Annales scientifiques de l'É.N.S.

Umeshachandra Shukla

Cohomologie des algèbres associatives

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 78, nº 2 (1961), p. 163-209
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1961_3_78_2_163_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 78, 1961, p. 163 à 209.

COHOMOLOGIE
DES
ALGÈBRES ASSOCIATIVES (1)

PAR M. UMESHACHANDRA SHUKLA.

INTRODUCTION.

La théorie de la cohomologie d'une algèbre associative sur un *corps* a été donnée par Hochschild. Elle est décrite par Cartan et Eilenberg [1, IX] comme un cas particulier de leur théorie générale. L'algèbre associative est un espace vectoriel sur le corps de base, et la structure linéaire de l'algèbre est donc triviale; la structure multiplicative joue le rôle principal dans la théorie de la cohomologie. Mac Lane ([3], [4]) a développé une théorie de la cohomologie d'un anneau (c'est-à-dire une algèbre associative sur l'anneau des entiers naturels). Dans ce cas les deux structures (linéaire et multiplicative) sont non-triviales. On donne ici une théorie de la cohomologie d'une algèbre associative *sur un anneau commutatif quelconque*. Lorsque l'anneau de base est un corps, cette théorie se réduit à la théorie de la cohomologie donnée par Hochschild; et lorsque l'anneau de base est l'anneau des entiers naturels, on retrouve la théorie de la cohomologie d'un anneau énoncée par Mac Lane. Dans ce sens la théorie développée ici est une vraie généralisation des deux théories précédentes.

Soit Λ une algèbre associative (avec élément unité) sur un anneau commutatif K (avec élément unité). Soit M un Λ-bimodule. On va définir les groupes de cohomologie de l'algèbre Λ à coefficients dans le Λ-bimodule M et on les notera $H^n(\Lambda, M)$, $n \geq 0$.

Soit $U = \sum_{n \geq 0} U_n$ une algèbre différentielle graduée sur K, et soit $\varepsilon : U \to \Lambda$ un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées (la différentielle et la

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1960.

graduation de Λ étant triviales). On peut considérer M comme un U-bimodule. On définit un complexe $\mathcal{B}(U)$ sur l'algèbre U (chap. I, § 1) et l'on définit le K-module $\mathrm{Hom}_{U \otimes U^*}(\mathcal{B}(U), M)$ qui possède une graduation et une différentielle (chap. I, § 2). On prouve (théorème 1) que si U et U' sont deux algèbres différentielles graduées qui possèdent des K-bases homogènes (ou même qui sont K-projectives) et si $\varphi : U \to U'$ est un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées tel que l'homomorphisme induit $H_*(U) \to H_*(U')$ soit un isomorphisme, alors l'homomorphisme

$$H^*(\mathrm{Hom}_{U' \otimes U'^*}(\mathcal{B}(U'), M)) \to H^*(\mathrm{Hom}_{U \otimes U^*}(\mathcal{B}(U), M))$$

est un isomorphisme.

Une algèbre différentielle graduée U, munie d'un homomorphisme $\varepsilon : U \to \Lambda$, est, par définition, une résolution *fortement libre et acyclique* de Λ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) U possède une K-base homogène, contenant 1, telle que le produit de deux éléments de base soit un élément de base, et

(ii) la suite des K-modules

$$\ldots \to U_n \xrightarrow{d_n} U_{n-1} \to \ldots \to U_1 \xrightarrow{d_1} U_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0$$

est exacte.

D'autre part, U est, par définition, une résolution *K-projective et fortement acyclique* de Λ si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) U est K-projectif;

(ii) la suite des K-modules ci-dessus est exacte, et

(iii) il existe une application multiplicative $\sigma : \Lambda \to U_0$ telle que $\varepsilon\sigma$ soit l'application identique de Λ dans Λ.

On montre l'existence de ces deux sortes de résolution (chap. II, § 1), et l'on prouve que si U est une résolution fortement libre et acyclique de Λ, ou bien une résolution K-projective et fortement acyclique de Λ, le K-module $H^*(\mathrm{Hom}_{U \otimes U^*}(\mathcal{B}(U), M))$ est indépendant du choix de la résolution U (chap. II, théorème 2). On définit $H^*(\mathrm{Hom}_{U \otimes U^*}(\mathcal{B}(U), M))$ comme le K-module de cohomologie de Λ à coefficients dans M. Si Λ est K-projectif, on peut prendre $U = \Lambda$, et l'on retrouve les groupes de cohomologie définis par Hochschild. Si $K = Z$, l'anneau des entiers naturels, on peut choisir pour U l'anneau différentiel gradué V construit par Mac Lane [4, § 11] et l'on retrouve les groupes de cohomologie $H^n(\overline{\mathcal{B}}(V(\Lambda)), M)$, obtenus par Mac Lane.

Le K-module $H^0(\Lambda, M)$ est isomorphe au sous-module des éléments *invariants* du Λ-bimodule M (i. e. des $m \in M$ tels que $\lambda m = m\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$), et $H^1(\Lambda, M)$ est isomorphe au K-module des homomorphismes croisés de Λ dans M, divisé par le sous-module des homomorphismes principaux (chap. III, § 1). Le groupe $H^2(\Lambda, M)$ est en correspondance bijective naturelle avec l'ensemble des classes d'équivalence des extensions de Λ avec noyau M tel que $M^2=0$ (chap. III, § 2). Maintenant, on a trois théories :

(i) les modules de cohomologie définis par Hochschild, qu'on notera $\mathrm{Hoch}^n(\Lambda, M)$ ($n \geqq 0$);

(ii) les modules $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ [1, IX]; et

(iii) les modules de cohomologie $H^n(\Lambda, M)$ définis ici.

On obtient (chap. III, § 3) des homomorphismes

$$\mathrm{Hoch}^n(\Lambda, M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \xrightarrow{\psi} H^n(\Lambda, M).$$

Pour $n=0$ et 1, φ et ψ sont des isomorphismes. Pour $n=2$, φ et ψ sont des monomorphismes. On montre par des exemples que les trois modules $\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M)$, $\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ et $H^2(\Lambda, M)$ sont en général distincts.

On définit, d'après [2] et [4], les bimultiplications d'une K-algèbre A (n'ayant pas nécessairement d'élément unité) et l'on pose le problème général des extensions d'algèbres (chap. IV, § 1). On définit l'obstruction d'un homomorphisme θ de Λ dans l'algèbre des bimultiplications extérieures de A, tel que l'image de θ se compose d'éléments « deux à deux permutables », et l'on prouve les théorèmes analogues à ceux de Mac Lane sur l'obstruction. Le module $H^3(\Lambda, M)$ s'interprète exactement comme Hochschild [2] l'a fait dans le cas des algèbres associatives sur un corps.

Ce travail a été fait sous la direction de M. le Professeur Cartan qui m'a donné beaucoup d'inspiration. Je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance. Je remercie vivement le Gouvernement Français qui m'a donné une bourse de trois ans et qui a ainsi rendu possible mon séjour en France. Je remercie aussi M. le Professeur Dubreil et M. le Professeur Dixmier qui ont bien voulu faire partie du Jury.

Notations. — K désigne un anneau commutatif avec un élément unité $1 \neq 0$. Sauf mention du contraire, une algèbre associative sur K possède un élément unité, et un homomorphisme d'algèbres associatives applique l'élément unité sur l'élément unité. L'algèbre A dans le chapitre IV ne possède pas nécessairement d'élément unité et l'homomorphisme $\alpha : A \to E$ n'applique pas nécessairement l'élément unité (s'il en existe un) sur l'élément unité. La notation $\otimes$ signifie le produit tensoriel sur K. On désigne par Λ^e (resp. U^e) le produit tensoriel $\Lambda \otimes_K \Lambda^*$ (resp. $U \otimes_K U^*$), où Λ^* (resp. U^*) est l'algèbre opposée de Λ (resp. U). Un Λ-bimodule M est un Λ-module à gauche et à droite qui satisfait aux relations

$$(\lambda m)\mu = \lambda(m\mu) \qquad \text{pour tout } m \in M \quad \text{et pour tous } \lambda, \mu \in \Lambda$$

et

$$1 . m = m = m . 1 \qquad \text{pour tout} \quad m \in M.$$

CHAPITRE I.

1. Le complexe $\mathcal{B}(U)$.

Soit $U = \sum_{n \geqq 0} U_n$ une K-algèbre différentielle graduée, où U_n se compose des éléments homogènes de degré n; et soit d la différentielle. On a

$$dd = 0; \qquad d(U_n) \subset U_{n-1}, \qquad d(uv) = (du)v + (-1)^n u\, dv$$
$$\text{pour} \quad u \in U_n \quad \text{et} \quad v \in U.$$

Soit

$$S(U) = \sum_{n \geqq -1} S_n(U),$$

où $S_n(U) = U \otimes_K \ldots \otimes_K U$, $(n+2)$ facteurs, pour $n \geqq -1$.

En particulier,

$$S_{-1}(U) = U$$

et

$$S_n(U) = U \otimes_K S_{n-1}(U) \qquad \text{pour tout} \quad n \geqq 0.$$

Si $x = u_0 \otimes \ldots \otimes u_{n+1} \in S_n(U)$, $n \geqq -1$, la graduation dans S(U) est donnée par

$$\deg x = n + \sum_{i=0}^{n+1} \deg u_i.$$

On définit des applications

$$\tau : \quad S_{n-1}(U) \to S_n(U) \qquad (n \geqq 0)$$

par la relation

$$\tau x = 1 \otimes x, \qquad \text{où} \quad x \in S_{n-1}(U).$$

On voit que τ est une application U-linéaire à droite, parce que

$$\tau(xu) = 1 \otimes xu = (1 \otimes x)u = (\tau x)u \qquad \text{pour tout} \quad u \in U.$$

On va définir dans S(U) deux différentielles

$$\partial_r : \quad S_n(U) \to S_n(U)$$

et

$$\partial_s : \quad S_n(U) \to S_{n-1}(U),$$

au moyen de d et τ.

La différentielle $\partial_r : S_n(U) \to S_n(U)$ est définie par les relations suivantes :

$$\partial_r u = -du, \qquad u \in S_{-1}(U) = U;$$
$$\partial_r(ux) = (du)x + (-1)^{\deg u} u(\partial_r x), \qquad u \in U, \qquad x \in S_n(U) \qquad (n \geqq 0);$$
$$\partial_r(xu) = (\partial_r x)u + (-1)^{\deg x} x(du), \qquad u \in U, \qquad x \in S_n(U) \qquad (n \geqq -1)$$

et

$$\partial_r \tau + \tau \partial_r = 0 \qquad \text{pour tous les éléments de } S_n(U) \qquad (n \geqq -1).$$

La différentielle $\partial_s : S_n(U) \to S_{n-1}(U)$ est définie par les relations suivantes :

$$\partial_s u = 0, \qquad u \in S_{-1}(U) = U,$$
$$\partial_s(ux) = (-1)^{\deg u} u(\partial_s x), \qquad u \in U, \qquad x \in S_n(U) \qquad (n \geqq -1)$$

et

$$\partial_s \tau + \tau \partial_s = \text{identité, pour tous les éléments de } S_n(U) \qquad (n \geqq -1).$$

Notons que :

$$\partial_s \tau\, x = x - \tau \partial_s x = x \qquad \text{pour} \quad x \in S_{-1}(U) = U$$

et

$$\partial_s \tau(xu) = xu = (\partial_s \tau x)\, u \qquad (u \in U).$$

On va montrer par récurrence sur n que :

$$\partial_s(xu) = (\partial_s x)\, u \qquad \text{pour tout} \quad x \in S_n(U) \quad (n \geqq -1) \qquad \text{et tout} \quad u \in U.$$

Pour $n = -1$, la relation est trivialement vraie. Supposons que la relation soit vraie pour $x \in S_{n-1}(U)$. Soit $x = u_0 \otimes \ldots \otimes u_{n+1} \in S_n(U)$ et soit $u \in U$. Soit $y = u_1 \otimes \ldots \otimes u_{n+1} \in S_{n-1}(U)$. Alors

$$\begin{aligned}
\partial_s(xu) &= \partial_s(u_0 \tau(yu)) \\
&= (-1)^{\deg u_0} u_0\, \partial_s \tau(yu) \\
&= (-1)^{\deg u_0} u_0 (yu - \tau\, \partial_s(yu)) \\
&= (-1)^{\deg u_0} u_0 (y - \tau\, \partial_s y)\, u,
\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence et la U-linéarité à droite de τ,

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\deg u_0} u_0 (\partial_s \tau y)\, u \\
&= (\partial_s x)\, u.
\end{aligned}$$

Les deux différentielles ∂_r et ∂_s donnent une différentielle totale $\partial = \partial_r + \partial_s$ sur $S(U)$ qui satisfait aux relations suivantes :

$$\partial u = -\, du;$$
$$\partial(ux) = (du)\, x + (-1)^{\deg u} u(\partial x), \qquad u \in U, \qquad x \in S_n(U) \qquad (n \geqq 0);$$
$$\partial(xu) = (\partial x)\, u + (-1)^{\deg x} x(du), \qquad u \in U, \qquad x \in S_n(U) \qquad (n \geqq -1)$$

et

$$\partial \tau + \tau \partial = \text{identité}.$$

On voit que ∂ est une application K-linéaire homogène $S(U) \to S(U)$ de degré -1. La dernière relation montre que $\partial^2 = 0$.

Les formules explicites pour ∂_r et ∂_s sont :

(1.1) $\partial_r(u_0 \otimes \ldots \otimes u_{n+1})$

$$= du_0 \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i + \deg u_0 + \ldots + \deg u_{i-1}} u_0 \otimes \ldots \otimes du_i \otimes \ldots \otimes u_{n+1}$$
$$+ (-1)^{n + \deg u_0 + \ldots + \deg u_n} u_0 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes du_{n+1},$$

pour $n \geqq 0$; le signe du dernier terme étant ainsi à cause du fait que $\partial_r u_{n+1} = - du_{n+1}$; et

$$(1.2) \quad \partial_s(u_0 \otimes \ldots \otimes u_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+\deg u_0 + \ldots + \deg u_i} u_0 \otimes \ldots \otimes u_i u_{i+1} \otimes \ldots \otimes u_{n+1} \qquad \text{pour} \quad n \geqq 0.$$

Soit

$$\mathcal{B}(U) = \sum_{n \geqq 0} S_n(U) = S(U)/S_{-1}(U)$$

Comme $S_{-1}(U)$ est stable pour la différentielle ∂, ∂ induit une différentielle (encore notée ∂) dans $\mathcal{B}(U)$. De la suite exacte de complexes

$$0 \to S_{-1}(U) \to S(U) \to \mathcal{B}(U) \to 0$$

et du fait que le complexe $S(U)$ est acyclique pour la différentielle totale ∂, on tire la conclusion que

$$H_n(\mathcal{B}(U)) \cong H_{n-1}(S_{-1}(U)) \cong H_n(U),$$

où H_n signifie le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homologie du complexe en question. Le dernier isomorphisme est dû au fait qu'un élément $u \in S_{-1}(U) = U$ de degré n dans U est de degré $n-1$ dans $S_{-1}(U)$.

2. Un théorème d'isomorphisme.

Soit Λ une K-algèbre (différentielle et graduation zéro). Soit M un Λ-bimodule. Soit $\varepsilon : U \to \Lambda$ un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées (donc $\varepsilon d = 0$). Si l'on donne à M la structure de U-bimodule induite par ε, M satisfait aux conditions suivantes :

$$(\star) \qquad \begin{cases} um = 0 = mu & \text{pour tout } m \in M, \quad \text{si } u \in U \text{ et } \deg u > 0 \\ \quad \text{et} \quad (du)m = 0 = m(du) & \text{si} \quad \deg u = 1. \end{cases}$$

Si $U^\star$ est l'algèbre opposée de l'algèbre U, M est un U^e-module à gauche avec $(u \otimes v^\star)m = umv$, $u \in U$, $v^\star \in U^\star$ et $m \in M$. On voit que $\mathcal{B}(U)$ et $S_n(U)$, $n \geqq 0$, sont aussi des U^e-modules à gauche. On désigne par $\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)$ la somme directe $\sum_{n \geqq 0} \mathrm{Hom}_{U^e}(S_n(U), M)$. Un élément f de $\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)$ est une somme d'applications U-bilinéaires des $S_n(U)$ dans M, $n \geqq 0$.

Lemme. — *Soit* M *un* U-*bimodule qui satisfait aux conditions* $(\star)$. *Si* $f \in \mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)$, *alors* $f\partial \in \mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)$ *aussi*.

En effet :

$$\begin{aligned} f\partial(ux) &= f(du.x + (-1)^{\deg u} u.\partial x), \qquad u \in \mathrm{U}, \qquad x \in \mathrm{S}_n(\mathrm{U}) \qquad (n \geqq 0) \\ &= du f(x) + (-1)^{\deg u} u(f\partial x) \\ &= (-1)^{\deg u} u f \partial x \qquad \text{par la condition } (\bigstar). \end{aligned}$$

Si $\deg u = 0$,

$$f\partial(ux) = uf\partial x,$$

et si $\deg u > 0$, $uf\partial x = 0$ par la condition ($\bigstar$), donc

$$f\partial(ux) = 0 = uf\partial x.$$

De même,

$$\begin{aligned} f\partial(xu) &= f((\partial x)u + (-1)^{\deg x} x(du)) \\ &= (f\partial x)u + (-1)^{\deg x} f(x)\, du = (f\partial x)\, u \end{aligned}$$

par la condition ($\bigstar$).

Si l'on pose $\delta f = f\partial$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}), \mathrm{M})$ devient un complexe avec la différentielle δ.

Soit $\mathrm{U}^n = \mathrm{U} \otimes_{\mathrm{K}} \ldots \otimes_{\mathrm{K}} \mathrm{U}$ (n facteurs) avec $\mathrm{U}^0 = \mathrm{K}$. Le U-bimodule M a la structure d'un K-module, avec $k.m = (k.1)m$, $k \in \mathrm{K}$, $m \in \mathrm{M}$. On a alors un isomorphisme canonique

$$\alpha : \quad \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathrm{S}_n(\mathrm{U}), \mathrm{M}) \quad \text{pour tout } n \geqq 0$$

défini par :

$$(\alpha f)(u_0 \otimes \ldots \otimes u_{n+1}) = u_0 f(u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)\, u_{n+1},$$

où $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M})$ et $u_0, \ldots, u_{n+1} \in \mathrm{U}$.

On a donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}), \mathrm{M}) = \sum_{n \geqq 0} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathrm{S}_n(\mathrm{U}), \mathrm{M}) \cong \sum_{n \geqq 0} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M}).$$

Il faut expliciter la différentielle (encore appelée δ) sur $\sum\limits_{n \geqq 0} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M})$.

