ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NICOLAS OECONOMIDIS

Familles fermées ou ouvertes d'ensembles dans un espace

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 80, nº 1 (1963), p. 81-105
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1963_3_80_1_81_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 81, 1963, p. 81 à 105.

FAMILLES FERMÉES OU OUVERTES D'ENSEMBLES DANS UN ESPACE

PAR M. NICOLAS OECONOMIDIS,

INTRODUCTION.

Si $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est une famille d'ensembles appartenant à un espace $\mathcal{L}^*$, ou plus généralement à un espace topologique, on sait que [1]

(i) $$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma \subset \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma};$$

(ii) $$\operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma;$$

(iii) $$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma \subset \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]'.$$

Ces relations, évidemment, ne sont pas en général des égalités, et le présent article est consacré à l'étude des conditions exigées pour que ces relations soient des égalités.

(1) *Voir* Casimir KURATOWSKI, *Topologie* (3e édition), vol. I, p. 83, 85 et 21, 29, 45.

Dans la première Partie de ce Mémoire nous donnons d'abord, dans un espace $\mathcal{L}^\star$, la définition de l'ensemble $\underset{\gamma\in\Gamma}{\mathrm{Y}} A_\gamma$, qui nous permet de définir la notion de famille fermée ainsi que de famille ouverte; ensuite, nous trouvons les conditions suffisantes et nécessaires afin qu'une famille d'ensembles d'un espace $\mathcal{L}^\star$ soit fermée ou ouverte, ou, ce qui revient au même, pour que les relations (i), (ii) et (iii) soient des égalités.

Dans la seconde Partie, nous donnons la notion de famille fermée (respectivement ouverte) dans un espace topologique ainsi que de famille fermée (respectivement ouverte) relativement à un sous-ensemble d'un tel espace, et nous examinons les propriétés correspondantes; enfin, nous donnons des applications de ces notions.

PREMIÈRE PARTIE.

Familles fermées et ouvertes dans un espace $\mathcal{L}^\star$.

1. Définitions. — Soient $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille d'ensembles, sous-ensembles d'un espace $\mathcal{L}^\star$, et

$$G=\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$$

le produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f, qui sont définies dans Γ, de façon que

$$f(\gamma)\in A_\gamma \qquad \text{pour chaque } \gamma\in\Gamma.$$

On peut démontrer la relation

$$(1.1)\qquad \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]' = \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\right]\cup\left[\bigcup_{f\in G}[f(\Gamma)]'\right].$$

On sait, en effet, d'une part que

$$(1)\qquad \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\subset\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]'$$

et l'on a évidemment, d'autre part,

$$(2)\qquad \bigcup_{f\in G}[f(\Gamma)]'\subset\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]'.$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$(3)\qquad \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\right]\cup\left[\bigcup_{f\in G}[f(\Gamma)]'\right]\subset\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]'.$$

Soit maintenant $x \in \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]'$; il existe donc une suite $\{x_n\}$ de points de $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, différents entre eux et de x, telle qu'on ait

$$x = \lim_{n=\infty} x_n.$$

Ou bien, donc, il existe un ensemble A_γ, qui contient un nombre infini d'éléments de la suite $\{x_n\}$, ou bien, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, l'ensemble A_γ contient au plus un nombre fini d'éléments de cette suite.

Dans le premier cas on a évidemment $x \in A'_\gamma$, et par suite

$$x \in \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{f \in G} [f(\Gamma)]'\right].$$

Dans le second cas on forme la famille $(E_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, en posant

(i) $\quad E_\gamma = A_\gamma, \quad$ si $\quad A_\gamma \cap (x_n) = \emptyset$ [2];

(ii) $\quad E_\gamma = A_\gamma \cap (x_n), \quad$ si $\quad A_\gamma \cap (x_n) \neq \emptyset$.

Si $f \in \prod_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$, l'ensemble $f(\Gamma)$ contient un nombre infini [3] d'éléments de $\{x_n\}$ et, par suite, $x \in [f(\Gamma)]'$, ou bien

$$x \in \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{f \in G} [f(\Gamma)]'\right].$$

D'après ce qui précède on conclut que

$$\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]' \subset \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{f \in G} [f(\Gamma)]'\right], \tag{4}$$

et les relations (3) et (4) donnent (1.1).

Une conséquence immédiate de (1.1) est la relation suivante :

$$\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{f \in G} \overline{f(\Gamma)}\right]. \tag{1.2}$$

On a, en effet,

$$\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]' \cup \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]$$

ou, d'après (1.1),

$$\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A'_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{f \in G} [f(\Gamma)]'\right] \cup \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right],$$

---

[2] Par (x_n) on représente l'ensemble des éléments de la suite $\{x_n\}$.

