq H \cup M$.

L'ensemble Z_2 de tous les nombres rationnels de l'ensemble $[0, 1] \setminus C$ appartenant à M, n'appartient pas à H. Il en résulte que $H \neq H \cup M$.

Considérons à présent l'ensemble $Z_1 \cup Z_2$. Cet ensemble appartient à K sans appartenir ni à H ni à M, donc $K \neq H \cup M$.

Pour construire un ensemble appartenant à R qui n'appartient pas à K, désignons par $C^\star$ un ensemble parfait non dense tel que tout entourage dans $C^\star$ de chaque point de $C^\star$ est de mesure positive. Considérons un sous-ensemble dénombrable $\mathcal{D}$ de $C^\star$, dense dans $C^\star$. Il existe un ensemble Z_3 du type G_δ, de mesure nulle, pour lequel $\mathcal{D} \subset Z_3 \subset C^\star$. L'ensemble Z_3 est non dense, donc $Z_3 \in R$. Admettons pour un instant que $Z_3 \in K$, c'est-à-dire qu'il existe des ensembles F_ν fermés, de mesures nulles, pour lesquels $Z_3 \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ où $F_\nu \subset C^\star$ pour $\nu = 1, 2, \ldots$. Il résulte de la définition de $C^\star$ que tout ensemble F_ν est non dense dans $C^\star$. Ainsi l'ensemble $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ est de 1^re catégorie dans $C^\star$. Puisque Z_3 est du type G_δ, l'ensemble $C^\star \setminus Z_3$ est du type F_σ et de plus c'est un ensemble frontière dans $C^\star$. Il en résulte que l'ensemble $C^\star \setminus Z_3$ est de 1^re catégorie dans $C^\star$. Comme $C^\star = (C^\star \setminus Z_3) \cup \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu \right)$, l'ensemble $C^\star$ est un espace complet de 1^re catégorie sur soi-même, contrairement au théorème de Baire (4).

(3) D'après la relation $H \subset K$, tout ensemble de la famille H est de raréfaction ω^{-1}. Ce théorème est donné par M. Fréchet dans [3].

(4) M. E. Marczewski, à qui j'exprime ma reconnaissance pour les remarques à cette Note, a remarqué que si nous décomposons l'ensemble $C^\star$ en deux ensembles l'un de 1^re catégorie sur $C^\star$ et le deuxième de mesure nulle, ce dernier appartient à la famille $R \setminus K$.

La question suivante se pose :

Est-ce que tout ensemble de la classe R est de raréfaction ω^{-1} ?

M. L. Urbanck a démontré il n'y a pas longtemps qu'on ne change pas de la raréfaction de l'ensemble si l'on ajoute à cet ensemble un ensemble de raréfaction ω^{-1}. Il en résulte que la famille des ensembles de raréfaction ω^{-1} est additive. Est-elle σ-additive ?

PROBLÈME FONDAMENTAL. — D'après le théorème III tous les ensembles fermés de mesure zéro, n'ayant pas la même dimension de Hausdorff, ont le même ordre de raréfaction ω^{-1}. Il en résulte qu'on ne peut pas prendre la notion de raréfaction en question comme base pour classifier des ensembles de mesure nulle. Néanmoins, il semble intéressant de donner la réponse au problème fondamental, est-ce qu'il existe des couples d'ensembles dont l'un serait plus raréfié que l'autre, en particulier de trouver un ensemble moins raréfié que l'ensemble réduit à un point (qui est évidemment le plus raréfié possible) ? Cet ensemble, d'après ce qui précède, ne peut pas appartenir à la classe K, ayant en même temps la mesure nulle. Puisqu'il existe, pour chaque ensemble Z de mesure nulle, un ensemble $\mathcal{G}$ du type G_δ, de mesure nulle et tel que $Z \subset \mathcal{G}$, alors il faut chercher parmi les ensembles de mesure nulle, du type G_δ, n'appartenant pas à K. Ces conditions sont satisfaites par exemple par l'ensemble Z_3 défini à la page précédente (appartenant à R) ou par tout ensemble Z_4 du type G_δ, de mesure nulle, qui contient l'ensemble de tous les nombres rationnels du segment $[0, 1]$ (qui n'appartient pas à R, ni, à plus forte raison, à K). L'ensemble Z_4 est peut-être moins raréfié que l'ensemble réduit à un seul point, mais je ne sais pas le démontrer. Le problème fondamental de la théorie de la raréfaction reste alors encore ouvert.

REMARQUES COMPLÉMENTAIRES.

1. Borel dans son livre [1] (p. 165-166 et 193-198) a donné quelques méthodes qui — à son avis — permettent de construire des ensembles de plus en plus raréfiés. Pour la notion de raréfaction qui est l'objet de cette Note, ses affirmations ne sont pas, en général, exactes.

