RENÉ LAGRANGE

Sur les permutations avec répétition

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 1 (1962), p. 23-70

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_1_23_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 79, 1962, p. 23 à 70.

SUR LES PERMUTATIONS AVEC RÉPÉTITION.

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

INTRODUCTION

Les permutations avec répétition de n objets, soit α objets a, β objets b, ..., λ objets l, sont les groupements distincts de ces n objets, alignés dans un sens donné. Nous désignerons leur nombre par la parenthèse

$$(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\ldots\,\lambda!}.$$

On peut supposer, par exemple, qu'il s'agit de segments de droite, de couleurs différentes, soit α de couleur a, β de couleur b, etc,, avec lesquels on construit une ligne brisée coloriée, orientée.

Si l'on fait abstraction de l'orientation, on considère comme équivalentes deux lignes brisées dont les côtés présentent la même suite de couleurs lorsqu'on les parcourt dans des sens convenables. Le nombre des permutations distinctes est inférieur au nombre précédent, et nous le désignerons par $D(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$.

Ceci suppose qu'on construit des lignes brisées ouvertes. Mais si l'on fait des polygones, deux tels polygones coloriés sont considérés comme équivalents s'ils fournissent la même suite de couleurs lorsqu'on les parcourt dans des sens convenables, à partir de sommets convenables. Le nombre des permutations est encore réduit, et nous le désignerons par $P(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$.

L'objet de cet article est la détermination de $D(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, ainsi que des nombres $P(\alpha, \beta)$ lorsque, pour ces derniers, l'un des deux arguments est inférieur à 7, car la recherche de l'expression de $P(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ devient vite très difficile.

Observons qu'avec des segments de même longueur l, $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ représente le nombre des vecteurs coloriés de la droite, de longueur nl, non équipollents, que permettent de construire ces n segments. $D(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ est le nombre des segments coloriés du plan, de longueur nl, non superposables par déplacement, et $P(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ est le nombre des polygones convexes, réguliers, coloriés, non superposables par déplacement, ayant n côtés de longueur l.

Avant d'aborder cette étude, énonçons quelques identités concernant les permutations orientées :

$$\text{(I)} \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=1} (\alpha_1-\varepsilon_1, \alpha_2-\varepsilon_2, \ldots, \alpha_n-\varepsilon_n),$$

où les ε_i sont des symboles ne prenant que les valeurs o ou 1. (I) est bien connu, et traduit la décomposition de l'ensemble des permutations en les sous-ensembles formés par celles qui ont un même premier élément.

$$\text{(II)} \qquad \sum_{s=0}^{\alpha}(s, r_1, r_2, \ldots, r_p) = (r_1, r_2, \ldots, r_p)(\alpha, r_1+r_2+\ldots+r_p+1).$$

(II) se ramène tout de suite à la forme particulière où $p=1$

$$\sum_{s=0}^{\alpha}(s, r) = (\alpha, r+1);$$

celle-ci est évidente pour $r=0$ ou $\alpha=0$; elle se démontre alors par récurrence, portant sur α et sur r, à l'aide de (I) qui donne

$$\sum_{s=0}^{\alpha}(s, r) = \sum_{s=0}^{\alpha}(s, r-1) + \sum_{s=1}^{\alpha}(s-1, r) = \sum_{s=0}^{\alpha}(s, r-1) + \sum_{s=0}^{\alpha-1}(s, r).$$

$$\text{(III)} \qquad \sum_{s=0}^{\alpha}(s, r_1, r_2, \ldots, r_p)(\alpha-s, r'_1, r'_2, \ldots, r'_q)$$
$$= (r_1, r_2, \ldots, r_p)(r'_1, r'_2, \ldots, r'_q)(\alpha, r_1+\ldots+r_p+r'_1+\ldots+r'_q+1).$$

(III) se ramène tout de suite à la forme où $p=q=1$, soit

$$\sum_{s=0}^{\alpha}(s, r)(\alpha-s, r') = (\alpha, r+r'+1);$$

celle-ci est évidente pour $\alpha=0$, ou si r ou r' est nul; elle se démontre aisément par récurrence portant sur α et r, à l'aide de (I).

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\substack{s_i=0 \\ i=1,2,\ldots,n}}^{\alpha_i} (s_1, s_2, \ldots, s_n, r_1, \ldots, r_p)(\alpha_1-s_1, \ldots, \alpha_n-s_n, r'_1, \ldots, r'_q)$$
$$= (r_1, r_2, \ldots, r_p)(r'_1, r'_2, \ldots, r'_q)(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, r_1+\ldots$$
$$+ r_p + r'_1 + \ldots + r'_q + 1).$$

Il n'y a qu'à appliquer (III) aux différentes sommes relatives aux s_i, ou, plus simplement, à l'utiliser pour la somme relative à s_n, en admettant sa validité pour $n-1$ arguments s_i.

$$\text{(V)} \qquad \sum_{r_1+r_2+\ldots+r_n=p} (r_1,\ \alpha_1-r_1)(r_2,\ \alpha_2-r_2)\ldots(r_n,\ \alpha_n-r_n)=(p,\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-p).$$

Ce n'est rien d'autre que la formule classique relative aux coefficients du développement du binome, obtenue en écrivant que la puissance d'ordre $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ est le produit des puissances d'ordres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

$$\text{(VI)} \quad \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{r_i=0\\ i=1,2,\ldots n;\, i\neq k}}^{\alpha_i-1} (r_1,\ \ldots\ r_{k-1},\ \alpha_k-1,\ r_{k+1},\ \ldots,\ r_n)$$
$$\times(\alpha_1-r_1,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}-r_{k-1},\ \alpha_{k+1}-r_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_n-r_n)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

C'est une évidence pour $n=1$. Admettons sa validité pour moins de n arguments. Grâce à (I),

$$(\alpha_1-r_1,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}-r_{k-1},\ \alpha_{k+1}-r_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_n-r_n)$$
$$=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}(\alpha_1-r_1,\ \ldots,\ \alpha_l-1-r_l,\ \ldots,\ \alpha_n-r_n).$$

Dans la somme multiple, l'ensemble des termes pour lesquels l a une même valeur, par exemple $l=1$, donne

$$\sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{r_i=0\\ i=1,2,\ldots,n;\, i\neq k}}^{\alpha_i-1} (r_1,\ \ldots,\ r_{k-1},\ \alpha_k-1,\ r_{k+1},\ \ldots,\ r_n)$$
$$\times(\alpha_1-1-r_1,\ \alpha_2-r_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}-r_{k-1},\ \alpha_{k+1}-r_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_n-r_n);$$

la somme relative à r_1, effectuée à l'aide de (III), réduit ceci à

$$\sum_{k=2}^{n} \sum_{\substack{r_i=0\\ i=2,3,\ldots,n;\, i\neq k}}^{\alpha_i-1} (r_2,\ \ldots,\ r_{k-1},\ \alpha_k-1,\ r_{k+1},\ \ldots,\ r_n)$$
$$\times(\alpha_2-r_2,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}-r_{k-1},\ \alpha_{k+1}-r_{k+1},\ \ldots,\ \alpha_n-r_n)(\alpha_1-1,\ \alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n),$$

et ensuite, grâce à (VI) elle-même, valable pour $n-1$ arguments, à

$$(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n)(\alpha_1-1,\ \alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)=(\alpha_1-1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

La somme complète est ainsi grâce à (I),

$$\sum_{l=1}^{n}(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{l-1},\ \alpha_l-1,\ \alpha_{l+1},\ \ldots,\ \alpha_n)=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

C. Q. F. D.

CHAPITRE I.

Permutations rectilignes non orientées.

1. Sur la droite non orientée, un segment colorié, formé par n segments de même longueur l, ne peut-être égal à un autre segment analogue de longueur nl que d'une seule façon, si les deux côtés [1] extrêmes n'ont pas la même couleur. Le nombre des segments distincts de cette catégorie est donc le même que celui des segments orientés de $n-2$ côtés, construits avec les couleurs restantes; ainsi, ceux dont les deux couleurs extrêmes sont a et b sont au nombre de $(\alpha-1, \beta-1, \gamma, \ldots, \lambda)$, en conservant les notations de l'introduction. Le nombre total des segments analogues est donc

$$\sum_{\varepsilon+\varepsilon'+\ldots=2} (\alpha-\varepsilon, \beta-\varepsilon', \gamma-\varepsilon'', \ldots),$$

où ε, ε', ε'', ... sont des symboles ne prenant que les valeurs 0 ou 1. Les autres segments de l'ensemble ont leurs côtés extrêmes de même couleur; pour eux, la loi d'équivalence est la même que pour les segments obtenus par amputation des deux côtés extrêmes, tout au moins dans chaque sous-ensemble où la couleur extrême est la même. Ainsi, le nombre de ceux dont les deux côtés extrêmes ont la couleur a est $D(\alpha-2, \beta, \ldots, \lambda)$, et, pour leur ensemble, le nombre de ces segments est

$$\sum_{\varepsilon+\varepsilon'+\ldots=1} D(\alpha-2\varepsilon, \beta-2\varepsilon', \gamma-2\varepsilon'', \ldots).$$

Nous avons ainsi établi la loi de récurrence

$$(1) \qquad \begin{aligned} D(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = & \sum_{\varepsilon+\varepsilon'+\ldots=2} (\alpha-\varepsilon, \beta-\varepsilon', \gamma-\varepsilon'', \ldots) \\ & + \sum_{\varepsilon+\varepsilon'+\ldots=1} D(\alpha-2\varepsilon, \beta-2\varepsilon', \gamma-2\varepsilon'', \ldots). \end{aligned}$$

2. Calcul de $D(\alpha, \beta)$. — Ici, (1) s'écrit

$$(2) \qquad D(\alpha, \beta) = (\alpha-1, \beta-1) + D(\alpha-2, \beta) + D(\alpha, \beta-2).$$

Une première itération donne tout de suite

$$D(\alpha, \beta) = \sum_{p=0}^{1} \sum_{r+s=p} (\alpha-1-2r, \beta-1-2s) + \sum_{r+s=2} (r, s)\, D(\alpha-2r, \beta-2s),$$

[1] Il sera commode d'appeler « côtés » les segments de longueurs l, comme pour une ligne brisée de n côtés.

où r, s sont des entiers naturels. On en déduit, par récurrence, la relation générale

$$(3)\qquad \mathrm{D}(\alpha, \beta) = \sum_{p=0}^{m} \sum_{r+s=p} (r, s)(\alpha - 1 - 2r, \beta - 1 - 2s) + \sum_{r+s=m+1} (r, s)\mathrm{D}(\alpha - 2r, \beta - 2s).$$

Admettons sa validité pour la valeur m. Grâce à (2), la dernière somme se décompose en

$$\sum_{r+s=m+1} (r, s)(\alpha - 1 - 2r, \beta - 1 - 2s) + \sum_{r+s=m+1} \sum_{\varepsilon+\varepsilon'=1} (r, s)\mathrm{D}(\alpha - 2\varepsilon - 2r, \beta - 2\varepsilon' - 2s).$$

Les nombres $r_1 = r + \varepsilon$, $s_1 = s + \varepsilon'$ ont la somme $r_1 + s_1 = m + 2$, et le coefficient du terme $\mathrm{D}(\alpha - 2r_1, \beta - 2s_1)$ est

$$\sum_{\varepsilon+\varepsilon'=1} (r_1 - \varepsilon, s_1 - \varepsilon') = (r_1, s_1).$$

(3) est ainsi étendue à la valeur $m + 1$.

(3) permet de calculer $\mathrm{D}(\alpha, \beta)$, à partir des relations évidentes

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}(\alpha, \beta) = \mathrm{D}(\beta, \alpha), \\ \mathrm{D}(\alpha, 0) = 1. \end{cases}$$

3. On peut poursuivre l'itération tant que le terme $\mathrm{D}(\alpha - 2r, \beta - 2s)$ à développer par (2) n'a pas d'argument nul, tandis qu'un terme $\mathrm{D}(\alpha - 2r, 0)$, où $\alpha - 2r > 0$, est remplacé par 1. Cette dernière circonstance est impossible lorsque α et β sont impairs; mais alors la seconde somme dans (3) disparaît dès que m est assez grand, ce qui donne, avec $\alpha = 2\alpha' + 1$, $\beta = 2\beta' + 1$,

$$(5)\qquad \mathrm{D}(2\alpha' + 1, 2\beta' + 1) = \sum_{\substack{0 \leqq r \leqq \alpha' \\ 0 \leqq s \leqq \beta'}} (r, s)(2\alpha' - 2r, 2\beta' - 2s).$$

Si $\alpha = 2\alpha' + 1$, $\beta = 2\beta'$, le deuxième argument de $\mathrm{D}(\alpha - 2r, \beta - 2s)$, avec $0 \leqq r \leqq \alpha'$, peut s'annuler. Un tel terme $\mathrm{D}(\alpha - 2r, 0)$ provient du développement par (2) d'un terme

$$\mathrm{D}(\alpha - 2r, 2) = \mathrm{D}(\alpha - 2r, 2\beta' - 2(\beta' - 1))$$

provenant d'une formule (3) d'indice $m = r + \beta' - 2$; dans cette formule, son coefficient est $(r, \beta' - 1)$, qui se conserve dans l'itération, de sorte que le terme en $\mathrm{D}(\alpha - 2r, 0)$ est

$$(r, \beta' - 1)\mathrm{D}(\alpha - 2r, 0) = (r, \beta' - 1).$$

Ce même terme se conserve dans les itérations suivantes. Ainsi, lorsque tous les termes $D(\alpha-2r, \beta-2s)$ ont disparu, on a obtenu le développement

$$D(2\alpha'+1, 2\beta') = \sum_{\substack{0\leq r\leq\alpha' \\ 0\leq s\leq\beta'-1}} (r, s)(2\alpha'-2r, 2\beta'-1-2s) + \sum_{0\leq r\leq\alpha'} (r, \beta'-1),$$

ou, grâce à (II),

$$D(2\alpha'+1, 2\beta') = \sum_{\substack{0\leq r\leq\alpha' \\ 0\leq s\leq\beta'-1}} (r, s)(2\alpha'-2r, 2\beta'-1-2s) + (\alpha', \beta'). \tag{6}$$

Enfin, lorsque $\alpha = 2\alpha'$, $\beta = 2\beta'$ sont pairs tous les deux, le même raisonnement montre qu'il apparaît des termes $D(\alpha-2r, 0)$, où $0\leq r<\alpha'$, avec le coefficient $(r, \beta'-1)$, et des termes $D(0, \beta-2s)$, où $0\leq s<\beta'$, avec le coefficient $(\alpha'-1, s)$. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} D(2\alpha', 2\beta') = & \sum_{\substack{0\leq r\leq\alpha'-1 \\ 0\leq s\leq\beta'-1}} (r, s)(2\alpha'-1-2r, 2\beta'-1-2s) \\ & + \sum_{0\leq r\leq\alpha'-1} (r, \beta'-1) + \sum_{0\leq s\leq\beta'-1} (\alpha'-1, s). \end{aligned}$$

(II) remplace la somme des dernières sommes par

$$(\alpha'-1, \beta') + (\alpha', \beta'-1) = (\alpha', \beta'),$$

donc

$$D(2\alpha', 2\beta') = \sum_{\substack{0\leq r\leq\alpha'-1 \\ 0\leq s\leq\beta'-1}} (r, s)(2\alpha'-1-2r, 2\beta'-1-2s) + (\alpha', \beta'). \tag{7}$$

On peut rassembler ces expressions (5), (6), (7) en la formule unique

$$D(\alpha, \beta) = \sum_{\substack{0\leq r\leq\left[\frac{\alpha-1}{2}\right] \\ 0\leq s\leq\left[\frac{\beta-1}{2}\right]}} (r, s)(\alpha-1-2r, \beta-1-2s) + \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha, \beta \text{ sont impairs,} \\ \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) & \text{si } \alpha \text{ ou } \beta \text{ est pair.} \end{cases} \tag{8}$$

4. Cette formule remarquable peut être remplacée par l'expression encore plus simple

$$D(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha, \beta) + \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha, \beta \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) & \text{si } \alpha \text{ ou } \beta \text{ est pair.} \end{cases} \tag{9}$$

C'est vérifié pour $\beta = 0$, et pour $\alpha = \beta = 1$, et il suffit de raisonner par récurrence à l'aide de (2). Admettons que (9) soit valable pour les $D(\alpha_1, \beta_1)$ tels que $\alpha_1 + \beta_1 < \alpha + \beta$.

