ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un semi-espace de Banach

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 78, nº 3 (1961), p. 241-272

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_3_241_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 78, 1961, p. 241 à 272.

L'ESPACE DONT CHAQUE ÉLÉMENT EST UNE COURBE N'EST QU'UN SEMI-ESPACE DE BANACH

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

Introduction.

La combinaison, réalisée à peu près simultanément et indépendamment, par Stephan Banach, Norbert Wiener et Hans Hahn (1), de la notion d'espace vectoriel abstrait, introduite par Grassmann et de celle d'espace distancié, qui nous est due, a rendu de grands services. Elle a fourni un cadre commun aux théories de nombreux espaces (géométriques, fonctionnels, etc.) très importants.

Tout espace ayant la puissance du continu peut être considéré comme un espace de Banach. Il suffit d'établir une correspondance biunivoque entre l'espace considéré et l'espace de la géométrie élémentaire — qui est un espace de Banach — et de définir dans l'espace considéré la somme, la norme, le produit par scalaire et l'élément neutre, au moyen de cette correspondance. Mais il est clair qu'une telle correspondance peut conduire à des résultats contraires à notre

(1) Mais c'est Banach qui en a édifié la théorie.

intuition. Par exemple, quand les éléments de l'espace sont des courbes, il pourra arriver qu'une courbe soit très éloignée de l'élément neutre, alors que sa norme est très petite.

On est donc conduit à ne présenter un espace important comme un espace de Banach que si l'on peut y définir de façon raisonnable, en accord avec la nature de cet espace, la somme, la norme, l'élément neutre et le produit par scalaire.

Cette nécessité, vite reconnue, sinon explicitement, du moins implicitement, a amené à considérer que certains espaces mathématiquement importants ne devaient pas être considérés comme espaces de Banach.

L'idée se présentait alors de tourner la difficulté, en considérant ces espaces réfractaires comme des espaces de Banach *généralisés*, c'est-à-dire de ne plus les astreindre à tous les axiomes et à toutes les définitions qui sont à la base des espaces de Banach.

UNE PREMIÈRE CATÉGORIE. — Nous avons pu formuler une première telle généralisation pour des espaces où l'on était amené à *distinguer la distanee de deux points et la longueur du vecteur qui les joint*. Nous avons ainsi défini les espaces « topologiquement affines » et nous en avons étudié la théorie (²), dont depuis, d'autres auteurs ont donné des applications importantes.

Dans l'espace de Banach, on représente par $\|\xi\|$ la norme de ξ et l'on définit la « distance » (ξ, ξ_1) de deux éléments ξ, ξ_1 par l'égalité classique

$$(\xi, \xi_1) = \|\xi + (-1).\xi_1\|.$$

Dans les espaces « topologiquement affines », on ne maintient plus cette égalité. Les propriétés des espaces vectoriels et celles des espaces distanciés continuent à y coexister, mais à peu près indépendamment.

UNE GÉNÉRALISATION DANS UNE AUTRE DIRECTION. — Nous avons récemment montré (³) que l'espace dont chaque élément est une courbe ne peut être considéré comme un espace de Banach, au moins quand on précise la nature de cet espace et quand on y définit de façon naturelle le produit par scalaire, la norme et l'élément neutre.

Ceci nous a amené à nous demander si l'on ne pourrait imaginer une autre généralisation de l'espace de Banach (d'ailleurs dans une direction tout à fait différente de notre première généralisation) et qui permettrait de considérer l'espace des courbes comme un *semi*-espace de Banach.

(²) *Les espaces abstraits topologiquement affines* (*Acta Math.*, t. 45, 1925, p. 25-52).

(³) *L'espace des courbes n'est pas un espace de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2787-2790). Note développée dans un article sous le même titre (dans la langue internationale Esperanto) dans *J. Math. pures et appl.*, t. 40, 1961, p. 197.

Voir aussi : *Simplification d'une démonstration donnée dans une Note précédente* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 9).

C'est qu'en effet, l'espace des courbes est un espace d'une importance extrême en mathématiques pures ou appliquées et que si *l'on devait renoncer* pour lui, à faire un *usage quelconque de la théorie des espaces de Banach,* le champ d'application de cette théorie se trouverait rencontrer une *limitation majeure.*

Nous allons voir que notre seconde généralisation consiste à ne plus conserver tous les axiomes à la base de l'espace de Banach. Et, plus précisément, ce sont seulement :

l'axiome

$$\text{« } (\xi + \xi_1) + \xi_2 = \xi + (\xi_1 + \xi_2) \text{ »}$$

et l'axiome

$$\text{« } \xi + \xi_1 = \xi + \xi_2 \quad \text{entraîne } \xi_1 = \xi_2 \text{ »}$$

auxquels on aura à renoncer. On les remplacera par deux conséquences plus faibles (p. 253) de ces deux axiomes.

Question à étudier. — 1° Il serait intéressant de voir s'il existe d'autres espaces importants qui sont dans le même cas que l'espace des courbes.

2° S'il en est ainsi, il y aurait lieu de chercher quelles sont, en dehors des axiomes, les propriétés des espaces de Banach qui se conservent pour les *semi-espaces de Banach.*

Le nouveau problème.

RAPPEL. — Dans notre travail cité plus haut (p. 242), l'espace considéré était l'espace des courbes continues orientées; nous y avions adopté des définitions du produit par scalaire, de l'élément neutre et de la norme qui semblent les plus naturelles possibles. (C'est pourquoi nous reprendrons ici ces mêmes définitions.) Et nous avions prouvé qu'on ne peut d'aucune manière y définir une somme qui satisfasse à tous les axiomes de Banach.

LE NOUVEAU PROBLÈME. — Au lieu de l'espace des courbes continues orientées, on considère souvent aussi des espaces constitués chacun seulement d'une famille $\mathcal{F}$ de courbes continues orientées : l'espace $\mathcal{R}$ des courbes rectifiables, celui des courbes analytiques, celui des courbes unicursales, etc.

Pour toutes ces familles de courbes, les définitions que nous avions précédemment adoptées — et que nous rappellerons plus loin — semblent encore les plus naturelles et nous les maintiendrons. Mais nous *procéderons différemment* pour la somme. Au lieu de chercher s'il existe une définition de la somme qui fasse de la famille $\mathcal{F}$ considérée un espace de Banach, nous poserons, *a priori,* une définition de la somme qui paraît naturelle. Nous savons déjà que, associée aux trois notions déjà mentionnées, elle ne fait pas de la famille $\mathcal{F}$ un espace de Banach. Nous verrons qu'elles n'en font qu'un *semi*-espace de Banach ([2]).

([1]) *Bull. Sc. Math.*, 1961.

([2]) Les deux parties du présent Mémoire développent respectivement deux Notes parues aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 1258 et 1702.

DÉFINITIONS. — Nous appliquerons les définitions qui vont suivre à une famille $\mathfrak{F}$ de courbes (supposées au moins continues et orientées).

1. *Produit par scalaire.* — Dans l'espace de la géométrie élémentaire, le produit d'un point X par un nombre a est l'homothétique de X relativement à une origine fixe, dans le rapport a.

Il est alors bien naturel *d'appeler produit d'une courbe* ξ *de la famille* $\mathfrak{F}$ *par le nombre* a et de représenter par $a.\xi$, *l'homothétique de* ξ relativement à une origine fixe, dans le rapport a. Mais il est souhaitable *que cette opération* ne fasse pas sortir de $\mathfrak{F}$ (ce qui est un des axiomes de Banach, numéroté 6°, plus loin). Nous astreindrons donc la famille $\mathfrak{F}$ à la condition suivante :

Condition B. — Toute homothétique d'une courbe de $\mathfrak{F}$ (ou au moins toute homothétique relativement à une origine fixe) appartient à la famille $\mathfrak{F}$.

(C'est une condition qui est remplie par les familles les plus importantes de courbes, en particulier par celles citées plus haut, p. 245.)

2. *Élément neutre.* — Quand $a = 0$, le produit $a.\xi$ se réduit à un point : le centre fixe d'homothétie. Or, si nous choisissons des définitions naturelles, nous souhaitons, en outre, qu'elles satisfassent aux axiomes ou à des axiomes de Banach. Dans un espace de Banach, le produit $0.\xi$ n'est autre que l'élément neutre θ.

Nous sommes donc conduit :

1° à prendre pour élément neutre de $\mathfrak{F}$ une courbe réduite à un point, soit le point θ;

2° à prendre θ pour centre d'homothétie dans la définition ci-dessus du produit par scalaire.

Condition A. — La convention 1° implique la condition *que la famille* $\mathfrak{F}$ *contienne au moins une courbe réduite à un point.*

3. *Norme.* — Dans un espace de Banach, pour qu'un élément ait une norme nulle, il faut et il suffit qu'il se réduise à l'élément neutre θ. Or, pour qu'une courbe se réduise à un point θ, il faut et il suffit que le maximum de la distance de θ à un point de la courbe soit nul. Il sera donc naturel d'appeler norme d'une courbe ξ de $\mathfrak{F}$, le *maximum de la distance de* θ *à un point de* ξ.

4. *Somme.* — Dans l'espace euclidien, la somme de deux points X, Y est l'extrémité $\mathcal{L}$ de la résultante des vecteurs qui joignent l'origine aux points X et Y.

Dans le cas actuel, on pourrait procéder de même. Établissons une correspondance $\mathcal{C}$ entre les points M de la courbe ξ et les points M_1 de la courbe ξ_1, on appellerait somme de ξ et ξ_1, la courbe décrite, quand M parcourt ξ, par l'extrémité P, de la résultante $\overline{\theta P}$ des vecteurs $\overline{\theta M}$, $\overline{\theta M_1}$. On reconnaîtra que cette définition de la somme est la généralisation la plus naturelle et la plus immédiate de la somme géométrique classique.

Toutefois, prise au pied de la lettre, elle présente un gros inconvénient, c'est qu'elle dépend de la correspondance adoptée et qu'ainsi il peut y avoir plusieurs sommes $\xi + \xi_1$. Pour assurer l'imicité de la somme, l'idée vient alors de choisir, parmi les correspondances ponctuelles, possibles entre deux courbes, une correspondance particulière, déterminée par la donnée des deux courbes. Or, de même que la somme $X + Y$ est solidaire du système X, Y, 0, de même il est naturel de supposer que la somme des courbes ξ, ξ_1 est solidaire du système ξ, ξ_1, 0 supposé rigide.

Ainsi, précisément, il y a une condition naturelle à remplir pour le choix de cette correspondance particulière.

Dans l'espace de la géométrie élémentaire, le mode de détermination de la somme des points X et Y est indépendant de la situation dans cet espace du système considéré comme rigide formé par X, Y et l'origine.

Dans une généralisation naturelle de cette somme, si l'on effectue un déplacement de l'ensemble, considéré comme rigide, des deux courbes ξ, ξ_1 et de l'élément neutre 0, la somme de ξ et de ξ_1 devrait être entraînée par le même déplacement. Le choix de la correspondance ponctuelle entre ξ et ξ_1 sera donc assujetti à impliquer la réalisation de cette condition.