La méthode première de la raréfaction de Borel est la suivante. Prenant une série convergente à termes positifs $s = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu$, considérons le nombre

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu u_\nu, \qquad \text{ou} \quad a_\nu = 0 \qquad \text{ou} \quad a_\nu = 1.$$

Désignons par E l'ensemble de tous ces y et considérons seulement ces séries s, pour lesquelles les ensembles E ont une mesure nulle.

Il existe des séries s, pour lesquelles les ensembles E ont une mesure nulle, par exemple, si l'on prend $u_\nu = \frac{2}{3^\nu}$, on obtient pour E l'ensemble ternaire de Cantor et il existe des séries pour lesquelles les ensembles E n'ont pas de mesure nulle, par exemple $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$. Il serait intéressant de donner des conditions suffisantes et nécessaires concernant la série s, pour que l'ensemble E soit de mesure nulle.

Borel affirme ([1], p. 166) : « on obtiendra des ensembles de mesure nulle de plus en plus raréfiés en prenant pour s une série de convergence de plus en plus rapide ».

Cette affirmation n'est pas exacte. En effet l'ensemble E, étant l'image continue de l'ensemble ternaire de Cantor par la fonction

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2a_\nu}{3^\nu} \to \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu u_\nu \right|$$

est fermé et borné. Il en résulte que s'il a la mesure nulle, c'est un ensemble de la classe M, il est donc de raréfaction ω^{-1}. L'ensemble E est contenu dans la réunion de 2^n segments, dont les longueurs sont $\leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\nu$, donc si

$$(\bigstar) \qquad \liminf_{n\to\infty} \left(2^n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} u_\nu \right) = 0,$$

l'ensemble E est de mesure nulle, alors il est de raréfaction ω^{-1} (5). En particulier si l'on prend $u_\nu = \frac{1}{3^\nu}, \frac{1}{4^\nu}, \ldots$ on obtiendra des séries de convergence de plus en plus rapide, pour lesquelles les ensembles E en question sont du même ordre de raréfaction ω^{-1} et alors ne sont pas de plus en plus raréfiés.

2. On peut déduire de l'ensemble E de mesure nulle, construit comme plus haut, un ensemble F partout dense dans l'intervalle $[0, s]$ en procédant comme suit ([1], p. 157-158; nous verrons que par ce procédé nous ne recevons pas d'ensemble moins raréfié que E). Dans chacun des intervalles contigus Δ à l'ensemble E, nous définirons un ensemble homothétique à l'ensemble E, le rapport d'homothétie étant égal au rapport de la longueur de l'intervalle Δ à la somme de la série s. Désignons par $\mathcal{G}_1$ la classe de ces ensembles et par $\mathcal{G}_1^*$ la famille des intervalles contigus aux ensembles de la classe $\mathcal{G}_1$. On placera ensuite dans tout intervalle de $\mathcal{G}_1^*$ un ensemble

(5) J'ai signalé ce résultat dans la Note [4] sous des suppositions plus fortes. C'est M. C. Ryll-Nardzewski qui a remarqué qu'on peut les remplacer par ($\bigstar$).

homothétique à l'ensemble E et l'on désignera par $\mathcal{G}_2$ la classe de ces ensembles et par $\mathcal{G}_2^*$ la famille des intervalles contigus aux ensembles de la classe $\mathcal{G}_2$. Au moyen d'ensembles homothétiques à E placés dans chacun des intervalles de la famille $\mathcal{G}_2^*$, on définira une nouvelle classe d'ensembles $\mathcal{G}_3$ et ainsi de suite. Prenons

$$F = E \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{Z \in \mathcal{G}_n} Z \right) \quad (^6).$$

On voit que l'ensemble F est dense dans l'intervalle $[0, s]$. Remarquons que l'ensemble F n'est pas moins raréfié que l'ensemble E. En effet, l'ensemble E et de là tous les ensembles Z des classes $\mathcal{G}_n$, appartiennent à la famille K. La famille K étant σ-additive et les classes $\mathcal{G}_n$ étant dénombrables, l'ensemble F est, de même que l'ensemble E, de raréfaction ω^{-1}.