Rappelons qu'un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M})$ est une fonction K-multilinéaire de n variables appartenant à U à valeurs dans M. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M})$, alors $\delta f = g + h$, où $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M})$ et $h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^{n+1}, \mathrm{M})$. On a :

$$(2.1) \qquad g(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i + \deg u_1 + \ldots + \deg u_{i-1}} f(u_1, \ldots, du_i, \ldots, u_n),$$

$$\begin{aligned} (2.2) \qquad & h(u_1, \ldots, u_{n+1}) \\ &= u_1 f(u_2, \ldots, u_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i + \deg u_1 + \ldots + \deg u_i} f(u_1, \ldots, u_i u_{i+1}, \ldots, u_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1 + \deg u_1 + \ldots + \deg u_{n+1}} f(u_1, \ldots, u_n)\, u_{n+1}. \end{aligned}$$

Ces formules sont obtenues des formules (1.1) et (1.2).

Soit

$$\mathcal{B}_n(\mathrm{U}) = \sum_{0 \leq p \leq n} \mathrm{S}_p(\mathrm{U}) \qquad (n \geq 0).$$

Il est évident que $\mathcal{B}_n(\mathrm{U})$ est stable pour ∂ et l'on a donc une filtration de $\mathcal{B}(\mathrm{U})$

$$\ldots \subset \mathcal{B}_n(\mathrm{U}) \subset \mathcal{B}_{n+1}(\mathrm{U}) \subset \ldots,$$

avec $\mathcal{B}_n(\mathrm{U}) = 0$ pour $n < 0$, qui est compatible avec la différentielle ∂. On voit que

$$\mathcal{B}_n(\mathrm{U})/\mathcal{B}_{n-1}(\mathrm{U}) \cong \mathrm{S}_n(\mathrm{U}) \qquad (n \geq 0)$$

et la différentielle induite dans $\mathrm{S}_n(\mathrm{U})$ par ∂ est la différentielle $\partial_r : \mathrm{S}_n(\mathrm{U}) \to \mathrm{S}_n(\mathrm{U})$, l'autre différentielle $\partial_s : \mathrm{S}_n(\mathrm{U}) \to \mathrm{S}_{n-1}(\mathrm{U})$ étant zéro dans $\mathcal{B}_n(\mathrm{U})/\mathcal{B}_{n-1}(\mathrm{U})$.

Dans le K-module $\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}), \mathrm{M})$ introduisons une filtration donnée par

$$\mathrm{F}^n = \mathrm{F}^n(\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}), \mathrm{M})) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U})/\mathcal{B}_{n-1}(\mathrm{U}), \mathrm{M}).$$

La suite exacte de complexes

$$0 \to \mathcal{B}_n(\mathrm{U})/\mathcal{B}_{n-1}(\mathrm{U}) \to \mathcal{B}(\mathrm{U})/\mathcal{B}_{n-1}(\mathrm{U}) \to \mathcal{B}(\mathrm{U})/\mathcal{B}_n(\mathrm{U}) \to 0$$

donne la suite exacte

$$0 \to \mathrm{F}^{n+1} \to \mathrm{F}^n \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}_n(\mathrm{U})/\mathcal{B}_{n-1}(\mathrm{U}), \mathrm{M}) \to 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{F}^n/\mathrm{F}^{n+1} &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}_n(\mathrm{U})/\mathcal{B}_{n-1}(\mathrm{U}), \mathrm{M}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathrm{S}_n(\mathrm{U}), \mathrm{M}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M}),\end{aligned}$$

la différentielle dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U}^n, \mathrm{M})$ étant induite par ∂_r.

THÉORÈME 1. — *Soient* U *et* U′ *deux* K-*algèbres différentielles graduées qui ont des* K-*bases homogènes (ou bien qui sont* K-*projectives). Soit* $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ *un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées. Soit* M *un* U′-*bimodule qui satisfait aux conditions* (★). *Considérons l'homomorphisme*

$$\psi : \mathrm{H}^*(\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}'^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}'), \mathrm{M})) \to \mathrm{H}^*(\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}), \mathrm{M}))$$

induit par φ, *où* M *est considéré comme un* U-*bimodule au moyen de* φ. *Si l'homomorphisme* $\mathrm{H}_*(\mathrm{U}) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{U}')$ *induit par* φ *est un isomorphisme,* ψ *est aussi un isomorphisme.*

Démonstration. — Notons que M satisfait aux conditions (★) comme U-bimodule. L'homomorphisme φ induit un homomorphisme canonique $\mathcal{B}(\mathrm{U}) \to \mathcal{B}(\mathrm{U}')$ qui induit un homomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}'^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}'), \mathrm{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}^e}(\mathcal{B}(\mathrm{U}), \mathrm{M})$$

compatible avec les opérateurs et les différentielles. On a donc l'homomorphisme canonique :

$$\psi: \quad H^*(\mathrm{Hom}_{U'^e}(\mathcal{B}(U'), M)) \to H^*(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)).$$

Les algèbres U et U′ sont K-projectives et l'homomorphisme induit $H_*(U) \to H_*(U')$ est un isomorphisme. On prouve par récurrence sur n [1, XVII, 4.3] que l'homomorphisme canonique $H_*(U^n) \to H_*(U'^n)$ est un isomorphisme. Comme U^n et U'^n sont K-projectifs, on prouve encore par [1, XVII, 4. 3] que l'homomorphisme

$$H^*(\mathrm{Hom}_K(U'^n, M)) \to H^*(\mathrm{Hom}_K(U^n, M))$$

est un isomorphisme. Or, dans les suites spectrales déduites des filtrations définies plus haut, on a :

$$E_1(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)) = \sum_n H^*(F^n/F^{n+1}) = \sum_n H^*(\mathrm{Hom}_K(U^n, M))$$

avec une relation pareille pour U′. Donc par [1, XV, 3.2] ψ est un isomorphisme. C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

1. Deux problèmes universels.

On va définir deux catégories $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

La catégorie $\mathcal{C}_1$. — Un objet de $\mathcal{C}_1$ est un triple $(U, \Lambda, \varepsilon)$, où :

(i) U est une K-algèbre différentielle graduée avec une K-base homogène *donnée* contenant 1, telle que le produit de deux éléments de base soit un élément de base;

(ii) Λ est une K-algèbre (de degré 0); et

(iii) $\varepsilon : U \to \Lambda$ est un homomorphisme de K-algèbres différentielles graduées.

Un morphisme $(U', \Lambda', \varepsilon') \to (U, \Lambda, \varepsilon)$ dans la catégorie $\mathcal{C}_1$ est un couple (f, g) de deux homomorphismes d'algèbres différentielles graduées $f : U' \to U$ et $g : \Lambda' \to \Lambda$ tels que $\varepsilon f = g \varepsilon'$; on suppose de plus que f transforme tout élément de la base de U′ en un élément de la base de U.

Un objet $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est dit *universel* si, pour tout objet $(U', \Lambda', \varepsilon')$ et tout homomorphisme $g : \Lambda' \to \Lambda$ il existe *un* $f : U' \to U$ *et un seul* tel que (f, g) soit un morphisme dans la catégorie $\mathcal{C}_1$. Pour une K-algèbre Λ donnée, il existe *au plus* un objet universel $(U, \Lambda, \varepsilon)$ *à un isomorphisme près;* d'une façon précise, si l'on a deux objets universels pour Λ, on a un isomorphisme bien déterminé entre eux.

Proposition 1. — *Pour toute algèbre Λ, il y a un objet universel dans la catégorie $\mathcal{C}_1$. Cet objet universel est un foncteur covariant de Λ.*

Démonstration. — On définira une algèbre différentielle graduée $U = \sum_{n \geq 0} U_n$ et un homomorphisme $\varepsilon : U \to \Lambda$ qui ont les propriétés suivantes :

(i) Pour chaque $n \geq 0$, $U_n = K(X_n)$, K-module libre ayant pour base un ensemble X_n.

(ii) On a une multiplication associative dans $U = \sum_{n \geq 0} U_n$ définie par le prolongement K-linéaire d'applications ensemblistes

$$X_i \times X_j \to X_{i+j}$$

[l'image de (x_i, x_j) étant notée $x_i . x_j$] telles que

$$(x_i . x_j) . x_k = x_i . (x_j . x_k) \qquad \text{pour} \quad x_i \in X_i, \quad x_j \in X_j, \quad x_k \in X_k. \tag{1.1}$$

En particulier, $U_0 = K(X_0)$ sera une algèbre associative.

(iii) La restriction de $\varepsilon : U_0 \to \Lambda$ à X_0 est une *bijection multiplicative* de X_0 sur Λ.

(iv) Pour chaque $n \geq 1$, on a une application K-linéaire

$$d_n : \quad U_n \to U_{n-1}$$

de manière que pour $n = 1$, la restriction de d_1 à X_1 soit une bijection (ensembliste) de X_1 sur le noyau N_0 de ε; et que pour $n \geq 2$, la restriction de d_n à X_n soit une bijection de X_n sur le noyau N_{n-1} de d_{n-1}. (On convient que $d_0 = 0$.)

(v) On a la relation :

$$d_{i+j}(x_i . x_j) = (d_i x_i) . x_j + (-1)^i x_i . (d_j x_j) \tag{1.2}$$

pour $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$ $(i \geq 0, j \geq 0)$, ce qui entraîne par K-linéarité une relation analogue lorsque $x_i \in U_i$, $x_j \in U_j$. Cette relation implique notamment que d_n est U_0-linéaire à gauche et à droite et, par suite, que les N_n sont des U_0-bimodules (pour N_0, cela tient à ce que ε est un homomorphisme d'algèbres).

La construction de X_0, la multiplication dans X_0 et la construction de l'homomorphisme $\varepsilon : U_0 \to \Lambda$ sont déjà indiquées. Les autres constructions se font proche en proche. Supposons qu'on ait déjà défini $X_0, \ldots, X_n$, les applications $X_i \times X_j \to X_{i+j}$ pour $i + j \leq n$ et les d_i pour $i \leq n$, de façon que toutes les conditions énoncées ci-dessus soient satisfaites, en particulier (1.1) soit satisfaite pour $i + j + k \leq n$. On définit alors X_{n+1} comme un ensemble en correspondance bijective avec le noyau N_n de d_n; la bijection $X_{n+1} \to N_n$ se prolonge d'une seule manière en une application K-linéaire $K(X_{n+1}) \to N_n$ qui, composée avec l'inclusion $N_n \to U_n$, donne $d_{n+1} : U_{n+1} \to U_n$. Pour définir les applications $X_i \times X_j \to X_{i+j}$ (pour $i + j = n + 1$) observons que

$$(d_i x_i) . x_j + (-1)^i x_i . (d_j x_j) \in U_n$$

est annulé par d_n, à cause de (1.2); c'est un élément de N_n; l'élément correspondant $y \in X_{n+1}$ sera, *par définition*, $x_i . x_j$. Il faut vérifier (1.1) lorsque $i+j+k=n+1$. Calculons

$$d_{n+1}((x_i . x_j) . x_k) = (d_i x_i) . x_j . x_k + (-1)^i x_i . (d_j x_j) . x_k + (-1)^{i+j} x_i . x_j . (d_k x_k)$$

(on a utilisé l'associativité, valable par hypothèse lorsque la somme des degrés est égale à n). Un calcul analogue donne la même valeur pour $d_{n+1}(x_i . (x_j . x_k))$. Ainsi $(x_i . x_j) . x_k$ et $x_i . (x_j . x_k)$ ont même image par d_{n+1}; puisque d_{n+1} est une bijection de X_{n+1} sur N_n, il s'ensuit que $(x_i . x_j) . x_k = x_i . (x_j . x_k)$.

On va montrer que $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_1$. Soit $(U', \Lambda', \varepsilon')$ un autre objet de la catégorie $\mathcal{C}_1$, et soit $g : \Lambda' \to \Lambda$ un homomorphisme d'algèbres. Soit σ la bijection réciproque de $X_0 \to \Lambda$ et soit s_n la bijection réciproque de $d_{n+1} : X_{n+1} \to N_n$ $(n \geq 0)$. Soit X'_n la K-base homogène de $U'_n (n \geq 0)$, qui est donnée. Définissons une application bien déterminée $f_0 : X'_0 \to X_0$ par la relation $f_0 = \sigma g \varepsilon'$; cette application se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme d'algèbres $f_0 : U'_0 \to U_0$. Comme $\varepsilon\sigma =$ identité, on a $\varepsilon f_0 = g\varepsilon'$. Supposons qu'on ait déjà défini des applications K-linéaires $f_0, \ldots, f_n$ telles que $f_{i+j}(u'_i\, u'_j) = f(u'_i) f(u'_j)$, $u'_i \in U'_i$, $u'_j \in U'_j$, $i+j \leq n$ et que $d_i f_i = f_{i-1} d'_i$ pour $i \leq n$. Définissons une application $f_{n+1} : X'_{n+1} \to X_{n+1}$ par la relation $f_{n+1} = s_n f_n d'_{n+1}$ (noter que $f_n d'_{n+1}$ a valeurs dans N_n parce que $d_n f_n d'_{n+1} = f_{n-1} d'_n d'_{n+1} = 0$). Cette application est définie *d'une façon unique*, parce que s_n est une bijection. On a

$$d_{n+1} f_{n+1} = d_{n+1} s_n f_n d'_{n+1} = f_n d'_{n+1},$$

et f_{n+1} se prolonge d'une seule manière en une application K-linéaire $f_{n+1} : U'_{n+1} \to U_{n+1}$ telle que $d_{n+1} f_{n+1} = f_n d'_{n+1}$. Pour montrer que

$$f_{i+j}(u'_i\, u'_j) = f_i(u'_i) f_j(u'_j) \qquad \text{pour} \quad i+j=n+1,$$

il suffit de le montrer pour les éléments de base de U'_i et U'_j. Or, pour $x'_i \in X'_i$, $x'_j \in X'_j$, $i+j=n+1$,

$$\begin{aligned} d_{i+j} f_{i+j}(x'_i . x'_j) &= f_{i+j-1}\, d'_{i+j}(x'_i . x'_j) \\ &= f_{i+j-1}((d'_i\, x'_i) . x'_j + (-1)^i x'_i . (d'_j . x'_j)) \\ &= (f_{i-1}\, d'_i\, x'_i) . (f_j x'_j) + (-1)^i (f_i x'_i) . (f_{j-1}\, d'_j x'_j) \\ &= (d_i f_i x'_i)(f_j x'_j) + (-1)^i (f_i x'_i)(d_j f_j x'_j) \\ &= d_{i+j}[f_i(x'_i) . f_j(x'_j)]. \end{aligned}$$

Puisque d_{i+j} est une bijection de X_{i+j} sur N_{i+j-1}, on a

$$f_{i+j}(x'_i . x'_j) = f_i(x'_i) . f_j(x'_j).$$

Le couple (f, g) est un morphisme $(U', \Lambda', \varepsilon') \to (U, \Lambda, \varepsilon)$ de la catégorie $\mathcal{C}_1$, et l'unicité de f montre que $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est l'objet universel cherché. La construction de f ci-dessus prouve le caractère fonctoriel de cet objet.

La catégorie $\mathcal{C}_2$. — Un objet de $\mathcal{C}_2$ est encore un triple $(U, \Lambda, \varepsilon)$ comme ci-dessus, mais on ne se donne pas de K-base de U (on ne suppose pas même que U soit K-libre); par contre, on se donne un relèvement multiplicatif $\sigma : \Lambda \to U_0$ (tel que $\varepsilon\sigma =$ identité), et pour chaque entier $n \geqq 0$, une application s_n du noyau de d_n (resp. du noyau de ε si $n = 0$) dans U_{n+1} telle que $d_{n+1} s_n$ soit l'identité. Ceci implique donc que U est acyclique sur Λ. On définit d'une manière évidente un morphisme (f, g) de $(U, \Lambda, \varepsilon)$ dans $(U', \Lambda', \varepsilon')$: on exige qu'il soit compatible avec σ, σ', les s_n et les s'_n.

Un objet $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est *universel* si, pour tout objet $(U', \Lambda', \varepsilon')$ et tout homomorphisme $g : \Lambda \to \Lambda'$, il existe *un* $f : U \to U'$ *et un seul*, tel que (f, g) soit un morphisme de la catégorie $\mathcal{C}_2$. (Attention : le sens de ce morphisme n'est pas le même que pour la catégorie $\mathcal{C}_1$). Étant donné Λ, il existe *au plus* un objet universel *à un isomorphisme près*.

Proposition 2. — *Pour toute algèbre* Λ, *il y a un objet universel* $(U, \Lambda, \varepsilon)$ *dans la catégorie* $\mathcal{C}_2$. *C'est un foncteur covariant de* Λ.

Démonstration. — On définira un objet $(U, \Lambda, \varepsilon)$ avec les propriétés suivantes :

(i) $U_0 = K(X_0)$, où X_0 est un ensemble en correspondance multiplicativement bijective avec Λ et $\varepsilon : U_0 \to \Lambda$ est l'homomorphisme d'algèbres dont la restriction à X_0 est la bijection multiplicative de X_0 sur Λ;

(ii)
$$U_n = \sum V_{i_1} \otimes_{U_0} \ldots \otimes_{U_0} V_{i_k}$$

(la somme étendue à toutes les suites d'entiers $i_1, \ldots, i_k \geqq 1$ dont la somme est n), où $V_n = U_0 \otimes_K K(Y_n) \otimes_K U_0$, Y_n étant un ensemble en correspondance bijective avec le noyau N_{n-1} de $d_{n-1} : U_{n-1} \to U_{n-2}$;

(iii) le produit $U_p . U_q = U_p \otimes_{U_0} U_q$, ainsi $U_p U_q \subset U_{p+q}$;

(iv) pour chaque $n \geqq 1$, $d_n : V_n \to U_{n-1}$ est une application U_0-linéaire à gauche et à droite de U_0-bimodules dont la restriction à Y_n est l'application bijective de Y_n sur N_{n-1}, et d_n se prolonge en une application U_0-linéaire à gauche et à droite $d_n : U_n \to U_{n-1}$ par la relation :

$$\begin{aligned} d_n(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k}) = d_{i_1} v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k} + (-1)^{i_1} v_{i_1} \otimes d_{i_2} v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_k} \\ + \ldots + (-1)^{i_1 + \ldots + i_{k-1}} v_{i_1} \otimes \ldots \otimes d_{i_k} v_{i_k}, \end{aligned}$$

où $v_{i_r} \in V_{i_r}$, $r = 1, \ldots, k$ et $i_1 + \ldots + i_k = n$;

(v) σ est la bijection réciproque de la bijection multiplicative $X_0 \to \Lambda$, donc multiplicative; et s_n est la bijection $N_n \to 1 \times Y_{n+1} \times 1$ qui est la composée de la bijection réciproque de la bijection $Y_{n+1} \to N_n$ et la bijection canonique $Y_{n+1} \to 1 \times Y_{n+1} \times 1$.