[3] On suppose Γ infini; si Γ est fini, la relation (1.1) est évidente.

et puisque

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcup_{f\in G} f(\Gamma),$$

on tire

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{f\in G} [f(\Gamma)]'\right] \cup \left[\bigcup_{f\in G} f(\Gamma)\right]$$

ou

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} (A_\gamma \cup A'_\gamma)\right] \cup \left[\bigcup_{f\in G} [f(\Gamma) \cup [f(\Gamma)]']\right],$$

c'est-à-dire

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma\right] \cup \left[\bigcup_{f\in G} \overline{f(\Gamma)}\right].$$

Nous posons pour abréger

$$\underset{\gamma\in\Gamma}{Y} A_\gamma = \left[\bigcup_{f\in G} [f(\Gamma)]'\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\right];$$

alors la relation (1.1) peut s'écrire

$$\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]' = \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\right] \cup \underset{\gamma\in\Gamma}{Y} A_\gamma. \tag{1.3}$$

Il est évident d'ailleurs que

$$\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\right] \cap \underset{\gamma\in\Gamma}{Y} A_\gamma = \emptyset. \tag{1.4}$$

On peut maintenant démontrer la relation

$$\left[\bigcup_{f\in G} \overline{f(\Gamma)}\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma\right] = \left[\underset{\gamma\in\Gamma}{Y} A_\gamma\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]. \tag{1.5}$$

En effet, de

$$\bigcup_{f\in G} f(\Gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma,$$

on tire

$$\bigcup_{f\in G} \overline{f(\Gamma)} = \left[\bigcup_{f\in G} [f(\Gamma)]'\right] \cup \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right],$$

et, par suite,

$$\left[\bigcup_{f\in G} \overline{f(\Gamma)}\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma\right] = \left[\left[\bigcup_{f\in G} [f(\Gamma)]'\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\right]\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right],$$

c'est-à-dire

$$\Big[\bigcup_{f\in \mathrm{G}} \overline{f(\Gamma)}\Big]-\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma\Big]=\Big[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma\Big]-\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma\Big].$$

Une conséquence immédiate de cette relation est la suivante :

$$\Big[\Big[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma\Big]-\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma\Big]\Big]\cap\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma\Big]=\varnothing. \tag{1.6}$$

On a de même la relation

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma}=\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma\Big]\cup\Big[\Big[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma\Big]-\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma\Big]\Big]. \tag{1.7}$$

En effet, d'après (1.2), on a

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma}=\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma\Big]\cup\Big[\bigcup_{f\in \mathrm{G}} \overline{f(\Gamma)}\Big]$$

ou bien

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma=\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma\Big]\cup\Big[\Big[\bigcup_{f\in \mathrm{G}} \overline{f(\Gamma)}\Big]-\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma\Big]\Big],$$

et grâce à (1.5), on a la relation à démontrer.

2. Notion de la famille fermée. Conditions pour qu'une famille d'ensembles soit fermée. — Nous donnons d'abord la définition suivante :

La famille d'ensembles $(\mathrm{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *s'appelle fermée, si*

$$\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma\subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{A}_\gamma.$$

D'après cette définition on peut démontrer que :

(2.1) *Pour que la famille* $(\mathrm{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit fermée, il faut et il suffit que*

$$\overline{f(\Gamma)}\subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma \qquad \text{pour chaque } f\in \mathrm{G}.$$

(i) la condition est suffisante :

Puisque, en effet,

$$\overline{f(\Gamma)}\subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma \qquad \text{pour chaque } f\in \mathrm{G},$$

on a

$$\bigcup_{f\in \mathrm{G}} \overline{f(\Gamma)}\subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{\mathrm{A}}_\gamma$$

et, par suite,

(1) $$\left[\bigcup_{f\in G}\overline{f(\Gamma)}\right]-\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A}_\gamma\right]=\emptyset,$$

ou, grâce à (1.5),

(2) $$\left[\underset{\gamma\in\Gamma}{Y}A_\gamma\right]-\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right]=\emptyset,$$

d'où l'on tire

(3) $$\underset{\gamma\in\Gamma}{Y}A_\gamma\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma,$$

et par conséquent la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée.

(ii) La condition est nécessaire :

Comme la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée, on a les relations (3) et (2), ou, grâce à (1.5), la relation (1), et par suite

$$\overline{f(\Gamma)}\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A}_\gamma \qquad \text{pour chaque } f\in G.$$

Pareillement on peut démontrer que :

(2.2) *Pour qu'on ait*

$$\underset{\gamma\in\Gamma}{Y}A_\gamma=\emptyset,$$

il faut et il suffit que

$$[f(\Gamma)]'\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma \qquad \text{pour chaque } f\in G.$$

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet,

(1) $$[f(\Gamma)]'\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma \qquad \text{pour chaque } f\in G.$$

on a

(2) $$\bigcup_{f\in G}[f(\Gamma)]'\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma,$$

d'où l'on tire

(3) $$\left[\bigcup_{f\in G}[f(\Gamma)]'\right]-\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A'_\gamma\right]=\emptyset,$$

c'est-à-dire

$$\underset{\gamma\in\Gamma}{Y}A_\gamma=\emptyset.$$

(ii) La condition est nécessaire :

Comme, en effet,

$$\underset{\gamma\in\Gamma}{Y}A_\gamma=\emptyset,$$

on a la relation (3), d'où l'on tire (2), et par suite

$$[f(\Gamma)]' \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma \qquad \text{pour chaque } f\in G.$$

Nous démontrons maintenant la proposition suivante :

(2.3) *Pour que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit fermée, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma.$$

(i) La condition est nécessaire :

D'après (1.7), on a

$$(1) \qquad \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma\right] \cup \left[\left[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]\right].$$

D'autre part, puisque la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée, on a

$$(2) \qquad \left[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right] = \varnothing,$$

et les relations (1) et (2) donnent

$$(3) \qquad \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma.$$

(ii) La condition est suffisante :

D'après (1.6), on a

$$(4) \qquad \left[\left[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]\right] \cap \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A}_\gamma = \varnothing.$$

Il est évident que les relations (1), (3) et (4) donnent nécessairement la relation

$$\left[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right] - \left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right] = \varnothing$$

ou bien

$$\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma,$$

et, par suite, la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée.

