ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SPIROS P. ZERVOS

Aspects modernes de la localisation des zéros des polynômes d'une variable

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 77, n° 4 (1960), p. 303-410

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_4_303_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_4_303_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ASPECTS MODERNES DE LA LOCALISATION DES ZÉROS DES POLYNOMES D'UNE VARIABLE ⁽¹⁾

PAR M. SPIROS P. ZERVOS.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	304

CHAPITRE I.

SUR LA LOCALISATION DES ZÉROS DES SÉRIES.

A'. Préliminaires. Extension aux séries de certains théorèmes pour les polynomes. Généralité propre de certains résultats.....	309
B'. La méthode des fonctions décroissantes; applications.....	340

CHAPITRE II.

LOCALISATION DES ZÉROS DES POLYNOMES DANS UN CORPS COMMUTATIF DE CARACTÉRISTIQUE QUELCONQUE.

A'. Définition et propriétés des d. e.....	351
B'. Applications à la localisation des zéros des polynomes d'une variable, dans K_m ...	357

⁽¹⁾ *Thèse Sc. math.*, Paris, 1960.

CHAPITRE III.

RAPPORTS DE LA LOCALISATION AVEC LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

	Pages.
A'. Quelques remarques sur les espaces vectoriels topologiques.....	369
B'. Rapports de la localisation avec les espaces vectoriels.....	371

CHAPITRE IV.

LOCALISATION DANS UN CORPS COMMUTATIF, ALGÈBRIQUEMENT CLOS, DE CARACTÉRISTIQUE ZÉRO.

APPENDICE I.....	400
APPENDICE II.....	403
APPENDICE III.....	404
BIBLIOGRAPHIE.....	407

INTRODUCTION.

Depuis les contributions fondamentales de Cauchy ([26]; [36], p. 10; [68], p. 95); Gauss ([113]; [36], p. 38; [68]; [118], p. 5) et Laguerre, on enregistre un très grand nombre de travaux sur la « *localisation* » (ou, « *géométrie* ») *des zéros des polynômes d'une variable complexe*. On peut se renseigner sur bon nombre d'entre eux dans les livres de Dieudonné [36], Marden [68] et Walsh [118], et dans l'exposé, plus ancien mais particulièrement suggestif, de Van Vleck [113]. D'autre part, des faits récents tels que la découverte en 1955 par Biernacki [12] d'une réciproque du théorème célèbre de Gauss-Lucas, montrent que le sujet est encore loin d'être épuisé; tandis que, la démonstration du théorème d'Erdős-Lax que De Bruijn [31] a donnée en 1947 (et ses autres résultats dans [31], en rapport avec le travail plus ancien de Schaake et Van der Corput [105]) offre un exemple frappant de ce que l'application des résultats classiques de la localisation à l'Analyse des polynômes peut encore donner.

Les problèmes de la localisation ayant été toujours considérés comme des problèmes pour une classe spéciale de fonctions analytiques, les polynômes, le sujet ne semble pas avoir attiré les feux de la mathématique moderne. (voir les préfaces de [36], [68], [118] et le traitement très classique d'un problème de localisation dans BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. VIII (2^e éd.), p. 97, ex. 1.) Il n'a donc pas été question, dans le passé, de chercher la généralité propre (au sens moderne du terme) des problèmes et des résultats de la loca-

lisation; sans que, pour autant, des faits liés à une telle recherche ne se présentent pas d'eux-mêmes, déguisés sous la forme d'« élémentarité », de « simplicité », d'« élégance », etc., comme dans tant d'autres cas de la mathématique classique; faits, qui avaient fini par créer la quasi certitude intuitive que certaines méthodes « élémentaires » sont liées à la « nature » même du sujet (*voir* les préfaces de [36], [68] et [118]). Tendance heureuse qui, inaugurée par les démonstrations de Cauchy et Gauss, a trouvé une source d'inspiration particulièrement féconde dans les travaux de Paul Montel ([78]-[88]). A côté de ses propres découvertes bien connues sur le sujet, c'est l'esprit de ses démonstrations « algébriques » qui a pénétré la localisation tout entière et préparé la voie pour la recherche de la généralité propre des choses, pour l'« algébrisation » du sujet, si j'ose dire.

