ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SOLOMON MARCUS

Sur les propriétés différentielles des fonctions dont les points de continuité forment un ensemble frontière partout dense

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 79, nº 1 (1962), p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1962_3_79_1_1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
3ᵉ série, t. 79, 1962, p. 1 à 21.

SUR LES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS DONT LES POINTS DE CONTINUITÉ FORMENT UN ENSEMBLE FRONTIÈRE PARTOUT DENSE

PAR M. SOLOMON MARCUS.

Considérons une fonction réelle finie f, définie sur l'intervalle $(0, 1)$. Si les points de continuité de f forment un ensemble frontière partout dense sur $(0, 1)$, alors nous dirons que f est du type α. Il est aisé de voir que les points de discontinuité d'une fonction du type α forment un ensemble de première catégorie. On a aussi le résultat suivant, établi ou généralisé par plusieurs auteurs ([8], [5], [17], [30], [18]) et qui sera utilisé dans la suite :

THÉORÈME (*). — *Les points de dérivabilité d'une fonction du type α forment un ensemble de première catégorie.*

Le but du présent travail est d'établir certaines possibilités concernant les propriétés différentielles d'une fonction du type α. Les théorèmes établis donnent entre autres, la solution des problèmes suivants posés par S. Ćetković : 1° Existe-t-il une fonction du type α dont les points de continuité où elle est dépourvue de dérivée — finie ou infinie — forment un ensemble partout dense? Quelle est la puissance de cet ensemble? ([6], p. 36). 3° Existe-t-il une fonction du type α dont les points de continuité où elle est dépourvue de dérivée — finie ou infinie — à gauche et à droite, forment un ensemble partout dense? 4° Quelle est la puissance de cet ensemble? ([6], p. 46). Comme on verra, la réponse à 1° et à 3° est affirmative. Ce fait est très naturel, si l'on pense à l'existence — établie par A. S. Besicovitch — d'une fonction continue qui est dépourvue en chaque point de dérivée — finie ou infinie — à gauche et à droite [1]. Une réponse affirmative à 3° entraîne une réponse affirmative à 1°, mais nous allons traiter séparément ces deux problèmes, car la solution de 1° est plus simple. Pour abréger les énoncés, il est convenable d'introduire les notations suivantes : D = l'ensemble des points de discontinuité; Δ = l'ensemble des points où la dérivée existe et est finie; Δ_∞ = l'ensemble des points où la dérivée existe et est infinie; C = l'ensemble des points de continuité; M = l'ensemble des points où il n'y a pas de dérivée, ni finie, ni infinie, ni à gauche, ni à droite. Les ensembles $C-(\Delta\cup\Delta_\infty)$ et $C\cap M$ feront l'objet principal de notre étude et nous verrons que pour une fonction du type α il n'y a aucune restriction concernant la mesure et la catégorie de ces ensembles. En outre, nous montrerons que les ensembles Δ et Δ_∞ d'une fonction du type α peuvent être partout denses, même si l'ensemble $C-(\Delta\cup\Delta_\infty)$ est partout dense. C'est précisément cette circonstance qui nous semble la plus significative, car il est intéressant de savoir en quelle mesure ces quatre situations : discontinuité, continuité sans dérivée (finie ou infinie), continuité avec dérivée infinie et dérivabilité peuvent vivre l'une à côté des autres.

Les théorèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 18 concernent les ensembles C, Δ et Δ_∞; les théorèmes 8, 9, 10, 11 et 12 concernent les ensembles C, M et Δ; les théorèmes 13, 14, 15, 16, 17 et 20 sont liés au type borélien des ensembles D, Δ et Δ_∞; le théorème 19 contient un résultat de la théorie des nombres, établi par considérations de la théorie des fonctions réelles. Le travail contient aussi trente problèmes concernant les fonctions du type α. Ces problèmes exigent des recherches ultérieures.

Les démonstrations reposent, en général, sur des combinaisons de résultats des plus différents, appartenant les uns à la théorie des fonctions réelles, les autres à la théorie des approximations diophantiennes. L'idée d'utiliser cette dernière théorie dans ce genre de recherches n'est pas nouvelle; voir, par exemple, les travaux de S. Četković ([3], [4], [6]),

Il faut préciser que certains théorèmes sont renforcés par d'autres. Tel est par exemple, le théorème 1, qui est renforcé par le théorème 8. Mais l'idée de la démonstration diffère. Le théorème 4 est renforcé par le théorème 5, mais la démonstration du théorème 5 utilise des choses plus spéciales de la théorie des nombres.

THÉORÈME 1. — *Il existe une fonction du type α dont l'ensemble* $C-(\Delta\cup\Delta_\infty)$ *a le complémentaire de mesure nulle.*

Preuve. — Liu Meng-Hui a considéré la fonction définie sur $(0, 1)$ de la façon suivante [21] : Si $x = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ est le développement décimal essentiellement infini de x alors $\varphi(x) = 0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, où $y_n = x_n - 1$ si $x_n > 0$ et $y_n = 0$ si $x_n = 0$. Liu Meng-Hui a cru que cette fonction est, sur $(0,1)$, partout continue, mais il est aisé de prouver que l'ensemble D de φ est partout dense.

En effet, soit x tel que, pour un certain p, on ait $x_p < 9$ et $x_n = 9$ si $n > p$. Soit, d'autre part, $x^s = 0, x_1^s, x_2^s, \ldots, x_n^s, \ldots$, où $x_n^s = x_n$ si $n < p, x_p^s = x_p + 1$, $x_n^s = 0$ si $p + s \neq n > p$ et $x_{p+s}^s = 1$. On a $x^s - x = \frac{1}{10^{p+s}}$ donc $\lim\limits_{s \to \infty} x^s = x$, tandis que $|\varphi(x) - \varphi(x^s)| > \frac{1}{10^{p+1}}$ pour $s = 1, 2, \ldots$. On constate ainsi que φ est discontinue en x. D est formé de points rationnels, donc est un ensemble frontière et φ est du type α. En vertu du raisonnement de [21], Δ est vide. En vertu du théorème classique de Denjoy-Young-Saks concernant la disposition des nombres dérivés d'une fonction quelconque, Δ_∞ est de mesure nulle. Donc l'ensemble $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ est de mesure égale à 1 (et, a plus forte raison, partout dense sur $(0, 1)$).

Théorème 2. — *Il existe une fonction du type α, continue à droite et telle que l'ensemble $\Delta \cup \Delta_\infty$ soit vide.*

Preuve. — Soit

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots$$

le développement ternaire de $x \in (0, 1)$. On a donc $a_n = 0$, 1 ou 2 pour $n = 1, 2, \ldots$. Si un x a deux représentations différentes, on choisit toujours la représentation finie. Posons

$$f(x) = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \ldots + \frac{b_n}{2^n} + \ldots,$$

où $b_n = 1$ si $a_n = 2$ et $b_n = 0$ si $a_n = 0$ ou 1 $(n = 1, 2, \ldots)$. Cette fonction, considérée au [33], est continue en chaque x dont le développement ternaire est infini et discontinue à gauche — et seulement à gauche — en chaque x dont le développement ternaire est fini. A. N. Singh a montré dans [33] que le nombre dérivé supérieur à droite de f est $+\infty$ en chaque $x \in (0, 1)$, donc Δ est vide. Il reste à montrer que Δ_∞ est aussi vide. Soit pour cela un x quelconque de $(0, 1)$. Il y a une suite strictement croissante d'entiers positifs $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$, tels que $a_{n_s} = 0$ ou 1 pour $s = 1, 2, \ldots$. Posons

$$x^s = \frac{a_1^s}{3} + \frac{a_2^s}{3^2} + \ldots + \frac{a_n^s}{3^n} + \ldots,$$

où $a_n^s = a_n$ si $n \neq n_s$, $a_{n_s}^s = 0$ si $a_{n_s} = 1$ et $a_{n_s}^s = 1$ si $a_{n_s} = 0$. On a

$$\lim_{s \to \infty} x^s = x \quad \text{et} \quad f(x) = f(x^s) \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots,$$

donc x n'appartient pas à Δ_∞, c'est-à-dire $\Delta_\infty = 0$.