Pareillement on peut démontrer que :

2.4) *Pour qu'on ait*

$$\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \varnothing,$$

il faut et il suffit que

$$\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big]' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma.$$

(i) La condition est nécessaire :

D'après (1.3), on a

$$(1)\qquad \Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big]' = \Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\Big] \cup \big[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\big],$$

et comme

$$\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \emptyset,$$

on trouve

$$(2)\qquad \Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big]' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma.$$

(ii) La condition est suffisante :

En effet, d'après (1.4), on a

$$(3)\qquad \Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A'_\gamma\Big] \cap \mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \emptyset.$$

Il est évident que les relations (1), (2) et (3) donnent nécessairement la relation

$$\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \emptyset.$$

3. Notion de la famille ouverte. Conditions pour qu'une famille d'ensembles soit ouverte. — On peut démontrer que

$$(3.1)\qquad \mathrm{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \Big[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathrm{int}A_\gamma\Big] \cap \Big[\big[c\big[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\big]\big] \cup \Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\Big]\Big].$$

En effet, on a

$$\mathrm{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = c\overline{\Big[c\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big]}$$

ou bien

$$(1)\qquad \mathrm{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = c\overline{\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\Big]}.$$

Mais, d'après (1.7), on a

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma} = \Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{cA_\gamma}\Big] \cup \Big[\big[\mathop{\mathrm{Y}}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\big] - \Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\Big]\Big],$$

d'où l'on tire

$$c\,\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]}=\left[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} c(\overline{cA_\gamma})\right]\cap\left[\left[c\left[\mathrm{Y}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]\right]\cup\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]\right]$$

ou bien

$$c\,\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]}=\left[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}A_\gamma\right]\cap\left[\left[c\left[\mathrm{Y}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]\right]\cup\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]\right],$$

et, grâce à (1), on a la relation à démontrer.

Il est évident que la relation (3.1) peut s'écrire :

(3.2) $$\operatorname{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma=\left[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}A_\gamma\right]\cap c\left[\left[\mathrm{Y}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]\cap\left[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]\right]$$

ou encore

(3.3) $$\operatorname{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma=\left[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}A_\gamma\right]-\left[\left[\mathrm{Y}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]\cap\left[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]\right].$$

Nous donnons maintenant la définition suivante :

La famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *s'appelle ouverte si la famille* $(cA_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée.*

D'après cette définition, on peut démontrer que :

(3.4) *Pour que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit ouverte, il faut et il suffit que*

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}A_\gamma\subset c\left[\mathrm{Y}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right].$$

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet,

(1) $$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}A_\gamma\subset c\left[\mathrm{Y}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right],$$

on a

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}A_\gamma\subset c\left[\left[\mathrm{Y}_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]\cap\left[\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]\right],$$

et, d'après (3.2), on tire

(2) $$\operatorname{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma=\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int}A_\gamma$$

ou

(3) $$c\,\overline{\left[c\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right]}=\bigcap_{\gamma\in\Gamma} c\,\overline{[cA_\gamma]},$$

d'où l'on tire

(4) $$c\,\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma\right]}=c\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{cA_\gamma}\right]$$

ou bien

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} cA_\gamma} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{cA_\gamma}, \tag{5}$$

c'est-à-dire la famille $(cA_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée et, par suite, la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ouverte.

(ii) La condition est nécessaire :

Comme $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ouverte, la famille $(cA_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée et, par suite, on a la relation (5), d'où l'on tire successivement les relations (4), (3), (2) et (1).

On peut démontrer aussi que :

(3.5) *Pour que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit ouverte, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\operatorname{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma.$$

La démonstration est pareille à la démonstration précédente.

DEUXIÈME PARTIE.

Familles fermées et ouvertes dans un espace topologique.

4. Définitions. — Dans ce qui suit nous supposerons toujours que les ensembles A_γ sont sous-ensembles d'un espace topologique T.

La proposition (2.3) donne une généralisation de la notion de la famille fermée comme il suit :

(4.1) *La famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, *où* A_γ *sont sous-ensembles d'un espace topologique* T, *s'appelle fermée, si*

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma}.$$

En outre, nous pouvons donner la définition suivante :

(4.2) *La famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, *où* A_γ *sont sous-ensembles d'un espace topologique* T, *s'appelle ouverte, si la famille* $(cA_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée.*

D'après ces définitions, on peut démontrer que :

(4.3) *Pour que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit ouverte, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\operatorname{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \operatorname{int} A_\gamma.$$

(i) La condition est suffisante :

Comme, en effet,

$$(1) \qquad \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma$$

on a

$$(2) \qquad c\overline{\left[c \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} c[\overline{cA_\gamma}].$$

d'où l'on tire aisément

$$(3) \qquad \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} cA_\gamma} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{cA_\gamma},$$

c'est-à-dire $(cA_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée et, par suite, la famille $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est ouverte.

(ii) La condition est nécessaire :

Puisque $(cA_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est ouverte, la famille $(cA_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée; par suite, on a la relation (3) d'où l'on tire successivement les relations (2) et (1).

Supposons maintenant que

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subset E,$$

où E est un sous-ensemble de l'espace topologique T.