En nous proposant ce but, nous devons tenir compte du fait que la localisation formait plutôt un riche ensemble de problèmes, de résultats et de méthodes qu'une « théorie »; ceci nous a obligé à choisir certaines notions et certains théorèmes, aptes à être généralisés de façon utile, comme notions et théorèmes fondamentaux.

Chacun des chapitres I-IV du présent travail correspond à un élément de ce choix.

Voici certains des résultats auxquels ce choix nous a conduit : (les besoins de l'exposition nous conduisent ci-dessous à placer les chapitres dans l'ordre II, III, IV et I).

Chap. II. Les théorèmes fondamentaux de Gauss-Lucas et de Laguerre-Walsh, *convenablement énoncés s'étendent à tout corps commutatif* (§ 7).

Quand le corps K en question est *algébriquement clos*, cela entraîne, par exemple, les résultats suivants :

a. Si la caractéristique de K est 0 (respectivement $p > 0$), tout polynome $\sum_{i=0}^n a_{\nu_i} z^{\nu_i}$ [resp. avec $\nu_i \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$] vérifie le théorème d'Allardice-Ballicu (th. 5, § 8), qui est un résultat fondamental pour le problème de Landau-Montel; la méthode de démonstration est encore celle de Fejér-Montel.

b. Si la caractéristique de K est 0 (resp. $p > 0$), tous les résultats fondamentaux pour les polynômes apolaires et leurs applications restent valables (théorèmes de Grace, Szegö, Walsh, Marden, etc.), y compris le théorème célèbre de Grace-Heawood et (essentiellement) le résultat remarquable de Biernacki cité au début (resp. pourvu que les polynômes considérés soient de degré $< p$) (§ 9).

Ces généralisations sont devenues possibles grâce à l'introduction de la notion de « d. e. ». (en rapport avec la notion auxiliaire de « s. e. »), notion complètement neuve, nous semble-t-il. Elle généralise pour *tout corps* (non nécessai-

rement commutatif) F la notion de cercle « projectif » (« cercle » ou « domaine circulaire » au sens de la théorie des fonctions d'une variable complexe), plus précisément, pour tout *corps projectif* $F_\omega = F \cup \{\omega\}$; nous démontrons que, *les transformations « homographiques » de F_ω transforment les d. e. en d. e.* Cela généralise le théorème classique pour la conservation des cercles de $\mathbf{C}_\omega$ par les transformations homographiques ($\mathbf{C}$ = plan complexe) (A' du chapitre II).

Chap. III. *a.* Après avoir étendu, sans difficulté, aux espaces vectoriels topologiques sur un *corps ordonné* K_0 plusieurs propriétés des espaces vectoriels topologiques sur le corps des réels $\mathbf{R}$ (A' et Appendice III), on est conduit à définir les « d. e. » d'un espace K_0 -préhilbertien séparé (K_0 étant ordonné *et pythagoricien*). Dans l'isomorphisme canonique de K_0^2 et $K_0(i)$, les d. e. de l'espace K_0^2 s'appliquent biunivoquement sur les d. e. du *corps* $K_0(i)$; on peut donc les identifier.

Notons « d. c. » la généralisation naturelle de la sphère « projective » dans $K_0^n \cup \{\omega\}$ (qui coïncide avec cette sphère même dans $\mathbf{R}^n \cup \{\omega\}$), considérée dans le paragraphe 13; notre théorème 2*b* affirme alors que, *dans $K_0^n \cup \{\omega\}$, où K_0 est supposé maximal tout d. e. de frontière non vide est un d. c.* Cela résout complètement le problème de la caractérisation « concrète » des d. e. de frontière non vide (resp., de la caractérisation algébricotopologique des d. c.) de $K_0^n \cup \{\omega\}$.

Note. — Walsh ([118], p. 62) avait, par une autre voie, démontré un résultat indirectement équivalent au cas particulier $K_0 = \mathbf{R}$ et $n = 2$ du théorème 2*b*.