Les constructions de U_0, ε et σ sont déjà indiquées. Supposons qu'on ait déjà défini $X_0, Y_1, \ldots, Y_n$ et les applications U_0-linéaires à gauche et à droite

$d_i : U_i \to U_{i-1}$ pour tout $i \leq n$ (on convient que $d_0 = 0$) de façon que toutes les conditions énoncées ci-dessus soient satisfaites et que la suite

$$U_n \xrightarrow{d_n} U_{n-1} \to \ldots \to U_1 \xrightarrow{d_1} U_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0$$

soit exacte. On définit alors Y_{n+1} comme un ensemble en correspondance bijective avec le noyau N_n de $d_n : U_n \to U_{n-1}$. La bijection $Y_{n+1} \to N_n$ se prolonge d'une seule manière en une application K-linéaire $K(Y_{n+1}) \to N_n$. Comme N_n est un U_0-bimodule, cette application se prolonge d'une manière évidente en une application U_0-linéaire à gauche et à droite $U_0 \otimes_K K(Y_{n+1}) \otimes_K U_0 \to N_n$ qui, composée avec l'inclusion $N_n \to U_n$, donne $d_{n+1} : V_{n+1} \to U_n$. Cette application se prolonge en une application U_0-linéaire à gauche et à droite $d_{n+1} : U_{n+1} \to U_n$ de la manière déjà précisée pour l'indice n. Il est évident que d_{n+1} applique U_{n+1} *sur* le noyau N_n de d_n, parce que l'application $K(Y_{n+1}) \to N_n$ est surjective et U_0 possède un élément unité. On a donc une suite exacte

$$U_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} U_n \xrightarrow{d_n} U_{n-1} \to \ldots \to U_1 \xrightarrow{d_1} U_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0.$$

Il faut montrer que cet objet $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_2$. Soit $(U', \Lambda', \varepsilon')$ un autre objet de la catégorie $\mathcal{C}_2$ avec σ' et s'_n donnés. Soit $g : \Lambda \to \Lambda'$ un homomorphisme d'algèbres. Définissons une application $f_0 : X_0 \to U'_0$ par la relation $f_0 = \sigma' g \varepsilon$. Comme ε, g et σ' sont des applications multiplicatives, f_0 est une application multiplicative. On a $\varepsilon' f_0 = \varepsilon' \sigma' g \varepsilon = g \varepsilon$ sur la K-base X_0 de U_0. Cette application se prolonge K-linéairement en une appplication $f : U_0 \to U'_0$ telle que $\varepsilon' f_0 = g \varepsilon$. Supposons qu'on ait déjà défini des applications K-linéaires $f_p : U_p \to U'_p$ pour $p \leq n$ telles que

$$f_p(u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_k}) = f_{i_1}(u_{i_1}) \ldots f_{i_k}(u_{i_k}) \qquad (i_1 + \ldots + i_k = p),$$

et que $d'_p f_p = f_{p-1} d_p$. Définissons $f_{n+1} : Y_{n+1} \to U'_{n+1}$ par la relation $f_{n+1} = s'_n f_n d_{n+1}$ (noter que $f_n d_{n+1}$ est à valeurs dans le noyau de d'_n, parce que $d'_n f_n d_{n+1} = f_{n-1} d_n d_{n+1} = 0$). Cette application est définie d'une façon unique, parce que s'_n est donné. Prolongeons f_{n+1} K-linéairement en une application $f_{n+1} : K(Y_{n+1}) \to U'_{n+1}$ et prolongeons cette application au moyen de f_0 en $f_{n+1} : V_{n+1} \to U'_{n+1}$. Finalement définissons $f_{n+1} : U_{n+1} \to U'_{n+1}$ par la formule

$$f_{n+1}(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k}) = f_{i_1}(v_{i_1}) \ldots f_{i_k}(v_{i_k}) \qquad (i_1 + \ldots + i_k = n+1,\ v_{i_r} \in V_{i_r}).$$

Pour vérifier la relation $d'_{n+1} f_{n+1} = f_n d_{n+1}$ sur les éléments de U_{n+1}, on commence par Y_{n+1}. Sur les éléments de Y_{n+1},

$$d'_{n+1} f_{n+1} = d'_{n+1} s'_n f_n d_{n+1} = f_n d_{n+1},$$

parce que $d'_{n+1} s'_n =$ identité (donné).

Si $y \in Y_{n+1}$, $1 \otimes y \otimes 1 \in V_{n+1}$ est un élément de la U_0^e-base de V_{n+1}. On a

$$\begin{aligned} d'_{n+1} f_{n+1}(u_0 \otimes y \otimes u'_0) &= d'_{n+1}(f_0(u_0) \cdot f_{n+1}(y) \cdot f_0(u'_0)) \qquad (u_0, u'_0 \in U_0) \\ &= f_0(u_0) \cdot (d'_{n+1} f_{n+1}(y) f_0(u'_0), \\ &\quad d'_{n+1} \text{ étant } U_0'^e\text{-linéaire}, \\ &= f_0(u_0)(f_n d_{n+1} y) f_0(u'_0) \\ &= f_n d_{n+1}(u_0 \otimes y \otimes u'_0), \\ &\quad d_{n+1} \text{ étant } U_0^e\text{-linéaire}. \end{aligned}$$

On a prouvé que $d'_{n+1} f_{n+1} = f_n d_{n+1}$ pour tous les éléments de V_{n+1}. Pour terminer

$$\begin{aligned} & d'_{n+1} f_{n+1}(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k}) \\ &\quad = d'_{n+1}[f_{i_1}(v_{i_1}) \ldots f_{i_k}(v_{i_k})] = d'_{i_1} f_{i_1}(v_{i_1}) \cdot f_{i_2}(v_{i_2}) \ldots f_{i_k}(v_{i_k}) \\ &\qquad + (-1)^{i_1} f_{i_1}(v_{i_1}) d'_{i_2} f_{i_2}(v_{i_2}) \ldots f_{i_k}(v_{i_k}) + \ldots + (-1)^{i_1+\ldots+i_{k-1}} f_{i_1}(v_{i_1}) \ldots d'_{i_k} f_{i_k}(v_{i_k}) \\ &\quad = f_{i_1-1}(d_{i_1} v_{i_1}) \ldots f_{i_k}(v_{i_k}) + (-1)^{i_1} f_{i_1}(v_{i_1}) f_{i_2-1}(d_{i_2} v_{i_2}) \ldots f_{i_k}(v_{i_k}) + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{i_1+\ldots+i_{k-1}} f_{i_1}(v_{i_1}) \ldots f_{i_k-1}(d_{i_k} v_{i_k}) \\ &\quad = f_n[d_{i_1} v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k} + (-1)^{i_1} v_{i_1} \otimes d_{i_2} v_{i_2} \otimes \ldots \otimes v_{i_k} + \ldots + (-1)^{i_1+\ldots+i_{k-1}} v_{i_1} \otimes \ldots \otimes d_{i_k} v_{i_k}] \\ &\quad = f_n d_{n+1}(v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_k}), \qquad v_{i_r} \in V_{i_r} \qquad (i_1 + \ldots + i_k = n+1). \end{aligned}$$

Le couple (f, g) est un morphisme $(U, \Lambda, \varepsilon) \to (U', \Lambda', \varepsilon')$ de la catégorie $\mathcal{C}_2$ et l'unicité de f montre que $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_2$. La construction de f ci-dessus montre que $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est un foncteur covariant de Λ. C. Q. F. D.

Pour faire la distinction, soit $(\tilde{U}, \Lambda, \varepsilon)$ l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_1$ et soit $(\tilde{\tilde{U}}, \Lambda, \varepsilon)$ l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_2$, pour une algèbre Λ donnée. Observons que $\tilde{U}$ *est un objet de la catégorie* $\mathcal{C}_2$; car σ et s_n sont définis dans la construction de $\tilde{U}$ de la façon exigée. D'autre part, $\tilde{\tilde{U}}$ *est un objet de la catégorie* $\mathcal{C}_1$, car $\tilde{\tilde{U}}$ est K-libre, la K-base de U_0 étant X_0 et la K-base X_n de U_n étant la réunion des produits

$$X_0 \times Y_{i_1} \times X_0 \times Y_{i_2} \times \ldots \times X_0 \times Y_{i_k} \times X_0$$

tels que $i_1 + \ldots + i_k = n$; et le produit d'un élément de X_p et d'un élément de X_q est un élément de X_{p+q}.

D'après la propriété universelle de $\tilde{U}$ dans $\mathcal{C}_1$, $\tilde{\tilde{U}}$ s'envoie dans $\tilde{U}$. D'après la propriété universelle de $\tilde{\tilde{U}}$ dans $\mathcal{C}_2$, $\tilde{U}$ s'envoie encore dans $\tilde{\tilde{U}}$. D'après l'unicité du morphisme, on obtient la même application $\tilde{\tilde{U}} \to \tilde{U}$ dans les deux cas.

Définition. — Un système $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est dit *fortement libre* s'il existe une K-base homogène de U, contenant 1, telle que le produit de deux éléments de base soit un élément de base. Un système $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est dit *fortement acyclique* si $\varepsilon_* : H_*(U) \to \Lambda$ est un isomorphisme et s'il existe un relèvement multiplicatif $\sigma : \Lambda \to U$ de ε (tel que $\varepsilon\sigma =$ identité).

Les objets de la catégorie $\mathcal{C}_1$ sont fortement libres; et les objets de la catégorie $\mathcal{C}_2$ sont fortement acycliques. D'après ce qui précède, si $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est fortement libre, il existe un homomorphisme $U \to \tilde{U}$ (qui dépend du choix de la K-base de U); deux tels homomorphismes sont homotopes au sens des K-modules différentiels gradués, d'après un résultat classique. Si $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est fortement acyclique, il existe un homomorphisme $\tilde{\tilde{U}} \to U$ qui dépend du choix de σ et des s_n dans $(U, \Lambda, \varepsilon)$; deux tels homomorphismes sont homotopes au sens des K-modules.

2. La cohomologie d'une algèbre.

Si $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est un système fortement libre (dans le sens de la dernière section) et U est un complexe acyclique sur Λ, on dit que U est une résolution fortement libre et acyclique de Λ. Si $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est un système fortement acyclique et U est projectif comme K-module, on dit que U est une résolution K-projective et fortement acyclique de Λ.

Théorème 2. — *Soit* M *un* Λ-*bimodule. Soit* U *une résolution fortement libre et acyclique de* Λ, *ou bien une résolution* K-*projective et fortement acyclique de* Λ; *alors*

$$H^*(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M))$$

ne dépend pas du choix de la résolution U. D'une façon précise, si l'on a deux telles résolutions U et U′, on a un isomorphisme *bien déterminé* de

$$H^*(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)) \quad \text{sur} \quad H^*(\mathrm{Hom}_{U'^e}(\mathcal{B}(U'), M)).$$

Démonstration. — C'est vrai si $U = \tilde{U}$ et $U' = \tilde{\tilde{U}}$, parce que U s'envoie dans $\tilde{U}$ et définit un isomorphisme $H_*(\tilde{\tilde{U}}) \to H_*(\tilde{U})$; ainsi toutes les conditions du théorème 1, chapitre I sont satisfaites, et l'on a l'isomorphisme des groupes de cohomologie.

Si U est fortement libre et acyclique, on a un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $U \to \tilde{U}$; deux tels homomophismes sont homotopes au sens des K-modules différentiels gradués. Cet homomorphisme donne un homomorphisme $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(\tilde{U})$ qui induit un homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\tilde{U}^e}(\mathcal{B}(\tilde{U}), M) \to \mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M);$$

deux tels homomorphismes étant homotopes. On obtient un homomorphisme

$$H^*(\mathrm{Hom}_{\tilde{U}^e}(\mathcal{B}(\tilde{U}), M)) \to H^*(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M))$$

qui est indépendant du choix de $U \to \tilde{U}$, et qui est un isomorphisme parce que $H_*(U) \to H_*(\tilde{U})$ est un isomorphisme.

Si U est K-projectif et fortement acyclique, on envoie $\tilde{\tilde{U}}$ dans U et l'on raisonne de même. C. Q. F. D.

DÉFINITION. — *Soit* Λ *une* K-*algèbre et soit* M *un* Λ-*bimodule. Soit* $(U, \Lambda, \varepsilon)$ *une résolution fortement libre et acyclique de* Λ, *ou bien une résolution* K-*projective et fortement acyclique de* Λ. *On appelle* $H^\star(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M))$ *le groupe de cohomologie de* Λ *à coefficients dans le* Λ-*bimodule* M *et on le note* $H^\star(\Lambda, M)$.

Si Λ est projectif comme K-module, on peut prendre $U = \Lambda$ et la cohomologie définie ci-dessus coïncide avec la cohomologie de Hochschild. On verra plus tard la relation entre la cohomologie d'une algèbre d'après Hochschild et la cohomologie définie ici.

Si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de Λ-bimodules, la suite de complexes

$$0 \to \mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M') \to \mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M) \to \mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M'') \to 0$$

est exacte, parce que $\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U),\quad)$ est un foncteur exact de U^e-modules; on en déduit d'une façon classique une suite exacte de groupes de cohomologie

$$\ldots \to H^{n-1}(\Lambda, M'') \to H^n(\Lambda, M') \to H^n(\Lambda, M) \to H^n(\Lambda, M'') \to H^{n+1}(\Lambda, M') \to \ldots;$$

$\{H^n(\Lambda, M)\}$ est ainsi un foncteur ∂-cohomologique au sens de Grothendieck [5].

L'homomorphisme $\varepsilon : U \to \Lambda$ induit une augmentation $\eta : \mathcal{B}(U) \to \Lambda$ donnée par

$$\eta(u_0 \otimes u_1) = (\varepsilon u_0)(\varepsilon u_1) \qquad (u_0, u_1 \in U);$$
$$\eta(u_0 \otimes \ldots \otimes u_{n+1}) = 0 \qquad (u_i \in U \text{ et } n \geqq 1).$$

Soit

$$\bar{\mathcal{B}}(U) = \Lambda \otimes_U \mathcal{B}(U) \otimes_U \Lambda$$

et soit $\bar{\eta} : \bar{\mathcal{B}}(U) \to \Lambda$ une augmentation donnée par :

$$\bar{\eta}(\lambda \otimes \mu) = \lambda\mu \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda);$$
$$\bar{\eta}(\lambda \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes \mu) = 0 \qquad (u_i \in U;\ \lambda, \mu \in \Lambda \text{ et } n \geqq 1).$$

$\bar{\mathcal{B}}(U)$ est un Λ-bimodule différentiel gradué. On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\bar{\mathcal{B}}(U), M) \cong \mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)$$

et l'on en déduit que

$$H^\star(\Lambda, M) = H^\star(\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\bar{\mathcal{B}}(U), M).$$

On écrit $\lambda[u_1 | \ldots | u_n]\mu$ pour l'élément $\lambda \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes \mu \in \bar{\mathcal{B}}(U)$; en particulier, $[u_1 | \ldots | u_n]$ signifie l'élément $1 \otimes u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \otimes 1$ et $[\quad]$ signifie l'élément $1 \otimes 1$. La graduation dans $\bar{\mathcal{B}}(U)$ est donnée par :

$$\deg[u_1 | \ldots | u_n] = n + \sum_{i=1}^{n} \deg u_i \qquad (u_i \in U,\ n \geqq 0).$$

La différentielle dans $\bar{\mathcal{B}}(U)$ est $\partial = \partial_r + \partial_s$, où ∂_r et ∂_s sont données [d'après les formules (1.1) et (1.2), chap. I] par

$$(2.1) \qquad \partial_r[u_1|\ldots|u_n] = -\sum_{i=1}^{n}(-1)^{\varepsilon_{i-1}}[u_1|\ldots|du_i|\ldots|u_n],$$

$$(2.2) \qquad \partial_s[u_1|\ldots|u_n] = (\varepsilon u_1)[u_2|\ldots|u_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{\varepsilon_i}[u_1|\ldots|u_i u_{i+1}|\ldots|u_n] + (-1)^{\varepsilon_n}[u_1|\ldots|u_{n-1}](\varepsilon u_n),$$

où $\varepsilon_i = \deg[u_1|\ldots|u_i]$, $i \geqq 0$.

Lorsque l'anneau de base K est un anneau principal (par exemple $K = Z$, l'anneau des entiers naturels), on a un théorème plus complet que le théorème 2.

Théorème 3. — *Soit* K *un anneau principal et soit* M *un* Λ*-bimodule. Soit* $(U, \Lambda, \varepsilon)$ *une résolution libre et acyclique de* Λ*; alors*

$$H^*(\Lambda, M) \cong H^*(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)).$$

Ce théorème est une conséquence des propositions 3 et 4 données ci-dessous.

Proposition 3. — *Si* Λ *possède une résolution libre et fortement acyclique* $(V, \Lambda, \varepsilon')$ *telle que* $V_n = 0$ *pour* $n > 1$, *alors, pour toute résolution libre et acyclique* $(U, \Lambda, \varepsilon)$ *on a un isomorphisme bien déterminé :*

$$H^*(\Lambda, M) \to H^*(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M)).$$

Démonstration. — On définit $f_0 : U_0 \to V_0$ par le prolongement K-linéaire de l'application (ensembliste) $f_0 : X_0 \to \Lambda$ donnée par $f_0 = \sigma\varepsilon$, où X_0 est une K-base de U_0 et σ est le relèvement multiplicatif de Λ dans V_0. On sait que f_0 est un homomorphisme d'algèbres tel que $\varepsilon' f_0 = \varepsilon$. Soit d la différentielle de U et soit ∂ la différentielle de V. On définit un homomorphisme de K-modules $f_1 : U_1 \to V_1$ en prolongeant K-linéairement l'application (ensembliste) $f_1 : X_1 \to V_1$ donnée par $f_1 = \partial_1^{-1} f_0 d_1$, où X_1 est une K-base de U_1 (noter que ∂_1 est un monomorphisme et que $f_0 d_1 \in \mathrm{Ker}\, \varepsilon'$ puisque $\varepsilon' f_0 d_1 = \varepsilon d_1 = 0$). Comme $V_n = 0$ pour $n > 1$, on définit $f_n = 0$ pour $n > 1$. On vérifie sans peine que

$$f_1(u_0 u_1) = f_0(u_0) f_1(u_1), \qquad f_1(u_1 u_0) = f_1(u_1) f_0(u_0) \qquad (u_0 \in U'_0,\ u_1 \in U_1);$$
$$f_{i+j}(u_i u_j) = 0 = f_i(u_i) f_j(u_j) \qquad (u_i \in U_i,\ u_j \in U_j,\ i + j \geqq 1).$$

On a ainsi un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $f : U \to V$ tel que $\varepsilon' f = \varepsilon$; deux tels homomorphismes sont homotopes au sens des K-modules différentiels gradués. Ceci définit un homomorphisme

$$\varphi :\quad H^*(\mathrm{Hom}_{V^e}(\mathcal{B}(V), M)) \to H^*(\mathrm{Hom}_{U^e}(\mathcal{B}(U), M))$$

indépendant du choix de l'homomorphisme $f : U \to V$ (même raisonnement que dans le théorème 2). Puisque f induit un isomorphisme $H_*(U) \to H_*(V)$, φ est un isomorphisme, d'après le théorème 1 (chap. I, § 2). Finalement,

$$H^*(\mathrm{Hom}_{V^e}(\mathcal{B}(V), M)) = H^*(\Lambda, M)$$

parce que $(V, \Lambda, \varepsilon)$ est une résolution *libre et fortement acyclique* de Λ. Ceci achève la démonstration.

PROPOSITION 4. — *Si* K *est un anneau principal,* Λ *possède une résolution libre et fortement acyclique* $(V, \Lambda, \varepsilon')$ *telle que* $V_n = 0$ *pour* $n > 1$.