Parmi les choix de cette espèce, nous étudierons le suivant. Nous donnerons plus loin (p. 255 et 262, 270) des exemples de représentations paramétriques « *intrinsèques* » des courbes continues orientées, ou de certaines familles $\mathcal{F}$ de ces courbes. C'est-à-dire que, pour chaque courbe continue, orientée, on peut faire correspondre à chaque point M (et à son rang dans le sens de parcours adopté sur la courbe) une valeur numérique d'un paramètre variant de 0 à 1 et qui ne dépend que de la forme de la courbe, indépendamment de sa position dans l'espace $\mathcal{C}$. On suppose, bien entendu, que le point M est une fonction continue de t et que quand t croît, M varie dans le sens adopté sur la courbe.

Choisissons une telle paramétrisation intrinsèque.

Nous définirons une somme $S_{p,\mathcal{F}}$ de deux courbes ξ, ξ_1 de la famille $\mathcal{F}$ considérée, comme la courbe décrite, quand t croît de 0 à 1, par l'extrémité P de la résultante $\overline{0P}$ *des deux vecteurs* $\overline{0M}$ *et* $\overline{0M_1}$ *qui joignent le point* 0 (*l'élément neutre*) *à deux points* M *de* ξ, M_1 *de* ξ_1, *qui correspondent à la même valeur* t du paramètre défini dans la paramétrisation intrinsèque p.

Il n'est pas nécessaire (et il pourra ne pas arriver) que dans la paramétrisation intrinsèque p, le paramètre t' correspondant à P de $S_{,\mathcal{F}p}$ soit égal à t.

Condition C. — Par contre, afin de réaliser l'axiome de Banach numéroté plus loin 1°, on astreindra la paramétrisation p à la condition que toute somme $S_{p,\mathcal{F}}$ appartienne aussi à la famille $\mathcal{F}$.

Condition D. — Enfin, pour pouvoir établir les axiomes de Banach numérotés plus loin 9° et 10°, nous astreindrons aussi p à la condition que, en passant de ξ à $a.\xi$, les points M de ξ et M′ de $a.\xi$ homothétique de M, correspondent *à la même valeur* du paramètre dans la paramétrisation intrinsèque p.

Remarque. — On pourrait être tenté de penser que si pour les courbes ξ, ξ_1, $\zeta = \xi + \xi_1$ on admet les représentations vectorielles intrinsèques

$$\overline{0\mathrm{M}} = \overrightarrow{f(t)}, \qquad \overline{0\mathrm{M}_1} = \overrightarrow{f_1(t)}, \qquad \overline{0\mathrm{P}} = \overrightarrow{f(t)} + \overrightarrow{f_1(t)},$$

on n'a pas défini une somme de deux *courbes* mais une somme vectorielle de deux *fonctions*.

Pour écarter cette interprétation, il suffit d'observer que si $t_1 = \varphi(t)$ est une fonction continue croissante de t variant de 0 à 1 quand t varie de 0 à 1, par exemple $\varphi(t) = t^3$, la même définition de la somme ferait correspondre à ξ, ξ_1 les fonctions vectorielles

$$\overline{0\mathrm{M}} = \overrightarrow{f(t^3)}, \qquad \overline{0\mathrm{M}_1} = \overrightarrow{f_1(t^3)}, \qquad \overline{0\mathrm{P}} = \overrightarrow{f(t^3)} + \overrightarrow{f_1(t^3)}.$$

On n'aurait plus les mêmes fonctions, mais on aurait la même courbe, somme des deux mêmes courbes.

Nous donnerons dans la seconde partie, des exemples de couples p, $\mathcal{F}$ satisfaisant aux conditions A, B, C et D.

5. *Distance.* — L'espace $(p.\mathcal{F})$ est un espace distancé (dit aussi métrique) quand on y définit la distance (ξ, ξ_1) de deux courbes de $\mathcal{F}$ par la relation classique

$$(\xi, \xi_1) = \| \xi + (-1).\xi_1 \|. \tag{1}$$

Cette définition paraît faire dépendre la distance de ξ et ξ_1 du choix de l'élément neutre θ — qui intervient dans la détermination de $(-1).\xi_1$ et dans celle de la

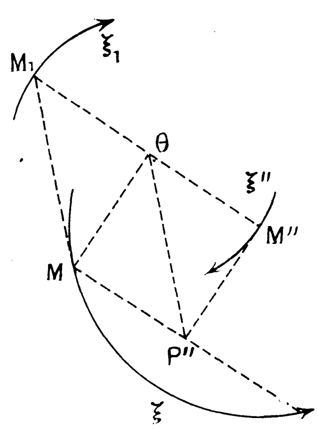

Fig. 1.

norme. (Notons que, d'après la condition A, $\mathcal{F}$ contient une courbe réduite à un point, pris pour θ.)

En réalité, soient M, M_1 deux points de ξ, ξ_1 se correspondant dans la correspondance intrinsèque p entre ξ et ξ_1. La courbe $\xi'' = (-1).\xi_1$ symétrique de ξ_1, par rapport à θ appartient aussi à la famille $\mathcal{F}$, d'après la condition B, et le symétrique M'' de M, par rapport à θ est un point de ξ'' qui correspond à M, d'après la condition D, dans la correspondance intrinsèque entre ξ et ξ''. L'extrémité P'' du vecteur $\overline{\theta P''} = \overline{\theta M} + \overline{\theta M''}$, sera donc un point de $\xi + (-1).\xi_1$. Or, on voit sur la figure 1, que $\overline{P''M}$ est équipollent à $\overline{M''\theta}$, donc à $\overline{\theta M_1}$, que, par suite, les longueurs $\overline{\theta P''}$ et M_1M sont égales. Dès lors, la norme de $\xi + (-1).\xi_1$ étant égale à la plus grande des distances, $\overline{\theta P''}$ sera aussi égale à la plus grande des distance M_1M.

Finalement, on voit que : *la « distance » entre* ξ *et* ξ_1, soit (ξ, ξ_1), doit être *égale à la plus grande des distances* MM_1, de deux points M de ξ, M_1 de ξ_1 qui *se correspondent dans la correspondance intrinsèque p* entre ξ et ξ_1.

Cette définition satisfait aux conditions classiques imposées à la distance.

On a, en effet, évidemment

$$(\xi, \xi_1) = (\xi_1, \xi) \geqq 0.$$

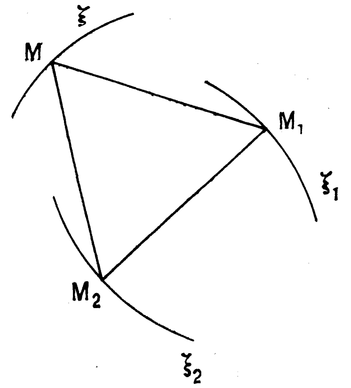

Fig. 2.

Pour que $(\xi, \xi_1) = 0$, c'est-à-dire pour que le maximum des distances MM_1 soit nul, c'est-à-dire pour que chacune de ces distances soit nulle, il faut et il suffit que les points de ξ, ξ_1 qui se correspondent dans la correspondance intrinsèque p, entre ξ et ξ_1 coïncident, autrement dit que ξ et ξ_1 soient identiques.

Si ξ_2 est une troisième courbe de $\mathcal{F}$, on a

$$(2) \qquad (\xi, \xi_1) \leqq (\xi, \xi_2) + (\xi_2, \xi_1),$$

car (ξ, ξ_1) est égale à la distance de deux certains points MM_1 de ξ et ξ_1 qui correspondent à la même valeur t du paramètre intrinsèque. Soit M_2 le point de ξ_2 qui correspond aussi à t. Alors M_2 correspondra aussi à M_1 dans la correspondance intrinsèque entre ξ_2 et ξ_1. On aura donc

$$(\xi, \xi_1) = MM_1, \qquad (\xi, \xi_2) \geqq MM_2,$$
$$(\xi_1, \xi_2) \geqq M_1M_2 \qquad \text{et} \qquad MM_1 \leqq MM_2 + M_1M_2,$$

d'où l'inégalité (2).

Remarque. — L'égalité (1) a servi à définir la distance à partir de la norme. Inversement, comme il est clair géométriquement que

$$(-1).\theta = \theta, \qquad \xi + (-1).\theta = \xi + \theta = \xi,$$

on voit que cette même égalité peut servir, en prenant $\xi_1 = \theta$, à définir la norme à partir de la distance

$$\|\xi\| = (\xi, \theta). \tag{3}$$

Les axiomes.

Théorème. — Nous allons maintenant montrer que si une famille $\mathcal{F}$ de courbes continues orientées admet une paramétrisation intrinsèque p, vérifiant les conditions A, B, C et D, et si l'on applique au couple $(\mathcal{F}, p)$, les définitions précédentes du produit par scalaire, de l'élément neutre, de la norme et de la somme, la *plupart* des axiomes de Banach (c'est-à-dire tous, sauf peut-être ceux de la page 243, numérotés plus loin 3° et 4°) sont vérifiés et qu'on obtient ainsi ce que nous avions *primitivement* appelé un *semi*-espace de Banach.

Nous prendrons ces axiomes tels qu'ils figurent aux pages 125-126 de notre Ouvrage : *Les espaces abstraits*, chez Gauthier-Villars, Paris.

Soient ξ, ξ_1, ξ_2 trois courbes de $\mathcal{F}$ et a, b deux nombres réels quelconques. Les axiomes suivants sont des conséquences évidentes : I, de nos définitions du produit par scalaire, de l'élément neutre et de la norme; II, des conditions A, B, C et D.

« 6° $a.\xi$ existe et est un élément de $\mathcal{F}$ », en vertu de la condition B.

« 11° $1.\xi \equiv \xi$. »

« 12° $(ab).\xi = a.(b.\xi)$. »

« 13° $\|\xi\| \geqq 0$. »

« 14° $\|\xi\| = 0$ équivaut à $\xi = \theta$. »

« 15° $\|a.\xi\| = |a|.\|\xi\|$. »

Notons que, de l'ensemble de 14° et 15°, résulte

$$0.\xi = \theta. \tag{4}$$

Les deux axiomes suivants paraissent évidemment vérifiés, mais nécessitent en réalité une démonstration en règle.

« 7° $a \neq 0$, $\quad a.\xi = a.\xi_1$ entraîne $\xi = \xi_1$. »

A tout point M de ξ correspond sur θM, un point M' tel que $\overline{\theta M'} = a.\overline{\theta M}$. Ce point appartient à $a.\xi$, donc à $a.\xi_1$; dès lors, $\overline{\theta M'} = a.\overline{\theta N}$, où N est un point de ξ_1 situé sur θM.

De $a.\overline{\theta M} = a.\overline{\theta N}$, où $a \neq 0$, résulte $\overline{\theta M} = \overline{\theta N}$, d'où $N \equiv M$.

De même, un point de ξ_1 est identique à un point de ξ. Ainsi $\xi = \xi_1$. Et puisque $a.\xi$ et $a.\xi_1$ sont parcourus dans le même sens, il en sera de même pour ξ et ξ_1.