Rappelons que (selon Artin et O. Schreier), tout corps commutatif *algébriquement clos, de caractéristique 0*, K peut être mis sous la forme $K = K_0(i)$, K_0 étant *ordonné maximal* et i vérifiant l'équation $x^2 = -1$. La conjonction de ce fait et de notre théorème 2*b* entraîne que, *les d. e. (par rapport à la K_0 -convexité), de frontière non vide, du corps topologique $K = K_0(i)$ sont tout simplement les d. c. de K_0^2 .* Le problème de la caractérisation « concrète » des dits d. e. du corps K est donc complètement résolu.

b. Les succès répétés de l'interprétation mécanique de Gauss (*voir*, par exemple, [118]), considérée traditionnellement comme liée à la « nature » même du sujet, demandaient leur explication « structurale ». Or, celle-ci est presque immédiate, pourvu qu'on se débarrasse des hypothèses superflues et qu'on utilise un langage approprié (§ 3-5). Parmi les généralisations inévitables que cela entraîne, signalons celles (immédiates) des théorèmes bien connus de Jensen et de Bôcher.

Chap. IV. L'ordre du corps *ordonné maximal* K_0 et ses propriétés algébriques suffisent pour démontrer tout théorème usuel de la géométrie et de la

trigonométrie *élémentaires* planes, dans lequel il n'est pas question de comparer les longueurs de deux arcs de cercles des rayons *différents*, ou la longueur d'un arc de cercle et d'un segment rectiligne. Cette remarque simple nous a conduit à une définition des angles dans K_0^z (§ 1); les « nombres » trigonométriques de nouveaux angles vérifient toutes les formules additives usuelles. Cela permet de définir « $\arg z$ » avec la propriété $\arg(z_1^{q_1} z_2^{q_2}) = q_1 \arg z_1 + q_2 \arg z_2$ ($q_i \in \mathbb{Q}$), qui exprime un isomorphisme fondamental.

On est en mesure maintenant d'étendre à $K_0(i)$ la théorie « directe » des fonctions *rationnelles*, y compris le *principe de l'argument*, de Cauchy, et le *théorème de Rouché*.

La conjonction de ces faits, du chapitre II et du paragraphe 7 du chapitre I *étend*, d'un seul coup, *la plupart des résultats connus de la localisation à tout corps commutatif, algébriquement clos, de caractéristique 0* (voir § 6).

Chap. I a. *Toute inégalité « suffisamment générale » pour la minoration des valeurs absolues de tous les zéros d'un polynôme s'étend, a priori, aux séries de Taylor* (§ 5-6). Cela s'applique, en particulier, à toutes les inégalités de notre connaissance.

On arrive à ce fait utile (qui, dans cette généralité, ne semble pas avoir été remarqué auparavant) par deux voies différentes, indépendantes l'une de l'autre :

1° par des considérations ayant trait à la théorie des fonctions d'une variable réelle et établissant divers faits simples (nouveaux, nous semble-t-il) pour des fonctions éventuellement discontinues (§ 1-4);

2° par des considérations topologiques sur certains espaces fonctionnels (§ 5).

b. Il arrive, en mathématiques, que les nouveaux points de vue conduisent à des méthodes de démonstration nouvelles; c'est ainsi que l'introduction de la *méthode « des fonctions décroissantes »* nous permet de *démontrer, d'une façon simple et uniforme, toutes les inégalités « explicites »* (pour la minoration, etc.) de notre connaissance. Des faits apparemment très divers acquièrent ainsi un lien intrinsèque.

La méthode permet, en plus, *d'obtenir autant d'inégalités nouvelles qu'on veut*, pour la minoration des valeurs absolues de tous les zéros d'une série de Taylor (B', chap. I).

Note. — Le souci d'utilité et de justice a rendu l'historique du chapitre I quelque peu étendu (§ 8). La littérature systématique sur le sujet est, en effet, là-dessus imparfaite; par exemple, elle passe sous silence des résultats importants et généraux contenus dans Kojima ([52], 1917) et Carmichael ([24], 1917), tandis qu'elle cite abondamment des résultats particuliers de ces auteurs, y

compris le théorème de « Carmichael-Mason » ([23], 1914), cas particulier d'un théorème de M. Petrovitch ([99], 1901), ayant fait l'objet d'un article bien connu de Landau ([63 a], 1905), etc.; et les démonstrations de plusieurs inégalités classiques continuent à être basées sur des artifices plus ou moins particuliers, tandis qu'il existe depuis plusieurs années une méthode simple et générale pour leur démonstration, celle de Markovitch ([70], 1939; [71], 1948).