3. Passons maintenant à la méthode d'itération, la deuxième méthode de la raréfaction de Borel ([1], p. 193-198). Pour tout ensemble E de mesure nulle ayant la puissance du continu, on peut lui faire correspondre, d'une infinité de manières univoques et réciproques, tous les points du segment $[0, 1]$. Par suite, à tout sous-ensemble de ce segment et, en particulier, à tout ensemble de mesure nulle E^* correspondra un sous-ensemble E_1 de E. Borel affirme ([1], p. 193) que « cet ensemble E_1 sera plus raréfié que E ». Si E^* est identique à E, on dira que E_1 est l'itéré premier de E. On définit les itérés successifs E_n de E par induction, E_2 comme l'itéré premier de E_1, etc. Remarquons que si nous appliquons cette méthode à l'ensemble E de mesure nulle, de la puissance du continu et de raréfaction ω^{-1} (il existe un tel ensemble d'après III), nous recevrons l'ensemble E_1 du même ordre de raréfaction, alors pas un ensemble plus raréfié, même si nous supposons que la correspondance dans la méthode d'itération ne soit pas « trop singulière » au sens de Borel ([1], p. 193), c'est-à-dire qu'elle est telle qu'à tout intervalle compris dans $[0, 1]$ doit correspondre un sous-ensemble de E dont la raréfaction est du même ordre que celle de E. En particulier, l'ensemble Z des points dont l'abscisse s'écrira avec les seuls chiffres 0 et 3 dans le système de base 4 (qui est considéré par Borel dans [1] à la page 194) est de raréfaction ω^{-1}, donc tous ses itérés successifs ont le même ordre de raréfaction.

4. D'après ce qui précède l'échelle des raréfactions en question n'est pas assez serrée au point de vue intuitif. Il se pose alors le problème de chercher des modifications plus commodes de cette notion.

---

(6) Par exemple, si E est l'ensemble ternaire de Cantor, nous recevons pour F l'ensemble ternaire de Cantor « complété » ([5], p. 165), c'est-à-dire l'ensemble des nombres qui, écrits dans le système ternaire, comportent un nombre limité de chiffres 1.

Par exemple, on peut prendre en considération les définitions suivantes [7] :

Rar E $\geqq$ Rar F, s'il existe, pour toute suite des intervalles $\{\mathfrak{J}_n\}$ recouvrant F, une suite des intervalles $\{\mathcal{J}_n\}$ recouvrant E et telle que $|\mathcal{J}_n| \leqq |\mathfrak{J}_n|$ pour tout n;

Rar E $>$ Rar F, si Rar E $\geqq$ Rar F, mais Rar E $\leqq$ Rar F n'a pas lieu.

Dans la théorie de la raréfaction en ce sens, il existe d'une manière évidente des couples d'ensembles (même de mesures nulles) pour lesquels l'un de ses éléments est plus raréfié que l'autre (par exemple le couple des ensembles tels que l'un se réduit à un seul point et l'autre est l'ensemble ternaire de Cantor). Cela résulte du *lemme* suivant :

Soit Z l'ensemble du type de Cantor sur l'intervalle fermé $\mathcal{J}$, c'est-à-dire l'ensemble qu'on obtient sur le segment $\mathcal{J}$ de la manière analogue que l'ensemble ternaire de Cantor sur l'intervalle [0, 1]. On ne peut pas recouvrir Z par une suite d'intervalles ouverts $|\mathcal{J}_n|$ pour lesquels $|\mathcal{J}_n| \leqq \frac{|\mathcal{J}_n|}{3^n}$ pour tout n.

En effet, supposons qu'ait lieu le contraire. L'ensemble Z étant compact, il existe donc un entier positif m tel que $Z \subset \left(\bigcup_{\nu=1}^{m} \mathcal{J}_\nu\right)$. Nous allons démontrer que cela est impossible. Remarquons d'abord qu'il est impossible que : pour certains $a_\nu = 0$ ou $a_\nu = 2$ le nombre

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu |\mathcal{J}|}{3^\nu} = x_1 \in \mathcal{J}_1,$$

et pour certains $b_\nu = 0$ ou $b_\nu = 2$ le nombre

$$\frac{2|\mathcal{J}|}{3} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{b_\nu |\mathcal{J}|}{3^\nu} = y_1 \in \mathcal{J}_1$$

puisque la distance de x_1 et y_1 est $\geqq \frac{|\mathcal{J}|}{3}$, l'intervalle $\mathcal{J}_1$ est ouvert et $|\mathcal{J}_1| \leqq \frac{|\mathcal{J}|}{3}$. Il en résulte qu'il existe un entier $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_1 = 2$ tel que chaque nombre de la forme $\frac{\alpha_1 |\mathcal{J}|}{3} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu |\mathcal{J}|}{3^\nu}$, pour tous les $a_\nu = 0$ ou $a_\nu = 2$, appartient à Z, sans appartenir à $\mathcal{J}_1$.

---

(7) C'est M. Choquet qui a donné ces définitions dans une lettre à M. Fréchet.