Si α et β sont impairs, (2) donne en effet

$$\begin{aligned} 2D(\alpha, \beta) &= 2(\alpha-1, \beta-1) + 2D(\alpha-2, \beta) + 2D(\alpha, \beta-2) \\ &= [(\alpha-1, \beta-1) + (\alpha-2, \beta)] + [(\alpha-1, \beta-1) + (\alpha, \beta-2)] \\ &= (\alpha-1, \beta) + (\alpha, \beta-1) = (\alpha, \beta), \end{aligned}$$

tandis que, lorsque α ou β est pair, on doit ajouter aux termes précédents

$$\left(\left[\frac{\alpha-2}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta-2}{2}\right]\right) = \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right]-1, \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]-1\right) = \left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right).$$

C. Q. F. D.

La comparaison de (8) et de (9) fournit l'identité remarquable

$$(10) \qquad \sum_{\substack{0 \leq r \leq \left[\frac{\alpha-1}{2}\right] \\ 0 \leq s \leq \left[\frac{\beta-1}{2}\right]}} (r, s)(\alpha-1-2r, \beta-1-2s)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha, \beta) - \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha, \beta \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\alpha}{2}\right], \left[\frac{\beta}{2}\right]\right) & \text{si } \alpha \text{ ou } \beta \text{ est pair,} \end{cases}$$

que l'on peut naturellement démontrer directement par récurrence.

5. Formule générale. — Quel que soit n, on a la forme généralisée de (9)

$$(11) \qquad D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) + \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\alpha_1}{2}\right], \left[\frac{\alpha_2}{2}\right], \ldots, \left[\frac{\alpha_n}{2}\right]\right) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

(11) est vraie lorsque $n-1$, ou même $n-2$, des α_i sont nuls. Supposons donc qu'elle ait été démontrée pour n arguments α_i dont la somme est inférieure à m, et étendons la au cas où $\sum \alpha_i = m$. Dans cette dernière hypothèse, (1) et (11) donnent

$$\begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) &= \sum_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=2} (\alpha_1-\varepsilon_1, \alpha_2-\varepsilon_2, \ldots, \alpha_n-\varepsilon_n) \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=1} D(\alpha_1-2\varepsilon_1, \alpha_2-2\varepsilon_2, \ldots, \alpha_n-2\varepsilon_n) \\ &= \sum_{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n=2} (\alpha_1-\varepsilon_1, \ldots, \alpha_n-\varepsilon_n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n=1} (\alpha_1-2\varepsilon_1, \ldots, \alpha_n-2\varepsilon_n) + S, \end{aligned}$$

où $S = 0$ lorsque deux des α_i sont impairs, et

$$S = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 1} \left(\left[\frac{\alpha_1}{2} \right] - \varepsilon_1, \left[\frac{\alpha_2}{2} \right] - \varepsilon_2, \ldots, \left[\frac{\alpha_n}{2} \right] - \varepsilon_n \right)$$

dans les autres cas. Grâce à (I), on a donc

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\alpha_1}{2} \right], \left[\frac{\alpha_2}{2} \right], \ldots, \left[\frac{\alpha_n}{2} \right] \right) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'autre part, la même formule (I) réitérée donne

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\substack{\varepsilon'_1 + \ldots + \varepsilon'_n = 1 \\ \varepsilon''_1 + \ldots + \varepsilon''_n = 1}} (\alpha_1 - \varepsilon'_1 - \varepsilon''_1, \alpha_2 - \varepsilon'_2 - \varepsilon''_2, \ldots, \alpha_n - \varepsilon'_n - \varepsilon''_n).$$

Ici, un terme où $\varepsilon'_i = \varepsilon''_i = 1$ n'apparaît qu'une fois, et est de la forme $(\alpha_1 - 2\varepsilon_1, \alpha_2 - 2\varepsilon_2, \ldots, \alpha_n - 2\varepsilon_n)$, avec $\sum \varepsilon_k = 1$, tandis qu'un terme où $\varepsilon'_i = \varepsilon''_j = 1$, $i \neq j$, est égal à celui où $\varepsilon'_j = \varepsilon''_i = 1$, et est de la forme $(\alpha_1 - \varepsilon_1, \alpha_2 - \varepsilon_2, \ldots, \alpha_n - \varepsilon_n)$ avec $\sum \varepsilon_k = 2$, ce qui démontre (11) pour $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m$.

6. Il n'est pas sans intérêt de généraliser également (8), en calculant $D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ par un procédé plus analytique. Il s'agit de démontrer qu'on a

$$(12) \quad \begin{aligned} D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = & \sum_{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 2} \sum_{r_1, \ldots, r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ & \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \alpha_2 - \varepsilon_2 - 2r_2, \ldots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n) \\ & + \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \left(\left[\frac{\alpha_1}{2} \right], \left[\frac{\alpha_2}{2} \right], \ldots, \left[\frac{\alpha_n}{2} \right] \right) & \text{dans les autres cas,} \end{cases} \end{aligned}$$

la somme $\sum_{r_1, \ldots, r_n}$ étant une somme multiple où chaque r_i prend les valeurs entières de l'intervalle fermé $0, \left[\frac{\alpha_i - \varepsilon_i}{2} \right]$. Nous raisonnons toujours par récurrence en admettant que (12) ait été établi pour moins de n arguments. Comme au paragraphe 2, on voit tout de suite que

$$(13) \quad \begin{aligned} D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = & \sum_{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 2} \sum_{r_1 + \ldots + r_n \leq m} (r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ & \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \ldots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n) \\ & + \sum_{r_1 + \ldots + r_n = m+1} (r_1, r_2, \ldots, r_n) D(\alpha_1 - 2r_1, \alpha_2 - 2r_2, \ldots, \alpha_n - 2r_n), \end{aligned}$$

et l'on peut réitérer tant que les n arguments de $D(\alpha_1 - 2r_1, \ldots, \alpha_n - 2r_n)$ sont positifs. Dès que l'un d'eux est nul, on conserve le terme D à $n-1$ arguments positifs; par exemple, si $\alpha_1 - 2r_1 = 0$, ce qui suppose que α_1 est pair, on a ainsi les termes

$$\left(\frac{\alpha_1}{2} - 1, r_2, \ldots, r_n\right) D(\alpha_2 - 2r_2, \alpha_3 - 2r_3, \ldots, \alpha_n - 2r_n).$$

Si donc tous les α_i sont impairs, la formule (13) réitérée au maximum donne

$$(14) \qquad D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\Sigma\varepsilon_i=2} \sum_{r_1, \ldots, r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n) \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1, \alpha_2 - \varepsilon_2 - 2r_2, \ldots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n),$$

où les r_i prennent les valeurs vérifiant $0 \leqq r_i \leqq \left[\frac{\alpha_i - \varepsilon_i}{2}\right]$.

Dans le cas général, supposons que les $\alpha_j (j = 1, 2, \ldots, p)$ soient impairs et que les $\alpha_k (k = p+1, p+2, \ldots, n)$ soient pairs. Posons $\alpha_j = 2\alpha'_j + 1$, $\alpha_k = 2\alpha'_k$. L'itération maximale de (13) donne

$$(15) \qquad D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\Sigma\varepsilon_i=2} \sum_{\substack{0 \leqq r_j \leqq \alpha'_j \\ 0 \leqq r_k \leqq \alpha'_k - 1}} (r_1, \ldots, r_n) \underset{(j=1, 2, \ldots, p)}{(2\alpha'_j + 1 - \varepsilon_j - 2r_j,} \underset{(k=p+1, \ldots, n)}{2\alpha'_k - \varepsilon_k - 2r_k)} + \sum_{l=p+1}^{n} S_l,$$

où

$$(16) \qquad S_l = \sum_{\substack{0 \leqq r_j \leqq \alpha'_j \\ 0 \leqq r_k \leqq \alpha'_k - 1}} (r_1, \ldots, r_p, r_{p+1}, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \ldots, r_n) \times D(\alpha_j - 2r_j, \alpha_{p+1} - 2r_{p+1}, \ldots, \alpha_{l-1} - 2r_{l-1}, \alpha_{l+1} - 2r_{l+1}, \ldots, \alpha_n - 2r_n) \quad (j = 1, \ldots, p).$$

Dans ces expressions, j ne prend que les valeurs entières au plus égales à p, et k prend les valeurs $p+1, p+2, \ldots, n$ à l'exception de l dans S_l; nous désignerons par i un indice prenant toutes les valeurs $1 \leqq i \leqq n$, sauf indication contraire.

Si $p \geqq 2$, (12) permet d'écrire

$$S_l = \sum_{\substack{0 \leqq r_j \leqq \alpha'_j \\ 0 \leqq r_k \leqq \alpha'_k - 1}} \sum_{\Sigma\varepsilon_i=2} \sum_{\substack{0 \leqq s_i \leqq \alpha'_i - r_i \\ i \neq l}} (r_1, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \ldots, r_n)(s_1, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, \ldots, s_n) \times (\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2r_1 - 2s_1, \ldots, \alpha_i - \varepsilon_i - 2r_i - 2s_i, \ldots, \alpha_n - \varepsilon_n - 2r_n - 2s_n).$$

Un argument $\alpha_k - \varepsilon_k - 2r_k - 2s_k$ de cette dernière parenthèse ne peut s'annuler que si $\varepsilon_k = 0$, $r_k + s_k = \alpha'_k$. Considérons celles de ces parenthèses où $\alpha_k - \varepsilon_k - 2r_k - 2s_k$ est nul [1] pour $k = q+1, q+2, \ldots, n$, mais positif pour $p < k \leqq q$. Posons $\rho_i = r_i + s_i$, et soit

$$(\alpha_1 - \varepsilon_1 - 2\rho_1, \ldots, \alpha_p - \varepsilon_p - 2\rho_p, \alpha_{p+1} - \varepsilon_{p+1} - 2\rho_{p+1}, \ldots, \alpha_q - \varepsilon_q - 2\rho_q)$$

une telle parenthèse, où $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_q = 2$, $0 \leqq \rho_j \leqq \alpha'_j$, $0 \leqq \rho_k \leqq \alpha'_k - 1$, $p < k \leqq q$.

Ceci suppose évidemment $l > q$, et le coefficient de cette parenthèse dans un tel S_l est

$$\sum_{0 \leqq r_j \leqq \rho_j} \sum_{\substack{0 \leqq r_k \leqq \rho_k \\ p < k \leqq q}} \sum_{\substack{0 \leqq r_h \leqq \alpha'_h - 1 \\ q < h \leqq n;\, h \neq l}} (r_1, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, \ldots, r_n)$$
$$\times (\rho_1 - r_1, \ldots, \rho_q - r_q, \ldots, \alpha'_h - r_h, \ldots). \qquad (q < h \leqq n,\ h \neq l)$$

Grâce à (IV), la somme relative aux indices $r_1, r_2, \ldots, r_q$ vaut

$$(r_{q+1}, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \ldots, r_n)$$
$$\times (\alpha'_{q+1} - r_{q+1}, \ldots, \underset{h \neq l}{\alpha'_h - r_h}, \ldots, \alpha'_n - r_n)(\rho_1, \ldots, \rho_q, \alpha'_{q+1} + \alpha'_{q+2} + \ldots + \alpha'_n).$$

Pour l'ensemble des $S_l (l > q)$ contenant la parenthèse en question, le coefficient de celle-ci est ainsi

$$(\rho_1, \ldots, \rho_q, \alpha'_{q+1} + \ldots + \alpha'_n) \sum_{l=q+1}^{n} \sum_{\substack{0 \leqq r_h \leqq \alpha'_h - 1 \\ q < h \leqq n;\, h \neq l}} (r_{q+1}, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l - 1, r_{l+1}, \ldots, r_n)$$
$$\times (\alpha'_{q+1} - r_{q+1}, \ldots, \alpha'_h - r_h, \ldots, \alpha'_n - r_n), \qquad (h \neq l)$$

ou, d'après (VI),

$$(\rho_1, \ldots, \rho_q, \alpha'_{q+1} + \ldots + \alpha'_n)(\alpha'_{q+1}, \alpha'_{q+2}, \ldots, \alpha'_n) = (\rho_1, \ldots, \rho_q, \alpha'_{q+1}, \ldots \alpha'_n)$$

Ainsi, lorsque $p \geqq 2$, il vient

$$\mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$
$$= \sum_{\Sigma \varepsilon_i = 2} \sum_{\substack{0 \leqq r_j \leqq \alpha'_j \\ 0 \leqq r_k \leqq \alpha'_k - 1}} (r_1, r_2, \ldots, r_n)(\underset{(1 \leqq j \leqq p)}{\alpha_j - \varepsilon_j - 2r_j}, \underset{(p < k \leqq n)}{\alpha_k - \varepsilon_k - 2r_k})$$
$$+ \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_m} \sum_{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_p + \varepsilon_{k_1} + \ldots + \varepsilon_{k_m} = 2} \sum_{\substack{0 \leqq r_j \leqq \alpha'_j \\ 0 \leqq r_{k_s} \leqq \alpha'_{k_s}}} (r_1, \ldots, r_p, r_{k_1}, \ldots, r_{k_m}, \alpha'_{h_1}, \ldots, \alpha'_{h_{m'}})$$
$$\times (\alpha_j - \varepsilon_j - 2r_j, \alpha_{k_s} - \varepsilon_{k_s} - 2r_{k_s}), \qquad (1 \leqq j \leqq p) \quad (1 \leqq s \leqq m)$$

---

[1] A cause de la symétrie par rapport aux arguments, il n'est pas restrictif d'admettre que ce sont les $n - q$ derniers arguments qui sont nuls.

où les k_s forment toutes les combinaisons m à m des indices $p+1, p+2, \ldots, n$, et $h_1, h_2, \ldots, h_{m'}$ $(m+m'=n-p)$ représentent lès $n-p-m$ autres indices supérieurs à p. Dans ce cas, la réunion des deux sommes multiples s'écrit donc, conformément à l'extension de (12),

$$\text{(17)}\quad \mathrm{D}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_{\Sigma\varepsilon_i=2} \sum_{\substack{0\leqq r_i \leqq \alpha'_i \\ 1\leqq i\leqq n}} (r_1, r_2, \ldots, r_n) \times (\alpha_1-\varepsilon_1-2r_1, \alpha_2-\varepsilon_2-2r_2, \ldots, \alpha_n-\varepsilon_n-2r_n),$$

où la sommation s'étend à toutes les valeurs possibles des r_i.

Lorsque $p=1$, le calcul qui précède est encore valable, à condition d'ajouter le terme

$$(\alpha'_1-r_1, \ldots, \alpha'_{l-1}-r_{l-1}, \alpha'_{l+1}-r_{l+1}, \ldots, \alpha'_n-r_n)$$

au développement du terme D au second membre de (16) que nous avait fourni la formule (12). Il convient d'ajouter au développement de S_l $(2\leqq l\leqq n)$ le terme

$$\sigma_l = \sum_{\substack{0\leqq r_1\leqq \alpha'_1 \\ 0\leqq r_k \leqq \alpha'_k-1\,;\, k\neq l}} (r_1, r_2, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l-1, r_{l+1}, \ldots, r_n) \times (\alpha'_1-r_1, \alpha'_2-r_2, \ldots, \alpha'_{l-1}-r_{l-1}, \alpha'_{l+1}-r_{l+1}, \ldots, \alpha'_n-r_n).$$

Grâce à (III), la somme relative à r_1 vaut

$$(r_2, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l-1, r_{l+1}, \ldots, r_n) \times (\alpha'_2-r_2, \ldots, \alpha'_{l-1}-r_{l-1}, \alpha'_{l+1}-r_{l+1}, \ldots, \alpha'_n-r_n)(\alpha'_1, \alpha'_2+\alpha'_3+\ldots+\alpha'_n).$$

Par suite,

$$\sum_{l=2}^{n} \sigma_l = (\alpha'_1, \alpha'_2+\ldots+\alpha'_n) \sum_{l=2}^{n} \sum_{\substack{0\leqq r_k\leqq \alpha'_k-1 \\ 2\leqq k\leqq n\,;\, k\neq l}} (r_2, \ldots, r_{l-1}, \alpha'_l-1, r_{l+1}, \ldots, r_n) \times (\alpha'_2-r_2, \ldots, \alpha'_{l-1}-r_{l-1}, \alpha'_{l+1}-r_{l+1}, \ldots, \alpha'_n-r_n),$$

qui vaut, d'après (VI),

$$(\alpha'_1, \alpha'_2+\ldots+\alpha'_n)(\alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n).$$

Dans ce cas, il suffit donc d'ajouter à (17) cette dernière parenthèse

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) = \left(\left[\frac{\alpha_1}{2}\right], \left[\frac{\alpha_2}{2}\right], \ldots, \left[\frac{\alpha_n}{2}\right]\right),$$

ce qui établit (12) pour ces n arguments.

La comparaison des développements (11) et (12) fournit l'identité

$$\text{(18)}\quad \sum_{\Sigma\varepsilon_i=2} \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_n} (r_1, r_2, \ldots, r_n)(\alpha_1-\varepsilon_1-2r_1, \ldots, \alpha_n-\varepsilon_n-2r_n) = \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - \begin{cases} 0 & \text{si deux des } \alpha_i \text{ sont impairs,} \\ \dfrac{1}{2}\left(\left[\dfrac{\alpha_1}{2}\right], \left[\dfrac{\alpha_2}{2}\right], \ldots, \left[\dfrac{\alpha_n}{2}\right]\right) & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

CHAPITRE II.