Si la localisation a été l'objet de cette recherche, les remarques qui ont conduit à sa généralisation ont été quelquefois, si j'ose dire, plus générales que l'objet. Plusieurs de ces remarques sont groupées dans les parties A' des chapitres I, III et IV, l'Appendice III, et dans les paragraphes 1-4 du chapitre IV. Citons, à titre d'exemple, la validité, *dans un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique 0*, du principe du module maximum pour les fonctions algébriques (chap. IV) et du théorème déjà cité d'Erdős-Lax pour les polynômes (chap. IV).

La présente thèse est dédiée à la mémoire de Panayiotis Zervos, dont un travail [122] a attiré mon intérêt sur les racines des équations algébriques, dès mon entrée à l'Université d'Athènes (1949). Ce fut ensuite un théorème de Paul Montel (exposé dans le livre [30] de M. N. Criticos) qui m'a orienté vers la localisation. L'enseignement ensembliste et d'inspiration philosophique de P. Zervos ([123], [123 b]) et les exigences de rigueur de M. N. Criticos, en même temps que ses encouragements et ses conseils, ont beaucoup influencé le début de mes recherches. Celles-ci ont enfin trouvé leur source d'inspiration principale, d'une part dans les travaux de Paul Montel, et de l'autre, dans l'œuvre et l'enseignement de l'École abstraite de Paris.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les spécialistes de la localisation qui ont bien voulu me renseigner sur leurs travaux; la correspondance avec M. Marcovitch, en particulier, me fut très utile.

Des remarques de MM. Denjoy et Bouligand ont permis d'améliorer certains points essentiels; je leur adresse mes remerciements respectueux.

Il convient, enfin, de rappeler que plusieurs mathématiciens grecs et, surtout, Th. Varopoulos (récemment décédé) s'étaient occupés auparavant des côtés classiques de la localisation, sous l'influence directe de Paul Montel.

Note. — Au moment où ce manuscrit était prêt pour l'imprimeur j'ai pris connaissance de la théorie des angles dans K_0^2 que Bourbaki venait juste de publier (B. *Algèbre*, chap. 9), théorie évidemment beaucoup plus savante que celle que nous esquissons dans le paragraphe 1 du chapitre IV. Comme, toutefois, cette dernière avait été exposée oralement au Séminaire Dubreil-Pisot, le 9 mars 1959 et comme la partie correspondante de mon manuscrit de thèse était déjà entre les mains de M. Pisot (bien avant la publication du chapitre 9 de B.), j'ai cru pouvoir ne rien changer ci-dessous.

CHAPITRE I.

SUR LA LOCALISATION DES ZÉROS DES SÉRIES.

A'. — **Préliminaires.** Extension aux séries de certains théorèmes pour les polynômes. Généralité propre de certains résultats.

1. SUR LES SÉRIES DES FONCTIONS MONOTONES. — *Terminologie, notations :* $\emptyset$ = ensemble vide; $\mathfrak{P}(E)$ = ensemble des parties de l'ensemble E ; I = intervalle de l'ensemble totalement ordonné E ; si I est un segment d'extrémités a et b , on le désignera, parfois, par $[a, b]$; $]a, b]$ = l'intervalle ouvert à gauche et fermé à droite, de mêmes extrémités; $(a, b[$ = l'un des intervalles $]a, b[$, $[a, b[$, le choix étant implicitement déterminé chaque fois. Fonction croissante = fonction non décroissante; f varie dans le même sens dans I = f est monotone dans I ; les f_ν varient dans le même sens = les f_ν sont soit toutes croissantes, soit toutes décroissantes = les f_ν sont des fonctions monotones de même type. Quand l'ensemble de convergence d'une série de fonctions $I \rightarrow \mathbf{R}$ est un intervalle, on l'appellera « intervalle de convergence de la série ».

($\mathbf{N}$ = ensemble des entiers naturels, $\mathbf{Z}$ = anneau des entiers, $\mathbf{Q}$ = corps des rationnels, $\mathbf{R}$ = corps des réels et $\mathbf{C}$ = corps des complexes).

On a souvent à supposer qu'une série de fonctions $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ converge dans un intervalle (a, b) . Il y a donc intérêt à étudier les deux problèmes distincts suivants pour une famille $(f_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ de fonctions $(a, b) \rightarrow \mathbf{R}$: 1° Trouver des conditions suffisantes pour que l'ensemble de convergence de $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ soit un sous-intervalle de (a, b) . 2° Déterminer cet intervalle par une condition autre que celle d'être le dit ensemble de convergence.