D'après cette hypothèse nous donnons la définition suivante :

(4.4) *La famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *s'appelle fermée relativement à* E, *si*

$$E \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]} = E \cap \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma\right].$$

Il est évident que :

(4.5) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *est fermée relativement à* E, *et*

$$\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \subset E,$$

alors cette famille est fermée.

En effet, d'après (4.4), on a

$$(1) \qquad E \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]} = E \cap \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma\right].$$

D'autre part, puisque

$$(2) \qquad \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \subset E,$$

on a

(3) $$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A}_\gamma\subset E.$$

Les relations (1), (2) et (3) donnent évidemment la relation

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A}_\gamma$$

et, par suite, la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée.

A l'aide de cette proposition on conclut que si $E = T$, la définition (4.4) se réduit à la définition (4.1).

Une autre conséquence de la proposition précédente est la suivante :

(4.6) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée relativement à* E, *et si* E *est un ensemble fermé, alors cette famille est fermée.*

Puisque, en effet,

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\subset E,$$

on a

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma}\subset\overline{E},$$

et, comme $\overline{E} = E$, on tire

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma}\subset E;$$

par suite, grâce à (4.6), la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée.

Nous donnons maintenant la définition suivante :

(4.7) *La famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *s'appelle ouverte relativement à* E, *si la famille* $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée relativement à* E.

Il est évident que si $E = T$, la définition (4.7) se réduit à la définition (4.2).

Nous allons démontrer que :

(4.8) *Pour que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit ouverte relativement à* E, *il faut et il suffit qu'on ait*

$$cE\cup\operatorname{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(cE\cup A_\gamma)=cE\cup\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\operatorname{int}(cE\cup A_\gamma).$$

(i) La condition est nécessaire :

Puisque $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ouverte, relativement à E, la famille $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée relativement à E, et par suite, on a

(1) $$E\cap\left[\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(E-A_\gamma)}\right]=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{(E-A_\gamma)}\right],$$

d'où l'on tire

$$(2)\qquad cE \cup c\overline{\left[c\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(cE\cup A_\gamma)\right]} = cE \cup \bigcap_{\gamma\in\Gamma} c\overline{[c(cE\cup A_\gamma)]}$$

ou bien

$$(3)\qquad cE\cup \operatorname{int}\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(cE\cup A_\gamma) = cE\cup\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\operatorname{int}(cE\cup A_\gamma).$$

(ii) La condition est suffisante :

Puisque (3) est valable, on a successivement les relations (2) et (1), c'est-à-dire $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée relativement à E, et par conséquent la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ouverte relativement à E.

Il est évident que :

(4.9) *Si* $A\subset T$, $E\subset T$ *et* $\bar{A}\subset \operatorname{int} E$, *alors*

$$\operatorname{int}(A\cup cE) = \operatorname{int}A\cup\operatorname{int}cE.$$

On sait, en effet, que

$$(1)\qquad \operatorname{int}A\cup\operatorname{int}cE\subset\operatorname{int}(A\cup cE);$$

d'autre part, de la relation

$$\bar{A}\subset\operatorname{int}E,$$

on tire

$$(2)\qquad \bar{A}\cap\overline{cE} = \emptyset.$$

Supposons maintenant qu'il existe un point x tel qu'on ait

$$(3)\qquad x\in\operatorname{int}(A\cup cE)$$

et

$$(4)\qquad x\notin\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}cE.$$

D'après (3), il existe un entourage X de x tel que

$$(5)\qquad X\subset A\cup cE;$$

par suite, grâce à (4), tout entourage $Y\subset X$ de x contient des points de l'ensemble $A\cap cE$, et par conséquent on a

$$\bar{A}\cap\overline{cE}\neq\emptyset,$$

contrairement à (2). Il en résulte donc que

$$\operatorname{int}A\cup\operatorname{int}(cE) = \operatorname{int}(A\cup cE).$$

D'après cette proposition, on peut démontrer que :

(4.10) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est ouverte relativement à* E, *et si*

$$\bar{A}_\gamma\subset\operatorname{int}E\qquad\text{pour chaque }\gamma\in\Gamma,$$

alors cette famille est ouverte.

En effet, d'après (4.8), on a

(1) $$cE \cup \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (cE \cup A_\gamma) = cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int}(cE \cup A_\gamma).$$

D'autre part, puisque

$$\bar{A}_\gamma \subset \operatorname{int} E \qquad \text{pour chaque } \gamma \in \Gamma,$$

on a

$$\overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \subset \operatorname{int} E,$$

d'où, grâce à (4.9), on tire respectivement

(2) $$\operatorname{int}(A_\gamma \cup cE) = \operatorname{int} A_\gamma \cup \operatorname{int} cE \qquad \text{pour chaque } \gamma \in \Gamma$$

et

(3) $$\operatorname{int}\left(cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \operatorname{int} cE \cup \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma.$$

Maintenant, le premier membre de (1), grâce à (3), s'écrit

$$cE \cup \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (cE \cup A_\gamma) = cE \cup \operatorname{int}\left[cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right] = cE \cup \operatorname{int} cE \cup \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

ou bien

(4) $$cE \cup \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (cE \cup A_\gamma) = cE \cup \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma.$$

D'autre part, d'après (2), le second membre de (1) s'écrit

$$cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int}(cE \cup A_\gamma) = cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (\operatorname{int} cE \cup \operatorname{int} A_\gamma) = cE \cup \operatorname{int} cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma$$

ou bien

(5) $$cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int}(cE \cup A_\gamma) = cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma.$$

