MAURICE FRÉCHET

L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un semi-espace de Banach. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 80, nº 2 (1963), p. 135-137

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_2_135_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 80, 1963, p. 135 à 137.

L'ESPACE DONT CHAQUE ÉLÉMENT EST UNE COURBE N'EST QU'UN SEMI-ESPACE DE BANACH

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

SECONDE PARTIE.

RÉSUMÉ.

Nous abandonnons les démonstrations figurant aux pages 265-270 de notre précédent Mémoire (1) pour les remplacer par de nouvelles démonstrations, aboutissant d'ailleurs *aux mêmes conclusions*.

INTRODUCTION. — Dans notre Mémoire précédent (1) nous avons étudié les espaces dont chaque élément est une courbe et nous y avons généralisé les notions de norme, d'élément neutre, de produit par scalaire et de somme.

Le résultat essentiel de ce Mémoire est, en abrégé, le suivant : l'espace des courbes est un « semi-espace de Banach ». C'est-à-dire qu'il vérifie les conditions définissant un espace de Banach, sauf les conditions 3°, 4° rappelées plus loin, lesquelles sont remplacées par deux axiomes plus faibles.

Nous avons ensuite étudié trois espaces particuliers de courbes, que nous appellerons les semi-espaces $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$. Or, dans un autre Mémoire (2)

(1) *L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un semi-espace de Banach*, [*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 78, 1961, p. 241-272].

(2) *L'espace des courbes est-il un espace de Banach* ? (*J. Math. pures et appl.*, t. 40, 1961, p. 197-204).

nous avons montré que ni $\mathcal{C}_1$, ni $\mathcal{C}_2$ ne sont des espaces de Banach. Il résulte alors de ce qui précède que dans $\mathcal{C}_1$, comme dans $\mathcal{C}_2$, l'une au moins des conditions 3°, 4° ne peut être toujours vérifiée.

D'autre part, dans notre Mémoire précédent [1], nous avons montré que 4° est une conséquence de 3°.

Il en résultait donc que, dans $\mathcal{C}_1$ comme dans $\mathcal{C}_2$, la condition 3° n'est pas toujours vérifiée.

Nous avions alors cru démontrer par un exemple contraire que, dans $\mathcal{C}_1$, la condition 4° n'est pas non plus toujours vérifiée. Mais M. Kurosh, de l'Université de Syracuse (États-Unis), a attiré notre attention sur l'insuffisance de notre démonstration (p. 265-270). Nous *allons donc*, dans la suite, *utiliser un autre exemple contraire pour aboutir à la même conclusion.*

Autrement dit, le *but recherché* dans les pages 265-270 *va rester atteint* par d'autres moyens, à savoir :

Si ξ, ξ_1, ξ_2 sont trois courbes de l'espace $\mathcal{C}_1$, la condition

3° $(\xi + \xi_1) + \xi_2 = \xi + (\xi_1 + \xi_2)$,

n'est pas toujours vérifiée; et, de même, la condition

4° si $\xi + \xi_1 = \xi + \xi_2$, alors $\xi_1 = \xi_2$,

n'est pas toujours vérifiée.

Exemple contraire relatif a la condition 4° de Banach. — Considérons le carré $A_1\, N_1\, B_1\, N_2$ de centre O (*fig.* 1) et prenons pour ξ_1 l'angle droit orienté $\widehat{A_1N_1B_1}$ et pour ξ_2 l'angle droit orienté $\widehat{A_1N_2B_1}$. D'autre part, soit M un point quelconque de A_1B_1, par exemple, situé dans le prolongement de B_1A_1 au-delà de A_1 comme dans la figure 1. Appelons

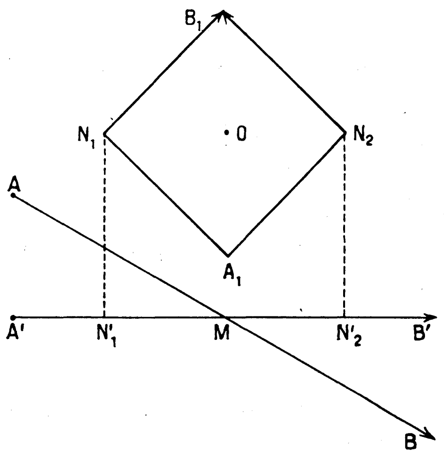

Fig. 1.

alors $A'B'$ un vecteur parallèle à N_1N_2, plus grand que N_1N_2 et de milieu M, $\overline{A'B'}$ et $\overline{N_1N_2}$ ayant même orientation. Nous prendrons pour ξ un vecteur $\overline{AB}$ obtenu en prenant pour $\overline{AA'}$ un vecteur équipollent à $\overline{OA_1}$ et pour $\overline{BB'}$ un vecteur équipollent à $\overline{OB_1}$. Il est clair que $\xi'_1 \equiv \xi + \xi_1$ et $\xi'_2 = \xi + \xi_2$ auront tous deux pour extrémités A' et B', (quand on prend pour origine le centre O du carré $A_1N_1B_1N_2$).

D'autre part, dans $\mathcal{C}_1$, les « diamètres » de A_1N_1 et de N_1B_1 étant égaux, le paramètre intrinsèque t, de N_1 sur ξ_1 sera $\frac{1}{2}$. Et il en sera de même pour le paramètre intrinsèque de N_2 sur ξ_2.

Alors le point de ξ'_1 qui correspond à cette valeur $\frac{1}{2}$ sera le point N'_1, tel que

$$\overline{ON'_1} = \overline{OM} + \overline{ON_1}.$$

Ce point sera évidemment sur $A'B'$. Alors les points de ξ'_1 correspondant à $0 < t < \frac{1}{2}$ correspondront à des points P, Q de A_1N_1 et AM pour lesquels le diamètre de chaque arc est égal à sa longueur. Dès lors, si $\overline{OR}$ est la résultante de $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$, le point R parcourra le segment $A'N'_1$. Et pour $\frac{1}{2} < t < 1$ le point R parcourra l'intervalle N'_1B'. De sorte que finalement, ξ'_1 n'est autre que le vecteur $\overline{A'B'}$. Il en est de même pour ξ'_2.

Finalement, on voit que $\xi'_1 = \overline{A'B'} = \xi'_2$, de sorte que

$$\xi + \xi_1 = \xi + \xi_2, \qquad \text{avec} \quad \xi_1 \neq \xi_2.$$

Donc *dans $\mathcal{C}_1$, la condition 4° n'est pas toujours vérifiée* (et, par suite, 3° non plus), comme nous l'avions annoncé.

ERRATUMS.

Je saisis cette occasion pour rectifier quelques erreurs typographiques de mon précédent article (¹).

Page 265, 15e ligne : *au lieu de* $t' + \frac{p}{q(t''-t')}$, *lire* $t' + \frac{p}{q}(t''-t')$.

Page 266, 7e ligne : *au lieu de* C′C″, *lire* 0C″.
» 8e ligne : *au lieu de* $A''\gamma D'''$, *lire* $A'''\gamma D''$.
» Dans la figure 6, CD qui devrait être égal à AB, comme dans la figure 4, a été dessiné, par moi, trop long.

Page 269, 2e ligne *au lieu de* page 266, *lire* page 260.
» 5e ligne, *au lieu de* le point de A_1, *lire* le point de ξ_1.