Une solution classique est celle du théorème de Cauchy-Hadamard pour les séries de Taylor (resp. du théorème analogue pour les séries de Dirichlet). On peut aisément généraliser les conditions de ce théorème. Commençons par supposer que I est un intervalle d'un ensemble totalement ordonné quelconque E et que les $f_\nu : I \rightarrow \mathbf{R}$ varient *dans le même sens*. Dans le cas particulier où tous les f_ν sont à valeurs positives, il est évident que l'ensemble de convergence de $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu$ est un *intervalle*; on peut aisément démontrer le même fait dans le cas général; la démonstration repose sur le

LEMME 1. — *Si les points $x_1, x_2 > x_1$ appartiennent à l'ensemble de convergence de $\sum f_\nu$, tout point $\xi \in [x_1, x_2]$ appartient aussi à cet ensemble et la somme de la série en ξ est comprise entre ses sommes en x_1 et en x_2 .*

Démonstration. — Supposons, par exemple, que les f_v sont croissantes. Alors quels que soient m et $n \geq m$,

$$\sum_{v=m}^n f_v(x_1) \leq \sum_{v=m}^n f_v(\xi) \leq \sum_{v=m}^n f_v(x_2).$$

La convergence de la série numérique $\sum_{v=0}^{\infty} f_v(x_1)$ [resp. $\sum_{v=0}^{\infty} f_v(x_2)$] implique que, pour $\varepsilon > 0$ et $m \geq m'_\varepsilon$ (resp. $m \geq m''_\varepsilon$), on ait

$$-\varepsilon < \sum_{v=m}^n f_v(x_1) \quad \left[\text{resp.} \quad \sum_{v=m}^n f_v(x_2) < \varepsilon \right], \quad \text{quel que soit } n \geq m;$$

donc, pour $m \geq \max \{m'_\varepsilon, m''_\varepsilon\}$,

$$-\varepsilon < \sum_{v=m}^n f_v(x_1) \leq \sum_{v=m}^n f_v(\xi) \leq \sum_{v=m}^n f_v(x_2) < \varepsilon,$$

ce qui démontre la convergence de $\sum_{v=0}^{\infty} f_v(\xi)$; l'autre assertion du lemme devient alors évidente.

THÉOREME 1. — Si les $f_v : I \rightarrow \mathbf{R}$ varient dans le même sens, l'ensemble de convergence de $\sum_{v=0}^{\infty} f_v$ est un intervalle $I' \subset I$. Dans le segment $[\gamma, \delta] \subset I$ la convergence de la série est uniforme.

Les cas triviaux ($I' = \emptyset$, I' = un seul point) mis à part, c'est une conséquence immédiate du lemme.

COROLLAIRE 1.1. — *Hypothèse :* les $f_v : I \rightarrow \mathbf{R} (v \in \mathbf{N})$ sont monotones sans varier nécessairement dans le même sens. *Conclusion :* L'ensemble de convergence commutative de $\sum_{v=0}^{\infty} f_v$ est un intervalle $I''' \subset I$ et la convergence de la série est uniforme dans tout segment $[\gamma, \delta] \subset I'''$; I''' est également l'ensemble de convergence absolue de la série.

Démonstration. — Soit A l'ensemble de convergence commutative de la série. L'hypothèse de commutativité entraîne la sommabilité de la famille $(f_v)_{v \in \mathbf{N}}$ en tout point de A . Désignons alors par φ_λ les f_v croissantes et par σ_μ les autres f_v ; l'application du théorème de l'associativité de la somme d'une famille sommable à la décomposition $(\varphi_\lambda) \cup (\sigma_\mu)$ de (f_v) donne $\sum f_v = \sum \varphi_\lambda + \sum \sigma_\mu$, en tout point

de A ; l'application du théorème 1 aux séries du second membre montre que
 1° l'intersection I''' de leurs intervalles de convergence I' et I'' contient A , et
 2° en tout point de I''' $\sum f_v$ converge absolument, donc commutativement.
 D'où, $A = I'''$.

Dans le cas particulier où toutes les f_v sont à valeurs positives, on peut supprimer le terme « commutative » dans la conclusion du corollaire 1.1. D'où, le

COROLLAIRE 1.2. — Soit $(f_v)_{v \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions $I \rightarrow \mathbf{R}_+$. Si $\sum_{v=0}^{\infty} f_v$ converge en deux points $x_1, x_2 > x_1$ sans converger uniformément dans $[x_1, x_2]$ tout entier, il existe des f_v , d'indice v aussi grand qu'on veut, qui ne sont pas monotones dans $[x_1, x_2]$.