Les relations (1), (4) et (5) donnent

(6) $$cE \cup \operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = cE \cup \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma.$$

Mais il est évident que

(7) $$cE \cap \left[\operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right] = \emptyset$$

et

(8) $$cE \cup \left[\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma\right] = \emptyset.$$

D'après (6), (7) et (8), on tire

$$\operatorname{int} \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma,$$

et, par suite, la famille $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est ouverte.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante :

(4.11) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *est ouverte relativement à l'ensemble ouvert* E, *et si* $\bar{A}_\gamma \subset E$, *pour chaque* $\gamma \in \Gamma$, *alors cette famille est ouverte.*

La démonstration est évidente.

Les propositions (4.6) et (4.11) donnent respectivement une condition suffisante pour qu'une famille fermée (respectivement ouverte) relativement à E soit fermée (respectivement ouverte).

Inversement, on a la proposition :

(4.12) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *est fermée (respectivement ouverte), elle sera fermée (respectivement ouverte) relativement à* E, *où* $E \subset T$ *et* $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subset E$.

La démonstration est évidente.

Considérons maintenant une fonction bicontinue F ayant T pour l'ensemble des arguments et dont les valeurs appartiennent à Y, où Y est aussi un espace topologique, différent ou non de T.

On peut démontrer que :

(4.13) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *est fermée (respectivement ouverte) relativement à* E, *alors la famille* $(F(A_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ *est aussi fermée (respectivement ouverte) relativement à* F (E).

Si $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée relativement à E, on a

$$E \cap \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = E \cap \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma,$$

d'où l'on tire

$$F\left[E \cap \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma}\right] = F\left[E \cap \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma\right],$$

et puisque F est bicontinue, on trouve aisément

$$F(E) \cap \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} F(A_\gamma)} = F(E) \cap \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{F(A_\gamma)};$$

par conséquent, la famille $(F(A_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée relativement à F (E).

Si $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est ouverte relativement à E, la famille $(E - A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée relativement à E et, par suite, la famille $(F(E - A_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$, ou bien la famille $(F(E) - F(A_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$, est fermée relativement à $F(E)$; il en résulte que la famille $(F(A_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ est ouverte relativement à $F(E)$.

Si $E = T$, on a évidemment la proposition :

(4.14) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *est fermée (respectivement ouverte), alors la famille* $(F(A_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ *est aussi fermée (respectivement ouverte).*

Les propositions (4.13) et (4.14) montrent que les notions introduites par les définitions (4.1), (4.2), (4.4) et (4.7), restent invariantes par rapport aux transformations bicontinues, c'est-à-dire elles sont propriétés topologiques.

5. Applications. — On peut démontrer que :

(5.1) *Si* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *est une famille d'ensembles fermés relativement à* E, *pour que l'ensemble* $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ *soit fermé relativement à* E, *il faut et il suffit que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *soit fermée relativement à* E.

(i) La condition est suffisante :

D'après notre hypothèse, on a

$$A_\gamma = \bar{A}_\gamma \cap E \qquad \text{pour chaque } \gamma \in \Gamma. \tag{1}$$

D'autre part, puisque $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée relativement à E, on a

$$E \cap \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = E \cap \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma. \tag{2}$$

A l'aide de (1) et (2), on trouve

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma = E \cap \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \tag{3}$$

et, par suite, l'ensemble $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ est fermé relativement à E.

(ii) La condition est nécessaire :

Puisque, en effet, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ est fermé relativement à E, on a la relation (3); mais (3), grâce à (1), s'écrit

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma \cap E = E \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]}$$

ou bien

$$E \cap \left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \bar{A}_\gamma\right] = E \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right]}$$

et, par suite, la famille $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée relativement à E.

On peut démontrer aussi que :

(5.2) *Si* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est une famille d'ensembles ouverts relativement à* E, *pour que l'ensemble* $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *soit ouvert relativement à* E, *il faut et il suffit que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit ouverte relativement à* E.

(i) La condition est suffisante :

Il est évident que les ensembles $(E - A_\gamma)$ pour chaque $\gamma\in\Gamma$ sont fermés relativement à E, aussi bien que la famille $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée relativement à E; par suite, d'après (5.1), l'ensemble $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(E - A_\gamma)$ est fermé relativement à E.

Mais

$$E - \bigcup_{\gamma\in\Gamma}(E - A_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} E \cap A_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma;$$

il en résulte que l'ensemble $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ est ouvert relativement à E.

(ii) La condition est nécessaire :

Comme, en effet, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ est ouvert relativement à E, l'ensemble $E - \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$, ou bien l'ensemble $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(E - A_\gamma)$ est fermé relativement à E.

D'autre part, l'ensemble $E - A_\gamma$, pour chaque $\gamma\in\Gamma$, est aussi fermé relativement à E; il en résulte de (5.1) que la famille $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée relativement à E, et par conséquent la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ouverte relativement à E.