Démonstration. — Soit $V_0 = K(\Lambda)$, et $\varepsilon' : V_0 \to \Lambda$ l'homomorphisme d'algèbres dont la restriction à Λ est l'application identique. Soit $V_1 = \mathrm{Ker}\, \varepsilon'$; V_1 est un K-module libre, puisque K est un anneau principal. On a ainsi une suite exacte de K-modules :

$$0 \to V_1 \xrightarrow{\partial_1} V_0 \xrightarrow{\varepsilon'} \Lambda \to 0,$$

où ∂_1 est l'injection canonique de V_1 dans V_0. Comme V_1 est un idéal de V_0, on définit

$$uv = \partial_1^{-1}[u(\partial_1 v)], \qquad vu = \partial_1^{-1}[(\partial_1 v)u], \qquad vv' = 0,$$

où $u \in V_0$ et $v, v' \in V_1$. Soit $V = V_0 \oplus V_1$; alors $(V, \Lambda, \varepsilon')$ est une résolution libre et fortement acyclique de Λ telle que $V_n = 0$, pour $n > 1$. Cette résolution a déjà été considérée par Mac Lane [4, § 11].

Lorsque $K = Z$, on peut prendre $U = V$ (*cf.* Mac Lane [4, § 11, p. 340]). Le complexe $(\overline{\mathcal{B}}(U), \bar{\eta})$ coïncide avec le complexe $(\overline{\mathcal{B}}(V(\Lambda)), \eta)$ de Mac Lane et les formules (2.1) et (2.2) coïncident avec les formules données par Mac Lane [4, p. 323]. La cohomologie d'un anneau est donc un cas particulier de la cohomologie d'une algèbre.

3. Changement de l'anneau de base.

Soit $\varphi : K \to K'$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs et soit Λ une K-algèbre. Soit $\Lambda' = K' \otimes_K \Lambda$ qui est une K'-algèbre avec la multiplication donnée par la relation :

$$(k'_1 \otimes \lambda_1)(k'_2 \otimes \lambda_2) = k'_1 k'_2 \otimes \lambda_1 \lambda_2 \qquad (k'_1, k'_2 \in K',\ \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda)$$

et les relations de distributivité. On a un homomorphisme canonique d'anneaux $\psi : \Lambda \to \Lambda'$ donné par $\lambda \to 1 \otimes \lambda$, tel que $\psi(k\lambda) = \varphi(k)\psi(\lambda)$; $k \in K$, $\lambda \in \Lambda$. Soit M un Λ'-bimodule; alors l'homomorphisme ψ induit sur M une structure de Λ-bimodule.

Soit $(U, \Lambda, \varepsilon)$ l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_1$ pour la K-algèbre Λ. Soit $(U', \Lambda', \varepsilon')$ l'objet universel d'une catégorie analogue $\mathcal{C}'_1$ pour la K'-algèbre Λ'. Considérons la K'-algèbre $U'' = K' \otimes_K U$ avec l'homomorphisme de K'-algèbres $\varepsilon'' : U'' \to \Lambda'$ donné par $\varepsilon''(k' \otimes u) = k' \otimes (\varepsilon u)$; $k' \in K'$, $u \in U$. Il est évident que la K'-algèbre U'' est fortement libre, puisque la K-algèbre U est fortement libre. On a donc (par la propriété universelle de U' dans la catégorie $\mathcal{C}'_1$) un homomorphisme $\beta : U'' \to U'$. En composant β avec l'homomorphisme canonique d'anneaux $\alpha : U \to U''$ donné par $u \to 1 \otimes u$, $u \in U$, on obtient un homomorphisme d'anneaux $\gamma : U \to U'$ avec $\gamma(ku) = \varphi(k)\gamma(u)$; $k \in K$, $u \in U$. On exprime cette situation par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & U'' \arrow[d, "\beta"] \\ & U' \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

On peut définir γ directement aussi en utilisant les homomorphismes φ et ψ. En fait, on peut définir γ même si Λ' est une K'-algèbre quelconque et $\psi : \Lambda \to \Lambda'$ est un homomorphisme d'anneaux compatible avec l'homomorphisme donné $\varphi : K \to K'$ [c'est-à-dire $\psi(k\lambda) = \varphi(k)\psi(\lambda)$, $k \in K$, $\lambda \in \Lambda$]. La construction de γ est bien évidente après la construction de U et f dans la proposition 1 (§ 1). On voit facilement que dans le cas $\Lambda' = K' \otimes_K \Lambda$, cet homomorphisme coïncide avec l'homomorphisme $\beta\alpha$ défini plus haut.

Le diagramme commutatif (3.1) induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{U' \otimes_{K'} U'^*}(\mathcal{B}'(U'), M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\beta, M)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(\gamma, M)"] & \\ \mathrm{Hom}_{U'' \otimes_{K'} U''^*}(\mathcal{B}'(U''), M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\alpha, M)"'] & \mathrm{Hom}_{U \otimes_K U^*}(\mathcal{B}(U), M) \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{B}'(U')$ et $\mathcal{B}'(U'')$ sont les complexes des K'-algèbres U' et U'' analogues au complexe $\mathcal{B}(U)$ de la K-algèbre U. On observe que :

$$U'' \otimes_{K'} U'' = (K' \otimes_K U) \otimes_{K'} (K' \otimes_K U) \cong K' \otimes_K (U \otimes_K U),$$

et que

$$U'' \otimes_{K'} U''^* = (K' \otimes_K U) \otimes_{K'} (K' \otimes U)^* = (K' \otimes_K U) \otimes_{K'} (K' \otimes U^*) \cong K' \otimes_K (U \otimes U^*);$$

et de même, on prouve par récurrence sur n que

$$\mathcal{B}'(U'') \cong K' \otimes_K \mathcal{B}(U).$$

Alors $\mathrm{Hom}(\alpha, M)$ est un isomorphisme. En passant à la cohomologie, on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H^*(\Lambda', M) \arrow[d, "\bar\beta"'] \arrow[dr, "\bar\gamma"] & \\ H^*(\mathrm{Hom}_{U'' \otimes_{K'} U''^*}(\mathcal{B}'(U''), M)) \arrow[r, "\bar\alpha"'] & H^*(\Lambda, M) \end{tikzcd}$$

où $\bar\alpha$ est un isomorphisme canonique.

Proposition 5. — *Si* K' *est* K-*plat*, $\bar{\gamma}$ *est un isomorphisme.*

En effet, l'objet $(U'', \Lambda', \varepsilon'')$ est acyclique, puisque $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est acyclique. Ainsi l'objet $(U'', \Lambda', \varepsilon'')$ est fortement libre et acyclique, et d'après le théorème 2, $\bar{\beta}$ est un isomorphisme. C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

1. Calculs de H^0 et H^1.

Soit Λ une K-algèbre et soit M un Λ-bimodule. Soit $(U, \Lambda, \varepsilon)$ l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_1$ (chap. II, § 1). Dans la suite on utilisera toujours cet objet pour calculer les groupes de cohomologie $H^n(\Lambda, M)$. Il sera commode d'identifier X_0 avec Λ et X_n avec le noyau N_{n-1} de d_{n-1}. On écrit $U_0 = K(\Lambda)$ et $U_n = K(N_{n-1})$. L'élément de X_0 qui correspond à l'élément λ de Λ s'écrit (λ), l'élément de X_1 qui correspond à l'élément $n \in N_0$ s'écrit (n), etc. On a $\varepsilon(\lambda) = \lambda$, $d_1(n) = n$, etc. Un élément n de N_0 est de la forme $\sum_i k_i(\lambda_i)$, avec $\sum_i k_i \lambda_i = 0$, où $\lambda_i \in \Lambda$; un élément n' de N_1 est de la forme $\sum_j k'_j(n_j)$, avec $\sum_j k'_j n_j = 0$, où $n_j \in N_0$; etc.

On a prouvé que

$$H^*(\Lambda, M) = H^*\left(\sum_n \mathrm{Hom}_K(U^n, M)\right),$$

où $U^n = U \otimes_K \ldots \otimes_K U$ (n facteurs). La différentielle δ est définie par la relation $\delta f = f\partial$, $f \in \sum_n \mathrm{Hom}_K(U^n, M)$, où $\partial = \partial_r + \partial_s$, et ∂_r, ∂_s sont donnés sur les éléments de $U^n (n \geqq 0)$ par les formules (2.1) et (2.2) du chapitre II.

Précisons les n-cochaînes pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 4 :

1. Une 0-cochaîne est un élément de M (par définition);
2. Une 1-cochaîne est une application K-linéaire,

$$U_0 \to M.$$

Comme U_0 est K-libre, cette application est bien déterminée par sa restriction à Λ. Ainsi une 1-cochaîne est bien déterminée par une application (ensembliste)

$$\Lambda \to M.$$

La structure de K-module de l'ensemble des 1-cochaînes est définie par la structure de K-module de M.

3. Une 2-cochaîne est la somme de deux applications K-linéaires :

$$U_0 \otimes_K U_0 \to M,$$
$$U_1 \to M.$$

$U_0 \otimes_K U_0$ et U_1 étant K-libres, une 2-cochaîne est bien déterminée par deux applications (ensemblistes)

$$\begin{aligned} \Lambda \times \Lambda &\to M, \\ N_0 &\to M. \end{aligned}$$

De la même façon, on voit que :

4. Une 3-cochaîne est bien déterminée par quatre applications (ensemblistes)

$$\begin{aligned} \Lambda \times \Lambda \times \Lambda &\to M, \\ \Lambda \times N_0 &\to M, \\ N_0 \times \Lambda &\to M, \\ N_1 &\to M. \end{aligned}$$

5. Une 4-cochaîne est bien déterminée par huit applications (ensemblistes)

$$\begin{aligned} \Lambda \times \Lambda \times \Lambda \times \Lambda &\to M, \\ \Lambda \times \Lambda \times N_0 &\to M, \\ \Lambda \times N_0 \times \Lambda &\to M, \\ N_0 \times \Lambda \times \Lambda &\to M, \\ \Lambda \times N_1 &\to M, \\ N_1 \times \Lambda &\to M, \\ N_0 \times N_0 &\to M, \\ N_2 &\to M. \end{aligned}$$

Le produit de deux éléments de la K-base de U étant un élément de base, les formules (2.1) et (2.2) du chapitre II restent valables même si les u_i sont des éléments de la K-base de U.

On va calculer $H^0(\Lambda, M)$ et $H^1(\Lambda, M)$.

Soit $f = m \in M$ une 0-cochaîne. Alors δf est une 1-cochaîne qui est bien déterminée par sa restriction $\Lambda \to M$ à la K-base Λ de U_0. On a par (II, 2.2)

$$\delta f(\lambda) = \lambda m - m\lambda \qquad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Donc $f = m$ est un 1-cocycle, si et seulement si

$$\lambda m - m\lambda = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Le 0-cobord étant nul (par définition), on voit que $H^0(\Lambda, M)$ est isomorphe au sous-K-module des $m \in M$ tels que $\lambda m = m\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Ainsi $H^0(\Lambda, M)$ coïncide avec le 0-groupe de cohomologie de Λ défini par Hochschild.

Soit, maintenant, f une 1-cochaîne. Alors δf est une 2-cochaîne qui est bien déterminée par deux applications (ensemblistes) $\Lambda \times \Lambda \to M$ et $N_0 \to M$. On a par (II, 2.1) et (II, 2.2)

$$\delta f(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 f(\lambda_2) - f(\lambda_1 \lambda_2) + f(\lambda_1)\lambda_2,$$

$$\delta f(n) = -f d(n) = -\sum_i k_i f(\lambda_i),$$

où λ_1, λ_2, $\lambda_i \in \Lambda$, $n = \sum k_i(\lambda_i) \in \mathrm{N}_0$ tel que $\sum k_i \lambda_i = 0$ $\Big[$noter que f est une application K-linéaire et donc $f\Big(\sum k_i(\lambda_i)\Big) = \sum k_i f(\lambda_i)\Big]$. Soit $\varphi : \Lambda \to \mathrm{M}$ la restriction de f à Λ.

Alors f est un 1-cocycle si et seulement si :

$$\text{(i)} \qquad \varphi(\lambda_1 \lambda_2) = \lambda_1 \varphi(\lambda_2) + \varphi(\lambda_1)\lambda_2,$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_i k_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum_i k_i \varphi(\lambda_i) = 0.$$

La dernière condition (ii) implique que φ est une application K-linéaire de Λ dans M. Ainsi (i) et (ii) impliquent que l'application $\varphi : \Lambda \to \mathrm{M}$ est un « *homomorphisme croisé* » de K-modules (ou une dérivation). De plus, f est 1-cobord, si $f = \delta g$ où $g = m \in \mathrm{M}$ est une 0-chaîne. En ce cas :

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda) = \delta g(\lambda) = \lambda m - m\lambda \qquad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda$$

et φ est un « *homomorphisme principal* » (ou une dérivation intérieure). On a donc montré que $\mathrm{H}^1(\Lambda, \mathrm{M})$ est isomorphe au K-module des K-homomorphismes croisés de Λ dans M, divisé par le sous-module des K-homomorphismes principaux. On voit encore que $\mathrm{H}^1(\Lambda, \mathrm{M})$ coïncide avec le 1-groupe de cohomologie de Λ défini par Hochschild.

2. Interprétation de H^2.

Soit $\beta : \mathrm{E} \to \Lambda$ un homomorphisme *surjectif* de K-algèbres. Soit M le noyau de β et supposons que M soit tel que le produit de deux éléments quelconques de M soit zéro (on écrit $\mathrm{M}^2 = 0$). M a alors la structure d'un Λ-bimodule; pour une application quelconque $\rho : \Lambda \to \mathrm{E}$ telle que $\beta\rho =$ identité, cette structure de Λ-bimodule est définie sans ambiguïté par les relations

$$\lambda m = (\rho\lambda) m \qquad \text{et} \qquad m\lambda = m(\rho\lambda) \qquad (m \in \mathrm{M},\ \lambda \in \Lambda).$$

En ce cas, on dit que (E, β) est une extension *spéciale* de Λ avec noyau M. Deux extensions spéciales (E, β et (E′, β') de Λ avec noyau M sont équivalentes s'il existe un homomorphisme d'algèbres φ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{E} \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathrm{M} \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & \Lambda \\
& \mathrm{E}' \arrow[ur, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif; α et α' sont les inclusions. L'homomorphisme φ est nécessairement un isomorphisme.

Pour un Λ-bimodule M donné, on va interpréter $\mathrm{H}^2(\Lambda, \mathrm{M})$ par les extensions spéciales de Λ avec noyau isomorphe à M.

Soit f une 2-cochaîne. Alors δf est une 3-cochaîne qui est bien déterminée par quatre applications (ensemblistes) de $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda$, $\Lambda \times N_0$, $N_0 \times \Lambda$ et N_1 dans M. On a par (II, 2.1), (II, 2.2) :

$$\delta f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 f(\lambda_2, \lambda_3) - f(\lambda_1 \lambda_2, \lambda_3) + f(\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3) - f(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_3,$$

$$\delta f(\lambda, n) = \lambda f(n) - f(\lambda n) + \sum_i k_i f(\lambda, \lambda_i),$$

$$\delta f(n, \lambda) = f(n\lambda) - f(n)\lambda - \sum_i k_i f(\lambda_i, \lambda),$$

$$\delta f(n') = -fd(n') = -\sum k'_j f(n_j),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_i \in \Lambda$, $n = \sum_i k_i(\lambda_i) \in N_0$ avec $\sum_i k_i \lambda_i = 0$ et $n' = \sum_j k'_j(n_j) \in N_1$ avec $n_j \in N_0$ et $\sum k'_j n_j = 0$.

Soient $\gamma_1 : \Lambda \times \Lambda \to M$ et $\gamma_2 : N_0 \to M$ les restrictions de f à $\Lambda \times \Lambda$ et N_0. Alors f est un 2-cocycle si et seulement si γ_1 et γ_2 satisfont aux relations suivantes :

$$\lambda_1 \gamma_1(\lambda_2, \lambda_3) - \gamma_1(\lambda_1 \lambda_2, \lambda_3) + \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3) - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_3 = 0, \tag{2.1}$$

$$\sum_i k_i \gamma_1(\lambda, \lambda_i) = \gamma_2(\lambda n) - \lambda \gamma_2(n), \tag{2.2}$$

$$\sum_i k_i \gamma_1(\lambda_i, \lambda) = \gamma_2(n\lambda) - \gamma_2(n)\lambda, \tag{2.3}$$

$$\sum_j k'_j \gamma_2(n_j) = 0 \tag{2.4}$$

pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_i \in \Lambda$, $n, n_j \in N_0$, $k_i, k'_j \in K$ tels que

$$\sum_i k_i \lambda_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_j k'_j n_j = 0.$$

Pour un 2-cocycle f donné, définissons une structure de K-algèbre sur l'ensemble E_f des couples (m, λ), $m \in M$, $\lambda \in \Lambda$ par les relations :

$$k(m, \lambda) = (km + \gamma_2(k, \lambda), k\lambda), \tag{2.5}$$

$$(m_1, \lambda_1) + (m_2, \lambda_2) = (m_1 + m_2 + \gamma_2(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1 + \lambda_2), \tag{2.6}$$

$$(m_1, \lambda_1)(m_2, \lambda_2) = (m_1 \lambda_2 + \lambda_1 m_2 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1 \lambda_2), \tag{2.7}$$

où $m, m_1, m_2 \in M$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $k \in K$ et où l'on écrit (k, λ) pour $k(\lambda) - (k\lambda)$ et (λ_1, λ_2) pour $(\lambda_1) + (\lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)$.

Après que l'on a prouvé l'associativité de l'addition définie ci-dessus, on peut prouver par récurrence que les relations (2.5) et (2.6) sont équivalentes à une seule relation :

$$(2.8) \qquad \sum_i k_i(m_i, \lambda_i) = \Big(\sum_i k_i m_i + \gamma_2(n),\ \sum_i k_i\lambda_i\Big),$$

où $n = \sum_i k_i(\lambda_i) - \sum_i (k_i\lambda_i)$; $m_i \in \mathrm{M}$, $\lambda_i \in \Lambda$, $k_i \in \mathrm{K}$.

Pour vérifier que E_f a une structure de K-algèbre, il faut vérifier les relations suivantes :

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. $x(y + z) = xy + xz$;
4. $(x + y)\, z = xz + yz$;
5. $(xy)\, z = x(yz)$;
6. $(kx)\, y = k(xy)$;
7. $x(ky) = k(xy)$;
8. $k_1(k_2 x) = (k_1 k_2) x$;
9. $k(x + y) = kx + xy$;
10. $(k_1 + k_2)\, x = k_1 x + k_2 x$,

où $x, y, z \in \mathrm{E}_f$; $k, k_1, k_2 \in \mathrm{K}$.