Les remarques suivantes sont évidentes :

1. On peut passer aux résultats analogues pour les suites de fonctions $g_v : I \rightarrow \mathbf{R}$, où $g_{v+1} - g_v$ est monotone.

2. Dans le théorème 1 (resp. corollaire 1.1) la fonction $F = I' \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $I''' \rightarrow \mathbf{R}$) définie par $F(x) = \sum f_v(x)$ est monotone (resp. différence de deux fonctions croissantes), donc, quand $E = \mathbf{R}$, intégrable au sens de Riemann dans tout segment $[\gamma, \delta] \subset I'$ (resp. $\subset I'''$), l'intégration pouvant être effectuée terme à terme.

3. Soit E un ensemble totalement ordonné quelconque, muni de la topologie $\mathfrak{T}_0(E)$ (voir chap. III, § 1). Si, dans les hypothèses du théorème 1 (resp. corollaire 1.1), les f_v sont continues, la fonction F définie ci-dessus est continue dans I' (resp. I'''). Les hypothèses spéciales : $I = \mathbf{R}$, $f_v(x) = a_v x^v$ et $I''' = [\gamma, \delta]$ donnent un théorème classique d'Abel.

4. Le théorème I permet de donner au théorème de Fubini ([103], p. 12) la forme suivante : Toute série de fonctions croissantes (resp. décroissantes) peut être dérivée terme à terme dans son ensemble de convergence H sauf, au plus, en un sous-ensemble de mesure nulle de H .

En effet, H est nécessairement un intervalle (éventuellement vide); il n'y a pas besoin de le supposer expressément.

Même remarque pour le dernier exercice du chapitre X de Bourbaki [18]; on peut également supprimer l'hypothèse de la continuité de f , dans cet exercice, seule l'hypothèse de la monotonie de même type des f_v étant essentielle.

5. Soit $(a, b) \subset \mathbf{R}$. 1° Soit $(p_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ une famille de polynômes $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Si tous les p_ν varient dans le même sens dans (a, b) , $\sum p_\nu$ définit une fonction continue dans son intervalle de convergence $(\gamma, \delta) \subset (a, b)$.

2° Si les restrictions des p_ν à (a, b) prennent *seulement* des valeurs positives, et si $\sum p_\nu$ converge en deux points $x_1, x_2 > x_1$ de (a, b) sans qu'il définisse une fonction continue $[x_1, x_2] \rightarrow \mathbf{R}_+$, il existe des p_ν , d'indice ν aussi grand qu'on veut, qui ne sont pas monotones dans $[x_1, x_2]$.

6. La série de fonctions monotones $(a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ la plus générale peut toujours être écrite sous la forme $\pm \sum_{\nu=0}^{\infty} (f_{2\nu} + f_{2\nu+1})$, où les $f_{2\nu}$ sont croissantes et les $f_{2\nu+1}$ décroissantes. Son ensemble de convergence absolue est un intervalle, mais cela n'est plus toujours vrai pour son ensemble de convergence; l'étude de ce dernier pose des problèmes intéressants.

7. Des problèmes se posent même dans le cas où la série est supposée convergente dans un intervalle de $\mathbf{R}$. Par exemple, les fonctions définies par ces séries sont de classe de Baire au plus 2 (puisque elles sont limites des fonctions ayant un ensemble dénombrable des discontinuités), tandis que toute fonction de classe au plus 1 peut être représentée par une telle série (série des polynômes $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, théorèmes de Weierstrass et de Baire); il est donc naturel de se poser les problèmes : 1° Existe-t-il des fonctions de classe 2 qui soient limites des fonctions à variation bornée? Existe-t-il des fonctions de classe 2 qui ne soient pas de telles limites?

8. Soit $(a, b) \subset \mathbf{R}$. Sierpinski a démontré que toute fonction mesurable $(a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ coïncide *presque partout* avec une série de polynômes. Ce résultat fondamental n'est pas toujours applicable à la recherche des zéros d'une fonction discontinue, car il y a des problèmes où l'on ne peut négliger même un seul point; la connaissance d'une suite convenable de fonctions qui convergent *partout* vers la fonction donnée pourrait alors être utile; il y a même des raisons qui rendent particulièrement souhaitable l'*uniformité* de cette convergence (voir § 2-3).