Si $E = T$ les propositions (5.1) et (5.2) donnent évidemment les deux propositions suivantes :

(5.3) *Si* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est une famille d'ensembles fermés, pour que l'ensemble* $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *soit fermé, il faut et il suffit que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit fermée.*

(5.4) *Si* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est une famille d'ensembles ouverts, pour que l'ensemble* $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *soit ouvert, il faut et il suffit que la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit ouverte.*

On peut démontrer de plus que :

(5.5) *Si* $\mathrm{Fr}(A_\gamma) = \emptyset$, *pour chaque* $\gamma\in\Gamma$, *pour qu'on ait*

$$\mathrm{Fr}\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\Big) = \emptyset,$$

il faut et il suffit que la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *soit fermée.*

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet, $\mathrm{Fr}(A_\gamma) = \emptyset$, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, les ensembles A_γ sont ouverts et fermés; par suite l'ensemble $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ est ouvert, et comme la famille $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée, cet ensemble, d'après (5.3), est fermé; il en résulte que

$$\mathrm{Fr}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \emptyset.$$

(ii) La condition est nécessaire :

Puisque, en effet,

$$\mathrm{Fr}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \emptyset,$$

l'ensemble $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ est fermé, et comme les ensembles A_γ sont aussi fermés, grâce à (5.3), la famille $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est fermée.

Pareillement on peut démontrer que :

(5.6) *Si* $\mathrm{Fr}(A_\gamma) = \emptyset$, *pour chaque* $\gamma \in \Gamma$, *pour qu'on ait*

$$\mathrm{Fr}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) = \emptyset,$$

il faut et il suffit que la famille $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *soit ouverte.*

6. Propriétés. — Considérons une famille de familles d'ensembles

$$[(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_i}]_{i \in I},$$

et supposons que

$$\bigcup_{i \in I}\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma_i} A_\gamma\right] \subset E,$$

où E est un sous-ensemble de l'espace topologique T.

On peut démontrer que :

(6.1) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_i}$, *pour chaque* $i \in I$, *est fermée relativement à* E, *pour que la famille*

$$\bigcup_{i \in I} (A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_i}$$

soit fermée relativement à E, *il faut et il suffit que la famille*

$$\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma_i} A_\gamma\right)_{i \in I}$$

soit fermée relativement à E.

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet, la famille

$$\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i} \mathrm{A}_\gamma\Big)_{i\in\mathrm{I}}$$

est fermée relativement à E, on a

$$\text{(1)}\qquad \mathrm{E}\cap\overline{\Big[\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\mathrm{A}_\gamma\Big)\Big]}=\mathrm{E}\cap\Big[\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\overline{\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\mathrm{A}_\gamma\Big)}\Big].$$

D'autre part, comme la famille $(\mathrm{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$, pour chaque $i\in\mathrm{I}$, est fermée relativement à E, on a

$$\text{(2)}\qquad \mathrm{E}\cap\overline{\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\mathrm{A}_\gamma\Big]}=\mathrm{E}\cap\Big[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\bar{\mathrm{A}}_\gamma\Big]\qquad\text{pour chaque } i\in\mathrm{I}.$$

D'après (1) et (2), on tire

$$\text{(3)}\qquad \mathrm{E}\cap\overline{\Big[\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\mathrm{A}_\gamma\Big)\Big]}=\mathrm{E}\cap\Big[\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i}\bar{\mathrm{A}}_\gamma\Big)\Big],$$

et, par suite, la famille

$$\text{(4)}\qquad \bigcup_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$$

est fermée relativement à E.

(ii) La condition est nécessaire :

Comme, en effet, la famille (4) est fermée relativement à E, on a la relation (3) d'où l'on tire (1); par suite, la famille

$$\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i} \mathrm{A}_\gamma\Big)_{i\in\mathrm{I}}$$

est fermée relativement à E.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante :

(6.2) *Si la famille* $(\mathrm{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$, *pour chaque* $i\in\mathrm{I}$, *est ouverte relativement à* E, *pour que la famille*

$$\bigcup_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{A}_\gamma)_{\gamma\in\mathrm{I}_i}$$

soit ouverte relativement à E, *il faut et il suffit que la famille*

$$\Big(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_i} \mathrm{A}_\gamma\Big)_{i\in\mathrm{I}}$$

soit ouverte relativement à E.

(i) La condition est suffisante :

Puisque, en effet, la famille

(1) $$\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_i} A_\gamma\right)_{i\in I}$$

est ouverte relativement à E, la famille

(2) $$\left(E-\bigcap_{\gamma\in\Gamma_i} A_\gamma\right)_{i\in I}$$

ou bien

(3) $$\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_i} (E-A_\gamma)\right)_{i\in I}$$

sera fermée relativement à E.

D'autre part, comme la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$, pour chaque $i\in I$, est ouverte relativement à E, la famille $(E-A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$, pour chaque $i\in I$, sera fermée relativement à E. Il en résulte, grâce à (6.1), que la famille

(4) $$\bigcup_{i\in I} (E-A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$$

est fermée relativement à E, et par suite, la famille

(5) $$\bigcup_{i\in I} (A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$$

est ouverte relativement à E.

(ii) La condition est nécessaire :

Comme (5) est ouverte relativement à E, (4) sera fermée relativement à E. D'autre part, puisque la famille $(E-A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$, pour chaque $i\in I$, est fermée relativement à E, d'après (6.1), la famille (3) sera fermée relativement à E, et par suite, la famille (1) est ouverte relativement à E.