« 8° Si $\xi \neq \theta$, $a.\xi = b.\xi$ entraîne $a = b$. »

Pour tout point M de ξ, il y a un point P de $a.\xi$, tel que $\overline{\theta P} = a.\overline{\theta M}$. Ce point doit appartenir à $b.\xi$, il y a donc un point M' de ξ tel que $\overline{\theta P} = b.\overline{\theta M'}$. Ainsi

$$a.\overline{\theta M} = b.\overline{\theta M'}, \tag{5}$$

donc

$$|a|\,\theta M = |b|\,\theta M'. \tag{5 bis}$$

Il y a au moins un point M de ξ tel que $\theta M \neq 0$, puisque $\xi \neq \theta$. Donc si $b = 0$, a est aussi nul. De même, si $a = 0$, a est aussi nul. Donc, ou bien $a = b = 0$, ou bien a et b sont tous deux $\neq 0$. Alors, à la plus grande valeur de θM correspondra la plus grande valeur de $\theta M'$ et, puisque M' est sur ξ, $\theta M' \leqq \theta M$, d'où, d'après (5), $|a| \leqq |b|$. On prouverait de même que $|a| \geqq |b|$. Donc $|a| = |b|$. Dès lors, ou bien $a = b$, ou bien $a = -b$ et d'après (5), on aurait

$$\overline{\theta M'} = -\overline{\theta M}, \qquad \text{d'où} \qquad \xi = -\xi.$$

La courbe ξ serait symétrique par rapport à θ. Mais la courbe $-\xi$ serait orientée sur ξ en sens contraire de ξ et lui serait identique en tant que courbe orientée, ce qui est impossible puisque $\xi \neq \theta$. On ne peut donc avoir $a = -b$.

Finalement, on a bien dans tous les cas $a = b$.

Restent les axiomes où intervient la somme.

« 1° $\xi + \xi_1$ est un élément déterminé de $\mathcal{F}$. »

C'est une conséquence de la condition C.

Les axiomes suivants sont des conséquences immédiates des définitions adoptées

« 2° $\xi + \xi_1 = \xi_1 + \xi$. »

« 5° Il existe un élément déterminé θ de $\mathcal{F}$ tel que $\xi + \theta = \xi$. »

En utilisant la condition D, on établit aussi les axiomes

« 9° $a.(\xi_1 + \xi_2) = a.\xi_1 + a.\xi_2$. »

« 10° $(a + b).\xi = a.\xi + b.\xi$. »

Passons à

« 16° $\|\xi + \xi_1\| \leqq \|\xi\| + \|\xi_1\|$. »

Tout point P de la somme $\xi + \xi_1$ est l'extrémité de la résultante $\overline{\theta P}$ des vecteurs $\overline{\theta M}$, $\overline{\theta M_1}$, où les points M, M_1 de ξ, ξ_1 correspondent à la même valeur du paramètre intrinsèque. On a donc

$$\theta P \leqq \theta M + \theta M_1 \leqq \|\xi\| + \|\xi_1\|.$$

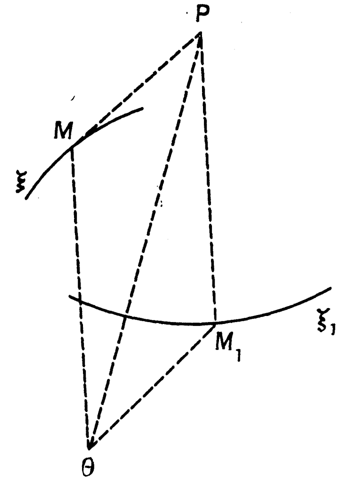

Fig. 3.

Dès lors le maximum $\|\xi + \xi_1\|$ de θP vérifiera 16°.

Ainsi, nous avons constaté que nos définitions *vérifient* (quand les conditions A, B, C et D sont satisfaites), *les axiomes suivants* (pris dans leur ordre de vérification) : 6°, 11°, 12°, 13°, 14°, 15°, 7°, 8°, 1°, 2°, 5°, 9°, 10°, 16°.

Restent donc *seulement* les axiomes 3° et 4°. Ceux-ci, d'ailleurs, ne sont *pas indépendants*, comme nous allons le voir.

Remarque. — I. Si l'axiome

« 3° $(\xi + \xi_1) + \xi_2 = \xi + (\xi_1 + \xi_2)$ »

était vérifié, l'axiome

« 4° $\xi + \xi_1 = \xi + \xi_2$ entraîne $\xi_1 = \xi$ »

serait aussi vérifié.

En effet, quand

$$\xi + \xi_1 = \xi + \xi_2,$$

on a aussi

$$(6) \qquad (-1).\xi + (\xi + \xi_1) = (-1).\xi + (\xi + \xi_2),$$

d'où, par (4) et par les axiomes 5°, 10°, 11°,

$$\xi_1 = \theta + \xi_1 = \theta.\xi + \xi_1 = ((-1) + 1).\xi + \xi_1 = [(-1).\xi + 1.\xi] + \xi_1 = [(-1).\xi + \xi] + \xi_1.$$

Et si 3° est vérifié,

$$\xi_1 = (-1).\xi + (\xi + \xi_1)$$

et, de même,

$$\xi_2 = (-1).\xi + (\xi + \xi_2).$$

Dès lors, de $\xi + \xi_1 = \xi + \xi_2$ on déduit $\xi_1 = \xi_2$, ce qui démontre 4°.

II. Inversement, si pour une famille $(\mathcal{F}, p)$ déterminée assortie des définitions précédentes de la norme, etc., les conditions A, B, C, D sont remplies et si nous montrons que la condition 4° n'est pas vérifiée, il en résultera que cet ensemble vérifie les axiomes de Banach, sauf les axiomes 3° et 4°.

III. La remarque suivante fait comprendre pourquoi l'égalité

« 3° $(\xi + \xi_1) + \xi_2 = \xi + (\xi_1 + \xi_2)$ »

est pour l'espace $(\mathcal{F}, p)$ moins évidente qu'il ne paraît.

On pourrait penser que chaque point de l'un ou l'autre des deux membres de l'égalité est l'extrémité de la résultante de trois vecteurs issus de θ et aboutissant en trois points correspondants de ξ, ξ_1, ξ_2, ce qui conduirait à l'égalité exprimant 3°.

Mais nous avons déjà observé (p. 245) que le paramètre t, commun à deux points correspondants de ξ et ξ_1 n'est pas nécessairement égal au paramètre τ du point de $\xi + \xi_1$ correspondant à t. Pour obtenir $(\xi + \xi_1) + \xi_2$, il faudra associer au point de $\xi + \xi_1$ correspondant à τ un point de ξ_2 correspondant à τ qui ne sera pas, en général égal à t. Non seulement, comme nous venons de l'expliquer, la condition 3° n'est pas évidemment réalisée, mais nous donnerons dans la seconde partie de ce Mémoire, un *contre-exemple* pour lequel cette condition *n'est pas* vérifiée.

Nouvelle définition des semi-espaces de Banach.

Introduction. — Dans nos deux premières Notes (5) sur les semi-espaces de Banach, nous avions appelé ainsi tout espace vérifiant les 16 axiomes de Banach, sauf peut-être les axiomes 3° et 4° et nous avons donné des exemples d'espaces de courbes rentrant dans cette catégorie et ne vérifiant ni 3°, ni 4°. Ainsi était prouvé que ces semi-espaces de Banach, s'ils comprenaient les espaces de Banach, étaient plus généraux.

Mais, en cherchant à étendre certaines propriétés des espaces de Banach aux semi-espaces de Banach, nous nous sommes aperçu que cette extension serait très difficile si l'on renonçait *totalement* aux axiomes 3° et 4°. Or, nous allons

(5) *L'espace dont chaque élément est une courbe n'est qu'un semi-espace de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 1258-1260); *Exemples de semi-espaces de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 251, 1960, p. 1702-1703).

voir que deux certaines propriétés des espaces de Banach, qui y sont des conséquences de 3° et 4° : 1° subsistent pour les espaces de courbes étudiés plus haut; 2° permettent l'extension de certaines autres propriétés des espaces de Banach. Nous serons donc conduit à modifier, à restreindre, notre définition primitive des semi-espaces de Banach, en imposant comme nouveaux axiomes ces deux propriétés.

Une première propriété des espaces de Banach. — I. Dans un tel espace, on a

$$a - a = 1 . a + (-1) . a = [1 + (-1)] . a = 0 . a = \theta.$$

Ainsi

$$(7) \qquad a = b \quad \text{implique} \quad a - b = \theta.$$

Réciproquement, si $a - b = \theta = a - a$ et si l'axiome 4° est vérifié, on a

$$b = a.$$

Quand les axiomes de Banahc sont vérifiés, sauf peut-être 3° et 4°, l'implication (7) reste encore vérifiée, mais on ne peut maintenir le raisonnement ci-dessus pour la réciproque.

II. Cependant cette réciproque subsiste pour le système Σ, composé d'une famille $\mathcal{F}$ de courbes continues orientées, d'une paramétrisation intrinsèque (p. 245), des définitions ci-dessus de la norme, de l'élément neutre, du produit par scalaire et de la somme, quand on suppose que ce système vérifie les conditions A, B, C, D des pages 244, 245 et 246. Alors, pour deux courbes ξ, ξ_1 de $\mathcal{F}$, dire que $\xi + (-1) . \xi_1 = \theta$, c'est dire que, dans la figure 2, P″ est en θ et, puisque $MM_1 = \theta P''$, que M_1 coïncide avec M quel que soit M, c'est-à-dire enfin, que $\xi_1 = \xi$.

La deuxième propriété. — Reprenons d'abord à nouveau le cas d'un espace de Banach. En vertu de la condition 3°, on a

$$(8) \quad (\xi - \varphi) + (\varphi - \eta) = \xi + [-\varphi + (\varphi - \eta)] = \xi + [((-\varphi) + \varphi) - \eta] = \xi + [\theta - \eta] = \xi - \eta.$$

Or, en vertu de la condition 16°, on a

$$(9) \qquad \| \xi + \omega \| \leqq \| \xi \| + \| \omega \|.$$

En combinant ces deux relations, on a donc

$$(10) \qquad \| \xi - \eta \| \leqq \| \xi - \varphi \| + \| \varphi - \eta \|.$$

D'autre part, nous avons montré plus haut (p. 247), qu'en posant, en général

$$(\xi_1, \xi_2) = \| \xi_1 - \xi_2 \|$$

pour le système de courbes, Σ, précédent, on avait

$$(\xi_1, \xi_2) \leqq (\xi_1, \xi) + (\xi, \xi_2).$$

Dès lors, la relation (10) est valable non seulement pour tout espace de Banach, mais pour tout système Σ de courbes.

Modification de la définition des semi-espaces de Banach. — En raison de ce qui précède, nous sommes amené à restreindre la définition des semi-espaces de Banach.

A partir de maintenant, nous appellerons ainsi un système composé d'un certain ensemble d'éléments associé à certaines définitions de la norme, de l'élément neutre, du produit par scalaire et de la somme, qui vérifie les axiomes de Banach, sauf peut-être les axiomes 3°, 4° de la page 250, *mais qui vérifie les axiomes suivants :*

4° *bis*.	Si $\xi - \eta = 0$,	on a $\xi = \eta$;
16° *bis*.	$\|\xi - \eta\| \leqq \|\xi - \varphi\| + \|\varphi - \eta\|$.	

(Il est clair qu'une des conséquences de 16° *bis*, obtenue en prenant $\varphi = 0$, est l'axiome 16°, qui, dès lors, devient surabondant.)