PERMUTATIONS FERMÉES AVEC RÉPÉTITION $P(\alpha, \beta)$,

7. Rappelons que nous ne traiterons que des $P(\alpha, \beta)$ dont l'un des arguments est inférieur à 7. Nous supposerons, dans ce chapitre, que cet argument ne dépasse pas 5. Soit $1 \leqq \alpha \leqq 5$, $\alpha + \beta = n$, et calculons $P_n^\alpha = P(\alpha, n-\alpha)$ pour ces cinq valeurs de α. Au lieu de colorier les côtés du polygone construit avec les n segments, il est équivalent, et plus commode pour l'exposé, de colorier les sommets, donc α en la couleur a, et $\beta = n - \alpha$ en la couleur b. Les sommets S_i de ce polygone régulier convexe seront numérotés de 0 à $n-1$, dans le sens positif du cercle orienté, et l'on peut toujours supposer que S_0 a la couleur a.

Il est clair que $P_n^1 = 1$. Pour $\alpha = 2$, un deuxième sommet S_m a la couleur a, de sorte que les arcs séparant les deux couleurs a mesurent respectivement m et $n-m$, si l'unité de mesure est l'arc soutenu par un côté. La symétrie par rapport au diamètre de S_0 permet de supposer $m \leqq n - m$, donc les seuls polygones distincts sont ceux pour lesquels m vérifie la double inégalité $1 \leqq m \leqq \frac{n}{2}$; ainsi

$$P_n^2 = \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{1}$$

8. α valant 3, les trois sommets de couleurs a sont séparés par trois écarts q_1, q_2, q_3 dans le sens positif, à partir de S_0; soit m leur borne inférieure. On peut faire $q_1 = m$, et, à l'aide d'une symétrie diamétrale, supposer que $m = q_1 \leqq q_2 \leqq q_3$. Ces sommets sont alors numérotés 0, m, m_1, avec $1 \leqq m$, $2m \leqq m_1$, $m_1 - m \leqq n - m_1$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2m \leqq m_1 \leqq \dfrac{n+m}{2}, \\ 1 \quad \leqq m \leqq \dfrac{n}{3}. \end{cases} \tag{2}$$

Le nombre des polygones distincts de cette espèce est donc

$$P_n^3 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \left(\left[\frac{n+m}{2}\right] - 2m + 1 \right).$$

Décomposons cette somme en deux parties, suivant que m est pair ou impair. Les termes où $m = 2p$ ont la somme

$$\begin{aligned} A_n^3 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{6}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1 - 3p \right) &= \left[\frac{n}{6}\right] \left\{ \left[\frac{n}{2}\right] + 1 - \frac{3}{2}\left(\left[\frac{n}{6}\right] + 1 \right) \right\} \\ &= \left[\frac{n}{6}\right] \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left[\frac{n}{6}\right] \right). \end{aligned} \tag{3}$$

On voit tout de suite que les termes où $m = 2p - 1$ ont la somme A_{n+3}^{3}, de sorte que

$$P_n^3 = A_n^3 + A_{n+3}^3, \tag{4}$$

avec l'expression (3) de A_n^3. L'expression polynomiale de P_n^3 dépend de la classe mod6 à laquelle appartient n. Des calculs simples donnent ainsi :

$$\begin{array}{llll}
n = 6\nu \quad : & \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}, & \left[\frac{n}{6}\right] = \frac{n}{6}; & A_n^3 = \frac{n(n-2)}{24}; \\
n = 6\nu + 1 : & \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}, & \left[\frac{n}{6}\right] = \frac{n-1}{6}; & A_n^3 = \frac{(n-1)(n-3)}{24}; \\
n = 6\nu + 2 : & \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}, & \left[\frac{n}{6}\right] = \frac{n-2}{6}; & A_n^3 = \frac{n(n-2)}{24}; \\
n = 6\nu + 3 : & \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}, & \left[\frac{n}{6}\right] = \frac{n-3}{6}; & A_n^3 = \frac{(n-1)(n-3)}{24}; \\
n = 6\nu + 4 : & \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2}, & \left[\frac{n}{6}\right] = \frac{n-4}{6}; & A_n^3 = \frac{(n+2)(n-4)}{24}; \\
n = 6\nu + 5 : & \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}, & \left[\frac{n}{6}\right] = \frac{n-5}{6}; & A_n^3 = \frac{(n+1)(n-5)}{24};
\end{array}$$

puis, grâce à (4),

$$P_n^3 = \begin{cases} \dfrac{n^2}{12}, & n \equiv 0 \quad (\text{mod}\, 6), \\ \dfrac{n^2 - 1}{12}, & n \equiv \pm 1 \quad \text{»} \\ \dfrac{n^2 - 4}{12}, & n \equiv \pm 2 \quad \text{»} \\ \dfrac{n^2 + 3}{12}, & n \equiv 3 \quad \text{»} \end{cases} \tag{5}$$

On peut observer que P_n^3 est toujours de la forme $\frac{n^2 + \rho}{12}$, où ρ est l'entier de valeur absolue minimale faisant de $n^2 + \rho$ un multiple de 12.

9. α étant égal à 4, soit m la borne inférieure des quatre écarts $q_i (i = 1, 2, 3, 4)$ séparant les quatre sommets de couleur a, considérés dans l'ordre de parcours du polygone.

Admettons d'abord que deux écarts consécutifs vaillent m. On peut fixer l'origine et le sens de parcours de manière que ces quatre sommets soient S_0, S_m, S_{2m}, S_{m_2}, avec une suite d'écarts non décroissante, c'est-à-dire que

$$1 \leq m \leq m_2 - 2m \leq n - m_2.$$

Tous les polygones correspondants sont distincts, et fournis par les inégalités

$$\begin{cases} 3m \leq m_2 \leq \dfrac{n}{2} + m, \\ 1 \quad \leq m \leq \dfrac{n}{4}. \end{cases} \tag{6}$$

Leur nombre est

$$(7)\qquad A_n^4=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{4}\right]}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1-2m\right)=\left[\frac{n}{4}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)=\left[\frac{n}{4}\right]\left[\frac{n+2}{4}\right],$$

car on a toujours

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right].$$

Dans les autre cas, désignons par S_0, S_m, S_{m_1}, S_{m_2} les sommets de couleur a, avec les écarts

$$q_1=m,\qquad q_2=m_1-m>m,\qquad q_3=m_2-m_1\geqq m,\qquad q_4=n-m_2>m,$$

afin qu'il n'y ait pas deux écarts consécutifs minimaux. La symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m}{2}$ transforme cette suite d'écarts en la suite $q'_1=m$, $q'_2=q_4$, $q'_3=q_3$, $q'_4=q_2$ sur le cercle positif, ce qui permet de supposer $q_2\leqq q_4$. Ainsi les polygones distincts de cette deuxième catégorie sont tous fournis, une fois et une seule, par l'ensemble des inégalités

$$m+1\leqq m_1-m\leqq n-m_2,\qquad m\leqq m_2-m_1,$$

c'est-à-dire

$$(8)\qquad \begin{cases} m_1+m\leqq m_2\leqq n+m-m_1,\\ 2m+1\leqq m_1\leqq \dfrac{n}{2},\\ 1\leqq m\leqq \dfrac{n-2}{4}.\end{cases}$$

Leur nombre est

$$B_n^4=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\ \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n+1-2m_1)=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-2m\right)\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]-2m\right).$$

Grâce à

$$n=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

le produit des deux facteurs dans la dernière somme s'écrit

$$\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2nm+4m^2=\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2(n+2)m+4m(m+1),$$

de sorte qu'à l'aide de (II)

$$B_n^4=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{4}\right]}\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]-2(n+2)(m-1,1)+8(m-1,2)\right\}$$

$$=\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{4}\right]-2(n+2)\left(\left[\frac{n-2}{4}\right]-1,2\right)+8\left(\left[\frac{n-2}{4}\right]-1,3\right),$$

et enfin

$$\text{(9)}\qquad B_n^4 = \left[\frac{n-2}{4}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - (n+2)\left[\frac{n+2}{4}\right] + \frac{4}{3}\left[\frac{n+2}{4}\right]\left[\frac{n+6}{4}\right]\right\}.$$

En définitive, l'expression de

$$P_n^4 = A_n^4 + B_n^4$$

est un polynome du troisième degré en n, dont la forme dépend de la classe mod 4 de n. Il vient ainsi :

$$n = 4\nu \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{n}{2}\right] = \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = \dfrac{n}{2}, \qquad \left[\dfrac{n}{4}\right] = \dfrac{n}{4}, \qquad \left[\dfrac{n-2}{4}\right] = \dfrac{n-4}{4}; \\ \qquad A_n^4 = \dfrac{n^2}{16}, \qquad B_n^4 = \dfrac{n(n-2)(n-4)}{48}; \end{array}\right.$$

$$n = 4\nu + 1 \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{n}{2}\right] = \dfrac{n-1}{2}, \qquad \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = \dfrac{n+1}{2}, \qquad \left[\dfrac{n}{4}\right] = \dfrac{n-1}{4}, \qquad \left[\dfrac{n-2}{4}\right] = \dfrac{n-5}{4}; \\ \qquad A_n^4 = \dfrac{(n-1)^2}{16}, \qquad B_n^4 = \dfrac{n(n-1)(n-5)}{48}; \end{array}\right.$$

$$n = 4\nu + 2 \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{n}{2}\right] = \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = \dfrac{n}{2}, \qquad \left[\dfrac{n}{4}\right] = \left[\dfrac{n-2}{4}\right] = \dfrac{n-2}{4}; \\ \qquad A_n^4 = \dfrac{n^2-4}{16}, \qquad B_n^4 = \dfrac{n(n-2)(n-4)}{48}; \end{array}\right.$$

$$n = 4\nu + 3 \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{n}{2}\right] = \dfrac{n-1}{2}, \qquad \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = \dfrac{n+1}{2}, \qquad \left[\dfrac{n}{4}\right] = \left[\dfrac{n-2}{4}\right] = \dfrac{n-3}{4}; \\ \qquad A_4^n = \dfrac{(n+1)(n-3)}{16}, \qquad B_n^4 = \dfrac{(n+1)(n-3)(n-4)}{48}; \end{array}\right.$$

et, par suite,

$$\text{(10)}\qquad P_n^4 = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{n(n^2-3n+8)}{2\times 4!}. & n \equiv 0 \quad (\bmod 4), \\ \dfrac{(n+1)(n-1)(n-3)}{2\times 4!}, & n \equiv \pm 1 \quad \text{»} \\ \dfrac{(n-2)(n^2-n+6)}{2\times 4!}, & n \equiv 2 \quad \text{»} \end{array}\right.$$

10. Calcul de P_n^5. — Dès la valeur $\alpha = 5$, les calculs sont relativement pénibles, et l'on est amené à distinguer cinq cas, d'après le nombre et la répartition des écarts minimaux.

m désignant toujours le minimum des cinq écarts $q_i (i = 1, 2, \ldots, 5)$ séparant les sommets de couleur a, nous supposons d'abord que trois écarts consécutifs valent m. On peut choisir l'origine et le sens positif de manière qu'il s'agisse des sommets [1] S_0, S_m, S_{2m}, S_{3m}, S_{m_3}, avec

$$m \leqq m_3 - 3m \leqq n - m_3.$$

---

[1] Les sommets de couleur a sont toujours numérotés 0, m, m_1, m_2, $\ldots$, $m_{\alpha-2}$, de sorte qu'on a ici $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$.

Les polygones distincts de cette nature sont ainsi déterminés par le système d'inégalités

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &4m \leqq m_3 \leqq \frac{n+3m}{2},\\ &1 \leqq m \leqq \frac{n}{5}. \end{aligned}\right.$$

Leur nombre est

$$A_n^5 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{5}\right]} \left(\left[\frac{n+3m}{2}\right] + 1 - 4m\right).$$

Cette somme se décompose en deux, suivant la parité des valeurs de m. Les valeurs paires $m = 2p$ donnent la somme partielle

$$(12)\qquad A_n'^5 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{10}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1 - 5p\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{10}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - 5\left[\frac{n}{10}\right] - 3\right).$$

Les valeurs impaires $m = 2p - 1$ donnent la somme partielle

$$A_n''^5 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n+5}{10}\right]} \left(\left[\frac{n+5}{2}\right] + 1 - 5p\right) = A_{n+5}'^5.$$

On a donc

$$(13)\qquad A_n^5 = A_n'^5 + A_{n+5}'^5,$$

avec l'expression (12) de $A_n'^5$.

11. Supposons qu'il n'y ait que deux écarts consécutifs minimaux. On peut placer les trois sommets qu'ils séparent aux points S_0, S_m, S_{2m}. Les deux autres sommets de couleur a sont S_{m_2}, S_{m_3}, avec

$$q_3 = m_2 - 2m > m, \qquad q_4 = m_3 - m_2 \geqq m, \qquad q_5 = n - m_3 > m.$$

La symétrie par rapport au diamètre de S_m permet de réaliser la circonstance supplémentaire $q_3 \leqq q_5$. Les polygones distincts de cette espèce sont ainsi déterminés par les inégalités

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &m_2 + m \leqq m_3 \leqq n + 2m - m_2,\\ &3m + 1 \leqq m_2 \leqq \frac{n+m}{2},\\ &1 \leqq m \leqq \frac{n-2}{5}, \end{aligned}\right.$$

et leur nombre est

$$B_n^5 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{5}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[\frac{n+m}{2}\right]} (n + 1 + m - 2m_2) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{5}\right]} \left[\frac{n-5m}{2}\right]\left[\frac{n+1-5m}{2}\right].$$

Les valeurs paires $m = 2p$ donnent la somme partielle

$$B_n'^5 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2}{10}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 5p\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 5p\right) = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2}{10}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 5np + 25p^2\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2}{10}\right]} \left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 5(n+5)p + 50(p-1, 2)\right\},$$

donc

$$(15)\quad B_n'^5 = \left[\frac{n-2}{10}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - \frac{5}{2}(n+5)\left[\frac{n+8}{10}\right] + \frac{25}{3}\left[\frac{n+8}{10}\right]\left[\frac{n+18}{10}\right]\right\}.$$

Les valeurs impaires $m = 2p - 1$ donnent la somme partielle

$$B_n''^5 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n+3}{10}\right]} \left(\left[\frac{n+5}{2}\right] - 5p\right)\left(\left[\frac{n+6}{2}\right] - 5p\right) = B_{n+5}'^5,$$

et, par conséquent,

$$(16)\quad B_n^5 = B_n'^5 + B_{n+5}'^5,$$

avec l'expression (15) de $B_n'^5$.

12. Dès que trois des cinq écarts q_i valent m, deux d'entre eux sont consécutifs. Nous examinons dans ce paragraphe les polygones présentant deux écarts minimaux, mais non consécutifs, contrairement au cas qui vient d'être étudié. On peut placer en S_0 et S_m deux des sommets de couleur a, les autres étant dans l'ordre, S_{m_1}, S_{m_2}, S_{m_3}, avec les écarts

$$q_2 = m_1 - m > m, \qquad q_3 = m_2 - m_1 \geqq m, \qquad q_4 = m_3 - m_2 \geqq m, \qquad q_5 = n - m_3 > m.$$

Seuls q_3 ou q_4 peuvent valoir m, et la symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m}{2}$ permet de supposer qu'il s'agit de q_3. Mais alors, la symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m+m_1}{2}$ conserve le couple d'écarts q_1, q_3 et l'écart q_2, tout en permutant q_4 et q_5; on peut ainsi supposer $q_4 \leqq q_5$, et les polygones distincts de cette catégorie sont tels qu'on ait

$$m_1 > 2m, \qquad m_2 = m + m_1, \qquad m_3 - m_2 \geqq m + 1, \qquad n - m_3 \geqq m_3 - m_2,$$

donc déterminés par le système d'inégalités

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{c} m_1 + 2m + 1 \leqq m_3 \leqq \dfrac{n+m+m_1}{2}, \\ 2m + 1 \leqq m_1 \leqq n - 2 - 3m, \\ 1 \leqq m \leqq \dfrac{n-3}{5}. \end{array}\right.$$

Leur nombre est

$$\mathrm{C}_n^5 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{5}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{n-2-3m} \left(\left[\frac{n+m+m_1}{2} \right] - 2m - m_1 \right) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{5}\right]} \sum_{t=1}^{n-2-5m} \left[\frac{n-5m-t}{2} \right],$$

où l'on a posé $m_1 = 2m + t$. La somme partielle fournie par les valeurs paires $2p$ de t est

$$\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2-5m}{2}\right]} \left(\left[\frac{n-5m}{2} \right] - p \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{n-2-5m}{2} \right] \left[\frac{n-5m}{2} \right];$$

les valeurs impaires $t = 2p - 1$ donnent la somme déduite de celle-ci en substituant $n + 1$ à n; la somme totale relative à t est ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{n-5m}{2} \right] \left[\frac{n-5m-2}{2} \right] + \left[\frac{n-5m+1}{2} \right] \left[\frac{n-5m-1}{2} \right] \right\} \\ &\quad = \left[\frac{n-5m}{2} \right] \left[\frac{n-5m-1}{2} \right], \end{aligned}$$

grâce à l'identité

$$\left[\frac{x}{2} \right] \left[\frac{x-2}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] \left[\frac{x-1}{2} \right] = 2 \left[\frac{x}{2} \right] \left[\frac{x-1}{2} \right].$$

On voit alors que C_n^5 n'est rien d'autre que B_{n-1}^5, donc

$$(18) \qquad \mathrm{C}_n^5 = \mathrm{B}_{n-1}^5 = \mathrm{B}_{n-1}'^5 + \mathrm{B}_{n+4}'^5.$$

13. Il ne reste plus qu'à évaluer le nombre des polygones ne présentant qu'un écart minimal m entre les cinq sommets de couleur a. Plaçons ceux-ci en S_0, S_m, S_{m_1}, S_{m_2}, S_{m_3}, avec les écarts

$$q_1 = m, \qquad q_2 = m_1 - m > m, \qquad q_3 = m_2 - m_1 > m,$$
$$q_4 = m_3 - m_2 > m, \qquad q_5 = n - m_3 > m.$$

La seule symétrie qui conserve l'écart minimal est celle par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m}{2}$, et elle permet de supposer $q_2 \leqq q_5$, et, si $q_2 = q_5$, de faire $q_3 \leqq q_4$.