Considérons maintenant une famille d'ensembles $A_{\gamma,i}$, où les indices γ, i sont éléments des ensembles Γ et I respectivement; on représente cette famille par le symbole

$$(A_{\gamma,i})_{\gamma\in\Gamma,\, i\in I}.$$

On peut démontrer que :

(6.3) *Si pour chaque* $i\in I$ *la famille* $(A_{\gamma,i})_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée relativement à* E *et si de plus les familles* $(A_{\gamma,i})_{i\in I}$, *pour chaque* $\gamma\in\Gamma$ et $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_{\gamma,i}\right)_{i\in I}$ *sont fermées relativement à* E, *alors*

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_{\gamma,i}\right)_{\gamma\in\Gamma}$$

est une famille fermée relativement à E.

Comme, en effet, $(A_{\gamma,i})_{\gamma\in\Gamma}$, pour chaque $i\in I$, est fermée relativement à E, on a

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right]}=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A}_{\gamma,i}\right]\qquad\text{pour chaque } i\in I,$$

et, par suite,

$$(1)\qquad E\cap\left[\bigcup_{i\in I}\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right]}\right]=E\cap\left[\bigcup_{i\in I}\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A}_{\gamma,i}\right]\right].$$

D'autre part, comme la famille $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right)_{i\in I}$ est fermée relativement à E, on a

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{i\in I}\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right]\right]}=E\cap\left[\bigcup_{i\in I}\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right]}\right];$$

il en résulte que le premier membre de (1) s'écrit

$$E\cap\left[\bigcup_{i\in I}\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right]}\right]=E\cap\overline{\left[\bigcup_{i\in I}\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right]\right]}$$

ou bien

$$(2)\qquad E\cap\left[\bigcup_{i\in I}\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_{\gamma,i}\right]}\right]=E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left[\bigcup_{i\in I}A_{\gamma,i}\right]\right]}.$$

Mais, comme $(A_{\gamma,i})_{i\in I}$, pour chaque $\gamma\in\Gamma$, est fermée relativement à E, on a

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{i\in I}A_{\gamma,i}\right]}=E\cap\left[\bigcup_{i\in I}\overline{A}_{\gamma,i}\right]\qquad\text{pour chaque } \gamma\in\Gamma,$$

et, par suite,

$$E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{\left[\bigcup_{i\in I}A_{\gamma,i}\right]}\right]=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left[\bigcup_{i\in I}\overline{A}_{\gamma,i}\right]\right];$$

il en résulte que le second membre de (1) s'écrit

$$(3)\qquad E\cap\left[\bigcup_{i\in I}\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A}_{\gamma,i}\right]\right]=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{\left[\bigcup_{i\in I}A_{\gamma,i}\right]}\right].$$

D'après (1), (2) et (3), on a

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left[\bigcup_{i\in I}A_{\gamma,i}\right]\right]}=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{\left[\bigcup_{i\in I}A_{\gamma,i}\right]}\right]$$

et, par conséquent, la famille

$$\left(\bigcup_{i\in I}A_{\gamma,i}\right)_{\gamma\in\Gamma}$$

est fermée relativement à E.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante :

(6.4) *Si pour chaque* $i \in I$ *la famille* $(A_{\gamma,i})_{\gamma\in\Gamma}$ *est ouverte relativement à* E, *et si de plus les familles* $(A_{\gamma,i})_{i\in I}$, *pour chaque* $\gamma \in \Gamma$ *et* $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_{\gamma,i}\right)_{i\in I}$ *sont ouvertes relativement à* E, *alors la famille*

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_{\gamma,i}\right)_{\gamma\in\Gamma}$$

est ouverte relativement à E.

En effet, il est évident que les familles

(i) $(E - A_{\gamma,i})_{\gamma\in\Gamma}$, pour chaque $i \in I$;

(ii) $(E - A_{\gamma,i})_{i\in I}$, pour chaque $\gamma \in \Gamma$;

(iii) $\left(E - \bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_{\gamma,i}\right)_{i\in I}$, ou bien $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} (E - A_{\gamma,i})\right)_{i\in I}$, sont fermées relativement à E; il en résulte, grâce à (6.3), que la famille

$$\left(\bigcup_{i\in I} (E - A_{\gamma,i})\right)_{\gamma\in I}$$

ou bien la famille

$$\left(E - \bigcap_{i\in I} A_{\gamma,i}\right)_{\gamma\in}$$

est fermée relativement à E, et par suite la famille

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_{\gamma,i}\right)_{\gamma\in}$$

est ouverte relativement à E.

Les propositions suivantes sont des cas particuliers des (6.3) et (6.4).

(6.5) *Si les familles* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *et* $(B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *sont fermées (respectivement ouvertes) relativement à* E, *la famille* $(A_\gamma \cup B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ [*respectivement* $(A_\gamma \cap B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$] *est aussi fermée (respectivement ouverte) relativement à* E.

(6.6) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée (respectivement ouverte) relativement à* E, *et si* $H \subset T$, *alors la famille* $(A_\gamma \cup H)_{\gamma\in\Gamma}$ [*respectivement* $(A_\gamma \cap H)_{\gamma\in\Gamma}$] *est aussi fermée (respectivement ouverte) relativement à* E.

On peut démontrer aussi que :

(6.7) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée relativement à* E, *et si*

$$E \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1} A_\gamma\right]} \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1} A_\gamma\right]} = \varnothing,$$

où $\Gamma_1 \subset \Gamma$, *alors les familles* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1}$ *et* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}$, *sont fermées relativement à* E.