Soient $x = (m_1, \lambda_1)$, $y = (m_2, \lambda_2)$, $z = (m_3, \lambda_3)$. La relation $x + y = y + x$ est bien évidente. Les autres relations sont vérifiées l'une après l'autre, en vertu des relations (2.1)-(2.4). Par exemple la relation $(x + y) + z = x + (y + z)$ est vraie si

$$\begin{aligned}&\gamma_2((\lambda_1) + (\lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)) + \gamma_2((\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_3) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3))\\ &\quad = \gamma_2((\lambda_1) + (\lambda_2 + \lambda_3) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)) + \gamma_2((\lambda_2) + (\lambda_3) - (\lambda_2 + \lambda_3))\end{aligned}$$

qui est une conséquence de (2.4) avec $k'_1 = 1 = k'_2$, $k'_3 = -1 = k'_4$,

$$n_1 = (\lambda_1) + (\lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2), \qquad n_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_3) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$
$$n_3 = (\lambda_1) + (\lambda_2 + \lambda_3) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \quad \text{et} \quad n_4 = (\lambda_2) + (\lambda_3) - (\lambda_2 + \lambda_3);$$

$\left(\text{noter que } n_j \in \mathrm{N}_0 \text{ et } \sum_{j=1}^{4} k'_j n_j = 0\right)$.

Vérifions quelques autres relations, par exemple (3), (5) et (6) pour montrer comment (2.1)-(2.4) interviennent. On a

$$\begin{aligned}x(y + z) &= (m_1, \lambda_1)\,(m_2 + m_3 + \gamma_2(\lambda_2, \lambda_3),\ \lambda_2 + \lambda_3)\\ &= (m_1\lambda_2 + m_1\lambda_3 + \lambda_1 m_2 + \lambda_1 m_3 + \lambda_1\gamma_2(\lambda_2, \lambda_3) - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3),\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}xy + xz &= (m_1\lambda_2 + \lambda_1 m_2 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2),\ \lambda_1\lambda_2)\\ &\quad + (m_1\lambda_3 + \lambda_1 m_3 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_3),\ \lambda_1\lambda_3)\\ &= (m_1\lambda_2 + m_1\lambda_3 + \lambda_1 m_2 + \lambda_1 m_3 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_3)\\ &\quad + \gamma_2(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3),\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3).\end{aligned}$$

Les deux sont égaux si

$$\lambda_1\gamma_2(\lambda_2, \lambda_3) - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2+\lambda_3) = -\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_3) + \gamma_2(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3)$$

qui est une conséquence de (2.2) [noter que $(\lambda_1)(\lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3)$]. On voit directement que la relation $(xy)z = x(yz)$ est une conséquence de (2,1).

Vérifions $(kx)y = k(xy)$. On a

$$\begin{aligned}(kx)y &= (km_1+\gamma_2(k, \lambda_1), k\lambda_1)(m_2, \lambda_2)\\ &= (km_1\lambda_2 + k\lambda_1 m_2 + \gamma_2(k, \lambda_1)\lambda_2 - \gamma_1(k\lambda_1, \lambda_2), k\lambda_1\lambda_2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}k(xy) &= k(m_1\lambda_2 + \lambda_1 m_2 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2)\\ &= (km_1\lambda_2 + k\lambda_1 m_2 - k\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) + \gamma_2(k, \lambda_1\lambda_2), k\lambda_1\lambda_2),\end{aligned}$$

Les deux sont égaux si

$$\gamma_2(k, \lambda_1)\lambda_2 - \gamma_1(k\lambda_1, \lambda_2) = -k\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) + \gamma_2(k, \lambda_1\lambda_2)$$

qui est une conséquence de (2.3) [noter que $(k, \lambda_1)(\lambda_2) = (k, \lambda_1\lambda_2)$]. De cette façon on peut vérifier toutes les autres relations. On voit que l'élément (0, 0) est l'élément zéro de E_f, et l'élément $(\gamma_1(1, 1), 1)$ est l'élément unité de E_f (car $\gamma_1(\lambda, 1) = \lambda\gamma(1, 1)$ et $\gamma_1(1, \lambda) = \gamma_1(1, 1)\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ grâce à (2.1)). Les homomorphismes $\alpha : M \to E_f$ et $\beta : E_f \to \Lambda$ donnés par $\alpha m = (m, 0)$ et $\beta(m, \lambda) = \lambda$, montrent que (E_f, β) est une extension spéciale de Λ avec un noyau isomorphe à M. (Observons que cette extension induit sur le noyau la structure de Λ-bimodule donnée sur M, car $(m_1, \lambda_1)(m_2, 0) = (\lambda_1 m_2, 0)$ et $(m_2, 0)(m_1, \lambda_1) = (m_2\lambda_1, 0)$).

On a montré qu'à chaque 2-cocycle f correspond une extension spéciale (E_f, β), De plus, deux 2-cocycles cohomologues donnent deux extensions équivalentes. En effet, soit $f' = f + \delta g$, où g est une 1-cochaîne. Soit $(E_{f'}, \beta')$ l'extension qui correspond à f'. Soit $\psi : \Lambda \to M$ la restriction de g à Λ. Alors l'application $\varphi : E_f \to E_{f'}$ définie par $\varphi(m, \lambda) = (m + \psi(\lambda), \lambda)$, $m \in M$, $\lambda \in \Lambda$, est l'isomorphisme nécessaire pour montrer que (E_f, β) et $(E_{f'}, \beta')$ sont équivalents. On a

$$\begin{aligned}\varphi\Big(\sum_i k_i(m_i, \lambda_i)\Big) &= \varphi\Big(\sum k_i m_i + \gamma_2(n), \sum k_i\lambda_i\Big)\\ &= \Big(\sum k_i m_i + \gamma_2(n) + \psi\Big(\sum k_i\lambda_i\Big), \sum k_i\lambda_i\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_i k_i\varphi(m_i, \lambda_i) &= \sum k_i(m_i + \psi(\lambda_i), \lambda_i)\\ &= \Big(\sum k_i m_i + \sum_i k_i\psi(\lambda_i) + \gamma'_2(n), \sum k_i\lambda_i\Big),\end{aligned}$$

où $n = \sum_i k_i(\lambda_i) - \sum_i (k_i\lambda_i)$ et $\gamma'_2 : N_0 \to M$ est la restriction de f' à N_0.

On veut prouver que

$$\gamma_2(n) + \psi\left(\sum k_i\lambda_i\right) = \sum_i k_i\psi(\lambda_i) + \gamma'_2(n),$$

mais cela résulte du fait que

$$\begin{aligned}\gamma'_2(n) - \gamma_2(n) &= \delta g(n)\\ &= -gd_1(n)\\ &= -\sum_i k_i g(\lambda_i) + g\left(\sum_i k_i\lambda_i\right)\\ &= -\sum_i k_i\psi(\lambda_i) + \psi\left(\sum_i k_i\lambda_i\right).\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\varphi[(m_1, \lambda_1)(m_2, \lambda_2)] &= \varphi(m_1\lambda_2 + \lambda_1 m_2 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2)\\ &= (m_1\lambda_2 + \lambda_1 m_2 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) + \psi(\lambda_1\lambda_2), \lambda_1\lambda_2)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(m_1, \lambda_1)\varphi(m_2, \lambda_2) &= (m_1 + \psi(\lambda_1), \lambda_1)(m_2 + \psi(\lambda_2), \lambda_2)\\ &= (m_1\lambda_2 + \lambda_1 m_2 + \psi(\lambda_1)\lambda_2 + \lambda_1\psi(\lambda_2) - \gamma'_1(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1\lambda_2),\end{aligned}$$

où $\gamma'_1 : \Lambda \times \Lambda \to M$ est la restriction de f' à $\Lambda \times \Lambda$. On veut prouver que

$$-\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) + \psi(\lambda_1, \lambda_2) = \psi(\lambda_1)\lambda_2 + \lambda_1\psi(\lambda_2) - \gamma'_1(\lambda_1, \lambda_2),$$

mais cela résulte du fait que

$$\begin{aligned}\gamma'_1(\lambda_1, \lambda_2) - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) &= \delta g(\lambda_1 \otimes \lambda_2)\\ &= \lambda_1\psi(\lambda_2) - \psi(\lambda_1\lambda_2) + \psi(\lambda_1)\lambda_2.\end{aligned}$$

Il est facile de voir que φ est injectif et surjectif et applique l'élément unité de E_f sur l'élément unité de $E_{f'}$.

Inversement, soit $\beta : E \to \Lambda$ une extension spéciale de Λ ayant pour noyau le Λ-module M. Soit $\rho : \Lambda \to E$ une application (ensembliste) telle que $\beta\rho =$ identité, et que $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 1$.

Définissons deux applications (ensemblistes) $\gamma_1 : \Lambda \times \Lambda \to M$ et $\gamma_2 : N_0 \to M$ par les relations

$$\begin{aligned}\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) &= \rho(\lambda_1\lambda_2) - \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2),\\ \gamma_2(n) &= \sum_i k_i\rho(\lambda_i),\end{aligned}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_i \in \Lambda$, $n = \sum_i k_i(\lambda_i) \in N_0 \left(\text{avec} \sum_i k_i\lambda_i = 0\right)$.

On vérifie facilement que γ_1 et γ_2 satisfont aux relations (2.1)-(2.4) et donc définissent un 2-cocycle.

On a établi le

THÉORÈME 4. — *Soit* Λ *une* K-*algèbre et soit* M *un* Λ-*bimodule. Alors il existe une correspondance bijective naturelle entre le* K-*module de cohomologie* $H^2(\Lambda, M)$ *et l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions spéciales de* Λ *avec noyau* M *qui induisent sur* M *la structure donnée de* Λ-*bimodule.*

On peut même définir directement une structure de K-module sur l'ensemble des classes d'équivalence des extensions spéciales et montrer que ce K-module est isomorphe au K-module $H^2(\Lambda, M)$ (*cf.* Hochschild [2]).

3. COMPARAISON DES DEUX COHOMOLOGIES ET DE Ext.

On est maintenant en mesure de comparer les trois modules de cohomologie d'une K-algèbre Λ à coefficients dans un Λ-bimodule M;

(i) les K-modules de cohomologie définis par Hochschild, c'est-à-dire en utilisant le complexe standard [1, IX, 6] même dans le cas où Λ n'est pas K-projective; on les notera $\mathrm{Hoch}^n(\Lambda, M)$;

(ii) les K-modules $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ définis dans [1]; et

(iii) les K-modules de cohomologie d'une algèbre définis ici; on les notera $H^n(\Lambda, M)$.

Soit $(\overline{\mathcal{B}}(U), \bar{\eta})$ le complexe sur Λ construit au chapitre II (§ 2), où $(U, \Lambda, \varepsilon)$ est l'objet universel de la catégorie $\mathcal{C}_1$ défini au chapitre II (§ 1). $\overline{\mathcal{B}}(U)$ est un Λ^e-module *libre*. Soit (R, ε') une résolution projective (et acyclique) du Λ^e-module Λ. Alors il existe un Λ^e-homomorphisme $\pi : \overline{\mathcal{B}}(U) \to R$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{B}}(U) & \xrightarrow{\bar{\eta}} & \Lambda \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ R & \xrightarrow[\varepsilon']{} & \Lambda \end{array}$$

soit commutatif. Deux tels homomorphismes sont *homotopes*. On a donc un homomorphisme bien déterminé

$$\psi : \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \to H^n(\Lambda, M) \qquad (n \geqq 0);$$

ψ commute avec les « connecting homomorphismes », car si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte de Λ-bimodules, le diagramme suivant est commutatif;

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(R, M') & \to & \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(R, M) & \to & \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(R, M'') \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\overline{\mathcal{B}}(U), M') & \to & \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\overline{\mathcal{B}}(U), M) & \to & \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\overline{\mathcal{B}}(U), M'') \to 0, \end{array}$$

les lignes horizontales étant exactes.

Soit $(\mathcal{B}(\Lambda), \eta')$ le complexe standard sur Λ défini dans [1, IX, 6]. Ce complexe coïncide avec le complexe $\mathcal{B}(U)$ défini dans le chapitre I (§ 1) lorsque $U = \Lambda$ (d étant nul sur Λ). $\mathcal{B}(\Lambda)$ est un complexe acyclique sur le Λ^e-module Λ, mais pas nécessairement Λ^e-projectif (parce que Λ n'est pas supposé K-projectif). Alors il existe un Λ^e-homomorphisme $\varkappa : R \to \mathcal{B}(\Lambda)$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varepsilon'} & \Lambda \\ {\scriptstyle\varkappa}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathcal{B}(\Lambda) & \xrightarrow[\eta']{} & \Lambda \end{array}$$

soit commutatif. Deux tels homomorphismes sont *homotopes*. On a donc un homomorphisme bien déterminé

$$\varphi : \mathrm{Hoch}^n(\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \qquad (n \geqq 0).$$

On a ainsi deux homomorphismes

$$\mathrm{Hoch}^n(\Lambda, M) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \xrightarrow{\psi} H^n(\Lambda, M) \qquad (n \geqq 0).$$

L'homomorphisme $\psi\varphi$: $\mathrm{Hoch}^n(\Lambda, M) \to H^n(\Lambda, M)$ ($n \geqq 0$) est naturel et l'on peut l'obtenir directement aussi. En effet, l'application naturelle $\mathcal{B}(U) \to \mathcal{B}(\Lambda)$ induit un Λ^e-homomorphisme $\tau : \overline{\mathcal{B}}(U) \to \mathcal{B}(\Lambda)$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{B}}(U) & \xrightarrow{\bar\eta} & \Lambda \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathcal{B}(\Lambda) & \xrightarrow[\eta']{} & \Lambda \end{array}$$

et le K-homomorphisme $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{B}(\Lambda), M) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\overline{\mathcal{B}}(U), M)$ déduit de τ est celui qui définit $\psi\varphi$.

On sait, d'après les calculs du paragraphe 1, que φ et ψ sont des isomorphismes pour $n = 0$ et 1. On va montrer que pour $n = 2$, φ et ψ sont des monomorphismes.

Démonstration du fait que ψ est un monomorphisme. — Soit

$$0 \to M \to I \to N \to 0$$

une suite exacte de Λ^e-modules, où I est Λ^e-injectif. Comme $\{H^n(\Lambda, \quad)\}$ et $\{\mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, \quad)\}$ sont des ∂-foncteurs et ψ est un homomorphisme qui commute avec les « connecting homomorphismes », on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots \to & \mathrm{Ext}^{n-1}_{\Lambda^e}(\Lambda, N) & \to & \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, M) & \to & \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, I) & \to & \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, N) & \to & \mathrm{Ext}^{n+1}_{\Lambda^e}(\Lambda, M) & \to \dots, \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots \to & H^{n-1}(\Lambda, N) & \to & H^n(\Lambda, M) & \longrightarrow & H^n(\Lambda, I) & \longrightarrow & H^n(\Lambda, N) & \longrightarrow & H^{n+1}(\Lambda, M) & \to \dots, \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes. On sait que $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda, I) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1(\Lambda, \quad) \cong H^1(\Lambda, \quad)$. On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Ext}^1_{\Lambda^e}(\Lambda, N) & \xrightarrow{\mathrm{iso}} & \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) & \to 0 \\ & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{iso}} & & \downarrow{\scriptstyle(\psi)} & \\ 0 \longrightarrow & H^1(\Lambda, N) & \to & H^2(\Lambda, M), & \end{array}$$

où les suites horizontales sont exactes. Comme $H^1(\Lambda, N) \to H^2(\Lambda, M)$ est un monomorphisme, on voit tout de suite que

$$\psi : \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \to H^2(\Lambda, M)$$

est un monomorphisme. Montrons par un exemple que ce monomorphisme n'est pas nécessairement un isomorphisme.

Exemple. — Soit $K = Z$, l'anneau des entiers. Soit $M = Z_2 = Z/2Z$ et soit $\Lambda = Z_2$ aussi. On observe que $\Lambda^e = Z_2 \otimes_Z Z_2 \simeq Z_2$ et donc $\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) = 0$; mais $H^2(\Lambda, M) \neq 0$, parce qu'il existe une extension non triviale (Z_4, β) de $\Lambda = Z_2$ avec noyau $M = Z_2$ donnée par la suite exacte

$$0 \to Z_2 \xrightarrow{\alpha} Z_4 \xrightarrow{\beta} Z_2 \to 0,$$

où

$$\alpha(0) = 0 \qquad \alpha(1) = \dot{2}, \qquad \beta(0) = \beta(\dot{2}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta(\dot{1}) = \beta(\dot{3}) = 1,$$

(0 et 1 sont les deux éléments de Z_2 et 0, $\dot{1}$, $\dot{2}$, $\dot{3}$ sont les quatre éléments de Z_4). $M = Z_2$ est isomorphe comme Λ-module au noyau de β qui est un homomorphisme surjectif d'algèbres. Le produit de deux éléments du noyau de β est zéro : $0 . \dot{2} = \dot{2} . 0 = 0$ et $\dot{2} . \dot{2} = 0$.

Démonstration du fait que φ est un monomorphisme. — Montrons maintenant que $\psi\varphi : \mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \to H^2(\Lambda, M)$ est un monomorphisme, ce qui impliquera que

$$\varphi : \mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$$

est un monomorphisme. Pour le démontrer on utilise le Λ^e-homomorphisme

$$\tau : \overline{\mathcal{B}}(U) \to \mathcal{B}(\Lambda)$$

et le K-homomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{B}(\Lambda), M) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\overline{\mathcal{B}}(U), M)$$

déduit de τ. Il suffit de démontrer que si l'image d'une 2-cochaîne f du complexe $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{B}(\Lambda), M)$ dans le complexe $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\overline{\mathcal{B}}(U), M)$ est un cobord, alors f est un cobord.

L'image de f dans le complexe $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\overline{\mathcal{B}}(U), M) = \sum_n \mathrm{Hom}(U^n, M)$ est une 2-cochaîne f' qui est bien déterminée par deux applications (ensemblistes)

$$\gamma_1 : \Lambda \times \Lambda \to M$$
$$\gamma_2 : N_0 \qquad \to M.$$

Il est bien évident que $\gamma_2 = 0$. Alors f' est un cobord si et seulement s'il existe une application (ensembliste) $g : \Lambda \to M$ telle que

$$\delta g(\lambda_1, \lambda_2) = \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 g(\lambda_2) - g(\lambda_1 \lambda_2) + g(\lambda_1)\lambda_2$$

et

$$\delta g(n) = \gamma_2(n) = -\sum_i k_i g(\lambda_i),$$

où $n = \sum_i k_i(\lambda_i)$ avec $\sum_i k_i \lambda_i = 0$, λ_1, λ_2, $\lambda_i \in \Lambda$, $k_i \in K$.

Puisque $\gamma_2 = 0$, la seconde relation donne la condition suivante :

$$\sum_i k_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum_i k_i g(\lambda_i) = 0.$$

Cette condition implique que l'application $g : \Lambda \to M$ est K-linéaire. Aussi

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = f'(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 g(\lambda_2) - g(\lambda_1 \lambda_2) + g(\lambda_1)\lambda_2 = \delta g(\lambda_1, \lambda_2);$$

donc f est un cobord si et seulement si son image f' est un cobord. On a montré que $\varphi\psi : \mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \to H^2(\Lambda, M)$ est un monomorphisme.