C'est un des rapports des questions considérées ci-dessus avec la recherche et la localisation des zéros des fonctions.

Examinons à présent le problème 2° du début de ce paragraphe, dans le cas où $(a, b) \subset \mathbf{R}$ et les f_ν sont des fonctions croissantes (resp. décroissantes) $(a, b) \rightarrow \mathbf{R}_+$; on supposera que l'intervalle de convergence (γ, δ) est non vide. Alors, trivialement, $\gamma = a$ (resp. $\delta = b$); pour déterminer δ (resp. γ), considérons la fonction croissante (resp. décroissante) $\gamma(x) = \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \sqrt[\nu]{f_\nu(x)}$. Dans le

cas particulier où la monotonie de $\gamma(x)$ est *stricte*, la considération de sa fonction inverse $x(\gamma)$ conduit à $\delta = \sup_{\gamma < 1} x(\gamma)$ [resp. $\gamma = \inf_{\gamma < 1} x(\gamma)$].

Le corollaire 4-1 entraîne la

PROPOSITION 1. — Soit $D \subset \mathbf{C}$ et $(\sigma_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ une famille de fonctions $D \rightarrow \mathbf{C}$. S'il existe une surjection $\varphi : D \rightarrow (a, b) \subset \mathbf{R}$ et une famille $(f_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ de fonctions monotones (qui ne varient pas nécessairement toutes dans le même sens) $f_\nu : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}_+$, telles que pour tout $z \in D$, on ait $|\sigma_\nu(z)| = f_\nu(\varphi(z))$, alors, l'image par φ de l'ensemble de convergence absolue de $\sum \sigma_\nu(z)$ coïncide avec l'intervalle de convergence (γ, δ) de $\sum f_\nu(x)$ et la convergence de $\sum \sigma_\nu(z)$ est uniforme dans tout ensemble dont l'image par φ est un segment contenu dans (γ, δ) .

Applications. — 1. Les séries de Taylor : $\sigma_\nu(z) = a_\nu z^\nu$, $\varphi(z) = |z|$ et $f_\nu(x) = |a_\nu| x^\nu$. On déduit de là le théorème pour les séries de Laurent.

2. Les séries générales de Dirichlet :

$$\sigma_\nu(z) = a_\nu e^{-\lambda_\nu z}, \quad \varphi(z) = \Re(z) \quad \text{et} \quad f_\nu(x) = |a_\nu| e^{-\lambda_\nu x}.$$

2. SUR LES « ZÉROS » DES FONCTIONS DISCONTINUES. — La connaissance d'un zéro d'une fonction *continue* nous renseigne topologiquement sur les valeurs que prend f au voisinage de ce zéro; ce n'est plus nécessairement le cas quand f est *discontinue* en ce zéro. La connaissance des zéros d'une fonction discontinue est donc souvent, considérée isolément, moins intéressante et moins maniable que celle des zéros d'une fonction continue; c'est pourquoi nous introduisons ci-dessous la notion plus générale de *c-zéro* (resp. *d-zéro*) d'une fonction définie dans un espace topologique et prenant des valeurs complexes (resp. réelles). Dans le cas des fonctions continues, les deux notions coïncident avec la notion ordinaire de zéro.

Les c-zéros. — Soit E un espace topologique et soit $f : E \rightarrow \mathbf{C}$.

DÉFINITION 1. — Un point $\zeta \in E$ sera appelé « *c-zéro* » de f , si l'on a $\liminf_{x \rightarrow \zeta} |f(x)| = 0$. Si $\gamma \in \mathbf{C}$, et si $\zeta \in E$ est un *c-zéro* de $f(x) - \gamma$, on dira que f a en ζ la « *c-valeur* » γ .

L'ensemble des points où f prend la même *c-valeur* γ est *fermé* dans E .

Si f est continue au point ζ , elle a une unique *c-valeur*, $f(\zeta)$, en ζ .

Supposons, pour un instant, que E est *compact*. Élargir l'ensemble A des valeurs de f par l'adjonction de ses *c-valeurs* revient alors à considérer la fermeture $\bar{A}$ de A .