Remarque. — La fonction considérée dans la démonstration du théorème 2 fournit un exemple rare de fonction du type α. En effet, en vertu du théorème de A. N. Singh de [33], le nombre dérivé supérieur à droite de cette fonction est $+\infty$ en chaque $x \in (0, 1)$. Or, on a le théorème suivant, dû à V. Jarnik : *Il existe un résiduel* H *de l'espace* B *des fonctions réelles bornées sur* $(0, 1)$, *tel que, pour chaque* $f \in H$, *les points où le nombre dérivé supérieur à droite de* f *est* $< +\infty$ *forment un ensemble dénombrable partout dense sur* $(0, 1)$, [9].

Un autre exemple de fonction du type α n'appartenant pas à H se trouve dans [20]. Il faut remarquer aussi que la fonction f ainsi que celle de [20] sont de la première classe de Baire. Cette classe est minimale pour les fonctions qui n'appartiennent pas à H. *Voir* pour cela le théorème 1 de [9]. Pour un exemple de fonction du type α appartenant à H, *voir* la fonction considérée dans la démonstration du théorème 8 ci-dessous.

THÉORÈME 3. — *Il existe une fonction réelle, finie, définie sur* $(0, 1)$ *et jouissant des propriétés suivantes :*

1° *chaque point rationnel appartient à* D; 2° *chaque point irrationnel appartient à* C; 3° *chaque point irrationnel algébrique appartient à* Δ; 4° $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ *est un ensemble résiduel sur* $(0, 1)$.

Preuve. — Considérons la fonction g définie sur $(0,1)$ de la manière suivante : $g(x) = 0$ si x est irrationnel et $g(x) = q^{-q}$ si $x = \frac{p}{q}$, p et q étant des entiers premiers entre eux, $q > 0$. Cette fonction a été déjà étudiée par C. L. Olds, qui a montré que g satisfait à 1° et à 2° et que g est dérivable en chaque point irrationnel algébrique [23].

Pour prouver 4°, remarquons d'abord que, en vertu du théorème (*) et de 2°, $C - \Delta$ est un ensemble résiduel sur $(0,1)$. D'autre part, en vertu du fait que g est nulle en chaque point irrationnel et de ce que C est formé seulement de points irrationnels, il s'ensuit que la dérivée de g est nulle en chaque point de C où elle existe, donc l'ensemble $C \cap \Delta_\infty$ est vide. Mais alors $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ est un ensemble résiduel sur $(0, 1)$ et le théorème 3 est établi.

Remarque. — La dérivabilité de g en chaque point irrationnel algébrique peut être déduite aussi du théorème suivant, communiqué par Hans Rademacher à J. Schoenberg [28] : Si la suite $\{\gamma_n\}$ de nombres réels est telle que $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \gamma_n = 0$ (k entier $\geqq 2$) alors la fonction G définie par

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \text{ est irrationnel,} \\ \gamma_q & \text{si} \quad x = \dfrac{p}{q} \quad (p, q) = 1 \end{cases}$$

est dérivable en chaque point irrationnel algébrique d'ordre $\leqq k$.

Maîs la démonstration du théorème de Rademacher utilise aussi le théorème de Liouville.

THÉORÈME 4. — *Il existe une fonction réelle, finie, du type* α *sur* $(0,1)$ *et jouissant des propriétés suivantes :* 1° Δ *est partout dense sur* $(0, 1)$*;* 2° $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ *contient tous les nombres de Liouville de* $(0, 1)$; 3° $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ *est un résiduel sur* $(0,1)$.

Preuve. — Soit s un entier > 2. Posons $f(x) = 0$, si x est irrationnel et $f\left(\frac{p}{q}\right) = q^{-s}$ si p et q sont des entiers, $q > 0$ et $(p, q) = 1$. D contient tous les points rationnels, C contient tous les point irrationnels, donc f est du type α. Soit ξ un nombre algébrique de degré $n > 1$. En vertu d'un théorème de Liouville de [14], déjà utilisé, on a $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| > kq^{-n}$ pour p et q entiers positifs quelconques, $(p, q) = 1$. Il s'ensuit que

$$\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi)}{\frac{p}{q} - \xi}\right| < \frac{1}{K}\, q^{n-s}.$$

Supposons maintenant qu'on ait $1 < n < s$. On déduit que f est dérivable et sa dérivée est nulle aux points algébriques irrationnels, de degré $< s$. Mais ces points forment, d'après un théorème connu (*voir*, par exemple, [22], p. 85), un ensemble partout dense, donc 1° est démontré.

Considérons maintenant un nombre de Liouville, c'est-à-dire un nombre ω tel que, pour chaque m entier positif, il y a un nombre rationnel $\frac{p_m}{q_m}$, où $q_m > 1$ et qu'on ait $\left|\omega - \frac{p_m}{q_m}\right| < (q_m)^{-m}$. On sait que ω est transcendant (*voir* [14] ou [22], p. 92), donc $\omega \in C$. On a

$$\left|\frac{f\left(\frac{p_m}{q_m}\right) - f(\omega)}{\frac{p_m}{q_m} - \omega}\right| > q_m^{m-s}$$

et de ce que $\lim\limits_{m\to\infty} q_m = \infty$ on déduit que f est dépourvue de dérivée finie en ω. D'autre part, $C \cap \Delta_\infty$ est vide, car les zéros de f forment un ensemble partout dense, donc $\omega \in C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$.

Remarquons enfin que, en vertu du théorème (*), $C-(\Delta \cup \Delta_\infty)$ est un résiduel.

Par l'utilisation de certains faits plus spéciaux de la théorie des nombres, on obtient un théorème plus précis que le théorème 4, à savoir :

THÉORÈME 5. — *Soit β un nombre supérieur à 2. Considérons la fonction f, définie sur $(0, 1)$ de la manière suivante : $f(x)=0$ si x est irrationnel ; $f\left(\frac{p}{q}\right)=q^{-\beta}$ si p et q sont des entiers positifs, $(p, q)=1$. Alors : 1° f est du type α; 2° Δ contient tous les nombres irrationnels algébriques*; 3° $C-(\Delta \cup \Delta_\infty)$ *est un résiduel et contient tous les nombres de Liouville.*

Preuve. — Pour établir 1° et 3° on utilise la démonstration du théorème 4. Pour prouver 2°, rappelons le théorème suivant de K. F. Roth : *Si ξ est un nombre algébrique irrationnel et si pour une infinité de nombres rationnels $\frac{p}{q}$, on a $\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<q^{-\mu}$, alors $\mu \leqq 2$* [27]. *On en déduit que, pour chaque $\varepsilon>0$, l'inégalité*

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

est satisfaite pour tous les nombres rationnels $\frac{p}{q}$, à l'exception possible d'un ensemble fini de tels nombres. On a donc dans les mêmes conditions,

$$\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)-f(\xi)}{\frac{p}{q}-\xi}\right| \leqq q^{2+\varepsilon-\beta}$$

et, en choisissant ε tel que $0<\varepsilon<\beta-2$, on déduit que f est dérivable en ξ et $f'(\xi)=0$.

Remarques. — Il serait intéressant de savoir si l'ensemble $C \cap M$ de la fonction f est ou non partout dense (ou même un résiduel). Pour cela, on aurait besoin de certaines majorations plus fines concernant l'approximation d'un nombre transcendant par les réduites de son développement en fraction continue.