Évaluons d'abord le nombre des polygones de la deuxième catégorie; $q_2 = q_5$, $q_3 \leqq q_4$ fournissent les relations

$$\begin{gathered} m_3 = n + m - m_1, \\ m + 1 \leqq q_2 = m_1 - m, \\ m + 1 \leqq q_3 = m_2 - m_1 \leqq m_3 - m_2 = q_4, \end{gathered}$$

donc le système

$$(19)\qquad \begin{cases} m_1 + m + 1 \leqq m_2 \leqq \dfrac{n+m}{2}, \\[2mm] 2m + 1 \leqq m_1 \leqq \dfrac{n-2-m}{2}, \\[2mm] 1 \leqq m \leqq \dfrac{n-4}{5}. \end{cases}$$

Le nombre de ces polygones est

$$D_n^5 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{5}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-2-m}{2}\right]} \left(\left[\frac{n-m}{2}\right] - m_1\right) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{5}\right]} \left[\frac{n-5m}{2}\right]\left[\frac{n-5m-2}{2}\right].$$

Les valeurs paires $m = 2p$ fournissent la somme partielle

$$\begin{aligned} D_n'^5 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-4}{10}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 5p\right)\left(\left[\frac{n-2}{2}\right] - 5p\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-4}{10}\right]} \left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] - 10\left[\frac{n+4}{2}\right]p + 50(p-1, 2)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n-4}{10}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] - 5\left[\frac{n+4}{2}\right]\left[\frac{n+6}{10}\right] + \frac{25}{3}\left[\frac{n+6}{10}\right]\left[\frac{n+16}{10}\right]\right\}, \end{aligned}$$

soit

$$(20)\qquad D_n'^5 = \frac{1}{2}\left[\frac{n-4}{10}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] - \frac{5}{3}\left[\frac{n+6}{10}\right]\left(3\left[\frac{n}{2}\right] - 5\left[\frac{n+6}{10}\right] + 1\right)\right\}.$$

On voit tout de suite que la partie de D_n^5 fournie par les valeurs impaires de m est $D_{n+5}'^5$, donc

$$(21)\qquad D_n^5 = D_n'^5 + D_{n+5}'^5,$$

avec l'expression (20) de $D_n'^5$.

14. Les polygones de la première catégorie, qu'il reste à compter, sont ceux pour lesquels $q_2 < q_5$, et que définissent les inégalités

$$m_1 \geqq 2m + 1, \qquad m_2 \geqq m_1 + m + 1, \qquad m_3 \geqq m_2 + m + 1, \qquad n - m_3 \geqq m_1 - m + 1,$$

donc le système

$$(22)\qquad \begin{cases} m_2 + m + 1 \leqq m_3 \leqq n + m - 1 - m_1, \\ m_1 + m + 1 \leqq m_2 \leqq n - 2 - m_1, \\ 2m + 1 \leqq m_1 \leqq \dfrac{n-3-m}{2}, \\[2mm] 1 \leqq m \leqq \dfrac{n-5}{5}. \end{cases}$$

Leur nombre est

$$E_n^5 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-3-m}{2}\right]} \sum_{m_2=m_1+m+1}^{n-2-m_1} (n-1-m_1-m_2) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{5}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-3-m}{2}\right]} (n-3-m-2m_1, 2).$$

Posons $m_1 = 2m + t$; la somme relative à m_1 s'écrit

$$\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3-5m}{2}\right]} \frac{1}{2}(n-2-5m-2t)(n-1-5m-2t)$$

$$= \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3-5m}{2}\right]} \{(n-3-5m, 2) - (2n-1-10m)t + 4(t-1, 2)\}$$

$$= \left[\frac{n-3-5m}{2}\right]\left\{(n-3-5m, 2) - \left(n-\frac{1}{2}-5m\right)\left[\frac{n-1-5m}{2}\right] + \frac{2}{3}\left[\frac{n-1-5m}{2}\right]\left[\frac{n+1-5m}{2}\right]\right\}.$$

E_n^5 est alors de la forme

$$E_n^5 = E_n'^5 + E_{n+5}'^5, \tag{23}$$

où $E_n'^5$ est la somme partielle fournie par les valeurs paires $2p$ de m, soit

$$E_n'^5 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-5}{10}\right]} \left(\left[\frac{n-3}{2}\right] - 5p\right)\left\{(n-3-10p, 2) - \left(n-\frac{1}{2}-10p\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-5p\right) + \frac{2}{3}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-5p\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-5p\right)\right\}.$$

L'accolade est un polynome quadratique en p dont le développement est

$$\frac{2}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]^2 - \left(n-\frac{7}{6}\right)\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 5\left(n - \frac{11}{6} - \frac{2}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)p + \frac{50}{3}p^2;$$

le terme général de la somme est donc de la forme

$$A - 5Bp + 25Cp^2 - 125Dp^3, \tag{24}$$

avec

$$A = \left[\frac{n-3}{2}\right]\left(\frac{2}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]^2 - \left(n-\frac{7}{6}\right)\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right), \tag{25}$$

$$\begin{aligned} B &= \left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-1\right)\left(n-\frac{11}{6}-\frac{2}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]\right) \\ &\quad + \frac{2}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]^2 - \left(n-\frac{7}{6}\right)\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - n + \frac{11}{6} = \frac{3n^2-15n+17}{6}, \end{aligned}$$

$$C = n - \frac{5}{2}, \qquad D = \frac{2}{3}.$$

En fonction des parenthèses $(p-1, r)$, (24) s'écrit [1]

$$\begin{aligned}
&A-5(B+5C+25D)(p-1,1)+50(C+15D)(p-1,2)-125\times 6D(p-1,3)\\
&\quad = A-5\frac{n^2+5n+14}{2}(p-1,1)+25(2n+15)(p-1,2)-500(p-1,3),
\end{aligned}$$

donc, grâce à (II),

$$\begin{aligned}
E'^5_n &= \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-5}{10}\right]}\left\{A-5\frac{n^2+5n+14}{2}(p-1,1)+25(2n+15)(p-1,2)-500(p-1,3)\right\}\\
&= \left[\frac{n-5}{10}\right]\left\{A-5\frac{n^2+5n+14}{4}\left[\frac{n+5}{10}\right]+25\frac{2n+15}{6}\left[\frac{n+5}{10}\right]\left[\frac{n+15}{10}\right]\right.\\
&\qquad\left.-\frac{125}{6}\left[\frac{n+5}{10}\right]\left[\frac{n+15}{10}\right]\left[\frac{n+25}{10}\right]\right\},
\end{aligned}$$

soit encore, en ordonnant l'accolade par rapport à $\left[\frac{n+5}{10}\right]$,

$$(26)\qquad E'^5_n = \left[\frac{n-5}{10}\right]\left\{A-5\left[\frac{n+5}{10}\right]\left(\frac{3n^2-5n-8}{12}-\frac{5n}{3}\left[\frac{n+5}{10}\right]+\frac{25}{6}\left[\frac{n+5}{10}\right]^2\right)\right\},$$

avec l'expression (25) de A.

15. En rassemblant les résultats obtenus en (13), (16), (18), (21), (23), on peut écrire

$$(27)\qquad P^5_n = P'^5_n + P'^5_{n+5},$$

avec

$$(28)\qquad P'^5_n = A'^5_n + B'^5_n + B'^5_{n-1} + D'^5_n + E'^5_n.$$

L'expression polynomiale de ces termes est fonction de la classe mod 10 de n. Nous nous contentons de donner ces expressions, dont la détermination est fastidieuse et ne présente aucune difficulté, pour $n = 10\nu, 10\nu+1, \ldots, 10\nu+9$, ν entier.

On a ainsi

$$(29)\qquad A'^5_n = \begin{cases}
\frac{1}{2}\nu(5\nu-3), & n=10\nu \quad\text{et}\quad 10\nu+1,\\
\frac{1}{2}\nu(5\nu-1), & n=10\nu+2 \quad\text{et}\quad 10\nu+3,\\
\frac{1}{2}\nu(5\nu+1), & n=10\nu+4 \quad\text{et}\quad 10\nu+5,\\
\frac{1}{2}\nu(5\nu+3), & n=10\nu+6 \quad\text{et}\quad 10\nu+7,\\
\frac{1}{2}\nu(5\nu+5), & n=10\nu+8 \quad\text{et}\quad 10\nu+9.
\end{cases}$$

---

(1) En posant

$$\omega_r = r!(x-1, r),$$

on a

$$x=\omega_1,\quad x^2=\omega_2-\omega_1,\quad x^3=\omega_3-3\omega_2+\omega_1,\quad x^4=\omega_4-6\omega_3+7\omega_2-\omega_1,$$
$$x^5=\omega_5-10\omega_4+25\omega_3-15\omega_2+\omega_1.$$

$$(30)\qquad B'^{5}_{n} = \begin{cases} \frac{25}{6}\,\nu(\nu-1)(2\nu-1), & n = 10\nu, \\ \frac{5}{3}\,\nu(\nu-1)(5\nu-1), & n = 10\nu+1, \\ \frac{5}{3}\,\nu(\nu+1)(5\nu+1), & n = 10\nu+9, \\ \frac{1}{6}\,\nu(50\nu^2-45\nu+1), & n = 10\nu+2, \\ \frac{1}{6}\,\nu(50\nu^2+45\nu+1), & n = 10\nu+8, \\ \frac{1}{3}\,\nu(5\nu+1)(5\nu-4), & n = 10\nu+3, \\ \frac{1}{3}\,\nu(5\nu-1)(5\nu+4), & n = 10\nu+7, \\ \frac{1}{6}\,\nu(50\nu^2-15\nu-11), & n = 10\nu+4, \\ \frac{1}{6}\,\nu(50\nu^2+15\nu-11), & n = 10\nu+6, \\ \frac{1}{3}\,\nu(25\nu^2-7) & n = 10\nu+5; \end{cases}$$

donc

$$(31)\qquad B'^{5}_{n} + B'^{5}_{n-1} = \begin{cases} \frac{5}{6}\,\nu(\nu-1)(20\nu-13), & n = 10\nu, \\ \frac{5}{6}\,\nu(\nu-1)(20\nu-7), & n = 10\nu+1, \\ \frac{1}{6}\,\nu(100\nu^2-105\nu+11), & n = 10\nu+2, \\ \frac{1}{6}\,\nu(100\nu^2+105\nu+11), & n = 10\nu+9, \\ \frac{1}{6}\,\nu(100\nu^2-75\nu-7), & n = 10\nu+3, \\ \frac{1}{6}\,\nu(100\nu^2+75\nu-7), & n = 10\nu+8, \\ \frac{1}{6}\,\nu(100\nu^2-45\nu-19), & n = 10\nu+4, \\ \frac{1}{6}\,\nu(100\nu^2+45\nu-19), & n = 10\nu+7, \\ \frac{5}{6}\,\nu(20\nu^2-3\nu-5), & n = 10\nu+5, \\ \frac{5}{6}\,\nu(20\nu^2+3\nu-5), & n = 10\nu+6. \end{cases}$$

$$(32)\qquad D_n'^5 = \begin{cases} \frac{5}{6}\,\nu(5\nu-4), & n=10\nu \quad \text{et} \quad 10\nu+1, \\ \frac{5}{6}\,\nu(\nu-1)(5\nu-1), & n=10\nu+2 \quad \text{et} \quad 10\nu+3, \\ \frac{1}{6}\,\nu(5\nu+1)(5\nu-4), & n=10\nu+4 \quad \text{et} \quad 10\nu+5, \\ \frac{1}{6}\,\nu(25\nu^2-7), & n=10\nu+6 \quad \text{et} \quad 10\nu+7, \\ \frac{1}{6}\,\nu(5\nu-1)(5\nu+4), & n=10\nu+8 \quad \text{et} \quad 10\nu+9. \end{cases}$$

$$(33)\qquad E_n'^5 = \begin{cases} \frac{1}{6}\,(\nu-1)(125\nu^3-250\nu^2+105\nu-6), & n=10\nu, \\ \frac{25}{6}\,\nu(\nu-1)(5\nu^2-8\nu+2), & n=10\nu+1, \\ \frac{5}{6}\,\nu(\nu-1)(25\nu^2-30\nu+2), & n=10\nu+2, \\ \frac{5}{6}\,\nu(\nu-1)(25\nu^2-20\nu-3), & n=10\nu+3, \\ \frac{25}{6}\,\nu(\nu-1)(5\nu^2-2\nu-1), & n=10\nu+4, \\ \frac{1}{6}\,\nu(125\nu^3-125\nu^2-20\nu+26), & n=10\nu+5, \\ \frac{1}{6}\,\nu(125\nu^3-75\nu^2-50\nu+18), & n=10\nu+6, \\ \frac{1}{6}\,\nu(125\nu^3-25\nu^2-65\nu+7), & n=10\nu+7, \\ \frac{1}{6}\,\nu(125\nu^3+25\nu^2-65\nu-7), & n=10\nu+8, \\ \frac{1}{6}\,\nu(125\nu^3+75\nu^2-50\nu-18), & n=10\nu+9. \end{cases}$$

On a rapproché dans les tableaux (31) et (32) les expressions qui se déduisent l'une de l'autre, au signe près, en changeant ν en $-\nu$. Ce même caractère se retrouve pour $E_n'^5$, mais pour les valeurs de n symétriques par rapport à $10\nu+\frac{15}{2}$, et n'apparaît qu'après le changement de ν en $\nu+1$ dans certaines des expressions (33).

L'addition des expressions (29), (31), (32), (33) donne alors

$$(34)\qquad 6P_n'^5 = \begin{cases} 125\nu^4-250\nu^3+160\nu^2-35\nu+6, & n=10\nu, \\ \nu(125\nu^3\mp 200\nu^2+85\nu\mp 4), & n=10\nu+1 \quad \text{et} \quad 10\nu+9, \\ \nu(125\nu^3\mp 150\nu^2+40\nu\pm 3), & n=10\nu+2 \quad \text{et} \quad 10\nu+8, \\ \nu(125\nu^3\mp 100\nu^2-5\nu\pm 10), & n=10\nu+3 \quad \text{et} \quad 10\nu+7, \\ \nu(125\nu^3\mp 50\nu^2-20\nu\pm 5), & n=10\nu+4 \quad \text{et} \quad 10\nu+6, \\ \nu(125\nu^3-35\nu), & n=10\nu+5. \end{cases}$$

Dans chaque ligne comportant deux expressions, les signes supérieurs correspondent à la première valeur de n.