Nous avons montré plus haut que tout système Σ de la page 252 vérifie aussi les axiomes 4° *bis* et 16° *bis* : un tel système reste donc un semi-espace de Banach selon notre définition restreinte de ces espaces.

Dans la deuxième partie de cet article, nous donnerons des exemples de systèmes Σ qui ne vérifient ni 3°, ni 4°. Par conséquent, selon notre définition restreinte des semi-espaces de Banach, comme dans notre définition primitive, la famille des semi-espaces de Banach, non seulement comprend celle des espaces de Banach, mais elle est plus générale.

Application. — Nous réaliserons donc une véritable extension de certaines propriétés des espaces de Banach, quand, dans un prochain article, nous démontrerons qu'elles sont aussi vérifiées pour tout semi-espace de Banach appelé ainsi dans notre définition restreinte. Dès maintenant, voici une première extension.

Distance. — Il y a une propriété générale très utile des semi-espaces de Banach qu'il convient de souligner, avant de passer aux cas particuliers.

Grâce à l'introduction des axiomes 4° *bis* et 16° *bis*, nous allons pouvoir démontrer que tout *semi-espace de Banach est un espace distancié* (dit aussi métrique).

Nous partons de l'expression de la distance (u, v) de deux éléments d'un espace de Banach

« 6° $(u, v) = \|u + (-1).v\|$. »

Il y a trois propriétés de la distance (quand on continue à la définir ainsi dans un semi-espace de Banach) qu'il faut établir à partir des axiomes propres à ces semi-espaces.

La troisième, l'inégalité triangulaire

$$(u, v) \leqq (u, w) + (w, u)$$

résulte immédiatement de l'axiome 16° *bis*, en y tenant compte de 6°. Les deux premières propriétés sont plus délicates à démontrer, car la démonstration exige d'avoir recours à un nombre bien plus grand d'axiomes qu'il ne paraît d'abord nécessaire.

Première propriété. — $(u, v) = (v, u) \geqq 0$.

La distance étant égale à une norme est $\geqq 0$. On a donc d'abord

$$(v, u) \geqq 0.$$

On a

$$(u, v) = \| u + (-1).v \| = \| 1.(u + (-1).v) \|$$

et

$$| -1 |.\| u + (-1).v \| = \| (-1).u + (-1).((-1).v) \|$$

d'après les axiomes 11° et 15°.

$$(-1).((-1).v) = 1.v \quad \text{d'après } 12^\circ \qquad \text{et} \qquad 1.v = v \quad \text{d'après } 11^\circ.$$

Donc

$$(u, v) = \| (-1).u + v \| = \| v + (-1).u \|$$

d'après 2°. D'où enfin,

$$(u, v) = (v, u).$$

Seconde propriété. — $(u, v) = 0$ est équivalent à $u = v$.

En effet, si $u = v$,

$$(u, v) = (u, u) = \| u + (-1).u \| = \| 1.u + (-1).u \| = \| 0.u \|,$$

d'après l'axiome 10°. Et d'après 15°, on a $\| 0.u \| = 0$.

Donc, si $u = v$, $(u, v) = 0$.

Réciproquement, si $(u, v) = 0$, on a $\| u + (-1).v \| = 0$ donc, d'après 14°,

$$u + (-1).v = \theta.$$

Et d'après 4° *bis*, on en conclut $u = v$.

Avertissement. — Les définitions et les propositions précédentes pourraient paraître abstraites, trop générales et sans portée si nous nous arrêtions là. Mais nous allons montrer, dans la seconde partie, qu'elles prennent un sens concret et de l'intérêt en les appliquant à trois exemples particuliers, qui, bien entendu, ne sont pas les seuls.

DEUXIÈME PARTIE.

TROIS CAS PARTICULIERS.

I. — L'espace des courbes rectifiables.

EXEMPLE PARTICULIÈREMENT SIMPLE DE PARAMÉTRISATION INTRINSÈQUE. — Prenons pour famille $\mathcal{F}$, l'ensemble des courbes rectifiables orientées. Une paramétrisation intrinsèque se présente immédiatement à l'esprit. C'est celle qui consiste à prendre comme paramètre intrinsèque d'un point M sur la courbe $\xi \equiv \widehat{AB}$, un nombre t proportionnel à l'abscisse curviligne $s = \widehat{AM}$ et variant de 0 à 1. Si L est la longueur de $\widehat{AM}$, on aura ainsi

$$t = \frac{s}{L}.$$

Il est clair que ce paramètre ne varie pas si, considérant la courbe comme solide, on la déplace de façon quelconque dans l'espace (ce qui justifie le qualificatif d'intrinsèque).

On voit immédiatement que cette paramétrisation vérifie les conditions A, B et D des pages 244 et 246.

Démontrons qu'elle vérifie aussi la condition C, c'est-à-dire que la somme $\xi + \xi_1$ de deux courbes rectifiables orientées, quand elle correspond à cette paramétrisation particulière, est aussi une courbe rectifiable orientée.

En appelant $s = \widehat{AM}$, $s_1 = \widehat{A_1M_1}$, les abscisses curvilignes de M et M_1, sur ξ et ξ_1, on aura la correspondance considérée quand

$$\frac{s}{L} = \frac{s_1}{L_1} (= t).$$

La « somme » $\xi + \xi_1$ est évidemment une courbe continue orientée. Elle est aussi rectifiable. En effet, les vecteurs correspondants $\overline{0P}$, $\overline{0M}$, $\overline{0M_1}$ sont des fonctions vectorielles de t,

$$\overline{0P}(t), \quad \overline{0M}(t), \quad \overline{0M_1}(t)$$

telles que

$$\overline{0P}(t) = \overline{0M}(t) + \overline{0M_1}(t).$$

En prenant arbitrairement

$$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1,$$

on aura donc

$$\overline{P(t_i)\,P(t_{i+1})} = \overline{M(t_i)\,M(t_{i+1})} + \overline{M_1(t_i)\,M_1(t_{i+1})},$$

d'où, pour les longueurs correspondantes,

$$\sum_{i=1}^{n-1} P(t_i)\,P(t_{i+1}) \leqq \sum_{i=1}^{n-1} M(t_i)\,M(t_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} M_1(t_i)\,M_1(t_{i+1}).$$

On peut prendre $\frac{1}{n}$ et le plus grand des $(t_{i+1}-t_i)$ assez petits pour que les sommes du second membre soient respectivement inférieures à $L+\omega$ et $L_1+\omega$, où ω est un nombre positif arbitrairement choisi. Le premier membre sera inférieur à $L+L_1+2\omega$. En faisant tendre ω vers zéro, on voit que la courbe $\xi+\xi_1$ est rectifiable, c'est-à-dire que la condition C est vérifiée. Et même, nous voyons que la longueur L_2 de $\xi+\xi_1$ est au plus égale à $L+L_1$.

Ainsi, les conditions A, B, C, D sont vérifiées dans le cas actuel. D'où le théorème qui va suivre.

L'espace $\mathcal{R}$. — Quand dans l'espace des courbes rectifiables orientées, on adopte nos définitions précédentes (d'une paramétrisation intrinsèque, du produit par scalaire, de l'élément neutre, de la norme et de la somme), on obtient un espace *que nous appellerons l'espace $\mathcal{R}$*. Appliquons-lui le théorème de la page 248.

Théorème. — I. *L'espace $\mathcal{R}$ est un* semi-espace de Banach, *c'est-à-dire un espace où sont vérifiés les axiomes de Banach et aussi les axiomes* 4° *bis et* 16° *bis de la page* 243, *sauf peut-être les axiomes* 3°, 4° *de la page* 250.

II. Nous donnerons page 257, un contre-exemple pour lequel 3° n'est pas vérifié, de sorte que l'espace $\mathcal{R}$ du présent théorème *n'est pas* un espace de Banach.

III. Et, même, nous donnerons (p. 249) un second contre-exemple prouvant que *l'espace $\mathcal{R}$ ne vérifie ni l'axiome* 3°, *ni l'axiome* 4°.

Exemples d'une somme. — I. Dans l'espace $\mathcal{R}$, la somme S de deux vecteurs $\xi=\overline{AB}$, $\xi_1=\overline{A_1B_1}$, est aussi un vecteur $S=\overline{CD}$.

En effet, soient P, P_1 deux points de ξ, ξ_1 tels que

$$\frac{AP}{AB}=\frac{A_1P_1}{A_1B_1}=t.$$

On aura

$$\begin{aligned}\overline{0P} &= \overline{0A} + t(\overline{0B}-\overline{0A}),\\ \overline{0P}_1 &= \overline{0A}_1 + t(\overline{0B}_1-\overline{0A}_1).\end{aligned}$$

L'extrémité Q de la résultante $\overline{0Q}$ de $\overline{0P}$ et $\overline{0P}_1$ sera un point de $S=\xi+\xi_1$. On aura

$$\overline{0Q}=(\overline{0A}+\overline{0A}_1)+t[(\overline{0B}+\overline{0B}_1)-(\overline{0A}+\overline{0A}_1)]$$

ou

$$\overline{0Q}=\overline{0C}+t(\overline{0D}-\overline{0C}); \tag{11}$$

S est le lieu de Q quand t croît de o à 1. D'après la formule (11), S est donc le vecteur $\overline{\mathrm{CD}}$ où $\overline{\theta\mathrm{C}}$ est la résultante de $\overline{\theta\mathrm{A}}$ et $\overline{\theta\mathrm{A}_1}$, et $\overline{\theta\mathrm{D}}$ est la résultante de $\overline{\theta\mathrm{B}}$ et $\overline{\theta\mathrm{B}_1}$.

Cet exemple nous sera utile maintenant et plus loin (p. 258).

II. Dans l'espace $\mathcal{R}$, la somme de deux lignes polygonales *est aussi une ligne polygonale*. Si ξ et ξ_1 sont deux lignes polygonales, si M, M_1 sont deux points correspondant dans la correspondance intrinsèque entre ξ et ξ_1, ils correspondent à une même valeur du paramètre intrinsèque $t = \frac{s}{\mathrm{L}} = \frac{s_1}{\mathrm{L}_1}$.

Rangeons par ordre croissant les valeurs

$$0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$$

de ce paramètre correspondant, soit à une des extrémités de ξ ou de ξ_1, soit à un sommet de ξ ou de ξ_1.

Quand t décrit un des intervalles t_i, t_{i+1}, M et M_1 se déplacent sur deux vecteurs V, V_1 appartenant respectivement à ξ et à ξ_1, et ils sont en correspondance intrinsèque entre V et V_1 comme entre ξ et ξ_1. Dès lors, l'extrémité P de la résultante $\overline{\theta\mathrm{P}}$ de $\overline{\theta\mathrm{M}}$ et $\overline{\theta\mathrm{M}_1}$ va, d'après le paragraphe I précédent, décrire un vecteur W.

Ainsi, dans l'espace $\mathcal{R}$, la somme $\xi + \xi_1$ est aussi une ligne polygonale dont les côtés successifs sont les vecteurs W qui correspondent aux intervalles successifs (t_i, t_{i+1}).