Le théorème 5 cesse d'être vrai si $\beta=2$, comme on verra dans la suite (théorème 9). Ce fait est très naturel, si l'on pense que dans le théorème de K. F. Roth, utilisé dans la démonstration du théorème 5, la constante 2 ne peut pas être améliorée [27].

THÉORÈME 6. — *Il existe une fonction strictement croissante, du type α et telle que* $C-(\Delta \cup \Delta_\infty)$ *soit un ensemble résiduel sur* $(0, 1)$ (*et, bien entendu, de mesure nulle*).

Preuve. — Considérons la fonction h suivante, définie et croissante sur $(0, 1)$:

$$h(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n},$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ est une suite formée avec tous les nombres rationnels de $(0, 1)$. $\sum\limits_{r_n<x}$ signifie que la somme s'étend à tous les termes $\frac{1}{2^n}$ tels que $r_n < x$. Cette fonction, que nous avons déjà étudiée, pour d'autres buts, dans [16], est continue en chaque point irrationnel, discontinue en chaque point rationnel. Donc h est du type α. Le saut de h au point $x = r_n$ est égal à $\frac{1}{2^n}$. On a donc, pour $0 \leqq a < b \leqq 1$,

$$h(b-0) - h(a+0) = \sum_{a<r_n<b} \frac{1}{2^n} = \sum_{a<x<b} [h(x+0) - h(x-0)].$$

Alors, en vertu d'un théorème de J. S. Lipiński de ([15], p. 201), l'ensemble Δ_∞ est de première catégorie. D'autre part, en tenant compte du théorème (*), Δ est un ensemble de première catégorie. En vertu du théorème de Lebesgue affirmant la dérivabilité presque partout de toute fonction monotone, Δ est de mesure égale à 1. Donc $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ est un ensemble résiduel de mesure nulle.

Remarque. — Pour toute fonction monotone dont l'ensemble D est partout dense, Δ est de première catégorie, en vertu du théorème (*). Ce résultat est en concordance avec celui de Marczewski de [19].

THÉORÈME 7. — *Il existe une fonction strictement croissante et du type* α *sur* $(0, 1)$, *telle que l'ensemble* $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ *soit un résiduel sur* $(0, 1)$ *tandis que l'ensemble* $C \cap \Delta_\infty$ *ait la puissance du continu sur chaque sous-intervalle de* $(0, 1)$.

Preuve. — Soit E un ensemble de mesure nulle et du type F_σ situé sur $(0, 1)$ et tel que, pour chaque intervalle $I \subset (0, 1)$, l'ensemble $E \cap I$ ait la puissance du continu. En vertu d'un théorème de J. S. Lipiński ([15], p. 204), il existe une fonction de sauts non décroissante [c'est-à-dire une fonction f telle que

$$f(b-0) - f(a+0) = \sum_{a<x<b} [f(x+0) - f(x-0)] \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq a < b \leqq 1 \Big],$$

avec $f'(x) = \infty$ pour $x \in E$. Du fait que E est partout dense sur $(0, 1)$ il s'ensuit que D est aussi partout dense sur $(0, 1)$. En effet, dans le cas contraire on aurait un intervalle J où f est continue donc, f étant une fonction de sauts, f serait constante sur J, en contradiction avec l'hypothèse que E est partout dense. Donc f est du type α sur $(0, 1)$. Du fait que $E \cap I$ a la puissance du continu pour chaque sous-intervalle I de $(0, 1)$ et de ce que D, en vertu de la monotonie de f, est dénombrable, on déduit que $C \cap \Delta_\infty$ a la puissance du continu sur chaque I. De la monotonie de f on déduit la dérivabilité presque partout de f. En vertu du théorème (*), $C - \Delta$ est un ensemble résiduel sur $(0, 1)$. On a $C - (\Delta \cup E) = C - (\Delta \cup \Delta_\infty) =$ un ensemble résiduel sur $(0, 1)$.

Remarques. — Pour certaines propriétés des fonctions de sauts dont l'ensemble D est partout dense, *voir* [29].

Un exemple intéressant de fonction croissante du type α sur $(0, 1)$ (donc telle que Δ soit de première catégorie et de mesure égale à 1) a été donné par W. Sierpiński et A. N. Singh [32]. Soit $x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} + \ldots$ le développement binaire de $x \in (0, 1)$, contenant une infinité de zéros. Posons $F(x) = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots$. F est une fonction croissante, discontinue en chaque x dont le développement binaire est fini et le nombre dérivé inférieur à droite de F est nul en chaque point de $(0, 1)$.

THÉORÈME 8. — *Il existe une fonction réelle, finie, définie et du type α sur $(0, 1)$, telle que* D *soit un ensemble dénombrable,* $M = C$ et $\Delta_\infty = 0$.

Preuve. — Considérons la fonction Φ de Riemann, définie sur $(0, 1)$ de la manière suivante : $\Phi(x) = 0$ si x est irrationnel; $\Phi(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux. Φ est discontinue en chaque x rationnel et continue en chaque x irrationnel. Il est visible encore que la dérivée à gauche de Φ existe en chaque x rationnel et est égale à ∞, tandis que la dérivée à droite de Φ existe aussi en chaque x rationnel et est égale à $-\infty$, donc $D \cap M = D \cap \Delta_\infty = 0$. Du fait que Φ est nulle en chaque x irrationnel, il s'ensuit que Φ est dépourvue de dérivée infinie à droite et de dérivée infinie à gauche en chaque x irrationnel de $(0, 1)$. Pour accomplir la démonstration, nous allons prouver que Φ est dépourvue de dérivée finie à gauche et de dérivée finie à droite en chaque x irrationnel. Il résultera ainsi que $C = M =$ l'ensemble des points irrationnels de $(0, 1)$.

Soit ξ un nombre irrationnel de $(0, 1)$ et soit $\frac{p_n}{q_n}$ la réduite d'ordre n du développement de ξ en fraction continue. D'après un théorème connu (*voir*, par exemple, le théorème 9 de [10] ou [22], p. 61) on a

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On a donc, en vertu de ce que $(p_n, q_n) = 1$ pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$\left| \frac{\Phi\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right) - \Phi(\xi)}{\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \xi} \right| = \frac{\frac{1}{q_{2n}}}{\left|\frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \xi\right|} \geq \frac{\frac{1}{q_{2n}}}{\frac{1}{q_{2n} q_{2n+1}}} = q_{2n+1}.$$

En tenant compte que les réduites d'ordre pair forment une suite croissante et convergente vers ξ et de ce que $\lim\limits_{n\to\infty} q_{2n+1}=\infty$, il s'ensuit que le nombre dérivé supérieur à gauche de Φ en ξ est ∞, donc Φ est dépourvue de dérivée à gauche finie en chaque point irrationnel. En utilisant maintenant, au lieu des réduites d'ordre pair, celles d'ordre impair et en tenant compte que la suite des réduites d'ordre impair est décroissante et tend vers ξ, on déduit que le nombre dérivé supérieur à droite de Φ en ξ est ∞, donc Φ est dépourvue de dérivée à droite finie en chaque point irrationnel.