(27) donne alors

$$(35)\qquad 6P_n^5 = \begin{cases} 250\nu^4 - 250\nu^3 + 125\nu^2 - 35\nu + 6, & n = 10\nu, \\ \nu(250\nu^3 - 150\nu^2 + 65\nu - 9), & n = 10\nu + 1, \\ \nu(250\nu^3 - 50\nu^2 + 35\nu - 7), & n = 10\nu + 2, \\ \nu(250\nu^3 + 50\nu^2 + 35\nu + 7), & n = 10\nu + 3, \\ \nu(250\nu^3 + 150\nu^2 + 65\nu + 9), & n = 10\nu + 4, \\ 250\nu^4 + 250\nu^3 + 125\nu^2 + 35\nu + 6, & n = 10\nu + 5, \\ 250\nu^4 + 350\nu^3 + 215\nu^2 + 61\nu + 6, & n = 10\nu + 6, \\ 250\nu^4 + 450\nu^3 + 335\nu^2 + 123\nu + 18, & n = 10\nu + 7, \\ 250\nu^4 + 550\nu^3 + 485\nu^2 + 197\nu + 30, & n = 10\nu + 8, \\ 250\nu^4 + 650\nu^3 + 665\nu^2 + 319\nu + 60, & n = 10\nu + 9. \end{cases}$$

Ces expressions présentent le caractère de symétrie signalé pour (33), mais par rapport à la valeur $10\nu + \frac{5}{2}$. En fonction de n, on ne trouve que quatre expressions distinctes

$$(36)\qquad P_n^5 = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \times 5!}(n^4 - 10n^3 + 50n^2 - 140n + 240), & n \equiv 0 \quad (\text{mod } 10), \\ \dfrac{1}{2 \times 5!}(n-1)(n-3)(n^2 - 6n + 23), & n \equiv \pm 1, \pm 3 \quad » \\ \dfrac{1}{2 \times 5!}(n-2)(n-4)(n^2 - 4n + 18), & n \equiv \pm 2, \pm 4 \quad » \\ \dfrac{1}{2 \times 5!}(n^4 - 10n^3 + 50n^2 - 110n + 165), & n \equiv 5 \quad » \end{cases}$$

CHAPITRE III.

Calcul de $P_n^6 = P(6, n-6)$.

16. On peut placer en S_0, S_m, S_{m_1}, S_{m_2}, S_{m_3}, S_{m_4}, dans l'ordre positif, les six sommets de couleur a, en désignant toujours par m le minimum des six écarts q_i entre ces sommets.

Considérons d'abord les polygones dont quatre écarts consécutifs valent m. On peut faire $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 4m$, et l'on a $q_5 = m_4 - m_3 \geqq m$, $q_6 = n - m_4 \geqq m$. La symétrie par rapport au diamètre d'azimut $2m$ permute les écarts q_5 et q_6, et permet de supposer $q_5 \leqq q_6$. Les polygones distincts de cette catégorie sont déterminés par le système d'inégalités

$$(1)\qquad \begin{cases} 5m \leqq m_4 \leqq \dfrac{n}{2} + 2m, \\ 1 \leqq m \leqq \dfrac{n}{6}, \end{cases}$$

et leur nombre est

$$(2)\qquad A_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{6}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1 - 3m\right) = \left[\frac{n}{6}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{3}{2}\left[\frac{n}{6}\right] - \frac{1}{2}\right).$$

17. On peut placer en S_0, S_m, S_{2m}, S_{3m} quatre des sommets de couleur a chez les polygones qui présentent trois écarts consécutifs, et trois seulement, de valeur m. Les deux autres sommets S_{m_3}, S_{m_4} sont alors tels que $q_4 = m_3 - m_2 > m$, $q_5 = m_4 - m_3 \geqq m$, $q_6 = n - m_4 > m$. La symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{3m}{2}$ permute les écarts q_4 et q_6, et conserve q_5; on peut l'utiliser afin que $q_4 \leqq q_6$, et les polygones distincts de cette famille sont définis par le système des doubles inégalités

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} m_3 + m \leqq m_4 &\leqq n + 3m - m_3,\\ 4m + 1 \leqq m_3 &\leqq \frac{n}{2} + m,\\ 1 \leqq m &\leqq \frac{n-2}{6}. \end{aligned}\right.$$

Leur nombre est

$$B_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{6}\right]} \sum_{m_3=4m+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+m} (n + 1 + 2m - 2m_3) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{6}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3m\right).$$

Le produit des deux parenthèses s'écrit

$$\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3nm + 9m^2 = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3(n+3)(m-1,\ 1) + 18(m-1,\ 2),$$

donc

$$\begin{aligned} B_n^6 &= \left[\frac{n-2}{6}\right]\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3(n+3)\left(\left[\frac{n-8}{6}\right],\ 2\right) + 18\left(\left[\frac{n-8}{6}\right],\ 3\right)\\ &= \left[\frac{n-2}{6}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - \frac{3}{2}(n+3)\left[\frac{n+4}{6}\right] + 3\left[\frac{n+4}{6}\right]\left(\left[\frac{n-2}{6}\right] + 2\right)\right\}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$(4)\qquad B_n^6 = \left[\frac{n-2}{6}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - \frac{3}{2}\left[\frac{n+4}{6}\right]\left(n - 1 - 2\left[\frac{n-2}{6}\right]\right)\right\}.$$

18. Supposons maintenant que deux q_i consécutifs soient égaux à m, soit $q_1 = m - 0$, $q_2 = m_1 - m = m$, entre les sommets S_0, S_m, S_{m_1}; les polygones examinés ici n'ayant pas trois q_i consécutifs de valeur m, les trois autres sommets de couleur a sont tels que $q_3 = m_2 - m_1 > m$, $q_4 = m_3 - m_2 \geqq m$, $q_5 = m_4 - m_3 \geqq m$, $q_6 = n - m_4 > m$. Seuls q_4 et q_5 peuvent valoir m, et nous partageons ces polygones en trois catégories selon que $q_4 = q_5 = m$, ou qu'un seul de ces deux écarts, ou aucun d'eux, égale m.

Dans la première catégorie, les deux trios S_0, S_m, S_{m_1} et S_{m_2}, S_{m_3}, S_{m_4} jouent le même rôle, et une symétrie par rapport au diamètre d'azimut m, qui permute q_3 et q_6, permet de supposer $q_3 \leqq q_6$. Les polygones distincts sont déterminés par les égalités $m_3 = m_2 + m$, $m_4 = m_3 + m = m_2 + 2m$, et les inégalités $m < m_2 - m_1 \leqq n - m_4$, donc par le système des doubles inégalités

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} 3m + 1 &\leqq m_2 \leqq \frac{n}{2}, \\ 1 &\leqq m \leqq \frac{n-2}{6}. \end{aligned} \right.$$

Leur nombre est ainsi

$$(6) \qquad C_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-2}{6}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m \right) = \left[\frac{n-2}{6}\right] \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{3}{2}\left[\frac{n+4}{6}\right] \right).$$

L'analogie de cette somme avec l'expression de B_n^6 conduit à ajouter les deux résultats, ce qui donne

$$(7) \qquad B_n^6 + C_n^6 = \left[\frac{n-2}{6}\right] \left\{ \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+3}{2}\right] - 3\left[\frac{n+4}{6}\right]\left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n-2}{6}\right]\right) \right\}.$$

19. Lorsqu'un seul des deux écarts q_4, q_5 est égal à m, la symétrie par rapport au diamètre de S_m, qui permute q_4 et q_5, permet de supposer qu'il s'agit de q_4. Les polygones de cette catégorie sont caractérisés par les relations

$$m_1 = 2m, \quad m_3 = m_2 + m, \quad m_2 - m_1 \geqq m + 1, \quad m_4 - m_3 \geqq m + 1, \quad n - m_4 \geqq m + 1,$$

donc déterminés par le système des doubles inégalités

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} m_2 + 2m + 1 &\leqq m_4 \leqq n - m - 1, \\ 3m + 1 &\leqq m_2 \leqq n - 3m - 2, \\ 1 &\leqq m \leqq \frac{n-3}{6}. \end{aligned} \right.$$

Leur nombre est

$$\begin{aligned} D_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{n-3m-2} (n - 1 - 3m - m_2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} (n - 1 - 6m)(n - 2 - 6m) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]} \{ (n-1)(n-2) - 6(2n+3)(m-1, 1) + 72(m-1, 2) \} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}\left[\frac{n-3}{6}\right] - 3(2n+3)\left(\left[\frac{n-9}{6}\right], 2\right) + 36\left(\left[\frac{n-9}{6}\right], 3\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n-3}{6}\right] \left\{ (n-1)(n-2) - 3(2n+3)\left[\frac{n+3}{6}\right] + 12\left[\frac{n+3}{6}\right]\left[\frac{n+9}{6}\right] \right\}, \end{aligned}$$

soit encore

$$(9)\qquad D_n^6 = \frac{1}{2}\left[\frac{n-3}{6}\right]\left\{(n-1)(n-2) - 3\left[\frac{n+3}{6}\right]\left(2n-1-4\left[\frac{n+3}{6}\right]\right)\right\}.$$

20. Dans la dernière des trois catégories, q_3, q_4, q_5 et q_6 sont supérieurs à m. La symétrie par rapport au diamètre de S_m, qui permute q_3 et q_6, ainsi que q_4 et q_5, permet de supposer $q_3 < q_6$, ou, si $q_3 = q_6$, qu'on a $q_4 \leqq q_5$. Cette catégorie se décompose ainsi en deux familles.

Examinons d'abord les polygones de la deuxième famille, c'est-à-dire tels qu'on ait $m_4 = n + 2m - m_2$ et $m_3 - m_2 \leqq m_4 - m_3 = n + 2m - m_2 - m_3$. Ils sont définis par les doubles inégalités

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} m_2 + m + 1 \leqq m_3 &\leqq \frac{n}{2} + m,\\ 3m + 1 \leqq m_2 &\leqq \frac{n}{2} - 1,\\ 1 \leqq m &\leqq \frac{n-4}{6},\end{aligned}\right.$$

et leur nombre est

$$\begin{aligned} E_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{6}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - m_2\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{6}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n-2}{2}\right] - 3m\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{6}\right]} \left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] - 6\left[\frac{n+2}{2}\right](m-1,\,1) + 18(m-1,\,2)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n-4}{6}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] - 3\left[\frac{n+2}{2}\right]\left[\frac{n+2}{6}\right] + 3\left[\frac{n+2}{6}\right]\left[\frac{n+8}{6}\right]\right\},\end{aligned}$$

ou enfin

$$(11)\qquad E_n^6 = \frac{1}{2}\left[\frac{n-4}{6}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right] - 3\left[\frac{n+2}{6}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n+2}{6}\right]\right)\right\}.$$

L'autre famille est caractérisée par les inégalités $m + 1 \leqq m_2 - 2m < n - m_4$, $m + 1 \leqq m_3 - m_2$, $m + 1 \leqq m_4 - m_3$, qui conduisent au système des doubles inégalités

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} m_3 + m + 1 \leqq m_4 &\leqq n - 1 + 2m - m_2,\\ m_2 + m + 1 \leqq m_3 &\leqq n - 2 + m - m_2,\\ 3m + 1 \leqq m_2 &\leqq \frac{n-3}{2},\\ 1 \leqq m &\leqq \frac{n-5}{6}.\end{aligned}\right.$$

Le nombre de ces polygones est

$$F_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \sum_{m_3=m_2+m+1}^{n-2+m-m_2} (n-1+m-m_2-m_3)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \sum_{m_2=3m+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} (n-1-2m_2)(n-2-2m_2).$$

Posons $m_2 = 3m + t$; la somme relative à m_2 s'écrit

$$\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} (n-1-6m-2t)(n-2-6m-2t)$$
$$= \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} \{(n-1-6m)(n-2-6m) - 2(2n-1-12m)(t-1,\,1) + 8(t-1,\,2)\}$$
$$= \left(\left[\frac{n-3}{2}\right] - 3m\right)\left\{(n-1-6m)(n-2-6m) - (2n-1-12m)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m\right)\right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3m\right)\right\}.$$

L'accolade est de la forme

$$A - Bm + 12m^2,$$

avec

$$(13) \qquad A = (n-1)(n-2) - (2n-1)\left[\frac{n-1}{2}\right] + \frac{4}{3}\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right],$$
$$B = 6n - 11 - 4\left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Son produit avec la parenthèse qui la précède s'écrit, à l'aide des relations rappelées en note page 43,

$$A\left[\frac{n-3}{2}\right] - \left(3A + B\left[\frac{n-3}{2}\right]\right)m + 3\left(B + 4\left[\frac{n-3}{2}\right]\right)[m(m+1) - m]$$
$$- 36[m(m+1)(m+2) - 3m(m+1) + m]$$
$$= A\left[\frac{n-3}{2}\right] - \left[3A + 3B + 36 + (B+12)\left[\frac{n-3}{2}\right]\right](m-1,\,1) + 6\left(B + 36 + 4\left[\frac{n-3}{2}\right]\right)$$
$$\times (m-1,\,2) - 216(m-1,\,3).$$

Le coefficient de $(m-1,\,1)$ se réduit à

$$3A + 2B + 24 + \left(6n + 1 - 4\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)\left[\frac{n-1}{2}\right]$$
$$= 3(n-1)(n-2) + 12n + 2 = 3n^2 + 3n + 8,$$

et celui de $(m-1, 2)$ est $18(2n+7)$. Il vient ainsi

$$F_n^6 = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]}\left\{A\left[\frac{n-3}{2}\right]-(3n^2+3n+8)(m-1, 1)\right.$$
$$\left.+18(2n+7)(m-1, 2)-216(m-1, 3)\right\},$$

donc

$$(14)\quad F_n^6 = \frac{1}{2}\left[\frac{n-5}{6}\right]\left\{A\left[\frac{n-3}{2}\right]-\frac{3n^2+3n+8}{2}\left[\frac{n+1}{6}\right]\right.$$
$$\left.+3(2n+7)\left[\frac{n+1}{6}\right]\left[\frac{n+7}{6}\right]-9\left[\frac{n+1}{6}\right]\left[\frac{n+7}{6}\right]\left[\frac{n+13}{6}\right]\right\},$$

avec l'expression (13) de A. Observons tout de suite que A n'a que deux expressions polynomiales distinctes, suivant la parité de n, qui sont

$$(13')\qquad A = \begin{cases} \dfrac{(n-2)(2n-3)}{6}, & n \text{ pair}, \\[2ex] \dfrac{(n-1)(2n-7)}{6}, & n \text{ impair}. \end{cases}$$

21. Il reste à évaluer le nombre des polygones ne présentant pas deux écarts minimaux consécutifs. Ils se partagent en catégories différant par le nombre d'écarts q_i minimaux, qui ne peut surpasser 3. Considérons d'abord celle où ce maximum est atteint. Si $q_1 = m$, les autres écarts minimaux sont nécessairement q_3 et q_5. En outre, on peut choisir l'origine S_0 et le sens positif de manière que les trois autres écarts q_2, q_4, q_6 soient dans l'ordre $q_2 \leqq q_4 \leqq q_6$. Ces polygones sont ainsi caractérisés par les conditions

$$m_2 - m_1 = m_4 - m_3 = m, \qquad m+1 \leqq m_1 - m \leqq m_3 - m_2 \leqq n - m_4,$$

donc, pour les seules indéterminées m, m_1, m_3, par le système

$$(15)\qquad \begin{cases} 2m_1 \leqq m_3 \leqq \dfrac{n+m_1}{2}, \\[1ex] 2m+1 \leqq m_1 \leqq \dfrac{n}{3}, \\[1ex] 1 \leqq m \leqq \dfrac{n-3}{6}. \end{cases}$$

Leur nombre est

$$G_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]}\ \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\left(\left[\frac{n+m_1}{2}\right]+1-2m_1\right) = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-3}{6}\right]}\ \sum_{t=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]-2m}\left(\left[\frac{n-3t}{2}\right]+1-3m\right),$$

où l'on a posé $m_1 = 2m + t$. Dans la somme relative à t, la contribution des valeurs paires $t = 2p$ est

$$\sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{6}\right]-m} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1 - 3m - 3p\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{6}\right] - m\right)\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right] - 1 - 3m\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{n}{6}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right] - 1\right) - \left(2\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)m + 3m^2\right\}.$$

La contribution des valeurs impaires de t se déduit de cette expression en changeant n en $n + 3$, et la somme totale relative à t est

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{n}{6}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right] - 1\right)\right.$$
$$\left. + \left[\frac{n+3}{6}\right]\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3\left[\frac{n+3}{6}\right] + 1\right) - 2nm + 6m^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{n}{6}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right] - 1\right)\right.$$
$$\left. + \left[\frac{n+3}{6}\right]\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3\left[\frac{n+3}{6}\right] + 1\right) - 2(n+3)(m-1,\ 1) + 12(m-1,\ 2)\right\}.$$

Par suite,

$$G_n^6 = \frac{1}{2}\left[\frac{n-3}{6}\right]\left\{\left[\frac{n}{6}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right] - 1\right) + \left[\frac{n+3}{6}\right]\left(2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3\left[\frac{n+3}{6}\right] + 1\right)\right.$$
$$\left. - (n+3)\left[\frac{n+3}{6}\right] + 2\left[\frac{n+3}{6}\right]\left(\left[\frac{n+3}{6}\right] + 1\right)\right\},$$

soit enfin

$$G_n^6 = \frac{1}{2}\left[\frac{n-3}{6}\right]\left(A\left[\frac{n}{6}\right] - B\left[\frac{n+3}{6}\right]\right), \tag{16}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} A &= 2\left[\frac{n}{2}\right] - 3\left[\frac{n}{6}\right] - 1, \\ B &= 2\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right] - n. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

22. Lorsque le polygone ne présente que deux écarts minimaux, dont $q_1 = m$, l'autre écart minimal est q_3, ou q_4, ou q_5. Les deux catégories de polygones où c'est q_3, ou q_5, sont équivalentes grâce à la symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m}{2}$. La troisième catégorie, où $q_4 = m$, sera examinée plus loin.