Ensuite, il est impossible que :
pour certains $a_\nu = 0$ ou $a_\nu = 2$, le nombre

$$\frac{\alpha_1 |\mathfrak{I}|}{3} + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{a_\nu |\mathfrak{I}|}{3^\nu} = x_2 \in \mathfrak{I}_2,$$

et pour certains $b_\nu = 0$ ou $b_\nu = 2$, le nombre

$$\frac{a_1 |\mathfrak{I}|}{3} + \frac{2 |\mathfrak{I}|}{3} + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{b_\nu |\mathfrak{I}|}{3^\nu} = y_2 \in \mathfrak{I}_2,$$

puisque la distance de x_2 et y_2 est $\geqq \frac{|\mathfrak{I}|}{3^2}$, l'intervalle $\mathfrak{I}_2$ est ouvert et $|\mathfrak{I}_2| \leqq \frac{|\mathfrak{I}|}{3^2}$. Il existe donc un entier $\alpha_2 = 0$ ou $\alpha_2 = 2$ tel que chaque nombre de la forme $\frac{\alpha_1 |\mathfrak{I}|}{3} + \frac{\alpha_2 |\mathfrak{I}|}{3^2} + \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{a_\nu |\mathfrak{I}|}{3^\nu}$, pour tous les $a_\nu = 0$ ou $a_\nu = 2$, appartient à Z, sans appartenir ni à $\mathfrak{I}_1$ ni à $\mathfrak{I}_2$. En procédant analogiquement pour $\mathfrak{I}_3, \mathfrak{I}_4, \ldots$, nous voyons que la relation $Z \subset \left(\bigcup_{\nu=1}^{m} \mathfrak{I}_\nu \right)$ est impossible, le lemme est donc démontré.

Mais la définition de la raréfaction proposée plus haut n'est pas commode, car il existe deux ensembles Z_1 et Z_2 pour lesquels ni $\operatorname{Rar} Z_1 \geqq \operatorname{Rar} Z_2$ ni $\operatorname{Rar} Z_2 \geqq \operatorname{Rar} Z_1$.

En effet, considérons les deux ensembles suivants : l'ensemble $Z_1 = C$ ternaire de Cantor et l'ensemble Z_2 qui est la somme de deux ensembles Z_{21} et Z_{22} du type de Cantor sur les intervalles $\left[-\frac{1}{9}, 0\right]$ et $\left[2, \frac{19}{9}\right]$. On voit évidemment qu'il existe une suite $\{\mathfrak{J}_n\}$ des intervalles de longueurs $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$ qui couvre Z_2. D'après le lemme, il n'existe pas pour la suite $\{\mathfrak{J}_n\}$ une suite $\{\mathfrak{I}_n\}$ recouvrant Z_1 et telle que $|\mathfrak{I}_n| \leqq \frac{1}{3^n}$ pour tout n. Dès lors, la relation $\operatorname{Rar} Z_1 \geqq \operatorname{Rar} Z_2$ n'a pas lieu. Inversement, il existe une suite $\{\overline{\mathfrak{I}}_n\}$ des intervalles de longueurs $1, \frac{1}{9 \cdot 3}, \ldots, \frac{1}{9 \cdot 3^{n-1}}, \ldots$ qui couvre Z_1. Supposons pour un instant qu'il existe une suite $\{\overline{\mathfrak{J}}_n\}$ d'intervalles recouvrant Z_2 et telle que $|\overline{\mathfrak{J}}_n| \leqq |\overline{\mathfrak{I}}_n|$. L'intervalle $\overline{\mathfrak{J}}_1$ ne peut pas avoir de points communs avec les deux ensembles Z_{21} et Z_{22}. Il en résulte que les intervalles $\overline{\mathfrak{J}}_2, \overline{\mathfrak{J}}_3, \ldots$ doivent couvrir Z_{21} ou bien Z_{22}, mais cela est impossible d'après le lemme. Dès lors, la relation $\operatorname{Rar} Z_2 \geqq \operatorname{Rar} Z_1$ n'a pas lieu non plus.

5. Les Notes [2] et [3] de M. Fréchet furent élargies par lui-même dans le Mémoire [5]. Au sujet de la comparaison des rapidités des convergences des séries, *voir* aussi la Note [6].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. Borel, *Éléments de la théorie des ensembles*, Albin Michel, Paris, 1949.

[2] M. Fréchet, *Une généralisation de la raréfaction* (*Comptes rendus*, t. 252, 1961, p. 1245-1250).

[3] M. Fréchet, *Sur la comparaison des raréfactions* (*Comptes rendus*, t. 255, 1962, p. 2033-2036).

[4] Z. Moszner, *Remarques sur une notion de la raréfaction d'un ensemble de mesure nulle* (*Comptes rendus*, t. 256, 1963, p. 3556-3559).

[5] M. Fréchet, *Les probabilités nulle et la raréfaction* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, Paris, 3e série, t. 80, 1963, p. 139-172).

[6] Z. Moszner, *Sur la transitivité des relations de comparaison des convergences des séries* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, 87, 1963, p. 57-72).