III. Dans l'espace $\mathcal{R}$, la somme $\xi + \xi_1$ de deux courbes *planes*, situées dans le même plan P ou dans deux plans parallèles Q et R, est une courbe *plane* respectivement située dans P ou dans un plan parallèle à Q et R. La démonstration est évidente.

Un contre-exemple concernant l'axiome 3°. — Dans le même espace $\mathcal{R}$, des courbes rectifiables avec les mêmes définitions (données p. 244 à 245) de la somme, etc.; nous savons que les axiomes 1° à 16° de Banach sont vérifiés, sauf peut-être 3° et 4°. Nous allons donner dans l'espace $\mathcal{R}$ ainsi défini, un contre-exemple ne vérifiant pas 3°, ce qui suffirait à prouver que cet espace *n'est pas un espace de Banach* si on ne le savait déjà, mais ce qui est plus précis.

Nous voulons montrer qu'on n'a pas nécessairement

« 3° $(\xi + \xi_1) + \xi_2 = \xi + (\xi_1 + \xi_2)$. »

A cet effet, prenons le cas particulier où $\xi_2 = (-1).\xi_1$.

Nous avons déjà vu plus haut qu'on a alors

$$\xi_1 + \xi_2 = 0$$

et, par suite, que d'après 5°,

$$\xi + (\xi_1 + \xi_2) = \xi + 0 = \xi.$$

Dans ce cas, si 3° était vérifié, on aurait

$$(\xi + \xi_1) + \xi_2 = \xi. \tag{12}$$

Nous allons alors prendre, pour ξ et ξ_1, la figure que nous avons utilisée ailleurs [6] pour un autre but, mais nous la généraliserons, en ne fixant pas d'avance les valeurs des longueurs qui y interviennent.

Considérons donc un rectangle ABDC, de côtés $AB = a$, $AC = b$. Puis prenons pour élément neutre un point θ situé sur le prolongement de AB vers B, à une distance $c = B\theta$ de B [7]. Nous prendrons pour ξ_1 le vecteur $\overline{AB}$ et pour ξ l'angle

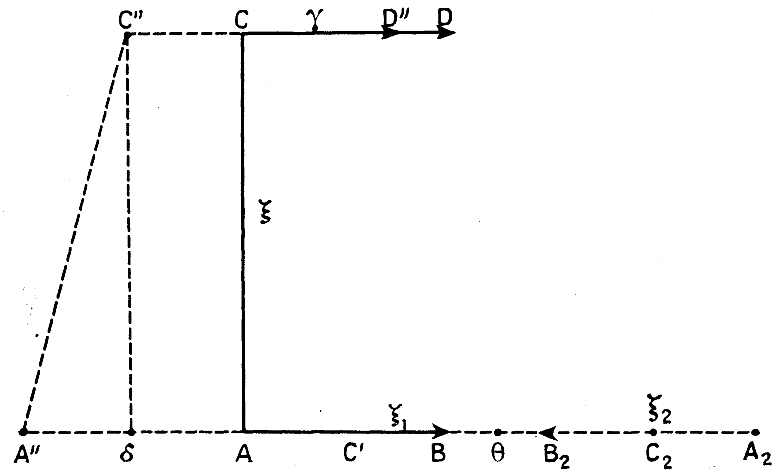

Fig. 4.

orienté $\overline{ACD}$ (*fig.* 4). Ce sont bien deux courbes rectifiables.

Dans la correspondance p intrinsèque entre ξ et ξ_1, le point C correspond à un point C′ de AB, tel que

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{AC}{AC + CD},$$

d'où

$$AC' = \frac{ab}{a+b}, \qquad C'B = \frac{a^2}{a+b}.$$

Or, on voit facilement que si deux points de ξ et ξ_1 se correspondent dans la correspondance intrinsèque entre $\overline{C'B}$ et $\overline{CD}$, ils se correspondent dans la correspondance intrinsèque entre ξ et ξ_1. Donc $\xi'' = \xi + \xi_1$ comprend la « somme » de $\overline{C'B}$ et $\overline{CD}$, qui, nous l'avons vu (p. 256), est un vecteur $\overline{C''D''}$. De même, elle comprend la somme de $\overline{AC'}$ et $\overline{AC}$ qui est un vecteur $\overline{A''C''}$. Finale-

---

(6) *L'espace des courbes n'est pas un espace de Banach* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 250, 1960, p. 2787-2790).

(7) Dans notre Note, citée page 242, nous avions pris $a = 4$, $b = 8$, $c = 1$.

ment, ξ'' est l'angle orienté $\overline{A''C''D''}$. On a $\overline{0A''}=\overline{0A}+\overline{0A}$, c'est-à-dire que A'' est sur le prolongement de $0A$ vers A, avec $0A''=2\,0A=2(a+c)$. De même, $\overline{0C''}=\overline{0C}+\overline{0C'}$, C'' est donc sur le prolongement de DC vers C, à une distance de C égale à

$$0C'=c+\frac{a^2}{a+b}.$$

Enfin, $\overline{0D''}=\overline{0B}+\overline{0D}$, D'' est donc sur CD à une distance de D égale à $B0=c$.

Nous avons maintenant à former la « somme »

$$\xi''+\xi_2=\overline{A''C''D''}+\overline{A_2B_2} \qquad \text{où} \qquad \overline{A_2B_2}=\xi_2=(-1).\xi_1.$$

Ce sera, comme précédemment, un angle orienté $\alpha\gamma\delta$ qui, d'après (12), devrait être identique à l'angle orienté $\xi=\overline{ACD}$. En particulier, γ devrait être identique à C. Nous allons montrer qu'il n'en est pas ainsi.

$\overline{0\gamma}$ est la résultante de $\overline{0C''}$ et de $\overline{0C_2}$, où C_2 partage A_2B_2 dans le même rapport que C'' partage la longueur de ξ''. Calculons ce rapport.

Soit δ la projection de C'' sur le prolongement de AB. On a

$$A''\delta=A''A-C''C=A0-C''C=a+c-\left(c+\frac{a^2}{a+b}\right)=\frac{ab}{a+b},$$

d'où

$$A''C''=\sqrt{A''\delta^2+AC^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}+b^2}=\frac{b}{a+b}\sqrt{a^2+(a+b)^2}.$$

Et

$$C''D''=C''C+CD-DD''=\left(c+\frac{a^2}{a+b}\right)+a-c=\frac{a(2a+b)}{a+b}.$$

Or

$$\frac{B_2C_2}{A_2B_2}=\frac{C''D''}{A''C''+C''D''},$$

$$B_2C_2=\frac{a^2(2a+b)}{b\sqrt{a^2+(a+b)^2}+a(2a+b)}. \tag{13}$$

D'autre part,

$$\overline{0\gamma}=\overline{0C''}+\overline{0C_2}.$$

Donc γ est sur CD, à une distance de C'' égale à

$$0C_2=c+B_2C_2.$$

Ainsi

$$C''\gamma=c+B_2C_2.$$

Mais si γ coïncidait avec C, on devrait avoir

$$C''\gamma=C''C=c+\frac{a^2}{a+b},$$

d'où

$$\text{(14)} \qquad B_2C_2 = \frac{a^2}{a+b}.$$

En comparant les deux valeurs (13) et (14) obtenues pour B_2C_2, on voit bien qu'elles sont, en général, distinctes et que, par suite, notre contre-exemple ne vérifie pas 3°.

En fait, les deux valeurs de B_2C_2 sont même toujours distinctes; sinon on aurait

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{a^2(2a+b)}{b\sqrt{a^2+(a+b)^2}+a(2a+b)},$$

d'où

$$b(2a+b) = b\sqrt{a^2+(a+b)^2} \qquad \text{ou} \qquad (2a+b)^2 = a^2+(a+b)^2$$

ou $2a(a+b)=0$, ce qui n'a pas lieu.

De sorte que notre exemple ne vérifie même 3° pour aucun système de valeurs positives de a, b, c.

Remarque. — En utilisant notre remarque II de la page de la première partie, nous allons pouvoir donner une démonstration indirecte du résultat précédent. Nous aurions donc pu nous dispenser du contre-exemple précédent. Mais, comme il nous semble important de montrer que l'espace $\mathcal{R}$ des courbes rectifiables (assorti des définitions précédentes de la norme, etc.) — qui, nous le savons déjà, n'est pas un espace de Banach —, ne vérifie pas 3°, il nous a paru qu'il ne serait pas inutile d'en donner deux preuves essentiellement différentes.

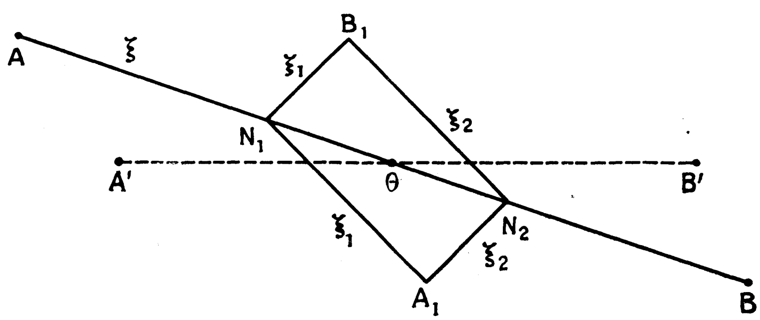

Fig. 5.

Contre-exemple concernant l'axiome 4°. — Prenons pour ξ_1 et ξ_2 les angles orientés $\widehat{A_1N_1B_1}$ et $\widehat{A_1N_2B_1}$ formés avec les côtés d'un rectangle $A_1N_1B_1N_2$ de longueurs 4 et 8. Prenons pour l'élément neutre θ, le centre de ce rectangle. Enfin, prenons pour ξ le vecteur $\overline{AB}$ obtenu en prolongeant N_1N_2 de deux longueurs égales à N_1N_2, l'une N_1A, l'autre N_2B.

Il y aura proportionnalité des abscisses curvilignes sur ξ et ξ_1 entre N_2 de ξ et N_1 de ξ_1 et sur ξ et ξ_2 entre N_1 de ξ et N_2 de ξ_2. De sorte que dans la correspondance intrinsèque entre ξ et ξ_1, A, N_2 et B de ξ correspondent à A_1, N_1 et B_1 de ξ_1. La somme $\xi + \xi_1$ des lignes polygonales ξ et ξ_1 est donc (p. 260) la ligne polygonale $\widehat{A'\theta B'}$, c'est-à-dire le vecteur $\overline{A'B'}$ si l'on pose

$$\overline{\theta A} + \overline{\theta A_1} = \overline{\theta A'}, \qquad \overline{\theta B} + \overline{\theta B_1} = \overline{\theta B'},$$

avec

$$\overline{\theta N_2} + \overline{\theta N_1} = \overline{\theta\theta}.$$

Un raisonnement analogue montrera que $\xi + \xi_2 = \widehat{A'\theta B'} = \overline{A'B'}$. Dès lors, on voit que, contrairement à l'axiome 4°, la somme

$$\xi + \xi_1 = \xi + \xi_2$$

n'entraîne pas $\xi_1 = \xi_2$ pour l'espace $\mathcal{R}$. D'après la page 251, il en résulte que l'axiome 3° n'est pas non plus vérifié.

Ainsi se trouvent finalement démontrées les trois parties du théorème de la page 256.