Supposons donc $q_1 = q_3 = m$, $q_i \geqq m + 1$ pour $i = 2, 4, 5, 6$. La symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m + m_1}{2}$ permute q_4 et q_6, et permet de supposer $q_4 \leqq q_6$. Ces polygones sont déterminés par les conditions $m_1 \geqq 2m+1$, $m_2 = m_1 + m$, $m+1 \leqq m_3 - m_2 \leqq n - m_4$, $m_4 - m_3 \geqq m+1$, donc par le système des doubles inégalités

$$(18) \qquad \left\{\begin{aligned} m_3 + m + 1 \leqq m_4 &\leqq n + m + m_1 - m_3, \\ m_1 + 2m + 1 \leqq m_3 &\leqq \frac{n - 1 + m_1}{2}, \\ 2m + 1 \leqq m_1 &\leqq n - 3 - 4m, \\ 1 \leqq m &\leqq \frac{n-4}{6}. \end{aligned}\right.$$

Le nombre de ces polygones est ainsi

$$\begin{aligned} H_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{6}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{n-3-4m} \sum_{m_3=m_1+2m+1}^{\left[\frac{n-1+m_1}{2}\right]} (n + m_1 - 2m_3) \\ &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{6}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{n-3-4m} \left(\left[\frac{n-m_1}{2}\right] - 2m\right)\left(\left[\frac{n-1-m_1}{2}\right] - 2m\right). \end{aligned}$$

La somme relative à m_1, où l'on pose $m_1 = 2m + t$, puis $t = 2p$ ou $2p - 1$, s'écrit

$$(19) \qquad \begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n-3-6m} \left(\left[\frac{n-t}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n-1-t}{2}\right] - 3m\right) \\ &= \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-3-6m}{2}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m - p\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m - p\right) \\ &+ \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-2-6m}{2}\right]} \left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3m - p\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m - p\right), \end{aligned}$$

de sorte que la dernière somme se déduit de l'avant-dernière en changeant n en $n+1$. Celle-ci s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-3-6m}{2}\right]} \left\{\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m\right) - (n-6m)(p-1, 1) + 2(p-1, 2)\right\} \\ &= \left[\frac{n-3-6m}{2}\right]\left[\frac{n-1-6m}{2}\right]\left\{\left[\frac{n}{2}\right] - 3m - \frac{n-6m}{2} + \frac{1}{3}\left[\frac{n+1-6m}{2}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left(\left[\frac{n-3}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m\right)\left(4\left[\frac{n}{2}\right] - n - 6m\right). \end{aligned}$$

C'est un polynome en m de la forme $\frac{1}{6}(a_n - 3bm + 9cm^2 - 54m^3)$, avec

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(4\left[\frac{n}{2}\right]-n\right), \\ b &= 2\left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left(4\left[\frac{n}{2}\right]-n\right)\left(2\left[\frac{n-1}{2}\right]-1\right), \\ c &= 3n-6. \end{aligned}$$

La parenthèse polynomiale s'écrit encore

$$\begin{aligned} &a_n - 3(b+3c+18)m + 9(c+18)m(m+1) - 54m(m+1)(m+2) \\ &\quad = a_n - 3b_n(m-1,\ 1) + 54(n+4)(m-1,\ 2) - 6\times 54(m-1,\ 3), \end{aligned}$$

où

$$b_n = b+3c+18 = 2\left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left(4\left[\frac{n}{2}\right]-n\right)\left(2\left[\frac{n-1}{2}\right]-1\right)+9n.$$

Ainsi, la somme (19) vaut

$$\frac{1}{6}\{A - 3B(m-1,\ 1) + 54(2n+9)(m-1,\ 2) - 12\times 54(m-1,\ 3)\},$$

où $A = a_n + a_{n+1}$, $B = b_n + b_{n+1}$; par suite,

$$\begin{aligned} H_n^6 &= \frac{1}{6}\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-4}{6}\right]}\{A - 3B(m-1,\ 1) + 54(2n+9)(m-1,\ 2) - 12\times 54(m-1,\ 3)\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{A\left[\frac{n-4}{6}\right] - 3B\left(\left[\frac{n-10}{6}\right],\ 2\right) + 54(2n+9)\left(\left[\frac{n-10}{6}\right],\ 3\right)\right. \\ &\qquad\left. - 12\times 54\left(\left[\frac{n-10}{6}\right],\ 4\right)\right\}, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned} (20)\qquad H_n^6 = \frac{1}{6}\left[\frac{n-4}{6}\right]\left\{A - \frac{3}{2}B\left[\frac{n+2}{6}\right] + 9(2n+9)\left[\frac{n+2}{6}\right]\left[\frac{n+8}{6}\right]\right. \\ \left. - 27\left[\frac{n+2}{6}\right]\left[\frac{n+8}{6}\right]\left[\frac{n+14}{6}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Les expressions de A et B sont des polynomes en n qui ne dépendent que de la parité de n. On voit tout de suite que n pair donne

$$a_n = \frac{n(n-2)(n-4)}{4}, \qquad b_n = \frac{3n^2+6n+8}{2},$$

tandis que n impair donne

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4}, \qquad b_n = \frac{3n^2+6n+11}{2},$$

Par suite

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} A = \begin{cases} \dfrac{1}{4} n(n-2)(2n-5) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{1}{4}(n-1)(n-3)(2n-1) & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases} \\ B = 3n^2 + 9n + 14. \end{array}\right.$$

23. Nous supposons maintenant $q_1 = q_4 = m < q_2$, q_3, q_5, q_6. La symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m}{2}$, qui permute q_2 avec q_6 et q_3 avec q_5 permet de supposer $q_2 + q_3 \leqq q_5 + q_6$, c'est-à-dire $m_2 - m \leqq n - m_3 = n - m_2 - m$, donc $m_2 \leqq \frac{n}{2}$. D'autre part, la symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m+m_2}{2}$, qui permute q_2 avec q_3 et q_5 avec q_6 permet de supposer $q_2 \leqq q_3$.

Si $m_2 < \frac{n}{2}$, on aura donc soit $q_2 < q_3$, soit $q_2 = q_3$ avec $q_5 \leqq q_6$, ce qui nous amène à distinguer deux catégories.

Si $m_2 = \frac{n}{2}$, ce qui ne peut se produire que lorsque n est pair, on peut toujours supposer $q_2 \leqq q_3$, q_5, q_6. Si $q_2 = q_3$, on a nécessairement $q_2 = q_5 = q_6$, tandis que, lorsque $q_2 < q_3$, donc $2q_2 < q_5 + q_6$, on suppose $q_2 \leqq q_5$ et q_6; la distinction entre ces deux cas est inutile pour l'évaluation des polygones de cette troisième eatégorie.

Évaluons d'abord le nombre des polygones de la première catégorie, caractérisée par les conditions $m_2 < \frac{n}{2}$, $q_2 < q_3$, $m + 1 \leqq q_2$, q_5 et q_6, c'est-à-dire $m_2 < \frac{n}{2}$, $2m_1 < m + m_2$, $2m + 1 \leqq m_1$, $2m + 1 \leqq m_4 - m_2$, $m + 1 \leqq n - m_4$. On obtient ainsi les doubles inégalités

$$m_2 + 2m + 1 \leqq m_4 \leqq n - m - 1,$$

$$2m_1 + 1 - m \leqq m_2 \leqq \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, \\ n - 2 - 3m, \end{cases}$$

$$2m + 1 \leqq m_1 \leqq \begin{cases} \dfrac{n - 3 + 2m}{4}, \\ \dfrac{n - 3 - 2m}{2}, \end{cases}$$

$$1 \leqq m \leqq \frac{n-7}{6}.$$

On voit tout de suite que $\frac{n-3+2m}{4} < \frac{n-3-2m}{2}$ et $\frac{n-1}{2} < n-2-3m$, grâce à la dernière inégalité du système. Celui-ci équivaut donc à

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} m_2+2m+1 \leqq m_4 \leqq n-m-1, \\ 2m_1+1-m \leqq m_2 \leqq \dfrac{n-1}{2}, \\ 2m+1 \leqq m_1 \leqq \dfrac{n-3+2m}{4}, \\ 1 \leqq m \leqq \dfrac{n-7}{6}, \end{array}\right.$$

et le nombre des polygones de cette catégorie est

$$\mathrm{I}_n^6 = \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-7}{6}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-3+2m}{4}\right]} \sum_{m_2=2m_1+1-m}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (n-1-3m-m_2).$$

La somme relative à m_2 vaut

$$\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+m-2m_1\right)\left(2n-3-5m-2m_1-\left[\frac{n-1}{2}\right]\right),$$

de sorte qu'en posant $m_1 = 2m+t$, la somme relative à m_1 s'écrit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3-6m}{4}\right]}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-3m-2t\right)\left(2n-3-\left[\frac{n-1}{2}\right]-9m-2t\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3-6m}{4}\right]}\left\{\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-3m\right)\left(2n-3-\left[\frac{n-1}{2}\right]-9m\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. -2(2n-1-12m)(t-1,\ 1)+8(t-1,\ 2)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n-3-6m}{4}\right]\left\{\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-3m\right)\left(2n-3-\left[\frac{n-1}{2}\right]-9m\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. -(2n-1-12m)\left[\frac{n+1-6m}{4}\right]+\frac{4}{3}\left[\frac{n+1-6m}{4}\right]\left[\frac{n+5-6m}{4}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Dans la dernière somme à effectuer, distinguons les valeurs paires de m de ses valeurs impaires. Les premières, $m = 2p$, donnent la somme partielle

$$\begin{aligned} \mathrm{I}'^6_n = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-7}{12}\right]}\left(\left[\frac{n-3}{4}\right]-3p\right)&\left\{\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-6p\right)\left(2n-3-\left[\frac{n-1}{2}\right]-18p\right)\right. \\ &-(2n-1-24p)\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-3p\right) \\ &\left.+\frac{4}{3}\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]-3p\right)\left(\left[\frac{n+5}{4}\right]-3p\right)\right\}, \end{aligned}$$

tandis que les valeurs impaires $m = 2p - 1$ fournissent la somme I'^{6}_{n+6}. Dans l'expression de I'^{6}_{n}, l'accolade est de la forme $A - bp + 48p^2$, avec

$$(24)\quad A = \left[\frac{n-1}{2}\right]\left(2n - 3 - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) - (2n-1)\left[\frac{n+1}{4}\right] + \frac{4}{3}\left[\frac{n+1}{4}\right]\left[\frac{n+5}{4}\right],$$

$$b = 6n - 11 + 12\left[\frac{n-1}{2}\right] - 16\left[\frac{n+1}{4}\right];$$

son produit avec le facteur qui la précède s'écrit

$$A\left[\frac{n-3}{4}\right] - \left(b\left[\frac{n-3}{4}\right] + 3A\right)p + \left(48\left[\frac{n-3}{4}\right] + 3b\right)p^2 - 144p^3,$$

donc, grâce aux relations citées en note à la page 43,

$$A\left[\frac{n-3}{4}\right] - \left\{(b+48)\left[\frac{n-3}{4}\right] + 3(A + b + 48)\right\}(p-1, 1)$$
$$+ 6\left(16\left[\frac{n-3}{4}\right] + b + 144\right)(p-1, 2) - 36 \times 24(p-1, 3).$$

En posant

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} 2B &= (b+48)\left[\frac{n-3}{4}\right] + 3(A+b+48) = 3A + (b+48)\left[\frac{n+9}{4}\right],\\ C &= 16\left[\frac{n-3}{4}\right] + b + 144 = 16\left[\frac{n+1}{4}\right] + b + 128,\end{aligned}\right.$$

il vient

$$\dot{I}'^{6}_{n} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\left[\frac{n-7}{12}\right]}\left\{A\left[\frac{n-3}{4}\right] - 2B(p-1, 1) + 6C(p-1, 2) - 36 \times 24(p-1, 3)\right\},$$

ou

$$(26)\quad \dot{I}'^{6}_{n} = \frac{1}{2}\left[\frac{n-7}{12}\right]\left\{A\left[\frac{n-3}{4}\right] - B\left[\frac{n+5}{12}\right] + C\left[\frac{n+5}{12}\right]\left[\frac{n+17}{12}\right]\right.$$
$$\left. - 36\left[\frac{n+5}{12}\right]\left[\frac{n+17}{12}\right]\left[\frac{n+29}{12}\right]\right\},$$

et

$$(27)\quad I^{6}_{n} = \dot{I}'^{6}_{n} + \dot{I}'^{6}_{n+6}.$$

Les expressions polynomiales de A, B, C dépendent de la classe (mod 4) de n. On trouve aisément

$$12A = \begin{cases} 4n^2 - 23n + 24, & n \equiv 0 \pmod 4,\\ (n-1)(4n-9), & n \equiv 1 \quad \text{»}\\ (n-2)(4n-7), & n \equiv 2 \quad \text{»}\\ 4n^2 - 21n + 23, & n \equiv 3 \quad \text{»}\end{cases}$$

$$4B = \begin{cases} 6n^2+33n+112, & n\equiv 0 \pmod 4, \\ 6n^2+39n+127, & n\equiv 1 \quad \text{»} \\ 6n^2+33n+106, & n\equiv 2 \quad \text{»} \\ 6n^2+39n+133, & n\equiv 3 \quad \text{»} \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 3(4n+35), & n\equiv 0 \pmod 2, \\ 3(4n+37), & n\equiv 1 \quad \text{»} \end{cases}$$

24. Les polygones de la deuxième catégorie sont ceux pour lesquels $m_2 < \frac{n}{2}$, $q_2 = q_3$, $q_5 \leqq q_6$, c'est-à-dire $m_2 < \frac{n}{2}$, $m+1 \leqq m_1 - m = m_2 - m_1$, $m+1 \leqq m_4 - m_2 - m \leqq n - m_4$. Ces relations fournissent l'égalité $m_2 = 2m_1 - m$ et les doubles inégalités

$$(28)\qquad \begin{cases} 2m_1 + m + 1 \leqq m_4 \leqq \dfrac{n}{2} + m_1, \\ 2m+1 \leqq m_1 \leqq \begin{cases} \dfrac{n+2m-1}{4}, \\ \dfrac{n-2m-2}{2}, \end{cases} \\ 1 \leqq m \leqq \dfrac{n-5}{6}, \end{cases}$$

où l'on ne conserve que le premier terme de l'accolade, car

$$\frac{n+2m-1}{4} < \frac{n-2m-2}{2}$$

en vertu de la dernière des inégalités. Le nombre de ces polygones est ainsi

$$\begin{aligned} J_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n+2m-1}{4}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right] - m - m_1\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \left[\frac{n-1-6m}{4}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n+3-6m}{4}\right] - 6m\right). \end{aligned}$$

Ici encore, on a

$$(29)\qquad J_n^6 = J_n'^6 + J_{n+6}'^6,$$

où $J_n'^6$ est la somme fournie par les valeurs paires de m, et $J_{n+6}'^6$ par les valeurs impaires. En posant $m = 2p$, il vient

$$J_n'^6 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\left[\frac{n-5}{12}\right]} \left(\left[\frac{n-1}{4}\right] - 3p\right)\left(2\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n+3}{4}\right] - 9p\right).$$

Le produit des deux parenthèses s'écrit

$$\begin{aligned}&\left[\frac{n-1}{4}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n+3}{4}\right]\right)-3\left(2\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{n-1}{4}\right]-1\right)p+27p^2\\&\quad=\mathrm{A}-6\mathrm{B}(p-1,1)+54(p-1,2),\end{aligned}$$

avec

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathrm{A}=\left[\frac{n-1}{4}\right]\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n+3}{4}\right]\right),\\&\mathrm{B}=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{4}\right]+4.\end{aligned}\right.$$

Il vient donc

$$(31)\qquad \mathrm{J}_n'^{6}=\frac{1}{2}\left[\frac{n-5}{12}\right]\left(\mathrm{A}-3\mathrm{B}\left[\frac{n+7}{12}\right]+9\left[\frac{n+7}{12}\right]\left[\frac{n+19}{12}\right]\right).$$