Il y a encore une voie qui pourrait conduire au théorème 8. Soient, en effet, $\{r_n\}$ et $\{d_n\}$ deux suites de nombres réels. Supposons que $d_n > 0$ pour $n=1, 2, \ldots$. On dit qu'un ensemble E de nombres réels est approximé par $\{r_n\}$ avec une erreur inférieure à $\{d_n\}$ si pour chaque $x \in \mathrm{E}$, l'inégalité $|x-r_n| < d_n$ est satisfaite pour une infinité de valeurs de n [26]. R. M. Redheffer a établi le théorème suivant [26] : *Si* $\sum\limits_{1\leq n<\infty} d_n=\infty$, *alors il existe une suite* $\{r_n\}$ *telle que chaque ensemble réel* E *soit approximé par* $\{r_n\}$ *avec une erreur inférieure à* $\{d_n\}$. Prenons dans ce théorème $d_n=\frac{1}{n}\cdot$ Il est aisé de voir que la suite $\{r_n\}$ correspondante est partout dense. Prenons pour E le complémentaire de la suite $\{r_n\}$. Définissons une fonction f de la manière suivante :

$$f(r_n)=\frac{1}{\log n}\quad (n=1, 2, \ldots)$$

et $f(x)=0$ si $x\in\mathrm{E}$. On constate que $\mathrm{E}=\mathrm{C}-(\Delta\cup\Delta_\infty)$, $\mathrm{D}=\{r_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Mais pour conclure que $\mathrm{E}=\mathrm{C}\cap\mathrm{M}$, on doit d'abord obtenir une précision du théorème de Redheffer.

Remarquons encore que la fonction de Riemann, considérée dans la démonstration du théorème 8, est approximativement discontinue en chaque x rationnel et approximativement dérivable en chaque x irrationnel. On constate ainsi que le théorème (*) est en défaut si l'on y remplace la discontinuité et la dérivabilité ordinaires par celles approximatives.

THÉORÈME 9. — *Soit* $f(x)=0$ *si* x *est irrationnel,* $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q^2}$ *si* p *et* q *sont des entiers positifs, et* $(p, q)=1$. f *est du type* α *et* $\mathrm{C}=\mathrm{M}$.

Preuve. — On procède comme dans la démonstration du théorème 8, avec la seule différence suivante : pour ξ irrationnel, on a

$$\left|\frac{f\left(\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)-f(\xi)}{\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}-\xi}\right|\geq\frac{q_{2n+1}}{q_{2n}}>1.$$

Mais pour $x_n\to\xi$, x_n irrationnels, on a $\frac{(f(x_n)-f(\xi))}{(x_n-\xi)}=0$, donc f est dépourvue de dérivée, à gauche et à droite, finie ou infinie, en chaque point de C.

Théorème 10. — *Il existe une fonction réelle, finie, définie, continue à gauche et du type α sur* $(0, 1)$, *telle que* D *soit dénombrable et* $M = (0, 1)$.

Preuve. — Soit x tel que $0 < x < 1$ et soit $x = 0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ son développement binaire essentiellement infini. On sait qu'un tel développement est unique. Définissons sur $(0, 1)$ une fonction ω, de la manière suivante :

$$\omega(x) = 0, y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots,$$

où $y_n = x_n$ si n est impair et $y_n = 0$ si n est pair. Il est aisé de voir que la fonction ainsi définie est continue en chaque x dont le développement binaire essentiellement infini contient une infinité de zéros, en particulier ω est continue en chaque point irrationnel de $(0, 1)$. On voit aussi que ω est continue à gauche en chaque point de $(0, 1)$. Cependant, l'ensemble D est partout dense sur $(0, 1)$. Pour prouver cela, il sera suffisant de montrer que ω est discontinue en chaque point x ayant un développement binaire de la forme

$$x = 0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{2n-1}, 0\,1\,1\,1\,1, \ldots,$$

donc $x_i = 0$ ou 1 pour $1 \leqq i \leqq 2n-1$, $x_{2n} = 0$ et $x_i = 1$ pour $i \geqq 2n+1$.

Soit $x^p = 0, z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$, où $z_i = x_i$ pour $1 \leqq i \leqq 2n-1$, $z_{2n} = 1$, $z_i = 0$ pour $2(n+p) \neq i > 2n$ et $z_{2(n+p)} = 1$. On a $x < x^p$ pour $p = 1, 2, \ldots$, $\lim_{p \to \infty} x^p = x$ et l'on obtient $\omega(x^p) = 0, x_1 0 x_3 0 x_5 0 \ldots 0 x_{2n-1}$. Il s'ensuit :

$$\omega(x) - \omega(x^p) = 0, v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots,$$

où $v_i = 0$ si $1 \leqq i \leqq 2n$, ou si i est pair et $v_i = 1$ si i est impair et $> 2n$. On a donc, pour chaque p entier positif, $\omega(x) - \omega(x^p) > \frac{1}{2^{n+1}}$, donc ω est discontinue en x.

Pour montrer que $M = (0, 1)$, considérons un point quelconque x de $(0, 1)$. Soit $x = 0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ son développement binaire essentiellement infini. Pour chaque n entier positif suffisamment grand on peut trouver deux nombres y et z jouissant des propriétés suivantes :

1° $$0 < x - \frac{1}{n} < y < x < z < x + \frac{1}{n} < 1;$$

2° les développements binaires de y et de z diffèrent du développement binaire de x seulement par des chiffres de rang pair. On a donc $\omega(y) = \omega(x) = \omega(z)$. Il s'ensuit que si la dérivée à droite ou à gauche de ω en x existe, alors elle est égale à zéro. Toutefois, on peut trouver, pour chaque n entier positif suffisamment grand, deux nombres u et v jouissant des propriétés suivantes :

1° $$0 < x - \frac{1}{n} < u < x < v < x + \frac{1}{n} < 1;$$

2° les développements binaires de u et de v diffèrent du développement binaire de x seulement par des chiffres de rang impair. On a donc $\omega(u)-\omega(x)=u-x$ et $\omega(v)-\omega(x)=v-x$. Il s'ensuit que si la dérivée à droite ou à gauche de ω en x existe, alors elle est égale à 1.

On constate ainsi que ω est dépourvue de dérivée à gauche et à droite, finie ou infinie, en chaque x de $(0, 1)$ et le théorème 10 est établi.

Remarque. — La définition de la fonction ω, utilisée dans la démonstration du théorème 10, m'a été communiquée en février 1959 par V. Istrătescu, qui l'a imaginée pour d'autres buts.

THÉORÈME 11. — *Il existe une fonction réelle, finie, définie et du type α sur* $(0, 1)$ *et telle que* D *soit dénombrable,* Δ *soit partout dense et* $C\cap M$ *soit un ensemble résiduel sur* $(0, 1)$.

Preuve. — Nous utilisons une idée de S. Ćetković [4]. Considérons deux ensembles complémentaires A et B de nombres entiers positifs, chacun d'eux contenant une infinité de nombres premiers. Désignons par S l'ensemble des nombres réels de la forme $\frac{p}{q}$, où p est un entier, $q\in B$ et $(p, q)=1$. Définissons une fonction f de la façon suivante : $f(x)=0$ si $x\notin S$ et $f\left(\frac{p}{q}\right)=q^{-2}$, si $\frac{p}{q}\in S$. Dans [4], on a montré que les ensembles D et Δ sont partout denses. En vertu du théorème (*), $(0, 1)-\Delta$ est un ensemble résiduel sur $(0, 1)$. De ce que D est dénombrable on déduit que $C-\Delta$ est aussi un ensemble résiduel sur $(0, 1)$. Du fait que $f(x)=0$ pour $x\in C$ on déduit que les zéros de f forment un ensemble partout dense donc, pour $x\in C$, la dérivée à gauche ou à droite de f, si cette dérivée existe, est égale à zéro. Il s'ensuit que f est dépourvue de dérivée infinie, à gauche et à droite, en chaque $x\in C$. Désignons par E l'ensemble des points irrationnels de $C-\Delta$. Évidemment, E est un ensemble résiduel sur $(0, 1)$. Nous allons prouver que f est dépourvue de dérivée finie — à gauche et à droite — en chaque $x\in E$. Considérons le développement (infini, car x est irrationnel) de x en fraction continue et désignons par $\frac{p_n}{q_n}$ la réduite d'ordre n. On a, en vertu d'un théorème déjà utilisé ([22], p. 61 ou [10], théorème 9) et de ce que $q_{2n+1}>q_{2n}$,

$$\frac{f\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)-f(x)}{\left|\frac{p_{2n}}{q_{2n}}-x\right|}\geqq\frac{q_{2n+1}}{q_{2n}}>1,$$

donc, en tenant compte que l'ensemble des zéros de f s'accumule en x et de ce que la suite des réduites d'ordre pair est croissante et tend vers x, on déduit que f est, en chaque $x\in E$, dépourvue de dérivée à gauche finie. Si maintenant nous considérons les réduites d'ordre impair, on obtient, toujours en vertu du théorème 9 de [10], et de ce que $q_{2n} > q_{2n-1}$,

$$\frac{f\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right) - f(x)}{\left|\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - x\right|} \geq \frac{q_{2n}}{q_{2n-1}} > 1,$$

donc f est aussi dépourvue, en chaque $x \in \mathrm{E}$, de dérivée à droite finie. On déduit alors que $\mathrm{E} \subset \mathrm{C} \cap \mathrm{M}$, donc $\mathrm{C} \cap \mathrm{M}$ est un ensemble résiduel sur $(0, 1)$ et le théorème 11 est démontré.