II. — Cas de l'espace $\mathcal{C}$ des courbes continues orientées.

Prenons pour $\mathcal{F}$ l'ensemble $\mathcal{C}$ tout entier, des courbes continues orientées. Toute courbe homothétique d'une courbe de $\mathcal{C}$ appartient aussi à $\mathcal{C}$. Quelle que soit la paramétrisation intrinsèque envisagée, la condition B sera donc évidemment vérifiée, de même d'ailleurs que la condition A. Nous avons supposé plus haut (p. 245) que, par convention, si t est un paramètre intrinsèque correspondant au point M d'une courbe de $\mathcal{C}$, M est une fonction continue de t et varie dans le sens adopté sur la courbe quand t croît de 0 à 1. Il en résulte alors évidemment que la somme $\xi + \xi_1$ de deux courbes ξ, ξ_1 de $\mathcal{C}$ sera aussi une courbe continue orientée. De sorte que la condition C sera aussi vérifiée.

La question reste posée pour la condition D. Mais elle pourra être résolue quand on aura affaire à une paramétrisation intrinsèque déterminée, cas qui sera examiné plus loin (p. 262). En résumé, quand la famille de courbes considérée est l'espace $\mathcal{C}$ des courbes continues orientées, cet espace deviendra un *semi*-espace de Banach, c'est-à-dire vérifiera tous les axiomes de Banach et aussi les axiomes 4° *bis* et 16° *bis* de la page 253 (sauf peut-être les axiomes 3°, 4° de la page 250), quand on y adopte les quatre définitions de la somme, etc., des pages 244 à 246, pourvu que le paramètre intrinsèque, t, qui y intervient satisfasse : à la condition D, d'une part; que ses coordonnées soient des fonctions continues de ce paramètre, d'autre part; enfin que le point correspondant à ce paramètre décrive la courbe dans le sens adopté sur la courbe orientée, quand t croît de 0 à 1.

C'est ce que nous allons constater pour les deux seules paramétrisations intrinsèques de courbes continues orientées qui soient parvenues à notre connaissance. (Observons d'ailleurs que, de ces deux paramétrisations, on pourra en tirer une infinité d'autres. Par exemple, si t et τ sont deux paramètres intrinsèques correspondant à un même point M de la courbe ξ de $\mathcal{C}$, et si p, q sont deux nombres fixes, tels que $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p+q=1$, alors $pt+q\tau$ sera évidemment aussi un paramètre intrinsèque pour le même point M.)

Première paramétrisation intrinsèque. — La première en date de ces paramétrisations intrinsèques est celle que nous avons donnée en 1925 ([8]). Nous allons la rappeler avec une légère modification.

Soit $\xi \equiv \widehat{AB}$ une courbe continue orientée décrite par un point M, de A vers B, quand un paramètre u croît de a à b, les coordonnées de M étant supposées des fonctions continues de u. Il s'agit de substituer à u un paramètre intrinsèque, $t=\varphi(u)$, variant de 0 à 1. Appelons $\Delta(u', u'')$ le diamètre — c'est-à-dire la plus grande corde — de l'arc $u' \leqq u \leqq u''$ de ξ. La différence $\Delta(u, b) - \Delta(a, u)$ est une fonction non croissante continue de u qui va de $\Delta(a, b)$ à $-\Delta(a, b)$; elle passe donc au moins une fois par la valeur zéro. Ou bien elle est nulle pour une seule valeur u^1 de u, ou bien elle est nulle sur un segment maximal u'_1, u'_2. Dans le premier cas, on prendra

$$\varphi(u^1) = t' = \frac{1}{2};$$

dans le second cas,

$$\varphi(u'_1) = t'_1 = \frac{1}{3}, \qquad \varphi(u^1_2) = t'_2 = \frac{2}{3}.$$

Et dans les deux cas, t sera nul pour $u=a$ et égal à 1 pour $u=b$. Nous avons ainsi défini une première opération, F_1. Dans une seconde opération, F_2, nous ferons de même que dans la première pour chacun des arcs

$$a \leqq u \leqq u', \quad u' < u \leqq b \qquad \text{ou} \qquad a \leqq u \leqq u'_1, \quad u'_1 \leqq u \leqq u'_2, \quad u'_2 \leqq u \leqq b.$$

Mais nous remplacerons pour chaque arc les valeurs 0, 1 de t, par les valeurs déjà respectivement définies de t. Par exemple, s'il y a sur l'arc $u'_1 \leqq u \leqq u'_2$ une seule valeur de u, soit v, telle que

$$\Delta(v, u'_2) - \Delta(u'_1, v) = 0,$$

on fera correspondre à v le milieu de l'intervalle correspondant de t : t'_1, t'_2, c'est-à-dire la valeur $\frac{1}{2}$.

On opérera de même une troisième fois, une quatrième fois et ainsi de suite indéfiniment. On obtiendra ainsi deux ensembles, dénombrables, G, H de valeurs de u, distinctes et de valeurs de t, distinctes, telles de plus que quand u croît sur G, t croît aussi sur H.

([8]) *Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale* (*J. Math. pures et appl.*, t. 4, 1925, p. 281-297; *Proc. Intern. Math. Congress*, Toronto, 1925, p. 415-418; *C. R. Acad. Sc.*, t. 179, 1926, p. 806-807).

Il reste à définir la valeur t' de t qui correspond à une valeur u' de u n'appartenant pas à G. Soient

$$w_0^n = a < w_1^n < w_2^n < \ldots = b,$$

la suite de toutes les valeurs de u définies dans l'ensemble des n premières opérations et

$$s_0^n = 0 < s_1^n < \ldots = 1$$

la suite des valeurs correspondantes de t.

A chaque opération, on a divisé par 2 ou 3 les intervalles des valeurs de t déjà définies. Donc

$$(15) \qquad s_{j+1}^n - s_j^n \leqq \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout } j.$$

Soit $w_{i_n}^n$ le plus grand des w_i^n qui soit $< u'$. Alors $w_{i_n}^n < u' < w_{i_n+1}^n$ et $w_{i_n+1}^n$ est le plus petit des w_i^n supérieurs à u'. Quand n croît, on a

$$w_{i_n}^n \leqq w_{i_{n+1}}^{n+1} < u' < w_{i_{n+1}+1}^{n+1} \leqq w_{i_n+1}^n.$$

A ces w correspondent des s rangés dans le même ordre :

$$s_{i_n}^n \leqq s_{i_{n+1}}^{n+1} < s_{i_{n+1}+1}^{n+1} \leqq s_{i_n+1}^n.$$

Quand n croît, $s_{i_n}^n$ tend sans décroître vers une limite s et, d'après (15), $s_{i_n+1}^n$ tend sans croître vers la même limite s. C'est cette valeur s que nous prendrons pour valeur t' correspondant à u'.

Ainsi à toute valeur de u entre a et b, correspond une valeur et une seule de t.

Inversement, soit t' une valeur de t entre 0 et 1 ; ou bien t' appartient à H, $t' = s_i^n$ et alors t' correspond à $u' = w_i^n$; ou bien les valeurs des s_1^n, s_2^n, ... encadrent t' et si l'on appelle $s_{i_n}^n$ le plus grand des $s_i^n < t'$, on a

$$s_{i_n}^n < t' < s_{i_n+1}^n.$$

Soient $w_{i_n}^n$ et $w_{i_n+1}^n$ les valeurs des w_i^n correspondant à $s_{i_n}^n$ et $s_{i_n+1}^n$. On a

$$(16) \qquad w_{i_n}^n \leqq w_{i_{n+1}}^{n+1} < w_{i_{n+1}+1}^{n+1} \leqq w_{i_n+1}.$$

Quand n croît, $w_{i_n}^n$ tend sans décroître vers une limite w' et $w_{i_n+1}^u$ tend sans croître vers une limite $w'' \geqq w'$.

A la $n+1^{\text{ième}}$ opération, on a introduit une ou deux valeurs de w_i^{n+1} à *l'intérieur* de $(w_{i_n}^n, w_{i_n+1}^n)$, à savoir d'après (16) $w_{i_{n+1}}^{n+1}$ ou $w_{i_{n+1}+1}^{n+1}$ ou les deux. Dans les premiers cas, par exemple, on aura

$$w_{i_n}^n < w_{i_{n+1}}^{n+1} < w_{i_{n+1}+1}^{n+1} = w_{i_n+1}^n,$$

d'où

$$(16\,bis) \qquad w_{i_n}^n < w_{i_{n+1}}^{n+1} \leqq w' \leqq w'' \leqq w_{i_{n+1}+1}^{n+1} = w_{i_n+1}^n.$$

Mais les diamètres $\Delta(w_{i_n}^n, w_{i_{n+1}}^{n+1})$, $\Delta(w_{i_{n+1}}^{n+1}, w_{i_n+1}^n)$ sont égaux et le dernier est au moins égal à $\Delta(w', w'')$. Or puisque $w_{i_n}^n \to w'$, $(w_{i_n}^n, w_{i_{n+1}}^{n+1})$ tend vers zéro. Donc

$\Delta(w', w'') = 0$. L'arc $w' \leqq u \leqq w''$ doit se réduire à un point, c'est-à-dire que $w' = w''$. C'est cette valeur commune que nous prendrons pour valeur u' de u correspondant à t.

Observons, en outre, que d'après

$$w^n_{i_n} < w' \leqq w^n_{i_n+1},$$

$w^n_{i_n}$ est la plus grande des valeurs de w à la $n^{\text{ième}}$ opération. De sorte que si, opérant comme tout à l'heure, on cherche la valeur de t qui correspond à $u' = w'$, il faudra prendre la limite de $s^n_{i_n}$, c'est-à-dire t'.

Ainsi nous avons établi une correspondance biunivoque entre les valeurs de u et les valeurs de t, $t = \varphi(u)$. De plus, $\varphi(u)$ est une fonction croissante. En effet, soit $u'' > u'$. On avait

$$w^n_{i_n} \leqq u' \leqq w^n_{i_n+1}, \qquad w^n_{j_n} \leqq u'' \leqq w^n_{j_n+1}$$

et, puisque $w^n_{j_n} - w^n_{i_n+1} \rightarrow u'' - u' > 0$, alors, pour n assez grand, on aura

$$u' \leqq w^n_{i_n+1} < w^n_{j_n} \leqq u'', \qquad \text{d'où} \qquad t' \leqq s^n_{i_n+1} < s^n_{j_n} \leqq t''$$

et, par suite,

$$t' < t''.$$

Enfin, $\varphi(u)$ est une fonction continue de u. Supposons, en effet, que $u'' \rightarrow u'$ et montrons qu'alors $t'' \rightarrow t'$. Si, en décroissant, t'' ne tendait pas vers t', il tendrait vers une limite $\lambda > t'$ et $< t''$,

$$t' < \lambda < t''.$$

Entre λ et t', qui sont fixes, il y aurait au moins une valeur fixe s appartenant à l'ensemble H

$$t' < s < \lambda < t''.$$

Cette valeur s correspondrait à une valeur fixe, w, de u telle que

$$u' < w < u''.$$

Dès lors, u'' ne pourrait tendre vers u', contrairement à l'hypothèse.

Les conditions. — Puisque $t = \varphi(u)$ est fonction croissante continue de u et varie dans le même sens, la condition C est vérifiée. Nous savons déjà que A et B sont vérifiées. Passons à D.