Les expressions polynomiales de A, B sont

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}=\frac{3n(n-4)}{16}, &&\mathrm{B}=\frac{3n+12}{4}, &&n\equiv 0 \pmod 4,\\
&\mathrm{A}=\frac{(n-1)(3n-7)}{16}, &&\mathrm{B}=\frac{3n+13}{4}, &&n\equiv 1 \quad \text{»}\\
&\mathrm{A}=\frac{(n-2)(3n-2)}{16}, &&\mathrm{B}=\frac{3n+14}{4}, &&n\equiv 2 \quad \text{»}\\
&\mathrm{A}=\frac{(n-3)(3n-5)}{16}, &&\mathrm{B}=\frac{3n+11}{4}, &&n\equiv 3 \quad \text{»}
\end{aligned}$$

25. Évaluons maintenant le nombre des polygones de la troisième catégorie définie au paragraphe 23, et qui n'existe que si n est pair, soit $n=2n'$. Elle est caractérisée par $m_2=n'$, $q_2\leqq q_3$, q_5 et q_6, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned}m+1\leqq m_1-m\leqq m_2-m_1&=n'-m_1,\\ m_1-m\leqq m_4-m_3&=m_4-n'-m,\\ m_1-m\leqq n\ -m_4&=2n'-m_4,\end{aligned}$$

d'où résulte le système des doubles inégalités

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned}&m_1+n'\leqq m_4\leqq 2n'+m-m_1,\\&2m+1\leqq m_1\leqq\frac{n'+m}{2},\\&\quad 1\leqq m\leqq\frac{n'-2}{3}.\end{aligned}\right.$$

Le nombre de ces polygones est

$$\mathrm{K}_n^6=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n'-2}{3}\right]}\ \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n'+m}{2}\right]}(n'+1+m-2m_1)=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n'-2}{3}\right]}\left[\frac{n'-3m}{2}\right]\left[\frac{n'+1-3m}{2}\right].$$

En posant $m = 2p$ ou $m = 2p - 1$, on peut écrire

$$K_n^6 = K_n'^6 + K_{n+6}'^6, \tag{33}$$

où

$$K_n'^6 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n'-2}{6}\right]} \left(\left[\frac{n'}{2}\right] - 3p\right)\left(\left[\frac{n'+1}{2}\right] - 3p\right)$$

est la somme fournie par les valeurs paires de m, tandis que $m = 2p - 1$ donne la somme qui s'en déduit en changeant n' en $n'+3$, donc n en $n+6$. On a d'ailleurs

$$K_n'^6 = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n'-2}{6}\right]} \left\{\left[\frac{n'}{2}\right]\left[\frac{n'+1}{2}\right] - 3(n'+3)(p-1,\, 1) + 18(p-1,\, 2)\right\},$$

donc

$$K_n'^6 = \left[\frac{n'-2}{6}\right]\left\{\left[\frac{n'}{2}\right]\left[\frac{n'+1}{2}\right] - \frac{3}{2}(n'+3)\left[\frac{n'+4}{6}\right] + 3\left[\frac{n'+4}{6}\right]\left[\frac{n'+10}{6}\right]\right\}. \tag{34}$$

26. Il ne reste plus qu'à évaluer le nombre des polygones qui ne présentent qu'un seul écart q_i minimal $(1 \leqq i \leqq 6)$, et l'on suppose toujours qu'il s'agit de q_1. La seule symétrie qui conserve le couple S_0, S_m est la symétrie par rapport au diamètre d'azimut $\frac{m}{2}$, qui permute q_2 avec q_6 et q_3 avec q_5. Elle permet donc de se borner aux hypothèses $q_2 < q_6$ ou, si $q_2 = q_6$, à $q_3 \leqq q_5$.

Nous étudions d'abord le deuxième cas, qui est le plus simple. Il est caractérisé par les relations $m + 1 \leqq m_1 - m = n - m_4$, $m + 1 \leqq m_2 - m_1 \leqq m_4 - m_3$, $m + 1 \leqq m_3 - m_2$, qui fournissent le système des doubles inégalités

$$\left\{\begin{aligned} m_2 + m + 1 \leqq m_3 &\leqq n + m - m_2, \\ m_1 + m + 1 \leqq m_2 &\leqq \frac{n-1}{2}, \\ 2m + 1 \leqq m_1 &\leqq \frac{n-3}{2} - m, \\ 1 \leqq m &\leqq \frac{n-5}{6}. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Le nombre des polygones de cette catégorie est ainsi

$$\begin{aligned} L_n^6 &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-m} \sum_{m_2=m_1+m+1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (n - 2m_2) \\ &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-m} \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - m - m_1\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - m - m_1\right). \end{aligned}$$

Avec $m_1 = 2m + t$, la somme relative à m_1 s'écrit

$$\sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} \left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m - t\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m - t\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]-3m} \left\{\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 3m\right) - (n-6m)(t-1, 1) + 2(t-1, 2)\right\}$$

$$= \left(\left[\frac{n-3}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m\right)\left\{\left[\frac{n}{2}\right] - 3m - \frac{n-6m}{2} + \frac{1}{3}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right] - 3m\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left[\frac{n-3}{2}\right] - 3m\right)\left(\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3m\right)\left(4\left[\frac{n}{2}\right] - n - 6m\right).$$

Grâce aux formules en note à la page 43, le produit de ces trois parenthèses se développe en

$$\begin{aligned} &A - bm + cm^2 - 54m^3 \\ &\quad = A - (b + c + 54)m + (c + 3 \times 54)m(m+1) - 54m(m+1)(m+2), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{n-3}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(4\left[\frac{n}{2}\right] - n\right), \\ b &= 3\left(6\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right] - 3n + 4\right), \\ c &= 27(n-2); \end{aligned} \tag{36}$$

par suite

$$\begin{aligned} b + c + 54 &= 6\left(3\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right] + 3n + 2\right), \\ c + 3 \times 54 &= 27(n+4). \end{aligned}$$

En définitive, en posant

$$B = 3\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right] + 3n + 2, \tag{37}$$

il vient

$$L_n^6 = \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-5}{6}\right]} \{A - 6B(m-1, 1) + 54(n+4)(m-1, 2) - 6 \times 54(m-1, 3)\},$$

donc

$$\begin{aligned} L_n^6 = \frac{1}{6}\left[\frac{n-5}{6}\right]\Big\{A &- 3B\left[\frac{n+1}{6}\right] + 9(n+4)\left[\frac{n+1}{6}\right]\left[\frac{n+7}{6}\right] \\ &- \frac{27}{2}\left[\frac{n+1}{6}\right]\left[\frac{n+7}{6}\right]\left[\frac{n+13}{6}\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{38}$$

Les expressions polynomiales de (36) et (37) sont

$$A=\begin{cases}\frac{1}{4}n(n-2)(n-4), & n \text{ pair},\\ \frac{1}{4}(n-1)(n-2)(n-3), & n \text{ impair},\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}\frac{1}{4}(3n^2+6n+8), & n \text{ pair},\\ \frac{1}{4}(3n^2+6n+11), & n \text{ impair}.\end{cases}$$

27, La dernière catégorie est définie par les conditions $m+1\leqq q_2<q_6$ et $m+1\leqq q_3,\ q_4,\ q_5$, c'est-à-dire

$$m+1\leqq m_1-m<n-m_4,\qquad m+1\leqq m_2-m_1,$$
$$m+1\leqq m_3-m_2,\qquad m+1\leqq m_4-m_3.$$

Ces polygones sont ainsi déterminés par le système d'inégalités

$$(39)\qquad \begin{cases} m_3+m+1\leqq m_4\leqq n-1+m-m_1,\\ m_2+m+1\leqq m_3\leqq n-2-m_1,\\ m_1+m+1\leqq m_2\leqq n-3-m-m_1,\\ 2m+1\leqq m_1\leqq \dfrac{n-4}{2}-m,\\ 1\leqq m\leqq \dfrac{n-6}{6}.\end{cases}$$

Leur nombre est la somme quadruple

$$M_n^6=\sum_{m=1}^{\left[\frac{n-6}{6}\right]}\ \sum_{m_1=2m+1}^{\left[\frac{n-4}{2}\right]-m}\ \sum_{m_2=m_1+m+1}^{n-3-m-m_1}\ \sum_{m_3=m_2+m+1}^{n-2-m_1}(n-1-m_1-m_3).$$

En posant $t=n-2-m-m_1-m_2$, la somme relative à m_3 vaut $(t-1,\ 2)$. La somme relative à m_2 s'écrit alors

$$\sum_{t=1}^{n-3-2m-2m_1}(t-1,\ 2)=(n-4-2m-2m_1,\ 3)$$
$$=\frac{1}{6}(n-3-2m-2m_1)(n-2-2m-2m_1)(n-1-2m-2m_1).$$

Avec la nouvelle lettre $t=m_1-2m$, ceci prend la forme

$$\frac{1}{6}(n-3-6m-2t)(n-2-6m-2t)(n-1-6m-2t)$$
$$=(n-4-6m,\ 3)-\left[n^2-4n+\frac{11}{3}-(2n-4)6m+(6m)^2\right]t$$
$$+2(n-2-6m)t^2-\frac{4}{3}t^3.$$

Grâce aux formules en note à la page 43, la somme relative à m_1 s'écrit

$$(40)\quad \sum_{t=1}^{\left[\frac{n-4}{2}\right]-3m} \{(n-4-6m, 3)-(n-1-6m)^2(t-1, 1)$$
$$+4(n-6m)(t-1, 2)-8(t-1, 3)\}$$
$$=\left(\left[\frac{n-4}{2}\right]-3m\right)\left\{\left(n-4-6m, 3\right)-\frac{1}{2}(n-1-6m)^2\left[\frac{n-2-6m}{2}\right]\right.$$
$$+\frac{2}{3}(n-6m)\left[\frac{n-2-6m}{2}\right]\left[\frac{n-6m}{2}\right]$$
$$\left.-\frac{1}{3}\left[\frac{n-2-6m}{2}\right]\left[\frac{n-6m}{2}\right]\left[\frac{n+2-6m}{2}\right]\right\}.$$

Lorsque n est pair, soit $n=2n'$, ceci s'écrit

$$(40')\quad (n'-2-3m)(n'-1-3m)\left\{\frac{1}{3}(n-3-6m)(n-1-6m)-\frac{1}{2}(n-1-6m)^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}(n-6m)^2-\frac{1}{12}(n-6m)(n+2-6m)\right\}$$
$$=\frac{1}{48}(n-4-6m)(n-2-6m)\{n^2-6n+6-12(n-3)m+36m^2\};$$

pour $n=2n'+1$, (40) s'écrit

$$(40'')\quad (n'-2-3m)(n'-1-3m)(n-1-6m)\left\{\frac{1}{3}(n-2-6m)-\frac{1}{2}(n-1-6m)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}(n-6m)-\frac{1}{12}(n+1-6m)\right\}$$
$$=\frac{1}{48}(n-5-6m)(n-3-6m)^2(n-1-6m).$$

(40') et (40'') sont deux polynomes de degré 4 en m, de la forme

$$\frac{1}{48}\{A-B\times 6m+C\times(6m)^2-D\times(6m)^3+(6m)^4\},$$

que les formules de la page 43 transforment en

$$\frac{1}{48}\{A-6(B+6C+6^2D+6^3)m+6^2(C+18D+7\times 6^2)m(m+1)$$
$$-6^3(D+36)m(m+1)(m+2)+6^4m(m+1)(m+2)(m+3)\}.$$

Dans les deux cas,

$$B=4(n-3)(n^2-6n+7),\qquad C=2(3n^2-18n+25),\qquad D=4(n-3),$$

donc

$$B+6C+6^2D+6^3=4n(n^2+7),$$
$$C+18D+7\times 6^2=2(3n^2+18n+43),$$
$$D+36=4(n+6).$$

Par contre,

$$(41)\qquad A = \begin{cases} (n-2)(n-4)(n^2-6n+6), & n \text{ pair}, \\ (n-1)(n-5)(n-3)^2, & n \text{ impair}. \end{cases}$$

Il vient ainsi

$$M_n^6 = \frac{1}{48} \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-6}{6}\right]} \{ A - 24n(n^2+7)(m-1,\,1) + 4\times 6^2(3n^2+18n+43)(m-1,\,2)$$
$$- 4\times 6^4(n+6)(m-1,\,3) + 4\times 6^5(m-1,\,4) \},$$

donc

$$(42)\qquad M_n^6 = \frac{1}{48}\left[\frac{n-6}{6}\right] \Big\{ A - 12n(n^2+7)\left[\frac{n}{6}\right] + 24(3n^2+18n+43)\left[\frac{n}{6}\right]\left[\frac{n+6}{6}\right]$$
$$- 6^3(n+6)\left[\frac{n}{6}\right]\left[\frac{n+6}{6}\right]\left[\frac{n+12}{6}\right]$$
$$+ \frac{6^4}{5}\left[\frac{n}{6}\right]\left[\frac{n+6}{6}\right]\left[\frac{n+12}{6}\right]\left[\frac{n+18}{6}\right] \Big\},$$

avec l'une ou l'autre des expressions (41) de A.

28. Il s'agit maintenant de calculer

$$P_n^6 = [A_n^6 + (B_n^6 + C_n^6) + D_n^6] + [E_n^6 + F_n^6 + G_n^6 + H_n^6] + [I_n^6 + J_n^6 + K_n^6] + L_n^6 + M_n^6.$$

Des calculs fastidieux que nous omettons donnent tout d'abord

$$4!\,A_n^6 = \begin{cases} n(n-2), & n \equiv 0,\, 2 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-3), & n \equiv 1,\, 3 \quad \text{»} \\ (n+2)(n-4), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n+1)(n-5), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

(7) donne ensuite

$$3\times 4!\,(B_n^6 + C_n^6) = \begin{cases} n^2(n-6), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n+2)(n-1)(n-7), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(n^2-4n-8), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n+3)(n-3)(n-6), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n+2)(n-4)^2, & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(n^2-n-14), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

L'expression (9) de D_n^6 donne

$$3\times 4!\,D_n^6 = \begin{cases} (n-6)(2n^2-15n+12), & n \equiv 0 \pmod{6}, \\ (n-1)(n-7)(2n-11), & n \equiv 1 \quad \text{»} \\ (n-2)(n-8)(2n-7), & n \equiv 2 \quad \text{»} \\ (n-3)(2n^2-21n+39), & n \equiv 3 \quad \text{»} \\ (n-4)(2n^2-19n+26), & n \equiv 4 \quad \text{»} \\ (n-5)(2n^2-17n+17), & n \equiv 5 \quad \text{»} \end{cases}$$

la somme $B_n^6 + C_n^6 + D_n^6$ a des valeurs plus simples, soit

$$4!\,(B_n^6 + C_n^6 + D_n^6) = \begin{cases} (n-1)(n-4)(n-6), & n \equiv 0,\ 4 \pmod 6, \\ (n-1)(n-3)(n-7), & n \equiv 1,\ 3 \quad » \\ (n-2)(n^2-9n+16), & n \equiv 2 \quad » \\ (n-5)(n^2-6n+1), & n \equiv 5 \quad » \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$(43) \qquad 4!\,(A_n^6 + B_n^6 + C_n^6 + D_n^6) = \begin{cases} n^3 - 10n^2 + 32n - 24, & n \equiv 0 \pmod 6, \\ (n-1)(n-3)(n-6), & n \equiv 1,\ 3 \quad » \\ (n-2)(n-4)^2, & n \equiv 2,\ 4 \quad » \\ (n-5)(n^2-5n+2), & n \equiv 5 \quad » \end{cases}$$

(11) donne ensuite

$$6 \times 4!\, E_n^6 = \begin{cases} n(n-6)^2, & n \equiv 0 \pmod 6, \\ (n-1)(n-7)^2, & n \equiv 1 \quad » \\ (n-2)^2(n-8), & n \equiv 2 \quad » \\ (n-3)^2(n-9), & n \equiv 3 \quad » \\ (n-4)(n^2-8n+4), & n \equiv 4 \quad » \\ (n-5)(n^2-10n+13), & n \equiv 5 \quad » \end{cases}$$

Les diverses expressions de F_n^6 sont fournies par

$$12 \times 4!\, F_n^6 = \begin{cases} (n-6)(n^3-16n^2+64n-48), & n \equiv 0 \pmod 6, \\ (n-1)(n-7)(n^2-14n+41), & n \equiv 1 \quad » \\ (n-2)(n-8)(n^2-12n+24), & n \equiv 2 \quad » \\ (n-3)(n-9)(n^2-10n+13), & n \equiv 3 \quad » \\ (n-4)(n-10)(n^2-8n+8), & n \equiv 4 \quad » \\ (n-5)(n^3-17n^2+75n-51), & n \equiv 5 \quad » \end{cases}$$

(16) et (17) donnent ensuite

$$9 \times 4!\, G_n^6 = \begin{cases} n(n-3)(n-6), & n \equiv 0 \pmod 6, \\ (n-1)^2(n-7), & n \equiv 1 \quad » \\ (n+1)(n-2)(n-8), & n \equiv 2 \quad » \\ (n-3)^3, & n \equiv 3 \quad » \\ (n+2)(n-4)(n-7), & n \equiv 4 \quad » \\ (n+1)(n-5)^2, & n \equiv 5 \quad » \end{cases}$$