Théorème 12. — *Il existe une fonction réelle finie, définie et du type* α *sur* $(0, 1)$, *telle que* Δ *soit de mesure égale à* 1 *tandis que* $\mathrm{C} \cap \mathrm{M}$ *soit un résiduel sur* $(0, 1)$.

Preuve. — Considérons une suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ formée avec tous les nombres rationnels de $(0, 1)$. Définissons sur $(0, 1)$ une fonction G de la manière suivante : $\mathrm{G}(x) = 0$ si x est irrationnel et $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{n^3}$ si $x = x_n (n = 1, 2 \ldots)$. Il est évident que G est discontinue en chaque point rationnel et continue en chaque point irrationnel, donc G est du type α. M. K. Fort Jr. a démontré que Δ est de mesure égale à 1 [8]. Il reste donc à démontrer que $\mathrm{C} \cap \mathrm{M}$ est un résiduel sur $(0, 1)$.

Considérons l'intervalle $\mathrm{T}_n^- = \left(x_n - \frac{1}{n^4}, x_n\right)$ et posons $\mathrm{V}_n^- = \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathrm{T}_k^-$. Il est aisé de voir que V_n^- est un ensemble ouvert partout dense sur $(0, 1)$, donc son complémentaire est partout non dense sur $(0, 1)$. Alors $\mathrm{V}^- = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{V}_n^-$ est un ensemble résiduel sur $(0, 1)$, donc l'ensemble Z^- des points irrationnels de V^- est encore un résiduel sur $(0, 1)$. Nous allons montrer que G est dépourvue de dérivée finie à droite en chaque point de Z^-. Soit, en effet, $x \in \mathrm{Z}^-$. On a, pour chaque n, $x \in \mathrm{V}_n^-$, d'où l'on déduit qu'il y a, pour chaque n, un entier $p_n \geq n$, tel que $x \in \mathrm{T}_{p_n}^-$. Il s'ensuit que $0 < x_{p_n} - x < \frac{1}{p_n^4}$ pour $n = 1, 2, \ldots$. De ce que Z^- est formé de nombres irrationnels on déduit que $\mathrm{G}(x) = 0$ pour $x \in \mathrm{Z}^-$ et l'on a, pour chaque n entier positif,

$$\frac{\mathrm{G}(x_{p_n}) - \mathrm{G}(x)}{x_{p_n} - x} > p_n,$$

donc, en tenant compte que $\lim_{n \to \infty} p_n = \infty$, il s'ensuit que G est dépourvue, en x, de dérivée finie à droite.

En partant maintenant des intervalles du type $\mathrm{T}_n^+ = \left(x_n, x_n + \frac{1}{n^4}\right)$ et en posant $\mathrm{V}_n^+ = \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathrm{T}_n^+$, on obtient le résiduel $\mathrm{V}^+ = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{V}_n^+$. L'ensemble Z^+ des points irrationnels de V^+ est encore un résiduel sur (0, 1) et G est dépourvue de dérivée finie à gauche en chaque point de Z^+. Posons maintenant $Z = Z^- \cap Z^+$. Z est un résiduel, tandis que G est dépourvue de dérivée finie, à gauche et à droite, en chaque point de Z. D'autre part, du fait que les zéros de G forment un ensemble partout dense et de ce que G est nulle en chaque point de Z, il s'ensuit que G est dépourvue de dérivée infinie, à gauche et à droite, en chaque point de Z, donc $Z \subset C \cap M$ et le théorème 12 est établi.

Remarque. — Pour toutes les fonctions considérées dans les démonstrations des théorèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12 l'ensemble D est dénombrable, donc les fonctions sont de la première classe de Baire.

PROBLÈMES :

1. Existe-t-il une fonction f du type α et telle que la dérivée de f existe et soit infinie en chaque point de continuité?

2. Si la réponse au problème précédent est négative, existe-t-il une fonction f du type α et telle que la dérivée de f existe — finie ou infinie — en chaque point de continuité?

3. Existe-t-il une fonction du type α, telle que les ensembles $C \cap M$, Δ et Δ_∞ soient partout denses?

4. Existe-t-il une fonction du type α, telle que D soit indénombrable sur chaque intervalle et les ensembles $C \cap M$ et Δ soient de mesure positive sur chaque intervalle?

5. Existe-t-il une fonction du type α et telle que $\Delta_\infty = D$ et $M = C$?

6. Soit β tel que $0 \leqq \beta \leqq 1$. Existe-t-il une fonction du type α telle que Δ soit de mesure β et $C \cap M$ et Δ_∞ soient partout denses?

7. Existe-t-il une fonction dérivée du type α telle que Δ soit partout dense?

Il serait intéressant d'étudier les problèmes obtenus de ceux posés par S. Ćetković en remplaçant la dérivée ordinaire par celle approximative. Pour ce but, il est, peut-être, indiqué d'utiliser la théorie métrique des fractions continues et la mesure des ensembles parfaits définis par certaines propriétés d'un développement p-adique (*voir*, par exemple, [24] et [25]).

Maintenant, nous étudierons les fonctions du type α du point de vue de la structure des ensembles C, D, Δ, Δ_∞. On sait que, même pour une fonction réelle générale de variable réelle, ces ensembles sont soumis à certaines restrictions : C est un G_δ (donc D est un F_σ), Δ et $\Delta \cup \Delta_\infty$ sont l'intersection d'un F_σ avec un $F_{\sigma\delta}$ dont le complémentaire est de mesure nulle [2], Δ_∞ est un $F_{\sigma\delta}$ de mesure nulle ([2], [13]). Ces types boréliens sont caractéristiques pour les ensembles respectifs. Il est naturel de poser la question si ces caractérisations restent en vigueur pour une fonction du type α. Le théorème (*) nous avertit que la réponse est parfois négative. Nous allons donner quelques résultats en cette direction.

Théorème 13. — *Étant donné un ensemble* A *contenu et partout dense dans* $(0,1)$, *une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction du type* α *dont l'ensemble* D *coïncide avec* A *est que* A *soit de première catégorie et du type* F_σ.

Preuve. — La nécessité résulte du fait que tout ensemble frontière du type F_σ est de première catégorie ([12], p. 49) et de ce que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x;\ \omega(x) \geqq \frac{1}{n} \right\}$, où $\omega(x)$ est l'oscillation en x. Pour établir la suffisance de la condition, considérons un ensemble A partout dense, de première catégorie et du type F_σ. Il s'ensuit que A est un ensemble frontière donc, d'après un résultat de W. Sierpiński de [31], on a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, où les ensembles A_n sont fermés, partout non denses et disjoints deux à deux. Définissons une fonction f de la manière suivante : $f(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in A_n$; $f(x) = 0$ si $x \notin A$. Du fait que A est un ensemble frontière, il s'ensuit que f est discontinue en chaque point de A. De ce que chaque voisinage d'un point $x \notin A$ rencontre une infinité d'ensembles A_n, il s'ensuit que f est continue en chaque $x \notin A$. On a donc $D = A$ et le théorème est démontré.