Dans la représentation intrinsèque actuelle, la valeur du paramètre, t, correspondant au point M d'une courbe ξ de $\mathcal{C}$ est déterminée par la constatation d'une suite d'égalités, chacune concernant les diamètres de certains arcs de ξ. Quand on considère le point M′ correspondant à M dans l'homothétie qui fournit le produit $a.\xi$, son paramètre t' sera déterminé par une constatation analogue, où chaque arc de ξ est remplacé par un arc homothétique, dans $a.\xi$ et où, par suite, le diamètre du second arc est égal au produit du diamètre du premier par $|a|$.

Les égalités de diamètre se conservent donc dans l'homothétie et, par suite, $t' = t$. Ainsi la condition D sera vérifiée. Dès lors, pour *cette représentation intrinsèque, tous les axiomes de Banach sont vérifiés, sauf peut-être* 3° *et* 4°.

III. — Un cas particulier.

Considérons le cas où une courbe ξ continue orientée ξ comprend un vecteur $\overline{\mathrm{UV}}$ parcouru de U à V par un point parcourant ξ dans son sens positif. Si, à la $n^{\text{ième}}$ opération, $t' t''$ est le plus grand des intervalles limités par deux valeurs du paramètre intrinsèque telles que l'arc $t' t''$ appartienne au vecteur UV, alors à la $n+1^{\text{ième}}$, il y aura, par exemple, un point milieu du segment $t' t''$ qui correspondra à $\frac{t'+t''}{2}$; à la $n+2^{\text{ième}}$, il y aura, par exemple, deux points correspondant aux $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ de ce segment, qui correspondront à

$$t' + \frac{t''-t'}{3}, \quad t' + \frac{2(t''-t')}{3}, \quad \dots.$$

Finalement, en faisant croître n indéfiniment et, par suite, tendre les points correspondant à t', t'' vers les points U, V, on voit que les valeurs de t sur UV seront de la forme $t' + \frac{p}{q(t''-t')}$, où les points de M de UV correspondants seront tels que $\mathrm{UM} = \frac{p}{q}\,\mathrm{UV}$. Autrement dit, les variations de t relatives à UV sont proportionnelles aux longueurs des segments de UV correspondants à ces variations.

Exemple de somme. — Considérons le cas où les courbes ξ, ξ_1 de $\mathcal{C}$ sont des *lignes polygonales*. Dans leurs représentations paramétriques intrinsèques, on peut représenter par

$$(17) \qquad 0 = t_1 < t_2 < \dots = 1$$

les valeurs du paramètre correspondant, à une extrémité ou un sommet de ξ ou de ξ_1. Les arcs de ξ, ξ_1 correspondant à l'intervalle (t_i, t_{i+1}) seront deux vecteurs orientés, V_i, W_i, ne comportant ni sommet, ni extrémité de ξ ou de ξ_1 à leur intérieur. Sur ces vecteurs, les variations de t seront, d'après le paragraphe précédent, proportionnelles aux longueurs des segments correspondants. Donc comme dans le cas des courbes rectifiables (p. 256), « la somme » $\xi + \xi_1$ comprendra un vecteur T_i somme de V_i et V_{i+1}.

En résumé, la *somme* $\xi + \xi_1$ de deux *lignes polygonales* ξ, ξ_1 *est une ligne polygonale*. Elle sera ici constituée par la suite des vecteurs T_1, T_2, ... qui correspondent aux intervalles successifs de la suite (13). Autrement dit, chaque sommet de $\xi + \xi_1$ correspond à un couple de points M_i, N_i de ξ, ξ_1 dont l'*un au moins est un sommet* (ou une extrémité).

Contre-exemple. — Reprenons le contre-exemple de la page 257. ξ_1 est un vecteur AB, ξ est un angle orienté $\overline{\text{ACD}}$. D'après ce qui précède, $\xi''' = \xi + \xi_1$ est un angle orienté A″ED″ où, en appelant C‴ le correspondant sur AB du point C sur ξ (*fig.* 6),

$$\begin{aligned}\overline{\theta A''} &= \overline{\theta A} + \overline{\theta A},\\ \overline{\theta E} &= \overline{\theta C} + \overline{\theta C'''},\\ \overline{\theta D''} &= \overline{\theta B} + \overline{\theta D}.\end{aligned}$$

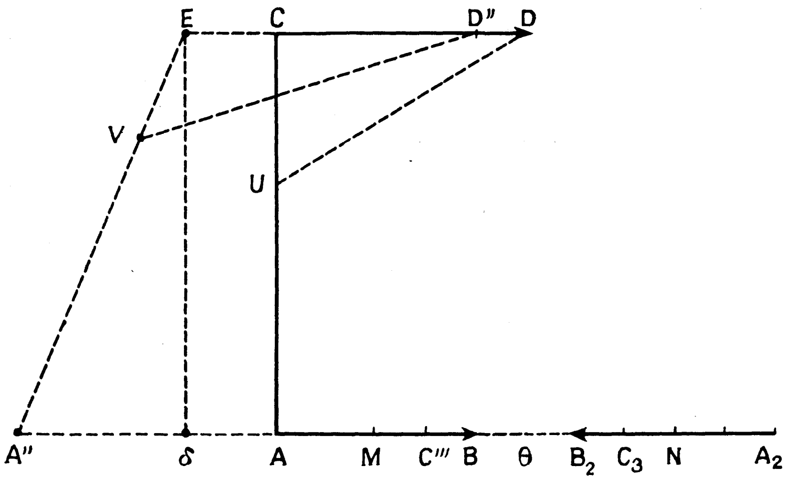

Fig. 6.

De sorte que A″ et D″ sont les mêmes points que dans le contre-exemple précédent et que le point E est sur le prolongement de DC vers C à une distance CE de C égale à CC‴. Alors la somme $\xi''' + \xi_2$ d'un angle et d'un vecteur sera un angle A″γD‴ où

$$\begin{aligned}\overline{\theta A'''} &= \overline{\theta A''} + \overline{\theta A_2} = (\overline{\theta A} + \overline{\theta A}) - \overline{\theta A} = \overline{\theta A},\\ \overline{\theta D'''} &= \overline{\theta D''} + \overline{\theta B_2} = (\overline{\theta B} + \overline{\theta D}) - \overline{\theta B} = \overline{\theta D}.\end{aligned}$$

Ainsi $A''' \equiv A$, $D''' \equiv D$. Et

$$\overline{\theta\gamma} = \overline{\theta E} + \overline{\theta C_3} = \overline{\theta C} + \overline{\theta C'''} + \overline{\theta C_3},$$

où C_3 est le point de ξ_2 correspondant à E de ξ'''.

De sorte que γ sera sur la droite CD, avec

$$\overline{C\gamma} = \overline{\theta\gamma} - \overline{\theta C} = \overline{\theta C'''} + \overline{\theta C_3}.$$

Si l'axiome 3° était vérifié, on aurait (p. 259)

$$\overline{A\gamma D} = \xi''' + \xi_2 = \xi = \overline{ACD}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{\gamma C} = 0$$

et, par suite, $\overline{\theta C_3} + \overline{\theta C'''} = 0$, c'est-à-dire que C_3 et C‴ devraient être symétriques par rapport à θ.

Il ne reste plus qu'à déterminer le point de C‴ de AB qui correspond à C sur ξ

et le point C_3 de A_2B_2 qui correspond à E sur ξ'', et à constater si ces deux points (situés sur la droite AB) sont symétriques ou non par rapport à θ, comme ξ_1 et ξ_2.

Supposons ici $AB = 4$, $AC = 8$, $B\theta = 1$; et observons que si U est un point de AC à la distance 3 de C, on aura

$$UD = \sqrt{\overline{UC}^2 + \overline{CD}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 = UA.$$

Or les diamètres des arcs $\widehat{AU}$ et $\widehat{UCD}$ de ξ sont égaux aux longueurs de AU et UD. Donc U correspond sur ξ à $t = \frac{1}{2}$, tandis que $t = \frac{1}{2}$ correspond sur $\xi_1 = \overline{AB}$, au milieu M de AB. D'autre part, AC sur ξ correspond à AC''' sur ξ_1; et U sur AC à M sur AB, de sorte que C''' est sur MB. Or, sur AC et AC''', la correspondance intrinsèque adoptée ici est, d'après la page 258, identique à celle utilisée pour les courbes rectifiables. Dès lors,

$$\frac{5}{2} = \frac{AU}{AM} = \frac{UC}{MC'''} = \frac{3}{MC'''}, \qquad \text{d'où} \qquad MC''' = \frac{6}{5}$$

et

$$C'''B = MB - MC''' = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}, \qquad AC''' = \frac{16}{5} \quad (^9).$$

C''' est ainsi déterminé. Passons à C_3.

Il suffit d'opérer sur ξ'', ξ_2 et C_3 comme sur ξ, ξ_1 et C'''. La valeur $t = \frac{1}{2}$ correspond sur ξ_2 au milieu N de A_2B_2 et sur ξ'' à un point V de $A''E$, tel que $A''V = VD''$. V est ainsi l'intersection de $A''E$ avec la perpendiculaire à $A''D''$ en son milieu. Mais, d'après la page 258, et la correspondance avec proportionnalité entre $A''E$ et A_2C_3, on a

$$\frac{A''V}{A''E} = \frac{A_2N}{A_2C_3}, \qquad \text{d'où} \qquad A_2C_3 = \frac{A_2N \,.\, A''E}{A''V} = \frac{2A''E}{A''V}.$$

Si 3° était vérifié, on aurait

$$\frac{2A''E}{A''V} = A_2C_3 = AC''' = \frac{16}{5},$$

d'où

$$\frac{A''E}{A''V} = \frac{8}{5}. \tag{18}$$

Or, cette égalité n'est pas exacte. Prenons, en effet, pour origine A'' et $A''B$ pour axe des abscisses et soient x, y les coordonnées de V. L'égalité (18) devient équivalente à

$$\frac{8}{y} = \frac{8}{5}.$$

---

(9) On observera que les courbes ξ et ξ_1, restant les mêmes, les deux représentations paramétriques intrinsèques, celles des pages 255 et 262, donnent effectivement des positions différentes pour les points C', C''' de ξ_1 qui correspondent à C de ξ. Car $C'B = \frac{a^2}{a+b}$ est égal à $\frac{4}{3}$ pour $a = 4$ et $b = 8$.

Ainsi si 3° était vérifié, on devrait avoir

$$y = 5. \tag{19}$$

Or, on peut calculer directement y. En effet, V est d'abord sur A″E. D'où

$$\frac{y}{8} = \frac{x}{A''\delta},$$

avec

$$A''\delta = A''A - EC = A''A - C'''\theta = A''A - C'''B - B\theta = 5 - \frac{4}{5} - 1 = \frac{16}{5}.$$

Donc

$$x = \frac{2}{5}y. \tag{20}$$

D'autre part, VA″ = VD″, ou

$$x^2 + y^2 = (8 - x)^2 + (8 - y)^2$$

ou

$$128 = 16(x + y) \qquad \text{ou} \qquad x + y = 8$$

ou, d'après (20),

$$\frac{7}{5}y = 8,$$

$$y = 5 \times \frac{8}{7}. \tag{21}$$

Les deux valeurs de y données par (19) et (21) sont peu différentes, mais cependant ne sont pas égales ; la condition 3° n'est pas plus vérifiée dans le cas actuel que dans le cas des courbes rectifiables.