(20) et (21) donnent de même

$$12 \times 4!\, H_n^6 = \begin{cases} n(n-6)(n^2-12n+28), & n \equiv 0 \pmod 6, \\ (n-1)(n-7)(n^2-10n+13), & n \equiv 1 \quad » \\ (n-2)(n-8)(n^2-8n+4) & n \equiv 2 \quad » \\ (n-3)(n-9)(n^2-6n+1), & n \equiv 3 \quad » \\ (n-4)(n^3-14n^2+44n+8), & n \equiv 4 \quad » \\ (n-5)(n^3-13n^2+35n+1), & n \equiv 5 \quad » \end{cases}$$

Afin de faciliter le calcul final, effectuons la somme partielle $E_n^6 + F_n^6 + G_n^6 + H_n^6$, puis, en utilisant (43), $A_n^6 + B_n^6 + \ldots + H_n^6$; on trouve successivement

$$18 \times 4!\,(E_n^6 + F_n^6 + G_n^6 + H_n^6) = \left\{ \begin{array}{lll} (n-6)(3n^3 - 37n^2 + 114n - 72), & n \equiv 0 & (\text{mod } 6), \\ (n-1)(n-7)(3n^2 - 31n + 58), & n \equiv 1 & \text{»} \\ (n-2)(n-8)(3n^2 - 25n + 38), & n \equiv 2 & \text{»} \\ (n-3)(3n^3 - 46n^2 + 189n - 90), & n \equiv 3 & \text{»} \\ (n-4)(3n^3 - 43n^2 + 164n - 124), & n \equiv 4 & \text{»} \\ (n-5)(3n^3 - 40n^2 + 127n - 46), & n \equiv 5 & \text{»} \end{array} \right.$$

$$(44) \qquad 18 \times 4!\,(A_n^6 + B_n^6 + \ldots + H_n^6) = \left\{ \begin{array}{l} n(3n^3 - 37n^2 + 156n - 180), \\ \qquad n \equiv 0 \quad (\text{mod } 6), \\ (n-1)(3n^3 - 3\ n^2 + 113n - 82), \\ \qquad n \equiv 1 \qquad \text{»} \\ (n-2)(3n^3 - 31n^2 + 94n - 16), \\ \qquad n \equiv 2 \qquad \text{»} \\ (n-3)(3n^3 - 28n^2 + 63n + 18), \\ \qquad n \equiv 3 \qquad \text{»} \\ (n-4)(3n^3 - 25n^2 + 56n + 20), \\ \qquad n \equiv 4 \qquad \text{»} \\ (n-5)(3n^3 - 22n^2 + 37n - 10), \\ \qquad n \equiv 5 \qquad \text{»} \end{array} \right.$$

Pour calculer I_n^6, évaluons d'abord (26), qui donne

$$2 \times 4!^2\, I_n'^6 = \left\{ \begin{array}{lll} (n-12)(n^3 - 25n^2 + 136n - 96), & n \equiv 0 & (\text{mod } 12), \\ (n-1)(n-13)(n^2 - 21n + 72), & n \equiv 1 & \text{»} \\ (n-2)(n-14)(n^2 - 21n + 66), & n \equiv 2 & \text{»} \\ (n-3)(n-15)(n^2 - 17n + 34), & n \equiv 3 & \text{»} \\ (n-4)(n-16)(n^2 - 17n + 32), & n \equiv 4 & \text{»} \\ (n-5)(n-17)(n^2 - 13n + 8), & n \equiv 5 & \text{»} \\ (n-6)(n-18)(n^2 - 13n + 10), & n \equiv 6 & \text{»} \\ (n-7)(n^3 - 28n^2 + 189n - 54), & n \equiv 7 & \text{»} \\ (n-8)(n^3 - 29n^2 + 204n - 96), & n \equiv 8 & \text{»} \\ (n-9)(n^3 - 26n^2 + 145n + 24), & n \equiv 9 & \text{»} \\ (n-10)(n^3 - 27n^2 + 160n - 44), & n \equiv 10 & \text{»} \\ (n-11)(n^3 - 24n^2 + 121n - 46), & n \equiv 11 & \text{»} \end{array} \right.$$

D'après (27), il vient alors

$$(45) \qquad 4!^2\, I_n^6 = \left\{ \begin{array}{lll} (n-12)(n^3 - 13n^2 + 52n - 48), & n \equiv 0 & (\text{mod } 12), \\ (n-1)(n-9)(n^2 - 13n + 36), & n \equiv 1, 9 & \text{»} \\ (n-2)(n^3 - 23n^2 + 162n - 312), & n \equiv 2 & \text{»} \\ (n-3)(n-7)(n^2 - 13n + 24), & n \equiv 3, 7 & \text{»} \\ (n-4)(n^3 - 21n^2 + 124n - 176), & n \equiv 4 & \text{»} \\ (n-5)(n^3 - 18n^2 + 85n - 52), & n \equiv 5 & \text{»} \\ (n-6)(n^3 - 19n^2 + 94n - 72), & n \equiv 6 & \text{»} \\ (n-8)(n^3 - 17n^2 + 72n - 96), & n \equiv 8 & \text{»} \\ (n-10)(n^3 - 15n^2 + 58n - 56), & n \equiv 10 & \text{»} \\ (n-5)(n-11)(n^2 - 7n + 8), & n \equiv 11 & \text{»} \end{array} \right.$$

(31) donne ensuite

$$16\times 4!\,J'^{6}_{n}=\begin{cases} n(n-12)^2, & n\equiv 0 \quad (\text{mod } 12),\\ (n-1)(n-9)(n-13), & n\equiv 1,9 \quad \text{»}\\ (n-2)(n-6)(n-14), & n\equiv 2,6 \quad \text{»}\\ (n-3)(n-7)(n-15), & n\equiv 3,7 \quad \text{»}\\ (n-4)^2(n-16) & n\equiv 4 \quad \text{»}\\ (n-5)(n^2-18n+49), & n\equiv 5 \quad \text{»}\\ (n-8)(n^2-16n+16), & n\equiv 8 \quad \text{»}\\ (n-10)(n^2-12n+4), & n\equiv 10 \quad \text{»}\\ (n-11)(n^2-14n+17), & n\equiv 11 \quad \text{»}\end{cases}$$

d'où l'on déduit J^6_n à l'aide de (29); il vient ainsi

$$(46)\qquad 8\times 4!\,J^{6}_{n}=\begin{cases} n(n^2-14n+56), & n\equiv 0, \quad (\text{mod } 12),\\ (n-1)(n-5)(n-9), & n\equiv 1,5,9 \quad \text{»}\\ (n-2)^2(n-10), & n\equiv 2,10 \quad \text{»}\\ (n-3)(n-5)(n-7), & n\equiv 3,7,11 \quad \text{»}\\ (n-2)(n-4)(n-8), & n\equiv 4,8 \quad \text{»}\\ (n-6)(n^2-8n-4), & n\equiv 6 \quad \text{»}\end{cases}$$

Pour déterminer K^6_n, calculons d'abord K'^6_n; avec $n=2n'$, (34) donne

$$3\times 4!\,K'^{6}_{2n'}=\begin{cases} n'(n'-3)(n'-6), & n'\equiv 0 \quad (\text{mod } 6),\\ (n'-1)^2(n'-7), & n'\equiv 1 \quad \text{»}\\ (n'-2)(n'^2-7n'+4), & n'\equiv 2 \quad \text{»}\\ (n'-3)(n'^2-6n'-3), & n'\equiv 3 \quad \text{»}\\ (n'-4)(n'^2-5n'-2), & n'\equiv 4 \quad \text{»}\\ (n'+1)(n'-5)^2, & n'\equiv 5 \quad \text{»}\end{cases}$$

d'où résulte, d'après (33),

$$(47)\qquad 12\times 4!\,K^{6}_{n}=\begin{cases} n(n^2-9n+12), & n\equiv 0 \quad (\text{mod } 12),\\ (n-2)(n^2-7n-2), & n\equiv 2 \quad \text{»}\\ (n-4)(n^2-5n-8), & n\equiv 4 \quad \text{»}\\ (n-6)(n^2-3n-6), & n\equiv 6 \quad \text{»}\\ (n-8)(n^2-n+4), & n\equiv 8 \quad \text{»}\\ (n+2)(n^2-11n+34), & n\equiv 10 \quad \text{»}\end{cases}$$

L'addition de (45), (46) et (47) fournit le résultat partiel $I^6_n+J^6_n+K^6_n$, avec les valeurs simples suivantes

$$4!^2\,(I^6_n+J^6_n+K^6_n)=\begin{cases} (n-4)^2(n-6)^2, & n\equiv 0,4 \quad (\text{mod } 6),\\ (n-1)(n-3)(n-7)(n-9), & n\equiv 1,3 \quad \text{»}\\ (n-2)(n-8)(n^2-10n+32), & n\equiv 2 \quad \text{»}\\ (n-5)^2(n^2-10n+5), & n\equiv 5 \quad \text{»}\end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à expliciter L_n^6 et M_n^6. (38) donne

$$4!^2 L_n^6 = \begin{cases} n(n-4)(n-6)(n-10), & n\equiv 0,4 \pmod 6, \\ (n-1)(n-3)(n-7)(n-9), & n\equiv 1,3 \quad » \\ (n-2)(n-8)(n^2-10n+8), & n\equiv 2 \quad » \\ (n-5)^2(n^2-10n+5), & n\equiv 5 \quad » \end{cases}$$

d'où l'on déduit tout de suite

$$(48)\qquad 12\times 4!\,(I_n^6+J_n^6+K_n^6+L_n^6) = \begin{cases} (n-4)(n-6)(n^2-10n+12), & n\equiv 0,4 \pmod 6, \\ (n-1)(n-3)(n-7)(n-9), & n\equiv 1,3 \quad » \\ (n-2)(n-8)(n^2-10n+20), & n\equiv 2 \quad » \\ (n-5)^2(n^2-10n+5), & n\equiv 5 \quad » \end{cases}$$

(42) donne de même

$$(49)\qquad 6\times 6!\,M_n^6 = \begin{cases} (n-6)(3n^4-72n^3+538n^2-1272n+720), & n\equiv 0 \pmod 6, \\ (n-1)(n-7)(3n^3-66n^2+421n-670), & n\equiv 1 \quad » \\ (n-2)(n-8)(3n^3-60n^2+322n-320), & n\equiv 2 \quad » \\ (n-3)(n-9)(3n^3-54n^2+241n-150), & n\equiv 3 \quad » \\ (n-4)(n-10)(3n^3-48n^2+178n-88), & n\equiv 4 \quad » \\ (n-5)(n-11)(3n^3-42n^2+133n-62), & n\equiv 5 \quad » \end{cases}$$

L'addition des expressions fournies par (44), (48) et (49) nous donne enfin celle de P_n^6. Après des simplifications remarquables, qui réduisent le dénominateur commun à $2\times 6! = 1440$, on obtient les quatre formules suivantes :

$$(50)\qquad P_n^6 = \begin{cases} \dfrac{1}{2\times 6!}\, n(n^4-15n^3+100n^2-300n+384), & n\equiv 0 \pmod 6, \\ \dfrac{1}{2\times 6!}\,(n-1)(n-3)(n-5)(n^2-6n+23), & n\equiv 1,5 \quad » \\ \dfrac{1}{2\times 6!}\, n(n-2)(n-4)(n^2-9n+38), & n\equiv 2,4 \quad » \\ \dfrac{1}{2\times 6!}\,(n-3)(n^4-12n^3+64n^2-168n+195), & n\equiv 3 \quad » \end{cases}$$

29. Nous terminerons par un tableau comparatif des valeurs numériques de $V_n^\alpha = (\alpha, n-\alpha)$, $D_n^\alpha = D(\alpha, n-\alpha)$, $P_n^\alpha = P(\alpha, n-\alpha)$ pour $2 \leqq n \leqq 12$; par raison de symétrie, on se bornera aux valeurs de α inférieures ou égales à $\left[\frac{n}{2}\right]$,

en utilisant les formules [1] (9; I), (1; II), (5; II), (10; II), (35; II), ou (36; II), et (50) :

$n=2$:	$V_2^1 = 2$,	$D_2^1 = 1$,	$P_2^1 = 1$;
$n=3$:	$V_3^1 = 3$,	$D_3^1 = 2$,	$P_3^1 = 1$;
$n=4$	$V_4^1 = 4$,	$D_4^1 = 2$,	$P_4^1 = 1$,
	$V_4^2 = 6$,	$D_4^2 = 4$,	$P_4^2 = 2$;
$n=5$	$V_5^1 = 5$,	$D_5^1 = 3$,	$P_5^1 = 1$,
	$V_5^2 = 10$,	$D_5^2 = 6$,	$P_6^2 = 2$;
$n=6$	$V_6^1 = 6$,	$D_6^1 = 3$,	$P_6^1 = 1$,
	$V_6^2 = 15$,	$D_6^2 = 9$,	$P_6^2 = 3$,
	$V_6^3 = 20$,	$D_6^3 = 10$,	$P_6^3 = 3$;
$n=7$	$V_7^1 = 7$,	$D_7^1 = 4$,	$P_7^1 = 1$,
	$V_7^2 = 21$,	$D_7^2 = 12$,	$P_7^2 = 3$,
	$V_7^3 = 35$,	$D_7^3 = 19$,	$P_7^3 = 4$;
$n=8$	$V_8^1 = 8$,	$D_8^1 = 4$,	$P_8^1 = 1$,
	$V_8^2 = 28$,	$D_8^2 = 16$,	$P_8^2 = 4$,
	$V_8^3 = 56$,	$D_8^3 = 28$,	$P_8^3 = 5$,
	$V_8^4 = 70$,	$D_8^4 = 38$,	$P_8^4 = 8$;
$n=9$	$V_9^1 = 9$,	$D_9^1 = 5$,	$P_9^1 = 1$,
	$V_9^2 = 36$,	$D_9^2 = 20$,	$P_9^2 = 4$,
	$V_9^3 = 84$,	$D_9^3 = 44$,	$P_9^3 = 7$,
	$V_9^4 = 126$,	$D_9^4 = 66$,	$P_9^4 = 10$;
$n=10$	$V_{10}^1 = 10$,	$D_{10}^1 = 5$,	$P_{10}^1 = 1$,
	$V_{10}^2 = 45$,	$D_{10}^2 = 25$,	$P_{10}^2 = 5$,
	$V_{10}^3 = 120$,	$D_{10}^3 = 60$,	$P_{10}^3 = 8$,
	$V_{10}^4 = 210$,	$D_{10}^4 = 110$,	$P_{10}^4 = 16$,
	$V_{10}^5 = 252$,	$D_{10}^5 = 126$,	$P_{10}^5 = 16$;
$n=11$	$V_{11}^1 = 11$,	$D_{11}^1 = 6$,	$P_{11}^1 = 1$,
	$V_{11}^2 = 55$,	$D_{11}^2 = 30$,	$P_{11}^2 = 5$,
	$V_{11}^3 = 165$,	$D_{11}^3 = 85$,	$P_{11}^3 = 10$,
	$V_{11}^4 = 330$,	$D_{11}^4 = 170$,	$P_{11}^4 = 20$,
	$V_{11}^5 = 462$,	$D_{11}^5 = 236$,	$P_{11}^5 = 26$;
$n=12$	$V_{12}^1 = 12$,	$D_{12}^1 = 6$,	$P_{12}^1 = 1$,
	$V_{12}^2 = 66$,	$D_{12}^2 = 36$,	$P_{12}^2 = 6$,
	$V_{12}^3 = 220$,	$D_{12}^3 = 110$,	$P_{12}^3 = 12$,
	$V_{12}^4 = 495$,	$D_{12}^4 = 255$,	$P_{12}^4 = 29$,
	$V_{12}^5 = 792$,	$D_{12}^5 = 396$,	$P_{12}^5 = 38$,
	$V_{12}^6 = 924$,	$D_{12}^6 = 472$,	$P_{12}^6 = 50$.

[1] On observe en outre que, pour $\alpha = 2$, $D_{2\nu}^2 = \nu^2$ et $D_{2\nu+1}^2 = \nu(\nu+1)$.

Remarque. — La relation de récurrence (2; I), qui s'écrit ici

$$D_n^\alpha = D_{n-2}^\alpha + V_{n-2}^{\alpha-1} + D_{n-2}^{\alpha-2},$$

conjointement avec la relation classique

$$V_n^\alpha = V_{n-1}^\alpha + V_{n-1}^{\alpha-1},$$

permettrait de former rapidement les deux premières colonnes de ce tableau, à condition d'écrire les V_n^α et D_n^α sans se limiter à la valeur $\left[\frac{n}{2}\right]$ de α.