Théorème 14. — *Soit* A *un ensemble partout dense, de première catégorie et du type* F_σ *sur* $(0,1)$. *Soit* β *la mesure de* A. *Supposons que* $\beta < 1$ *et désignons par* γ *un nombre tel que* $0 \leqq \gamma < 1 - \beta$. *Il existe alors une fonction du type* α, *telle que* $D = A$, Δ *soit de mesure* γ *et* $C \cap M$ *soit de mesure* $1 - \beta - \gamma$. *Si, en outre, l'ensemble* $(0,1) - (D \cup \Delta)$ *est de mesure positive en chaque sous-intervalle de* $(0,1)$, *alors* $C \cap M$ *est aussi de mesure positive en chaque sous-intervalle de* $(0,1)$.

Preuve. — Le théorème 5 de [17] affirme : *Soit* A *un ensemble du type* F_σ, *situé sur* $(0,1)$. *Soit* β *la mesure de* A. *Soit* γ *tel que* $0 \leqq \gamma \leqq 1 - \beta$. *Il existe une fonction* χ *telle que* $D = A$ *et telle que* Δ *soit de mesure* γ. Prenons, dans ce théorème, pour A un ensemble jouissant des propriétés exigées par les hypothèses du théorème 14. On déduit l'existence d'une fonction χ telle que $D = A$ et telle encore que Δ soit de mesure γ (γ est choisi tel que $0 \leqq \gamma < 1 - \beta$). L'ensemble $(0,1) - (D \cup \Delta)$ est donc de mesure positive, égale à $1 - \beta - \gamma$. En vertu du théorème de Denjoy-Young-Saks concernant la disposition des nombres dérivés d'une fonction quelconque, il existe un ensemble E de mesure nulle, tel que $(0,1) - (D \cup \Delta \cup E) = C \cap M$, donc $C \cap M$ est de mesure égale à $1 - \beta - \gamma$.

Supposons maintenant que $(0,1) - (D \cup \Delta)$ soit de mesure positive en chaque sous-intervalle de $(0,1)$. En vertu de ce que $(0,1) - (D \cup \Delta \cup E) = C \cap M$, il s'ensuit que $C \cap M$ jouit aussi de cette propriété et le théorème 14 est ainsi établi.

On sait que Δ_∞ est un ensemble de mesure nulle pour chaque fonction réelle, finie, d'une variable réelle. Comme l'a montré A. Broudno, Δ_∞ est un ensemble du type borélien $F_{\sigma\delta}$ (théorème 7 de [2]). D'autre part, E. Landis a démontré que pour chaque ensemble linéaire A de mesure nulle et du type $F_{\sigma\delta}$ il existe une fonction continue dont la dérivée est $+\infty$ aux points de A et seulement en ces points [13]. Peut-on remplacer, dans le résultat de Landis, la fonction continue par une fonction du type α? Une réponse partielle est donnée par le

Théorème 15. — *Pour chaque ensemble* A *de mesure nulle et du type* $F_{\sigma\delta}$, *il existe une fonction du type* α, *dont la dérivée à droite est infinie en chaque point de* A.

Preuve. — En vertu du théorème de E. Landis, il existe une fonction f continue, telle que $f'(x) = +\infty$ pour $x \in A$ et $f'(x) < +\infty$ pour $x \notin A$ [13]. Du fait que A est de mesure nulle, on déduit que A est un ensemble frontière. Il existe donc un ensemble B dénombrable, partout dense et disjoint de A. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite formée avec les éléments de B. Définissons une fonction g de la manière suivante : $g(x) = f(x)$ si $x \notin B$; $g(x_n) = f(x_n) + a_n$, $a_n > 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. De la dernière condition et du fait que f est continue, on déduit que g est continue en chaque $x \notin B$. On voit aussi que g est discontinue en chaque $x_n (n = 1, 2, \ldots)$, donc g est du type α. De ce que $a_n > 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$, on déduit, pour chaque x réel et pour chaque $\xi \notin B$, $x > \xi$,

$$\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \geqq \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \tag{1}$$

donc $g'_+(x) = +\infty$ pour chaque $x \in A$.

Remarque. — Un cas particulier intéressant du théorème 15 est celui où l'ensemble A est un résiduel.

Théorème 16. — *Soient :* A *un ensemble partout dense, de première catégorie et du type* F_σ, B *un ensemble de mesure nulle et du type* $F_{\sigma\delta}$, $A \cap B = 0$. *Il existe une fonction du type* α, *telle que* $D = A$ *et dont la dérivée à droite soit infinie en chaque* $x \in B$.

Preuve. — D'après un résultat déjà cité de [31], on a $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, où les A_n sont fermés, partout non denses et disjoints deux à deux. D'après le théorème de [13], il existe f continue et telle que $f'(x) = +\infty$ pour $x \in B$. Posons $g(x) = f(x)$ si $x \notin A$, $g(x) = f(x) + a_n$ si $x \in A_n$, a_n étant le même que celui de la démonstration du théorème 15.

On a (1) pour chaque x réel et pour chaque $\xi \notin A$. En particulier, on a $g'_+(x) = +\infty$ pour $x \in B$.

Remarque. — Le théorème 2 de [17] est un cas particulier du théorème 16.

THÉORÈME 17. — *Soit* A *un ensemble de mesure nulle, du type* G_δ *et ne contenant aucun nombre algébrique. Il existe alors une fonction du type* α *dont la dérivée à droite est* $+\infty$ *en chaque* $x \in A$ *et chaque point algébrique irrationnel est un point de dérivabilité.*

Preuve. — En vertu d'un théorème de Z. Zahorski de [35] (*voir* aussi le théorème 26 de [7] et [34]), il existe une fonction f continue, telle que $f'(x)$ soit finie en chaque $x \notin A$ et $f'(x) = +\infty$ si $x \in A$. Considérons la fonction g suivante : $g(x) = f(x)$ si x est irrationnel, $g\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + q^{-q}$ si p et q sont des entiers positifs, $(p, q) = 1$. Il est visible que g est continue en chaque x irrationnel et discontinue en chaque x rationnel, donc g est du type α. Soit $\xi \in A$. On a (1) pour chaque $x > \xi$, donc $g'_+(\xi) = +\infty$. D'autre part, on a, pour chaque ξ irrationnel,

$$\frac{g\left(\frac{p}{q}\right) - g(\xi)}{\frac{p}{q} - \xi} = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi)}{\frac{p}{q} - \xi} + \frac{q^{-q}}{\frac{p}{q} - \xi}. \tag{2}$$

Si ξ est irrationnel algébrique, alors, en vertu du théorème de Liouville, le deuxième terme du deuxième membre tend à zéro pour $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| \to 0$, donc $g'(\xi) = f'(\xi)$ est finie.

THÉORÈME 18. — *Il existe une fonction du type* α *et telle que chaque point algébrique irrationnel appartienne à* $C \cap \Delta\infty$.

Preuve. — Les nombres algébriques irrationnels forment un ensemble V dénombrable, donc du type F_σ, donc du type $F_{\sigma\delta}$. V, étant dénombrable, est de mesure nulle. Il existe alors, d'après le théorème de Landis de [13], une fonction f continue en chaque point, et telle que $f'(x) = +\infty$ pour $x \in V$. Soit $g(x) = f(x)$ si x est irrationnel, $g\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + q^{-q}$ si p et q sont des entiers positifs premiers entre eux. La relation (2) est remplie pour ξ irrationnel. Si, en outre, ξ est algébrique, alors le deuxième terme du deuxième membre de (2) tend à zéro pour $\left|\frac{p}{q} - \xi\right| \to 0$, donc $g'(\xi) = f'(\xi) = +\infty$. Remarquons enfin que g est discontinue en chaque x rationnel et continue en chaque x irrationnel, donc g est du type α.