On peut interpréter les extensions (E, β) qui correspondent aux éléments de $\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M)$. Si (E_f, β) est l'extension qui correspond au 2-cocycle f du complexe $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathcal{B}(\Lambda), M)$, l'application $\rho : \Lambda \to E_f$ donnée par $\lambda \to (0, \lambda)$ est K-linéaire car

$$\sum_i k_i(0, \lambda_i) = \left(0, \sum_i k_i \lambda_i\right) \qquad \text{puisque} \quad \gamma_2 = 0.$$

De plus, $\beta\rho =$ identité. Ainsi les extensions (E, β) qui correspondent aux éléments de $\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M)$ sont celles pour lesquelles il existe un relèvement K-linéaire de β.

On va montrer par les exemples suivants que les trois K-modules $\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M)$, $\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ et $H^2(\Lambda, M)$ sont, en général, différents, et les homomorphismes φ et ψ (pour $n = 2$) sont donc des monomorphismes propres.

Exemples. — Soit $K = Z$, l'anneau des entiers naturels. Soit $\Gamma = Z + iZ (i^2 = 0)$, l'anneau des nombres duaux. Γ est un groupe abélien avec 1 et i comme éléments de base, et avec la multiplication donnée par

$$(p + iq)(p' + iq') = pp' + i(pq' + qp') \qquad (p, q, p', q' \in Z).$$

En particulier, $i^2 = 0$ et $pi = ip$, pour tout $p \in Z$. Soit $i(2Z)$ l'idéal de Γ qui se compose des éléments de la forme $i.2p$, $p \in Z$. Soit

$$\Lambda = \Gamma / i(2Z) = Z + iZ_2, \qquad \text{où} \quad Z_2 = Z/(2Z),$$

$(2Z)$ étant l'idéal des entiers pairs de Z. Alors Λ est une K-algèbre avec les relations $i^2 = 0$, $pi = ip$ et $2i = 0$.

Un Λ-bimodule M est un groupe abélien muni de deux endomorphismes $m \to im$ et $m \to mi$, $m \in M$ tels que

$$i(im) = 0 = (mi)i,$$
$$2(im) = 0 = 2(mi),$$

et

$$i(mi) = (im)i.$$

Calculons les trois groupes $\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M)$, $\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ et $H^2(\Lambda, M)$.

Hoch$^2(\Lambda, M)$. — Soit $f \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda \otimes \Lambda, M)$ un 2-cocycle. $\Lambda \otimes \Lambda$ est engendré comme groupe abélien par quatre éléments, $1 \otimes 1$, $1 \otimes i$, $i \otimes 1$ et $i \otimes i$. Il suffit donc de connaître les valeurs de f sur ces quatre éléments pour déterminer le cocycle f. On a :

$$\begin{aligned}&\delta f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\\ &\quad = \lambda_1 f(\lambda_2, \lambda_3) - f(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3) + f(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) - f(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_3 = 0 \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda).\end{aligned}$$

Si l'on substitue à λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs 1 ou i, on obtient

$$f(1, i) = f(1, 1)i, \qquad f(i, 1) = if(1, 1) \qquad \text{et} \qquad if(i, i) = f(i, i)i.$$

De plus, $2f(i, i) = f(2i, i) = 0$. On pose alors $f(1, 1) = m_0$, $f(i, i) = m_1$, et l'on voit qu'un 2-cocycle est déterminé par un couple (m_0, m_1); m_0, $m_1 \in M$ tel que $im_1 = m_1 i$ et $2m_1 = 0$. Le groupe des 2-cocycles est donc isomorphe au groupe abélien $M \oplus M_1$ où M_1 est le sous-groupe de M formé des éléments $m_1 \in M$ tels que $im_1 = m_1 i$ et $2m_1 = 0$.

Si f est un 2-cobord, on a

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 g(\lambda_2) - g(\lambda_1\lambda_2) + g(\lambda_1)\lambda_2,$$

où $g \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda, M)$ est une 1-cochaîne. On a

$$f(1, 1) = g(1), \qquad f(1, i) = g(1)i, \qquad f(i, 1) = ig(1) \qquad \text{et} \qquad f(i, i) = ig(i) + g(i)i.$$

On observe que $g(2i) = 2g(i) = 0$. Alors le groupe des 2-cobords est isomorphe au groupe abélien $M \oplus M'$, où M' est le sous-groupe de M formé des éléments de la forme $im' + m'i$, $m' \in M$ tel que $2m' = 0$. On observe que M' est un sous-groupe de M_1.

On a donc

$$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) = (M \oplus M_1)/(M \oplus M') \simeq M_1/M'.$$

$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M)$ *est isomorphe au sous-groupe de* M *formé des éléments* m_1 *tels que* $im_1 = m_1 i$ *et* $2m_1 = 0$, *divisé par le sous-groupe des* m_1 *de la forme* $im' + m'i$; $m' \in M$ *tel que* $2m' = 0$.

Ext$^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$. — Construisons une Λ^e-résolution libre et acyclique du Λ^e-module Λ. D'abord on a la suite exacte de Λ^e-modules :

$$0 \to I \to \Lambda^e \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0,$$

où $\varepsilon(\lambda_1 \otimes \lambda_2) = \lambda_1\lambda_2$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, et I est le noyau de ε. I est engendré comme Λ^e-module par les éléments de la forme $\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda$; $\lambda \in \Lambda$. Pour $\lambda = p \in Z$,

$$\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda = 0,$$

et pour $\lambda = i \in iZ_2$,

$$\lambda \otimes 1 - 1 \otimes \lambda = i \otimes 1 - 1 \otimes i;$$

donc I est engendré par un seul élément $i \otimes 1 - 1 \otimes i$.

On construit une suite exacte de Λ^e-modules

$$0 \to J \to \Lambda^e \xrightarrow{d_1} I \to 0,$$

où d_1 applique l'élément unité $1 \otimes 1$ de Λ^e sur $i \otimes 1 - 1 \otimes i$, et où J est le noyau de d_1. Observons que Λ^e est engendré comme groupe abélien par quatre éléments $1 \otimes 1$, $1 \otimes i$, $i \otimes 1$, $i \otimes i$; dans l'homomorphisme d_1,

$$\begin{aligned} 1 \otimes 1 &\to i \otimes 1 - 1 \otimes i, \\ 1 \otimes i &\to i \otimes i, \\ i \otimes 1 &\to -i \otimes i, \\ i \otimes i &\to 0; \end{aligned}$$

par suite $2 \otimes 1 = 1 \otimes 2$, $1 \otimes i + i \otimes 1$, $1 \otimes i - i \otimes 1$, $i \otimes i$ sont des éléments qui engendrent J comme groupe abélien. Comme
$1 \otimes i - i \otimes 1 = 1 \otimes i + i \otimes 1 - 2i \otimes 1 = 1 \otimes i + i \otimes 1$ et $i \otimes i = (i \otimes 1)(1 \otimes i - i \otimes 1)$,
J est engendré comme Λ^e-module par deux éléments $2 \otimes 1$ et $1 \otimes i + i \otimes 1$.

En composant les deux suites exactes ci-dessus, on obtient une suite exacte de Λ^e-modules :

$$0 \to J \to \Lambda^e \xrightarrow{d_1} \Lambda^e \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0,$$

où J est engendré par les éléments $2 \otimes 1$ et $1 \otimes i + i \otimes 1$. Cette suite exacte nous suffit pour calculer $\operatorname{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$. On a

$$\operatorname{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda^e, M) = \operatorname{Coker}[\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e, M) \to \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, M)],$$

où $\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e, M) \to \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, M)$ est l'homomorphisme induit par l'inclusion $J \to \Lambda^e$. Comme J est engendré par deux éléments $2 \otimes 1$ et $1 \otimes i + i \otimes 1$, un élément $f \in \operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, M)$ est bien déterminé par les valeurs $f(1 \otimes i + i \otimes 1) = m_1$ et $f(2 \otimes 1) = m_2$ (disons). Les éléments $2 \otimes 1$ et $1 \otimes i + i \otimes 1$ satisfont aux relations

$$(i \otimes 1)(2 \otimes 1) = 0, \qquad (1 \otimes i)(2 \otimes 1) = 0, \qquad (1 \otimes i - i \otimes 1)(1 \otimes i - i \otimes 1) = 0$$

et

$$2(1 \otimes i + i \otimes 1) = 0,$$

les autres relations étant conséquences de ces quatre relations. Ainsi un élément f de $\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, M)$ est bien déterminé par un couple (m_1, m_2); $m_1, m_2 \in M$ tel que $im_1 = m_1 i$, $2m_1 = 0$ et $im_2 = 0 = m_2 i$. $\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(J, M)$ est donc isomorphe au groupe abélien $M_1 \oplus M_2$ où M_1 se compose des éléments $m_1 \in M$ tels que $im_1 = m_1 i$ et $2m_1 = 0$, et M_2 se compose des éléments $m_2 \in M$ tels que $im_2 = 0 = m_2 i$. Pour que f provienne d'un élément de $\operatorname{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e, M)$, il faut et il suffit que

$$m_1 = f(i \otimes 1 + 1 \otimes i) = (i \otimes 1 + 1 \otimes i) f(1 \otimes 1) = im' + m'i$$

et

$$m_2 = f(2 \otimes 1) = 2f(1 \otimes 1) = 2m',$$

où $m' = f(1 \otimes 1) \in M$. Alors

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e, M) \to \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(J, M))$$

est isomorphe au sous-groupe N de $M_1 \oplus M_2$ formé des éléments de la forme $(im' + m'i, 2m')$. On a

$$\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \cong (M_1 \oplus M_2)/N.$$

$Ext^2{}_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ est isomorphe au groupe des couples (m_1, m_2); $m_1, m_2 \in M$ tels que $im_1 = m_1 i$, $2m_1 = 0$ et $im_2 = 0 = m_2 i$, divisé par le sous-groupe des éléments de la forme $(im' + m'i, 2m')$.

L'injection $\varphi : \mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \to \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ est définie en associant à chaque m_1 (tel que $im_1 = m_1 i$, $2m_1 = 0$) le couple $(m_1, 0)$.

$H^2(\Lambda, M)$. — D'après le théorème 3, il suffit de construire une résolution libre et acyclique de l'anneau Λ. Soit $U_0 = \Gamma = Z + iZ$ et $\varepsilon : U_0 \to \Lambda$ l'homomorphisme canonique $\Gamma \to \Gamma/i(2Z)$. Soit $U_1 = Z$ et soit $d_1 : U_1 \to U_0$ l'homomorphisme de groupes abéliens donné par $1 \to 2i$. On a donc une suite de groupes abéliens :

$$0 \to U_1 \xrightarrow{d_1} U_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda \to 0,$$

où ε est un homomorphisme d'anneaux. U_0 est un Z-module libre avec 1 et i comme éléments de base, et U_1 est un Z-module libre avec 1 comme élément de base. Soit $u \in U_0$ et soient v, $v' \in U_1$. On définit

$$uv = d_1^{-1}[u(d_1 v)]; \qquad vu = d_1^{-1}[(d_1 v)\,u]; \qquad vv' = 0.$$

L'algèbre $U = U_0 \oplus U_1$ est une algèbre différentielle graduée et l'on a obtenu une résolution libre et acyclique $(U, \Lambda, \varepsilon)$ de Λ. Soit X_0 l'ensemble $\{1, i\}$ et soit X_1 l'ensemble $\{1\}$.

Soit $f \in \mathrm{Hom}\,(U_0 \otimes U_0, M) \oplus \mathrm{Hom}\,(U_1, M)$ une 2-cochaîne. On voit que f est bien déterminé par deux applications ensemblistes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: X_0 \times X_0 \to M \\ \gamma_2 &: X_1 \quad\;\;\;\; \to M. \end{aligned}$$

Le cobord δf est un élément de

$$\mathrm{Hom}\,(U_0 \otimes U_0 \otimes U_0, M) \oplus \mathrm{Hom}\,(U_0 \otimes U_1, M) \oplus \mathrm{Hom}\,(U_1 \otimes U_0, M).$$

On a les formules :

$$\begin{aligned} \delta f[u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3] &= (\varepsilon u_1) f[u_2 \,|\, u_3] - f[u_1 u_2 \,|\, u_3] + f[u_1 \,|\, u_2 u_3] \\ &\quad - f[u_1 \,|\, u_2]\,(\varepsilon u_3) \qquad (u_1, u_2, u_3 \in U_0); \\ \delta f[u \,|\, v] &= f[u \,|\, dv] + (\varepsilon u) f[u] - f[uv] \qquad (u \in U_0,\ v \in U_1); \\ \delta f[v \,|\, u] &= -f[dv \,|\, u] + f[vu] - f[v]\,(\varepsilon u). \end{aligned}$$

Soit f un cocycle. On substitue à u_1, u_2, u_3 la valeur 1 ou i, dans la première relation (avec $\delta f = 0$) et l'on obtient les relations :

$$\gamma_1(i, 1) = i\gamma_1(1, 1), \qquad \gamma_1(1, i) = \gamma_1(1, 1)\,i, \qquad i\gamma_1(i, i) = \gamma_1(i, i)\,i.$$

La seconde relation (avec $\delta f = 0$) donne pour $u = 1$, $v = 1$

$$f[1 \mid 2i] + f[1] - f[1] = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad 2\gamma_1(1, i) = 0.$$

Elle donne pour $u = i$, $v = 1$:

$$2\gamma_1(i, i) = -i\gamma_2(1) = i\gamma_2(1),$$

puisque $2im = 0$ pour tout $m \in M$. De même, la troisième relation (avec $\delta f = 0$) donne des relations :

$$2\gamma_1(i, 1) = 0 \qquad \text{et} \qquad 2\gamma_1(i, i) = \gamma_2(1)\, i.$$

Si l'on écrit $\gamma_1(1, 1) = m_0$, $\gamma_1(i, i) = m_1$ et $\gamma_2(1) = m_2$, on a les relations

$$im_1 = m_1 i, \qquad 2(m_0 i) = 0 = 2(im_0), \qquad \text{et} \qquad 2m_1 = im_2 = m_2 i.$$

Les relations $2(m_0 i) = 0 = 2(im_0)$ sont valables pour tous les éléments de M (par définition). Le groupe abélien des 2-cocycles est donc isomorphe au sous-groupe de $M \oplus M \oplus M$ qui se compose des éléments (m_0, m_1, m_2); $m_0, m_1, m_2 \in M$, tels que $im_1 = m_1 i$ et $2m_1 = im_2 = m_2 i$.

Si $f = \delta g$ où $g \in \mathrm{Hom}(U_0, M)$, on a

$$\begin{aligned} &f[u_1 \mid u_2] = (\varepsilon u_1)\, g[u_2] - g[u_1 u_2] + g[u_1]\,(\varepsilon u_2);\\ &f[v] \qquad = -g[dv]\\ &(u_1, u_2 \in U_0, \; v \in U_1). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\gamma_1(1, 1) = g(1), \qquad \gamma_1(1, i) = g(1) i, \qquad \gamma(i, 1) = ig(1),\\ &\gamma_1(i, i) = ig(i) + g(i) i, \qquad \gamma_2(1) = -g[2i] = -2g(i) \end{aligned}$$

et l'on a

$$m_0 = g(1), \qquad m_1 = ig(i) + g(i)\, i \qquad \text{et} \qquad m_2 = -2g(i).$$

Écrivant $-g(i) = m'$, on a

$$m_1 = -im' - m'i = im' + m'i \qquad \text{et} \qquad m_2 = 2m'.$$

Le groupe abélien de 2-cobords est isomorphe au sous-groupe de $M \oplus M \oplus M$ qui se compose des éléments (m_0, m_1, m_2) tels que $m_1 = im' + m'i$, $m_2 = 2m'$; $m' \in M$.

Finalement $H^2(\Lambda, M)$ *est isomorphe au groupe abélien des couples* (m_1, m_2); $m_1, m_2 \in M$ *tels que* $im_1 = m_1 i$ *et* $2m_1 = im_2 = m_2 i$, *divisé par le sous-groupe des* (m_1, m_2) *de la forme* $m_1 = im' + m'i$ *et* $m_2 = 2m'$.

L'injection $\psi : \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \to H^2(\Lambda, M)$ est définie par $(m_1, m_2) \to (m_1, m_2)$.

Exemple 1. — Soit $M = Z_2$ un Λ-bimodule avec $im = 0 = mi$ pour tout $m \in M$. On voit aussitôt que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \simeq Z_2,\\ &\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \simeq Z_2 \oplus Z_2,\\ &H^2(\Lambda, M) \simeq Z_2 \oplus Z_2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \ncong \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \cong H^2(\Lambda, M).$$

Exemple 2. — Soit $M = Z_4$ un Λ-bimodule avec $im = mi = 2m$.

Les éléments de Z_4 qui satisfont aux relations $im = mi$ et $2m = 0$ sont 0 et 2. Parmi ces deux éléments, 0 est le seul élément de la forme $im' + m'i$. (En effet, $im' + m'i = 2m' + 2m' = 0$). On a donc :

$$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \cong Z_2.$$

Les couples (m_1, m_2); $m_1, m_2 \in M$ qui satisfont aux relations $im_1 = 0 = m_1 i$, $im_2 = m_2 i$ et $2m_2 = 0$ sont $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(2, 2)$. Parmi ces éléments, $(0, 0)$ et $(0, 2)$ sont ceux de la forme $(im' + m'i, 2m')$. On a donc :

$$\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \cong Z_2.$$

Les couples (m_1, m_2); $m_1, m_2 \in M$ qui satisfont aux relations $im_1 = m_1 i$ et $2m_1 = im_2 = m_2 i$ sont ceux tels que $2(m_1 - m_2) = 0$. Ceux qui sont de la forme $m_1 = im' + m'i$ et $m_2 = 2m'$ sont les couples $(0, 2m')$. Le groupe quotient est un groupe cyclique de quatre éléments, engendré, par exemple, par la classe de $(1, 1)$. On a donc :

$$H^2(\Lambda, M) \cong Z_4.$$

Dans cet exemple, on a :

$$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \cong \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \ncong H^2(\Lambda, M).$$

Exemple 3. — Soit $M = Z_2 \oplus Z_4$, la somme directe des Λ-bimodules Z_2 et Z_4 des Exemples 1 et 2. Dans cet exemple :

$$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \cong Z_2 \oplus Z_2,$$
$$\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \cong Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_2,$$
$$H^2(\Lambda, M) \cong Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_4$$

et

$$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M) \ncong \mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M) \ncong H^2(\Lambda, M).$$

$\mathrm{Hoch}^2(\Lambda, M)$ est un groupe de 4 éléments, $\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda, M)$ est un groupe de 8 éléments et $H^2(\Lambda, M)$ est un groupe de 16 éléments.

CHAPITRE IV.

1. Les bimultiplications d'une algèbre.

Soit A une K-algèbre n'ayant pas nécessairement d'élément unité. On définit, d'après Hoschschild [2] et Mac Lane [4], une *bimultiplication* de la K-algèbre A comme un couple d'applications $a \to \sigma a$, $a \to a\sigma$ de A dans lui-même qui satisfont aux relations suivantes :

(1.1) $\sigma(a+b)=\sigma a+\sigma b;\quad (a+b)\sigma=a\sigma+b\sigma,$

(1.2) $\sigma(ab)=(\sigma a)b,\quad (ab)\sigma=a(b\sigma),$

(1.3) $\sigma(ka)=k(\sigma a),\quad (ka)\sigma=k(a\sigma),$

(1.4) $a(\sigma b)=(a\sigma)b$

pour tous a, $b\in A$, et $k\in K$.