Puisque, en effet, $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée relativement à E, on a

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\right]}=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\bar{A}_\gamma\right],$$

d'où l'on tire

$$(1)\qquad E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma\right]}\cup E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}A_\gamma\right]}=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right]\cup E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right].$$

Mais, d'après l'hypothèse, on a

$$(2)\qquad E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma\right]}\cap E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}A_\gamma\right]}=\emptyset,$$

et puisque

$$(3)\qquad E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right]\subset E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma\right]}$$

et

$$(4)\qquad E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right]\subset E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}A_\gamma\right]},$$

on a aussi

$$(5)\qquad E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right]\cap E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right]=\emptyset.$$

Les relations (1), (2), (3), (4) et (5) donnent évidemment les relations

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma\right]}=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right]$$

et

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}A_\gamma\right]}=E\cap\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}\bar{A}_\gamma\right];$$

par conséquent, les familles $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1}$ et $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}$ sont fermées relativement à E.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante :

(6.8) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est ouverte relativement à* E, *et si*

$$E\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}(E-A_\gamma)\right]}\cap\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}(E-A_\gamma)\right]}=\emptyset,$$

où $\Gamma_1\subset\Gamma$, *alors les familles* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1}$ *et* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}$ *sont ouvertes relativement à* E.

Comme, en effet, $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ouverte relativement à E, $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ sera fermée relativement à E, et puisque

$$E \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}(E - A_\gamma)\right]} \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}(E - A_\gamma)\right]} = \emptyset,$$

d'après (6.7), les familles $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1}$ et $(E - A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}$ seront fermées relativement à E; il en résulte que les familles $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ et $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}$ sont ouvertes relativement à E.

Considérons maintenant le cas où $E = T$; dans ce cas, il est évident que les propositions précédentes peuvent s'énoncer comme il suit :

(6.1 *a*) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$, *pour chaque* $i\in I$, *est fermée, pour que la famille*

$$\bigcup_{i\in I}(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$$

soit fermée, il faut et il suffit que la famille

$$\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_2} A_\gamma\right)_{i\in I}$$

soit fermée.

(6.2 *a*) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$, *pour chaque* $i\in I$, *est ouverte, pour que la famille*

$$\bigcup_{i\in I}(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_i}$$

soit ouverte, il faut et il suffit que la famille

$$\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_2} A_\gamma\right)_{i\in I}$$

soit ouverte.

(6.3 *a*) *Si pour chaque* $i\in I$ *la famille* $(A_{\gamma,i})_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée, et si de plus les familles* $(A_{\gamma,i})_{i\in I}$, *pour chaque* $\gamma\in\Gamma$, *et* $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_{\gamma,i}\right)_{i\in I}$ *sont fermées, alors la famille* $\left(\bigcup_{i\in I} A_{\gamma,i}\right)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée.*

(6.4 *a*) *Si pour chaque* $i\in I$, *la famille* $(A_{\gamma,i})_{\gamma\in\Gamma}$ *est ouverte, et si de plus les familles* $(A_{\gamma,i})_{i\in I}$, *pour chaque* $\gamma\in\Gamma$, *et* $\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_{\gamma,i}\right)_{i\in I}$ *sont ouvertes, alors la famille* $\left(\bigcap_{i\in I} A_{\gamma,i}\right)_{\gamma\in\Gamma}$ *est ouverte.*

(6.5 *a*) *Si les familles* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *et* $(B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *sont fermées* (*respectivement ouvertes*), *la famille* $(A_\gamma \cup B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ [*respectivement* $(A_\gamma \cap B_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$] *est aussi fermée* (*respectivement ouverte*).

(6.6 *a*) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée* (*respectivement ouverte*), *et si* $H \subset T$, *alors la famille* $(A_\gamma \cup H)_{\gamma\in\Gamma}$ [*respectivement* $(A_\gamma \cap H)_{\gamma\in\Gamma}$] *est aussi fermée* (*respectivement ouverte*).

(6.7 *a*) *Si la famille* (A_γ) *est fermée, et si*

$$\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1} A_\gamma\right]} \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1} A_\gamma\right]} = \emptyset,$$

où $\Gamma_1 \subset \Gamma$, *alors les familles* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1}$ *et* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}$ *sont fermées.*

(6.8 *a*) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est ouverte, et si*

$$\overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1} cA_\gamma\right]} \cap \overline{\left[\bigcup_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1} cA_\gamma\right]} = \emptyset,$$

où $\Gamma_1 \subset \Gamma$, *alors les familles* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1}$ *et* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma-\Gamma_1}$ *sont ouvertes.*

Enfin, on peut démontrer que :

(6.9) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est fermée, la famille* $(\bar{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est aussi fermée.*

Puisque, en effet, la famille $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée, on a

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bar{A}_\gamma,$$

d'où l'on tire

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bar{A}_\gamma}.$$

D'autre part, on a

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bar{\bar{A}}_\gamma;$$

donc

$$\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bar{A}_\gamma} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \bar{\bar{A}}_\gamma$$

et, par suite, la famille $(\bar{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est fermée.

Une conséquence immédiate de cette proposition est la suivante :

(6.10) *Si la famille* $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est ouverte, la famille* $(\operatorname{int} A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *est aussi ouverte.*

En effet, puisque $(A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est ouverte, $(cA_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ sera fermée, et, d'après (6.9), la famille $(c\bar{A}_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ sera aussi fermée; il en résulte que la famille $(c\,\overline{(cA_\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$, c'est-à-dire la famille $(\operatorname{int} A_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, est ouverte.