COROLLAIRE. — *Les points* ξ *tels que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{q_n^{-q_n}}{\frac{p_n}{q_n} - \xi} = 0 \tag{3}$$

pour chaque suite de points rationnels $\frac{p_n}{q_n} \to \xi$, $(p_n, q_n) = 1$, *forment un ensemble* X *de première catégorie, contenant tous les nombres algébriques irrationnels.*

Preuve. — Choisissons l'ensemble A du théorème 17 tel qu'il soit de première catégorie. Il s'ensuit que Δ est, pour f, un résiduel. Si X était de deuxième catégorie, alors $\Delta \cap X$ serait de deuxième catégorie et g serait dérivable en chaque point de $\Delta \cap X$, contrairement au théorème (*), car g est du type α. Donc X est de première catégorie. Évidemment, X contient tous les nombres algébriques irrationnels. Le problème est de savoir si X contient des nombres transcendants aussi.

Ce corollaire suggère un énoncé plus général, à savoir :

THÉORÈME 19. — *Soit* $\{a_n\}$ *une suite de nombres réels tendant à zéro. Les nombres* ξ *tels que*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{p_n}}{r_{p_n} - \xi} = 0$$

pour chaque suite $\{r_{p_n}\}$ *de nombres rationnels tendant à* ξ, *forment un ensemble* X *de première catégorie.*

Preuve. — Soit f une fonction dérivable en chaque point. Posons $g(x) = f(x)$ si x est irrationnel, $g(r_n) = a_n + f(r_n)$ si r_n est le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite formée avec tous les nombres rationnels. Du fait que f est continue on déduit que g est discontinue en chaque x rationnel; du fait que $a_n \to 0$ on déduit que g est continue en chaque x irrationnel, donc g est du type α. Alors, en vertu du théorème (*), Δ est de première catégorie pour g. Les points ξ rationnels peuvent être négligés, car ils forment un ensemble dénombrable, donc de première catégorie. Mais on a, pour ξ irrationnel,

$$\frac{g(r_{p_n}) - g(\xi)}{r_{p_n} - \xi} = \frac{f(r_{p_n}) - f(\xi)}{r_{p_n} - \xi} + \frac{a_{p_n}}{r_{p_n} - \xi},$$

donc $X \subset \Delta$ et X est, à plus forte raison, de première catégorie.

THÉORÈME 20. — *Il existe un ensemble* H *du type* F_σ, *jouissant des propriétés suivantes :* 1° *Le complémentaire de* H *est de mesure nulle;* 2° *Si* V *est un ensemble de mesure nulle, du type* G_δ *et contenu dans* H, *alors il y a une fonction* g *du type* α *telle* $g'(x)$ *soit finie pour* $x \in H - V$ *et* $g'(x) = +\infty$ *pour* $x \in V$.

Preuve. — A. I. Khintchine a établi le théorème suivant [11] : *Soit* φ *une fonction réelle, définie et continue sur* $(0, +\infty)$. *Supposons encore que* $x\varphi(x)$ *est non croissante sur* $(0, +\infty)$ *et*

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx$$

converge. Dans ces conditions, les nombres ξ *tels que l'inégalité*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varphi(q)}{q}$$

ait seulement un système fini de solutions en nombres entiers p et $q (q > 0)$, forment un ensemble K dont le complémentaire est de mesure nulle.

Il existe un ensemble H formé de nombres irrationnels, contenu dans K, du type F_σ et dont le complémentaire est de mesure nulle. Soit V un ensemble de mesure nulle, du type G_δ et contenu dans H. Il existe, en vertu du théorème de Zahorski de [35], une fonction f continue en chaque point et telle que $f'(x) = +\infty$ si $x \in V$, $f'(x)$ soit finie si $x \notin V$. Considérons maintenant une fonction $\psi(x)$ positive pour $x > 0$ et telle que

$$(4) \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x\psi(x)}{\varphi(x)} = 0$$

Posons $g(x) = f(x)$ si x est irrationnel et $g\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + \psi(q)$ si p et q sont des entiers premiers entre eux $(q > 0)$. g est discontinue en chaque x rationnel, continue en chaque x irrationnel, donc est du type α. Pour chaque ξ irrationnel on a

$$\frac{g\left(\frac{p}{q}\right) - g(\xi)}{\frac{p}{q} - \xi} = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi)}{\frac{p}{q} - \xi} + \frac{\psi(q)}{\frac{p}{q} - \xi}.$$

Si $\xi \in H$, alors

$$\left| \frac{\psi(q)}{\frac{p}{q} - \xi} \right| < \frac{q\psi(q)}{\varphi(q)},$$

donc, en vertu de (4),

$$\lim_{\frac{p}{q} \to \xi} \frac{\psi(q)}{\frac{p}{q} - \xi} = 0$$

et $g'(\xi) = f'(\xi)$. En particulier, pour $\xi \in V$, $g'(\xi) = f'(\xi) = +\infty$.

Problèmes. — Soit A un ensemble de première catégorie et du type F_σ.

8. Existe-t-il une fonction telle que $D = A$, tandis que Δ et $C - (\Delta \cup \Delta_\infty)$ soient partout denses?

9. Existe-t-il une fonction telle que $D = A$, Δ_∞ soit dense et $\Delta_\infty \subset C$?

10. Si la réponse au problème 9 est affirmative, existe-t-il une fonction telle que $D = A$ et $\Delta \cup \Delta_\infty = C$?

11. Existe-t-il une fonction telle que $D = A$, tandis que $C \cap M$, Δ et Δ_∞ soient partout denses?

12. Existe-t-il une fonction telle que $D = A$ tandis que $C \cap M$ et Δ soient de mesure positive sur chaque intervalle?

13. Soit β la mesure de $A \subset (0, 1)$ et soit γ positif et $\leqq 1 - \beta$. Existe-t-il une fonction telle que $D = A$, Δ soit de mesure γ et $C \cap M$ soit partout dense sur $(0, 1)$? (*voir* aussi le théorème 5 de [17]).

14. Existe-t-il une fonction monotone du type α, telle que $C - \Delta \subset M$?

15. Existe-t-il une fonction monotone du type α, telle que $C - \Delta = \Delta_\infty \cup M$?

Soit B un ensemble de mesure nulle, du type G_δ.

16. Existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta_\infty = B$?

17. Si la réponse au problème 16 est affirmative, existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta_\infty = B$ et Δ soit partout dense?

18. Si la réponse au problème 16 est affirmative, existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta_\infty = B$ et $C \supset M$?

19. Si la réponse aux problèmes 17 et 18 est affirmative, existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta_\infty = B$ et $C = \Delta_\infty \cup M$, Δ_∞ et M étant partout denses?

Soit E un ensemble de première catégorie et du type F_σ.

20. Existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta = E$?

21. Si la réponse au problème 20 est affirmative, existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta = E$ et $C - \Delta = \Delta_\infty \cup M$?

Soient : A et E des ensembles de première catégorie et du type F_σ, B un ensemble de mesure nulle et du type G_δ, $A \cap B = A \cap E = B \cap E = 0$.

22. Existe-t-il une fonction telle que $D = A$ et $\Delta_\infty = B$?

23. Existe-t-il une fonction telle que $D = A$ et $\Delta = E$?

24. Existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta = E$ et $\Delta_\infty = B$?

25. Si la réponse aux problèmes 22, 23 et 24 est affirmative, existe-t-il une fonction telle que $D = A$, $\Delta = E$ et $\Delta_\infty = B$?