La somme $\sigma+\tau$ et le produit $\sigma\tau$ de deux bimultiplications σ et τ sont définis par les relations :

(1.5) $(\sigma+\tau)a=\sigma a+\tau a;\quad a(\sigma+\tau)=a\sigma+a\tau,$

(1.6) $(\sigma\tau)a=\sigma(\tau a);\quad a(\sigma\tau)=(a\sigma)\tau.$

Si k est un élément de K et σ est une bimultiplication de A, le produit $k\sigma$ est défini par les relations :

(1.7) $(k\sigma)a=k(\sigma a);\quad a(k\sigma)=k(a\sigma).$

Il est évident que $\sigma+\tau$, $\sigma\tau$ et $k\sigma$ sont des bimultiplications de A; avec ces opérations l'ensemble de toutes les bimultiplications de A forme une K-algèbre (avec élément unité) qu'on note M_A.

Chaque élément $c\in A$ induit une bimultiplication μ_c définie par les relations :

(1.8) $\mu_c a=ca;\quad a\mu_c=ac\quad (a\in A),$

qu'on appelle une bimultiplication intérieure de A. L'application $\mu : A\to M_A$ est un homomorphisme de K-algèbres, et si A possède un élément unité, on a $\mu(1)=1$. Comme :

(1.9) $\sigma\mu_c=\mu_{\sigma c},\quad \mu_c\sigma=\mu_{c\sigma},\quad k\mu_c=\mu_{kc},$

l'image μA de cet homomorphisme est un idéal bilatère de la K-algèbre M_A.

L'algèbre quotient $P_A=M_A/\mu A$ est une K-algèbre (avec élément unité) qu'on appelle l'algèbre des bimultiplications extérieures, ou bien l'algèbre des classes de bimultiplications de A. Le noyau de μ est un idéal bilatère C_A de l'algèbre A; $c\in C_A$ signifie que $ca=0=ac$ pour tout $a\in A$. On appelle C_A le *bicentre* de A (Hoschschild [2] l'appelle le *nucleus* de A). On a donc une suite exacte de K-algèbres :

(1.10) $0\to C_A\xrightarrow{\eta} A\xrightarrow{\mu} M_A\xrightarrow{\zeta} P_A\to 0,$

où η, μ et ζ sont des K-homomorphismes d'algèbres.

Remarque. — Si A possède un élément unité, d'après (1.2) toutes les bimultiplications de A sont intérieures, $C_A=0$, $P_A=0$.

Observons que C_A est un P_A-module à gauche et à droite par les opérations $c\to\sigma c$ et $c\to c\sigma$, $c\in C$, $\sigma\in M_A$; car σc et $c\sigma$ ne dépendent pas du choix de l'élément σ dans la classe de P_A; mais C_A n'est pas nécessairement un P_A-bimodule.

Deux bimultiplications σ et τ sont dites permutables si $\sigma(a\tau)=(\sigma a)\tau$ et $\tau(a\sigma)=(\tau a)\sigma$ pour tout $a\in A$. Il est bien évident que si σ et τ sont permutables, $k\sigma$ et $k'\tau$ le sont aussi, où $k, k'\in K$. D'après (1.2), σ et une bimultiplication intérieure sont permutables; donc on peut parler de deux bimultiplications extérieures permutables. En particulier σ est auto-permutable si $\sigma(a\sigma)=(\sigma a)\sigma$ pour tout $a\in A$.

Soit A une K-algèbre n'ayant pas nécessairement d'élément unité, et Λ une K-algèbre (avec élément unité). Une extension de Λ avec noyau A est une suite exacte de K-algèbres :

$$(1.11)\qquad 0\to A\xrightarrow{\alpha} E\xrightarrow{\beta}\Lambda\to 0,$$

où E est une K-algèbre (avec élément unité) et β est un homomorphisme (unitaire) de K-algèbres, i. e. $\beta(1)=1$. Comme αA est un idéal bilatère de la K-algèbre E, l'application qui associe à chaque élément $e\in E$ la bimultiplication intérieure de E définie par e donne un homomorphisme (unitaire) d'algèbres $\nu : E\to M_A$; de plus deux bimultiplications quelconques de l'image de ν sont permutables. Comme l'image de αA par ν est la sous-algèbre des bimultiplications intérieures de A, ν induit un homomorphisme (unitaire) de K-algèbres :

$$(1.12)\qquad \theta : \Lambda\to P_A,$$

tel que deux éléments quelconques de $\theta\Lambda$ soient permutables. On exprime cette propriété de permutabilité de deux éléments quelconques de $\theta\Lambda$ en disant, d'après Hochschild [2], que θ est un homomorphisme *régulier*.

Donnons-nous deux K-algèbres A et Λ (A n'ayant pas nécessairement d'élément unité et Λ ayant un élément unité) et un homomorphisme (unitaire) régulier $\theta : \Lambda\to P_A$; le problème d'extension consiste à chercher une K-algèbre E (avec élément unité) et des homomorphismes α et β (β unitaire) tels que la suite (1.11) soit exacte et que l'homomorphisme $\Lambda\to P_A$ induit par (1.11) soit l'homomorphisme θ donné. Deux extensions E et E′ (relatives à un même θ) sont équivalentes s'il existe un K-homomorphisme d'algèbres $\varphi : E\to E'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[dd, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & \Lambda \arrow[r] & 0 \\ & & E' \arrow[ur, "\beta'"'] & & \end{tikzcd}$$

La commutativité de ce diagramme implique que φ est un isomorphisme.

On a remarqué que C_A est un P_A-module à gauche et à droite. Si $\theta : \Lambda\to P_A$ est un homomorphisme régulier, C_A est un Λ-bimodule par les opérations :

$$(1.13)\qquad \lambda c=(\theta\lambda)c,\qquad c\lambda=c(\theta\lambda)\qquad (c\in C_A,\ \lambda\in\Lambda).$$

Si A est une K-algèbre telle que $A^2=0$, on a $C_A=A$, $M_A=P_A$ et l'on est dans le cas du chapitre III (§ 2).

2. L'obstruction.

Supposons donnés une K-algèbre A (n'ayant pas nécessairement d'élément unité), une K-algèbre Λ (avec élément unité) et un homomorphisme (unitaire) régulier $\theta : \Lambda \to P_A$ qui définit comme on vient de le voir une structure de Λ-bimodule sur le bicentre C_A. On se propose d'associer à θ une classe de cohomologie de dimension 3 de $H^3(\Lambda, C_A)$ qui sera appelée *l'obstruction* de θ.

Soit $\sigma : \Lambda \to M_A$ une application (ensembliste) telle que $\sigma(\lambda)$ soit un élément de la classe $\theta\lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$. Supposons aussi que $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$, la bimultiplication identique.

Définissons deux applications (ensemblistes) :

$$\gamma_1 : \Lambda \times \Lambda \to A,$$
$$\gamma_2 : N_0 \quad \to A,$$

telles que :

$$\mu\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) = \sigma(\lambda_1\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)\sigma(\lambda_2), \tag{2.1}$$

$$\mu\gamma_2(n) = \sum_i k_i\sigma(\lambda_i), \tag{2.2}$$

où

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_i \in \Lambda, \; n = \sum_i k_i(\lambda_i) \in N_0 \qquad \text{avec} \quad \sum_i k_i\lambda_i = 0$$

et $\mu\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)$, $\mu\gamma_2(n)$ sont les bimultiplications intérieures de A induites par $\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)$ et $\gamma_2(n)$ resp. Les applications γ_1, γ_2 ne sont pas bien déterminées, mais les bimultiplications induites par γ_1, γ_2 sont bien déterminées. Il faut noter que ces applications sont possibles en vertu du fait que θ est un homomorphisme d'algèbres et donc

$$\sigma(\lambda_1\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)\sigma(\lambda_2) \qquad \text{et} \qquad \sum_i k_i\sigma(\lambda_i) - \sigma\left(\sum_i k_i\lambda_i\right) = \sum_i k_i\sigma(\lambda_i)$$

sont des bimultiplications intérieures de A.

Définissons une 3-cochaîne f à valeurs dans C_A par quatre applications (notées par la même lettre f) :

$$\begin{array}{ll} \Lambda \times \Lambda \times \Lambda & \to C_A \\ \Lambda \times N_0 & \to C_A \\ N_0 \times \Lambda & \to C_A \\ N_1 & \to C_A \end{array}$$

qui satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \\ = \sigma(\lambda_1)\gamma_1(\lambda_2, \lambda_3) - \gamma_1(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3) + \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2)\sigma(\lambda_3), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$f(\lambda, n) = \sum_i k_i \gamma_1(\lambda, \lambda_i) + \sigma(\lambda)\gamma_2(n) - \gamma_2(\lambda n), \tag{2.4}$$

$$f(n, \lambda) = -\sum_i k_i \gamma_1(\lambda_i, \lambda) - \gamma_2(n)\sigma(\lambda) + \gamma_2(n\lambda), \tag{2.5}$$

$$f(n') = -\sum_j k'_j \gamma_2(n_j), \tag{2.6}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda, \lambda_i \in \Lambda$, $n = \sum_i k_i(\lambda_i) \in N_0$, $n' = \sum k'_j(n_j) \in N_1$.

Les seconds membres des relations (2.3)-(2.6) ont leurs valeurs dans C_A parce que si l'on applique μ et si l'on calcule leurs valeurs par (2.1) et (2.2) on obtient zéro. On voit d'après les formules du cobord d'une 2-cochaîne au chapitre III (§ 2) que $f = \delta h$, où h est une 2-cochaîne à valeurs dans A, définie par (γ_1, γ_2) avec la différence que A n'est pas un M_A-bimodule.

On appelle la 3-cochaîne f *une* obstruction de θ.

THÉORÈME 5. — *Une obstruction f de θ est un 3-cocycle, et deux obstructions sont cohomologues. Si f est une obstruction de θ, alors un 3-cocycle cohomologue à f est aussi une obstruction de θ.*

Démonstration. — On ne peut pas dire tout de suite que $\delta f = \delta\delta h = 0$, parce que A n'est pas un M_A-bimodule et l'on n'a pas

$$\sigma(\lambda_1)\sigma(\lambda_2) = \sigma(\lambda_1\lambda_2) \qquad \text{et} \qquad \sum_i k_i \sigma(\lambda_i) = \sigma\Big(\sum k_i \lambda_i\Big),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_i \in \Lambda$, $k_i \in K$.

Pour vérifier que $\delta f = 0$ pour huit sortes d'éléments dans les ensembles $\Lambda \times \Lambda \times \Lambda \times \Lambda$, $\Lambda \times \Lambda \times N_0$, $\Lambda \times N_0 \times \Lambda$, $N_0 \times \Lambda \times \Lambda$, $\Lambda \times N_1$, $N_1 \times \Lambda$, $N_0 \times N_0$ et N_2, il faut s'assurer que les termes qui impliquent

$$\sigma(\lambda_1, \lambda_2) - \sigma(\lambda_1)\sigma(\lambda_2) \qquad \text{et} \qquad \sum_i k_i \sigma(\lambda_i) - \sigma\Big(\sum_i k_i \lambda_i\Big)$$

s'annulent; les autres termes s'annuleront comme d'habitude dans l'identité $\delta\delta = 0$.

Par exemple :

$$\delta f(\lambda, \mu, n) = \sigma(\lambda) f(\mu, n) - f(\lambda\mu, n) + f(\lambda, \mu n) - \sum k_i f(\lambda, \mu, \lambda_i),$$

où $\lambda, \mu \in \Lambda$, $n = \sum_i k_i(\lambda_i) \in N_0$. Les termes qui impliquent

$$\sigma(\lambda)\sigma(\mu) - \sigma(\lambda\mu) \qquad \text{et} \qquad \sum_i k_i \sigma(\lambda_i)$$

sont :

$$\sigma(\lambda)\,\sigma(\mu)\,\gamma_2(n) - \sigma(\lambda\mu)\,\gamma_2(n) + \gamma_1(\lambda, \mu)\left(\sum_i k_i\sigma(\lambda_i)\right)$$
$$= - \gamma_1(\lambda, \mu)\,\gamma_2(n) + \gamma_1(\lambda, \mu)\,\gamma_2(n) \qquad \text{par} \quad (3.1) \text{ et } (3.2),$$
$$= 0.$$

Prenons un autre exemple :

$$\delta f(n_1, n_2) = -\sum_i k_i f(\lambda_i, n_2) - \sum_j l_j f(n_1, \mu_j) + f\left(\sum_i k_i(\lambda_i n_2)\right) - f\left(\sum_j l_j(n_1\mu_j)\right),$$

où $n_1 = \sum_i k_i(\lambda_i)$, $n_2 = \sum_j l_j(\mu_j) \in N_0$, λ_i, $\mu_j \in \Lambda$. Les termes qui impliquent

$$\sum_i k_i\sigma(\lambda_i) \qquad \text{et} \qquad \sum_j l_j\sigma(\mu_j)$$

sont

$$-\left(\sum k_i\sigma(\lambda_i)\right)h(n_2) + h(n_1)\left(\sum_j l_j\sigma(\mu_j)\right)$$
$$= - h(n_1)\,h(n_2) + h(n_1)\,h(n_2) \qquad \text{par } (2.1) \text{ et } (2.2),$$
$$= 0.$$

De même on peut vérifier que $\delta f = 0$ dans tous les autres cas. Ainsi f est un 3-cocycle.

Pour montrer que deux obstructions de θ sont cohomologues, notons que f dépend du choix de σ et de $h = (\gamma_1, \gamma_2)$. D'abord on va montrer que si l'on prend une seconde application $\sigma' : \Lambda \to M_\Lambda$ compatible avec $\theta(\sigma'(0) = 0,\ \sigma'(1) = 1)$, on peut choisir h de manière que f reste le même. En effet, $\sigma' - \sigma$ a ses valeurs dans μA, parce que $\sigma'(\lambda) - \sigma(\lambda)$ appartient à la même classe $\theta\lambda$. Écrivons

$$\sigma'(\lambda) = \sigma(\lambda) + \mu\tau(\lambda) \qquad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

On calcule d'après (2.1) et (2.2) que :

$$\sigma'(\lambda_1\lambda_2) - \sigma'(\lambda_1)\,\sigma'(\lambda_2)$$
$$= \mu\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) + \mu\,[\tau(\lambda_1\lambda_2) - \tau(\lambda_1)\,\sigma(\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)\,\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1)\,\tau(\lambda_2)]$$

et

$$\sum_i k_i\sigma'(\lambda_i) = \mu\gamma_2(n) + \mu\left(\sum_i k_i\tau(\lambda_i)\right), \qquad n = \sum_i k_i(\lambda_i) \in N_0.$$

Choisissons $h' = (\gamma'_1, \gamma'_2)$ de façon que :

$$\gamma'_1(\lambda_1, \lambda_2) = \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) + \tau(\lambda_1\lambda_2) - \tau(\lambda_1)\,\sigma(\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)\,\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1)\,\tau(\lambda_2),$$
$$\gamma'_2(n) = \gamma_2(n) + \sum_i k_i\tau(\lambda_i).$$

On voit que $h' = h - \delta\tau$, sauf pour un terme additionnel $-\tau(\lambda_1)\tau(\lambda_2)$ dans la première relation. Grâce à ce terme on vérifie que $\delta h = \delta h'$, de la même façon qu'on a vérifié que $\delta f = 0$. Ainsi l'obstruction définie par σ' et h' est encore f.

De plus, si l'on a choisi $\sigma : \Lambda \to M_A$ une fois pour toutes, et si l'on prend h' au lieu de h tel que $\mu h' = \mu h$, $h' - h = g$ a ses valeurs dans C_A. Inversement si l'on ajoute à h une 2-cochaîne g à valeurs dans C_A, $\mu(h+g)$ reste le même, donc $h' = h + g$ est un bon choix. Si f' est la nouvelle obstruction donnée par h' (et σ) on a :

$$f' = \delta h' = \delta(h+g) = f + \delta g.$$

La démonstration est ainsi achevée.

D'après le théorème 5, la classe de cohomologie ξ_0 de $H^3(\Lambda, C_A)$ est déterminée par f; on l'appelle *l'obstruction* de θ. (Remarquer la différence entre *une obstruction* et l'*obstruction.*)

THÉORÈME 6. — *Un homomorphisme régulier* $\theta : \Lambda \to P_A$ *est induit par une extension si et seulement si l'obstruction* $\xi_0 = 0$.

Démonstration. — Soit :

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} \Lambda \to 0$$

une extension qui induit θ. Soit $\rho : \Lambda \to E$ avec $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 1$ une application (ensembliste) telle que $\beta\rho =$ identité. On prend $\sigma : \Lambda \to M_A$ en composant ρ avec $\nu : E \to M_A$. Alors

$$\gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) = \rho(\lambda_1\lambda_2) - \rho(\lambda_1)\rho(\lambda_2),$$
$$\gamma_2(n) = \sum_i k_i \rho(\lambda_i)$$
$$\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_i \in \Lambda, \; n = \sum_i k_i(\lambda_i) \in N_0\right).$$

Si l'on substitue ces valeurs de γ_1, γ_2 dans (2.3)-(2.6) on trouve $f = 0$.

Inversement, soit $\xi_0 = 0$. D'après ce qui precède, on peut choisir $h = (\gamma_1, \gamma_2)$ de façon que $f = 0$. Définissons une K-algèbre E en prenant l'ensemble des couples (a, λ), $a \in A$, $\lambda \in \Lambda$ avec

$$\sum_i k_i(a_i, \lambda_i) = \left(\sum_i k_i a_i + \gamma_2(n), \; \sum_i k_i\lambda_i\right),$$
$$(a_1, \lambda_1)(a_2, \lambda_2) = (a_1 a_2 + a_1\lambda_2 + \lambda_1 a_2 - \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2), \; \lambda_1\lambda_2),$$

où $n = \sum_i k_i(\lambda_i) - \sum_i (k_i\lambda_i) \in N_0$, λ_1, λ_2, $\lambda_i \in \Lambda$, $k_i \in K$.

Les dix identités dans une algèbre sont vérifiées par ces opérations, parce que $f=0$. On voit que $(0, 0)$ est l'élément zéro de E et $(0, 1)$ est l'élément unité de E (parce que $\rho(1)=1$) et que θ est induit par l'extension :

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} \Lambda \to 0,$$

où $\alpha(a)=(a, 0)$ et $\beta(a, \lambda)=\lambda$, $\alpha \in A$, $\lambda \in \Lambda$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 7. — *S'il existe une extension de* Λ *avec noyau* A *qui induit* $\theta : \Lambda \to P_A$, *alors il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des classes d'équivalence des extensions qui induisent* θ *et le groupe de cohomologie* $H^2(\Lambda, C_A)$, *où le bicentre* C_A *de* A *est considéré comme un* Λ*-bimodule grâce à* θ.