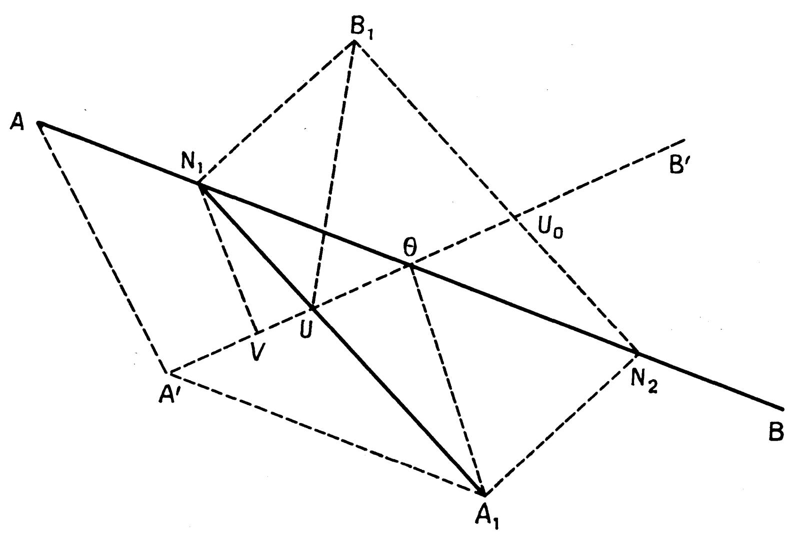

Fig. 7.

Contre-exemple concernant l'axiome 4°. — Nous prendrons ξ_1 et ξ_2 comme dans le contre-exemple de la page 266. Nous prendrons encore ξ sur la diagonale N_1N_2. Mais nous prendrons

$$(22) \qquad \overline{AN_1} = \frac{\overline{N_1N_2}}{3} = \overline{N_2B}.$$

Soit encore U le point de A_1 à distance $A_1U = 5$ de A_1. On voit, comme page 267, que les diamètres des arcs A_1U et UN_1B_1 sont égaux, que le paramètre intrinsèque de U est donc $\frac{1}{2}$. Comme les variations du paramètre intrinsèque actuel sont, sur un vecteur, proportionnelles aux variations de l'abscisse curviligne (p. 265), en appliquant au vecteur A_1N_1 on voit que le paramètre actuel t de N_1 sera tel que

$$\frac{t}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{4}{5}.$$

Or

$$\frac{t}{1} = \frac{4}{5} = \frac{N_2A}{AB},$$

car, d'après (22),

$$\frac{N_2A}{AB} = \frac{N_1N_2 + N_1A}{N_1N_2 + N_1A + N_1B} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{4}{5}.$$

Dès lors, N_1 et N_2 sont deux points qui se correspondent sur ξ_1 et ξ.

D'autre part, U et θ dont les paramètres sont $\frac{1}{2}$ sur ξ_1 et ξ sont aussi correspondants.

Alors la somme $\xi + \xi_1$ des deux lignes polygonales ξ et ξ_1 est la ligne polygonale $A'N'B'$, où

$$\overline{\theta A'} = \overline{\theta A} + \overline{\theta A_1}, \qquad \overline{\theta B'} = \overline{\theta B} + \overline{\theta B_1},$$
$$\overline{\theta N'} = \overline{\theta N_2} + \overline{\theta N_1} = \overline{\theta\theta}.$$

Ainsi $N' \equiv \theta$, $\xi + \xi_1$ est la ligne polygonale $A'\theta B'$.

Les points A', B' sont évidemment symétriques par rapport à θ ; θ est sur $A'B'$. Il est alors prouvé que $\xi + \xi_1$ n'est autre que le vecteur $\overline{A'B'}$. De la même manière, on va prouver que $\xi + \xi_2$ est aussi identique au vecteur $\overline{A'B'}$, ce qui suffit à démontrer que 4° n'est pas vérifié.

Formons, en effet, $\xi + \xi_2$. Le point U_0 de ξ symétrique de U par rapport à θ correspondra comme U à la valeur $\frac{1}{2}$ du paramètre. Ce paramètre variera comme l'abscisse curviligne sur le vecteur N_2B_1. N_2 correspond donc à une valeur t du paramètre telle que

$$\frac{5}{8} = \frac{U_0B_1}{N_2B_1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - t}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{1}{5} = \frac{2}{10},$$

c'est-à-dire la valeur du paramètre correspondant à N_1 sur ξ. Ainsi à N_2 de ξ_2 correspond N_1 de ξ et le point P correspondant de $\xi+\xi_2$ sera tel que

$$\overline{\theta P} = \overline{\theta N_1} + \overline{\theta N_2} = \overline{\theta\theta}, \qquad \text{d'où} \qquad P = \theta.$$

Dès lors $\xi+\xi_2$ est aussi la ligne polygonale $\overline{A'\theta B'}$ qui n'est autre que le vecteur $\overline{A'B'}$ comme annoncé.

Remarque. — Observons que U et θ sur ξ_1 et ξ se correspondent et si $\overline{\theta U'}$ est la résultante de $\overline{\theta U}$ et $\overline{\theta\theta}$, on a $U' = U$ et, puisque U' doit être sur $\xi+\xi_1$, U doit être sur $A'B'$. C'est ce qu'on peut prouver directement.

Soit, en effet, $N_1 V$ parallèle à AA'. Le point V sur $A'\theta$ est tel que

$$\frac{N_1 V}{AA'} = \frac{\theta N_1}{\theta A} = \frac{3}{5},$$

d'où

$$N_1 V = \frac{3}{5} AA' = \frac{3}{5} \theta A_1.$$

Si U_1 est l'intersection de $A'B'$ et de $N_1 A_1$, on aura

$$\frac{N_1 U_1}{U_1 A_1} = \frac{N_1 V}{\theta A_1} = \frac{3}{5} = \frac{N_1 U}{U A_1}.$$

Mais alors U_1 partage $N_1 A_1$ dans le même rapport que U. Donc U est identique à U_1 qui est sur $A'B'$.

Seconde paramétrisation intrinsèque. — En 1936, Marston Morse ([10]) a indiqué une paramétrisation intrinsèque tout à fait différente de la nôtre. D'une part, son paramètre est défini d'une façon moins intuitive que le nôtre, mais d'autre part, il lui a permis d'obtenir des propriétés intéressantes pour le Calcul des variations. Il va, ici, nous fournir notre troisième application.

Définition de M. Morse. — Soit une courbe continue orientée $\xi = \widehat{AB}$. Elle est définie comme la suite ordonnée de points $M(t)$ dépendant continûment d'un paramètre t, quand t croît, par exemple de a à b ([11]). Il s'agit d'y définir une représentation paramétrique intrinsèque au moyen d'un paramètre $\mu = \mu(t)$ fonction continue croissante de t. A cet effet, considérons une suite croissante T_n de n valeurs de t

$$a \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n \leqq t \leqq b.$$

Appelons $d_n(t)$, la plus petite des cordes du polygone P_n ayant pour sommets successifs $M(a)$, $M(t_1)$, ..., $M(t_i)$, ..., $M(t_n)$, $M(t)$ et $m_n(t)$ la borne

([10]) *A special parametrization of curves* (*Bull. Amer. Soc. Math.*, t. **42**, 1936, p. 915-922). Dan ce qui suit, nous avons suivi plutôt l'exposé analogue fait par M. Morse, aux pages 100-103 de *Topological methods in the theory of functions of a complex variable*, 1947.

([11]) On suppose que $M(t)$ n'est fixe dans aucun intervalle de valeurs de t.

supérieure des valeurs de $d_n(t)$ prises pour toutes les suites T_n, pour n et t fixes.

On prendra, avec Whitney et Marston Morse,

$$\mu(t) = \frac{m_2(t)}{2} + \ldots + \frac{m_n(t)}{2^n} + \ldots. \tag{23}$$

Appelons $\Delta(t)$, le diamètre de l'arc de ξ correspondant à l'intervalle (a, t). Il est clair que les côtés de P_n sont $\leqq \Delta(t)$, d'où $d_n(t) \leqq \Delta(t)$ et, par suite,

$$m_n(t) \leqq \Delta(t), \tag{24}$$

d'où résulte, par (23) et (24) : 1° que la série (23) est convergente et 2° que

$$0 \leqq \mu(t) \leqq \Delta(t).$$

M. Morse a prouvé que $\mu(t)$ est une fonction continue croissante de t. Par conséquent, inversement, t est une fonction continue croissante de μ

$$t = \varphi(\mu).$$

Et, en posant

$$N(\mu) = M(\varphi(\mu)),$$

$M = N(\mu)$ fournit une nouvelle représentation paramétrique de l'arc de ξ correspondant à l'intervalle

$$\mu_0 = \mu(a), \qquad \mu_1 = \mu(b).$$

Il est d'ailleurs clair que $\mu(a) = 0$. On aura alors un paramètre intrinsèque τ variant de 0 à 1 sur ξ, si l'on pose

$$\tau = \frac{\mu(t)}{\mu(b)}.$$

Si l'on déplace ξ comme un corps solide, les quantités $d_n(t)$ ne changeront pas et, par suite, non plus $m_n(t)$, ni $\mu(t)$, ce qui justifie la dénomination, pour μ, de paramètre intrinsèque.

Ceci étant, désignons par $\mathcal{M}$ l'espace dont les éléments sont les courbes continues orientées, associé avec la paramétrisation intrinsèque de M. Morse et avec les définitions de la somme, etc. données pages 244 et 245. D'après la page 261, les conditions A, B, C sont vérifiées par $\mathcal{M}$. Quant à la condition D, elle résulte du fait que, quand on passe de ξ à $c.\xi$, les côtés de P_n sont multipliés par $|c|$; que, par conséquent, $d_n(t)$ et $\mu(t)$ sont tous multipliés par $|c|$. Alors, au point M de ξ, correspondant à

$$\tau = \frac{\mu(t)}{\mu(b)}$$

correspondra un point M' de $c.\xi$, sur θM, correspondant à

$$\tau' = \frac{|c|\,\mu(t)}{|c|\,\mu(b)}, \qquad \text{d'où} \qquad \tau' = \tau,$$

ce qui établit la condition D.

Dès lors, en appliquant le théorème de la page 253, on *voit que l'espace $\mathfrak{M}$ est aussi un semi-espace de Banach.*

De plus, d'après le *Rappel* de la page 243, on voit que l'espace $\mathfrak{M}$ *n'est pas* un espace de Banach.

Et, par suite, d'après la remarque I de la page 250, *l'axiome* 3° *ne peut être vérifié* par l'espace $\mathfrak{M}$.

Remarque. — Notre but principal ayant été atteint pour nos deux premiers exemples, il ne nous a pas paru nécessaire de retarder la publication de ce Mémoire pour chercher si l'espace $\mathfrak{M}$ vérifie ou non l'axiome 4°. Nous pensons qu'il ne le vérifie pas, mais nous espérons que quelque lecteur s'intéressera à résoudre ce problème particulier.