26. Si la réponse au problème 22 est affirmative, existe-t-il une fonction telle que $D = A$, $\Delta_\infty = B$ et $C \cap M$ soit partout dense?

27. Si la réponse au problème 23 est affirmative, existe-t-il une fonction telle que $D = A$, $\Delta = E$ et Δ_∞ et $M \cap C$ soient partout denses?

28. Si la réponse au problème 24 est affirmative, existe-t-il une fonction du type α, telle que $\Delta = E$, $\Delta_\infty = B$ et $C \cap M$ soit partout dense?

29. Si la réponse au problème 25 est affirmative, existe-t-il une fonction telle que $D = A$, $\Delta = E$, $\Delta_\infty = B$ et $C = \Delta \cup \Delta_\infty \cup M$?

30. Si la réponse au problème 29 est affirmative, existe-t-il une fonction telle que $D = A$, $\Delta = E$, $\Delta_\infty = B$ et $C = \Delta \cup \Delta_\infty$?

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. S. Besicovitch, *Discussion der stetigen Funktionen in Zusammenhang mit der Frage über ihre Differentierbarkeit* (*Bull. Acad. Sc. Russie*, t. 19, 1925, p. 527-540).

[2] A. Broudno, *Continuité et dérivabilité* (en russe) [*Mat. Sbornik*, t. 13, (55), 1943, p. 119-134].

[3] S. Ćetković, *Les nombres transcendants et la différentiabilité d'une famille de fonctions. Formation d'un ensemble de nombres transcendants* (*Bull. Soc. Math. Phys. Serbie*, t. 6, 1944, p. 93-101).

[4] S. Ćetković, *Sur la différentiabilité de deux familles de fonctions réelles* (*Bull. Soc. Math. Phys. Serbie*, t. 4, nos 3-4, 1952, p. 53-57).

[5] S. Ćetković, *Un théorème de la théorie des fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1692-1694).

[6] S. Ćetković, *Quelques contributions à la théorie des fonctions continues dans les points partout densément disposés* (en serbe), Univerzitetu Beogradu, Publikacije electrotehničkog fakulteta, serija *Mat i fizika*, n° 33, 1960, 54 pages.

[7] G. Choquet, *Application des propriétés descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes* (*J. Math. pures et appl.*, t. 26, 1947, p. 115-226).

[8] M. K. Fort Jr., *A theorem concerning functions discontinuous on a dense set* (*Amer. Math. Monthly*, t. 58, 1951, p. 408-410).

[9] V. Jarnik, *Remarque sur les nombres dérivés* (*Fundam. Math.*, t. 23, 1934, p. 1-8).

[10] A. I. Khintchine, *Fractions continues* (en russe), Moscou-Leningrad, 1949.

[11] A. I. Khintchine, *Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen* (*Math. Annalen*, t. 92, 1924, p. 115-125).

[12] C. Kuratowski, *Topologie*, I, Warszawa-Wroclaw, 1948.

[13] E. M. Landis, *Sur l'ensemble des points où la dérivée existe et est infinie* (en russe) [*Dokl. Akad. Naouk S. S. S. R.* (*N. S.*), t. 107, 1956, p. 202-204].

[14] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques* (*J. Math. pures et appl.*, série 1, 16, 1851, p. 133-142).

[15] J. S. Lipiński, *Sur la dérivée d'une fonction de sauts* (*Colloq. Math.*, t. 4, 1957, p. 197-205).

[16] S. Marcus, *La superposition des fonctions et l'isométrie de certaines classes de fonctions* (*Bull. math. Soc. de math. et phys. R. P. R.*, t. 1, 1957, p. 69-76).

[17] S. Marcus, *Points de discontinuité et points de dérivabilité* (en russe) (*Rev. Math. pures et appl.*, t. 2, 1957, p. 471-474).

[18] S. Marcus, *Sur certains problèmes et théorèmes concernant la continuité et la dérivabilité des fonctions* (*Monatshefte für Math.*, 1960, p. 119-130).

[19] E. Marczewski, *Remarks on sets of measure zero and the derivability of monotonic functions* (en polonais) (*Prace Math.*, t. 1, 1955, p. 141-144).

[20] S. Mazurkiewicz, *Sur les nombres dérivés* (*Fund. Math.*, 23, 1934, p. 9-10).

[21] Liu Meng-Hui, *A very simple example of non-differentiable continuous function* (*Acta Math. Sinica*, t. 4, n° 4, 1954, p. 479-482).

[22] Ivan Niven, *Irrational numbers* (*The Carus Mathematical Monographs*, n° 11, 1956, Rahway, New Jersey).

[23] C. D. Olds, *Amer. Math. Monthly*, 1951, p. 340.

[24] S. Piccard, *Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien*, Neuchâtel, 1939.

[25] S. Piccard, *Sur des ensembles parfaits*, Paris, 1942.

[26] R. M. Redheffer, *Approximation by enumerable sets* (*Amer. Math. Monthly*, t. 62, 1955, p. 573-576).

[27] K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers* (*Mathematika*, t. 2, 1955, p. 1-20).

[28] J. Schoenberg, *The integrability of certain functions and related summability methods* (*Amer. Math. Monthly*, t. 66, 1959, p. 361-375).

[29] H. M. Sengupta et P. L. Ganguli, *On a class of steadily increasing functions with an everywhere dense set of points of discontinuity* (*Bull. Math. Soc. Calcutta*, t. 50, 1958, p. 9-18).

[30] H. M. Sengupta et B. K. Lahiri, *A note on derivatives of a function* (*Bull. Math. Soc. Calcutta*, t. 49, n° 4, 1957, p. 189-191).

[31] W. Sierpiński, *Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues* (*Fund. Math.*, t. 2, 1921, p. 41-49).

[32] W Sierpiński et A. N. Singh, *On derivates of discontinuous functions* (*Fund. Math.*, t. 36, 1949, p. 283-287).

[33] A. N. Singh, *On infinite derivates* (*Fund. Math.*, t. 33, 1945, p. 106-107).

[34] V. M. Tzodiks, *Sur l'ensemble des points où la dérivée est finie, resp. infinie* (en russe) [*Dokl. Akad. Naouk S. S. S. R.* (*N. S.*), t. 114, 1957, p. 1174-1176].

[35] Z. Zahorski, *Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist* (*Tohoku Math. J.*, t. 48, 1941, p. 321-330).

Ajouté sur les épreuves. — 1. S. Abian a donné récemment (*Fund. Math.*, t. 49, n° 2, 1961, p. 181-182) un théorème qui s'obtient du théorème 10 ci-dessus en remplaçant le mot « gauche » par le mot « droite » et l'égalité « $M = (0, 1)$ » par l'égalité « $M = C$ ». Le théorème de S. Abian ne contient pas le théorème 2 ci-dessus, car on ne sait pas, chez lui, si $\Delta_\infty = 0$. La construction de S. Abian est basée sur une idée différente de celles utilisées dans le travail ci-dessus. En outre, sa fonction est biunivoque.

2. Le problème 2 a été résolu par K. M. Garg (*Revue de math. pures et appl.*, t. 7, n° 1, 1962). Les résultats de Garg sont discutés par S. Marcus (*Revue de math. pures et appl.*, t. 7, n° 2, 1962).

3. F. Bagemihl a démontré (*Michigan Math. J.*, t. 4, 1957, p. 289-290) que les nombres de Liouville forment un ensemble résiduel. Cela permet d'obtenir l'affirmation 3° de l'énoncé du théorème 4 comme une conséquence de l'affirmation 2° du même énoncé. Aussi, dans l'énoncé du théorème 5, l'affirmation 3° doit être modifiée, en tenant compte du résultat de Bagemihl.