Démonstration. — S'il existe une extension qui induit θ, l'obstruction $\xi_0=0$ et l'on peut choisir $f=0$ dans les équations (2.3)-(2.6), $\sigma : \Lambda \to M_A$ étant déjà fixé une fois pour toutes. Soit g un 2-cocycle à valeurs dans C_A. Si h_0 est une solution des équations (2.3)-(2.6) avec $f=0$, h_0+g est aussi une solution. La correspondance « $h_0+g \leftrightarrow$ la classe de cohomologie de g », donne la correspondance énoncée dans le théorème.

C. Q. F. D.

La correspondance dans le théorème 7 n'est pas canonique parce qu'il faut d'abord choisir une solution $h=h_0$ des équations (2.3)-(2.6) avec $f=0$; une fois qu'on a cette solution h_0, chaque 2-cocycle g à valeurs dans C_A définit une autre solution. On peut donner une autre démonstration qui montre plus clairement la correspondance en question; il suffit de recopier la démonstration de Mac Lane [4], et pour cette raison on ne la donne pas ici.

3. Le théorème d'existence.

Dans cette section on va prouver un théorème qui est une généralisation d'un théorème dû à Mac Lane [4, théorème 8].

THÉORÈME 8. — *Soit* Λ *une* K*-algèbre (avec élément unité) et soit* M *un* Λ*-bimodule. Soit* f *un* 3*-cocyle de* Λ *à coefficients dans* M. *Alors il existe une* K*-algèbre* A *ayant* M *comme bicentre et un homomorphisme régulier de* K*-algèbres* $\theta : \Lambda \to P_A$ *tels que* θ *induise sur* M *la structure de* Λ*-bimodule donnée et que* f *soit une obstruction de* θ.

La démonstration de ce théorème n'est pas différente de celle donnée par Mac Lane, sauf pour quelques points additionnels. Pour donner une image complète de la démonstration et pour pouvoir préciser les points additionnels, on donnera les définitions préliminaires et la construction du module A en détail, mais on ne donnera pas les démonstrations des lemmes sauf pour les choses additionnelles qu'il faut démontrer. On gardera, en général, les notations de Mac Lane pour éviter des confusions.

Soit :

$$L = U_0 + U_0 \otimes_K U_0 + \ldots + U_0 \otimes_K \ldots \otimes_K U_0 + \ldots$$

une K-algèbre où $U_0 = K(\Lambda)$. On écrit $q \to \langle q \rangle$ pour l'application identique de U_0 dans L. Cette application est K-linéaire, mais elle n'est pas multiplicative. On note $\langle q \rangle \otimes \langle r \rangle$ par $\langle q \rangle \langle r \rangle$; $q, r \in U_0$. On identifie $\langle q \rangle \langle 1 \rangle$ et $\langle 1 \rangle \langle q \rangle$ avec $\langle q \rangle$ de sorte que $\langle 1 \rangle$ devient l'élément unité de l'algèbre L (c'est-à-dire on prend le quotient de l'algèbre L par l'idéal engendré par tous les éléments $\langle q \rangle \langle 1 \rangle - \langle q \rangle$ et $\langle 1 \rangle \langle q \rangle - \langle q \rangle$ et l'on note l'algèbre quotient encore par L).

On a deux homomorphismes d'algèbres $S : L \to U_0$ défini par $\langle q \rangle \to q$ et $\varepsilon S : L \to \Lambda$ qui est composé de S et $\varepsilon : U_0 \to \Lambda$. Soient

$$C = \operatorname{Ker}[\varepsilon S : L \to \Lambda], \qquad D = \operatorname{Ker}[S : L \to U_0];$$

C et D sont des idéaux de K-algèbre L avec $L \supset C \supset D$. Comme la suite $U_1 \xrightarrow{\partial} U_0 \xrightarrow{\varepsilon} \Lambda$ est exacte, $C/D \cong \partial U_1$, (on note ∂ la différentielle de U au lieu de d).

Définissons avec Mac Lane

$$P(q, r) = \langle qr \rangle - \langle q \rangle \langle r \rangle \qquad (q, r \in U_0),$$
$$P(q_1, \ldots, q_{2m}) = P(q_1, q_2) \ldots P(q_{2m-1}, q_{2m}) \qquad (m = 1, 2, \ldots, q_i \in U_0),$$
$$P(q_1, \ldots, q_{2m+1}) = P(q_1, \ldots, q_{2m}) \langle q_{2m+1} \rangle \qquad (m = 1, 2, \ldots, q_i \in U_0),$$
$$S(u) = \langle \partial u \rangle \qquad (u \in U_1).$$

On a $S(\partial w) = 0$ pour tout $w \in U_2$.

LEMME 1. — D *est engendré (comme* K*-module) par les éléments* $P(q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \in U_0$ *et* $n = 2, 3, \ldots$, *tandis que* C *est engendré par ces éléments et les éléments* $S(u)$, $u \in U_1$. *Les seules relations entre les générateurs* P *et* S *sont la relation* $S(\partial w) = 0$, *la* K*-linéarité de* $S(u)$ *en* u, *la* K*-multilinéarité de* P *et les relations suivantes :*

$$(3.1) \qquad \begin{cases} P(q_1, \ldots, q_{i-1}, 1, q_{i+1}, \ldots, q_{2m}) = 0 & (1 \leq i \leq 2m), \\ P(q_1, \ldots, q_{i-1}, 1, q_{i+1}, \ldots, q_{2m+1}) = 0 & (1 \leq i \leq 2m), \\ P(q_1, \ldots, q_{2m}, 1) = P(q_1, \ldots, q_{2m}). \end{cases}$$

Comme C et D sont des idéaux de L, la bimultiplication intérieure de L induite par $\langle q \rangle$ est une bimultiplication de C et de D; on la note ρ_q. On a, avec Mac Lane,

$$(3.2) \qquad \rho_{q_0} P(q_1, \ldots, q_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i P(q_0, \ldots, q_i q_{i+1}, \ldots, q_n) + (-1)^n P(q_0, \ldots, q_n),$$

$$(3.3a) \qquad P(q_1, \ldots, q_{2m}) \rho_r = P(q_1, \ldots, q_{2m}, r),$$

$$(3.3b) \qquad P(q_1, \ldots, q_{2m+1}) \rho_r = -P(q_1, \ldots, q_{2m+1}, r) + P(q_1, \ldots, q_{2m}, q_{2m+1} r),$$

$$(3.4) \qquad \rho_q S(u) = -P(q, \partial u),$$

$$(3.5) \qquad S(u) \rho_q = -P(\partial u, q) + S(u, q).$$

Pour q, $r \in U_0$ et $k \in K$,

$$\rho_{q+r} = \rho_q + \rho_r, \qquad \rho_{qr} = \rho_q \rho_r + \mu_{P(q,r)}, \qquad k\rho_q = \rho_{kq} \qquad \text{et} \qquad \rho_1 = 1. \tag{3.6}$$

(noter la relation additionnelle $k\rho_q = \rho_{kq}$).

Dans le théorème 8, Λ, M et f sont donnés. Construisons un K-module :

$$A = (M \oplus U_1 \oplus D)/N,$$

où N est le sous-module engendré par les éléments $f(v) + \partial v$, pour tout $v \in U_2$. (On est obligé de changer ici la notation de Mac Lane parce que K désigne l'anneau de base).

Définissons une application K-linéaire $\psi : A \to C$ par

$$\psi(m + u + d) = S(u) + d \qquad (m \in M,\ u \in U_1,\ d \in D).$$

Lemme 2. — *L'application* ψ *donne une suite exacte de* K-*modules*

$$0 \to M \to A \xrightarrow{\psi} C \to 0.$$

Lemme 3. — *Pour chaque* $q \in U_0$ *un endomorphisme* $a \to \tau_q a$, $(a \in A)$ *de* K-*modules* A *est défini par*

$$\begin{aligned}
\tau_q m &= (\varepsilon q) m \qquad (m \in M),\\
\tau_q u &= f(q \mid u) - P(q, \partial u) + qu \qquad (u \in U_1),\\
\tau_q P(r, s) &= f(q \mid r \mid s) + \rho_q P(r, s) \qquad (r, s \in U_0),\\
\tau_q P(r, s, t) &= f(q \mid r \mid s)(\varepsilon t) + \rho_q P(r, s, t) \qquad (t \in U_0),\\
\tau_q P(r_1, \ldots, r_n) &= \rho_q P(r_1, \ldots, r_n) \qquad (n > 3).
\end{aligned}$$

Ces endomorphismes satisfont aux relations

$$\tau_{q_1+q_2} = \tau_{q_1} + \tau_{q_2}, \qquad k(\tau_q a) = \tau_{kq} a, \qquad \psi(\tau_q a) = \rho_q \psi a,$$

et $\rho_1 = 1$, l'endomorphisme identique, où $k \in K$, $a \in A$.

On peut donc définir un endomorphisme $k\tau_q = \tau_{kq}$.

Lemme 4. — *Pour chaque* $q \in U_0$ *un endomorphisme* $a \to a\tau_q (a \in A)$ *de* K-*modules est défini par :*

$$\begin{aligned}
m\tau_q &= m(\varepsilon q) \qquad (m \in M),\\
u\tau_q &= -f(u \mid q) - P(\partial u, q) + uq \qquad (u \in U_1),\\
d\tau_q &= d\rho_q \qquad (d \in D).
\end{aligned}$$

Ces endomorphismes satisfont aux relations

$$\tau_{q_1+q_2} = \tau_{q_1} + \tau_{q_2}; \qquad k(a\tau_q) = a\tau_{kq}, \qquad \psi(a\tau_q) = (\psi a)\rho_q$$

et $\rho_1 = 1$, où $k \in K$, $a \in A$. On peut donc définir un endomorphisme $k\tau_q = \tau_{kq}$.

Lemme 5. — *Pour tous* q, $r \in U_0$ *et* $a \in A$,

$$(\tau_q a)\tau_r = \tau_q(a\tau_r).$$

Lemme 6. — *Une multiplication dans* A *est définie par*

$$(m+u+d)(m'+u'+d')=\tau_{\partial u}u'+\tau_{\partial u}d'+d\tau_{\partial u'}+dd',$$

où $m, m' \in \mathrm{M}$; $u, u' \in \mathrm{U}_1$; $d' \in \mathrm{D}$, *et* dd' *est le produit dans l'idéal* D. *Pour cette multiplication,* $\psi : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ *est une application multiplicative.*

Lemme 7. — *Pour* $u \in \mathrm{U}_1$ *et* $a \in \mathrm{A}$, $ua = \tau_{\partial u} a$ *et* $au = a\tau_{\partial u}$.

Lemme 8. — *Pour* $q, r \in \mathrm{U}_0$ *et* μ *la bimultiplication intérieure de* A,

$$\tau_{qr} = \tau_q \tau_r + \mu_{\mathrm{P}(q,r)}.$$

Lemme 9. — *Pour* $q \in \mathrm{U}_0$ *et* $a, b \in \mathrm{A}$,

$$\tau_q(ab) = (\tau_q a)b, \qquad (a\tau_q)b = a(\tau_q b), \qquad (ab)\tau_q = a(b\tau_q).$$

Lemme 10. — *La multiplication dans* A *est associative.*

Lemme 11. — A *est une* K-*algèbre,* ψ *est un homomorphisme d'algèbres et la suite de* K-*algèbres*

$$o \to \mathrm{M} \to \mathrm{A} \xrightarrow{\psi} \mathrm{C} \to o$$

est exacte, l'image de M *étant le bicentre de* A.

Pour montrer que A est une K-algèbre, il faut montrer en plus que

$$(ka)b = k(ab) = a(kb) \qquad (a, b \in \mathrm{A},\ k \in \mathrm{K}).$$

Si a (resp. b) est contenu dans M, ka (resp. kb) est contenu dans M, et par le lemme 6, tous les trois membres sont zéro. Si a et b sont dans D, les relations sont satisfaites, car D est une sous-algèbre de la K-algèbre L. Il reste donc à démontrer les égalités lorsque l'un des deux éléments a et b est contenu dans U_1.

Soit $a = u \in \mathrm{U}_1$. Alors

$$(ka)b = (\tau_{k\partial u}b) = (k\tau_{\partial u}b) = k(\tau_{\partial u}b) = k(ab)$$

et

$$a(kb) = \tau_{\partial u}(kb) = k(\tau_{\partial u}b) = k(ab).$$

Si $b \in \mathrm{U}_1$ on démontre les égalités de la même manière.

Lemme 12. — *Pour* $\lambda \in \Lambda$, *la correspondance* $\theta\lambda = \tau_{(\lambda)}$ *induit un homomorphisme régulier de* K-*algèbres*

$$\theta : \Lambda \to \mathrm{P}_{\mathrm{A}}.$$

Pour montrer que θ est K-linéaire, on observe que

$$\theta(k\lambda) = \tau_{(k\lambda)} = \tau_{(k\lambda)-k(\lambda)} + \tau_{k(\lambda)}.$$

Or $(k\lambda) - k(\lambda) \in \operatorname{Ker} \varepsilon$ et donc il existe un élément $u \in U_1$ tel que $\partial u = (k\lambda) - k(\lambda)$, Par le lemme 7 on voit que $\tau_{(k\lambda)-k(\lambda)} = \tau_{\partial u}$ est une bimultiplication intérieure de A. On a donc

$$\begin{aligned} \theta(k\lambda) &\equiv \tau_{k(\lambda)} \quad \text{modulo les bimultiplications intérieures de A,} \\ &\equiv k\tau_{(\lambda)} \quad \text{» \quad » \quad » \quad »,} \\ &\equiv k(\theta\lambda) \quad \text{» \quad » \quad » \quad ».} \end{aligned}$$

Lemme 13. — *Le cocycle f est une obstruction de θ.*

On va démontrer ce lemme en détail. Définissons une application (ensembliste) $\sigma : \Delta \to M_A$ par la relation $\sigma(\lambda) = \tau_{(\lambda)}$, où $\lambda \in \Lambda$ et $(\lambda) \in U_0$. Alors

$$\sigma(\lambda_1\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)\sigma(\lambda_2) = \tau_{(\lambda_1\lambda_2)} - \tau_{(\lambda_1)}\tau_{(\lambda_2)} = \mu P(\lambda_1, \lambda_2) \qquad \text{par le lemme 8,} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

Aussi

$$\sum_i k_i \sigma(\lambda_i) = \sum_i k_i \tau_{(\lambda_i)} = \tau_n = \mu_n,$$

où $n = \sum k_i(\lambda_i) \in N_0 \subset U_0$, $k_i \in K$ et $\lambda_i \in \Lambda$.

Définissons les applications $\gamma_1 : \Lambda \times \Lambda \to A$ et $\gamma_2 : N_0 \to A$ par

$$\begin{aligned} \gamma_1(\lambda_1, \lambda_2) &= P(\lambda_1, \lambda_2) \in D, \\ \gamma_2(n) &= (n) \in U_1. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs de σ et (γ_1, γ_2) dans les seconds membres des relations (2.3)-(2.6) on obtient f. En effet le second membre de (2.3) donne

$$\begin{aligned} &\tau_{(\lambda_1)}P(\lambda_2, \lambda_3) - P(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3) + P(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) - P(\lambda_1, \lambda_2)\tau_{(\lambda_3)} \\ &\quad = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \rho_{(\lambda_1)}P(\lambda_2, \lambda_3) - P(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3) + P(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3) \\ &\qquad\qquad - P(\lambda_1, \lambda_2)\rho_{(\lambda_3)}, \qquad \text{par les lemmes 3 et 4.} \\ &\quad = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ en vertu de la relation (3.2).} \end{aligned}$$

Le second membre de (2.4) donne

$$\begin{aligned} &\sum_i k_i P(\lambda, \lambda_i) + \tau_{(\lambda)} n - \lambda n \\ &\quad = \sum_i k_i P(\lambda, \lambda_i) + f(\lambda, n) - \sum_i k_i P(\lambda, \lambda_i) + \lambda n - \lambda n, \qquad \text{par le lemme 3.} \\ &\quad = f(\lambda, n). \end{aligned}$$

De même, on voit que le second membre de (2.5) donne $f(n, \lambda)$. Enfin le second membre de (2.6) donne

$$-\sum k'_j(n_j) = -\partial n' \equiv f(n') \qquad (\text{modulo N}).$$

Ainsi f est une obstruction de θ.

La démonstration du théorème 8 est achevée.

4. Interprétation de la structure de K-module de H^3.

On peut donner une interprétation de $H^3(\Lambda, M)$ exactement comme dans [2]. On peut définir la somme de deux homomorphismes réguliers $\theta_1 : \Lambda \to P_{A_1}$ et $\theta_2 : \Lambda \to P_{A_2}$ avec un bicentre commun et l'on peut définir le produit d'un homomorphisme régulier $\theta : \Lambda \to P_A$ par un élément $k \in K$. On peut aussi définir un K-isomorphisme entre deux homomorphismes réguliers $\theta_1 : \Lambda \to P_{A_1}$ et $\theta_2 : \Gamma \to P_{A_2}$ avec un bicentre commun. Tout cela se fait comme dans [2]. Si f_1 (resp. f_2) est une obstruction d'un homomorphisme régulier $\theta_1 : \Lambda \to P_{A_1}$ (resp. $\theta_2 : \Lambda \to P_{A_2}$), les algèbres A_1 et A_2 ayant un bicentre commun, on peut montrer sans peine que $f_1 + f_2$ est une obstruction de la somme θ_1 et θ_2. De même si f est une obstruction d'un homomorphisme régulier $\theta : \Lambda \to P_A$, kf est une obstruction de $k\theta$.

Définition. — On dit que deux homomorphismes réguliers $\theta_1 : \Lambda \to P_{A_1}$ et $\theta_2 : \Lambda \to P_{A_2}$ avec un bicentre commun sont *semblables*, s'il existe deux homomorphismes réguliers $\Phi_1 : \Lambda \to P_{B_1}$ et $\Phi_2 : \Lambda \to P_{B_2}$ dont les obstructions sont zéro, tels que l'homomorphisme $\theta_1 + \Phi_1$ soit K-isomorphe à l'homomorphisme $\theta_2 + \Phi_2$ où $\theta_i + \Phi_i (i = 1, 2)$ désigne la somme des homomorphismes θ_i et Φ_1.

Finalement, on a le

Théorème 9. — *L'ensemble des classes de similitude d'homomorphismes réguliers* $\theta : \Lambda \to P_A$, *où* A *est une algèbre quelconque avec bicentre donné* M, *et où* θ *induit sur* M *la structure de* Λ-*bimodule donné, a la structure d'un* K-*module. L'application qui associe à chaque classe de similitude son obstruction est un* K-*isomorphisme de ce* K-*module sur le* K-*module* $H^3(\Lambda, M)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, Princeton University Press, 1956.

[2] G. Hochschild, *Cohomology and representation of associative algebras* (*Duke Math. G.*, t. 14, 1947, p. 921-948).

[3] S. Mac Lane, *Homologie des anneaux et des modules* (*Colloque de topologie algébrique*, Louvain, 1956, p. 55-80).

[4] S. Mac Lane, *Extensions and obstructions for rings* (*Illinois J. Math.*, t. 2, 1958, p. 316-345).

[5] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique* (*Tôhoku Math. J.*, Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221).