Démonstration. — Soit $a \in \overline{A}$. L'image réciproque par f du filtre des voisinages de a est une base de filtre B sur E ; il existe $b \in E$ adhérent à B . Comme tout voisinage U de b rencontre tout ensemble de B , $f(U)$ contient d'éléments aussi proches qu'on veut de a .

D'où, le

THÉOREME (de Weierstrass). — *Si E est compact et si f est bornée, f atteint ses bornes, en tant que c -valeurs.*

Revenons au cas d'un E quelconque et soient $(f_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ une famille de fonctions quelconques $f_\nu : E \rightarrow \mathbf{C}$, P une partie infinie de $\mathbf{N}$; si f_ν possède des c -zéros, ζ_ν sera choisi arbitrairement parmi eux. Avec ces notations, on a le

THÉOREME 2. — *Hypothèses : Tout point de E possède, 1° un système fondamental dénombrable de voisinages, et 2° un voisinage dans lequel la suite $(f_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{C}$.*

Conclusion : Toute valeur d'adhérence $\zeta \in E$ de $(\zeta_\nu)_{\nu \in P}$ est un c -zéro de f .

Démonstration. — L'hypothèse $|f| > \mu > 0$ dans un voisinage U de ζ entraîne que $|f_\nu| > \mu'$ dans U , pour un certain $\mu' \in]0, \mu]$ et pour ν assez grand.

THÉOREME 2 b. — *Hypothèse : 1°; E est localement compact et $(f_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ converge uniformément dans toute partie compacte de E .*

Conclusion : Celle du théorème 2.

Dans le cas particulier où les f_ν sont continues, on peut remplacer, dans le théorème 2 (resp. 2 b) le terme « c -zéro » par « zéro ». 2 b généralise alors la première assertion du théorème suivant de Hurwitz ([68], p. 4) : Soit $(f_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions analytiques d'une variable complexe, convergeant uniformément dans toute partie compacte d'un ensemble ouvert et connexe A vers une fonction f , non identiquement nulle. Alors, 1° toute valeur d'adhérence $\zeta \in A$ d'une suite $(\zeta_\nu)_{\nu \in P}$ annule f ; et 2° si $\zeta' \in A$ et $f(\zeta') = 0$, chaque voisinage assez petit V de ζ' contient un nombre des zéros de f_n égal à la multiplicité du zéro ζ de f , quel que soit $n \geq n_\nu$.

Les d -zéros. — Soient E un espace topologique et $f : E \rightarrow \mathbf{R}$.

DÉFINITION 2. — *Un point $\xi \in E$ sera appelé « d -zéro » de f si l'on a*

$$\liminf_{x \rightarrow \xi} f(x) \limsup_{x \rightarrow \xi} f(x) \leq 0;$$

en d'autres termes, ξ doit être soit un c -zéro de f , soit un point dans tout voisinage duquel f change de signe. Si $\gamma \in \mathbf{R}$ et si $\xi \in E$ est un d -zéro de $f(x) - \gamma$, on dira que f a en ξ la « d -valeur » γ .

L'ensemble des points où f prend la même d -valeur γ est fermé dans E .

Si f est continue au point ζ , elle a une unique d -valeur, $f(\zeta)$, en ζ .

Soit A_1 l'ensemble des c -valeurs de f et A_2 celui des d -valeurs. $A_1 \cup A_2 (= A_2)$ a alors les mêmes bornes que A_1 . D'où la validité du théorème cité « de Weierstrass », aussi pour les d -valeurs.

Supposons, pour un instant, que E est connexe. Alors, si f possède des d -valeurs > 0 et des d -valeurs < 0 , elle a au moins un d -zéro.

Démonstration. — f possède alors des valeurs > 0 et des valeurs < 0 ; donc, quand f n'a pas de d -zéro, on peut définir la partition $E = E_1 \cup E_2$ suivante de E : E_1 (resp. E_2) est la réunion de tous les points x de E tels qu'il existe un voisinage de x dans E , en chaque point duquel on a $f > 0$ (resp. $f < 0$). E_1 et E_2 sont alors des ouverts, ce qui contredit l'hypothèse que E est connexe.

THÉORÈME (de Bolzano). — Si E est connexe et si f prend les d -valeurs α et $\beta > \alpha$, pour chaque élément γ de $[\alpha, \beta]$ il existe au moins un point x de E tel que $f(x)$ prend la d -valeur γ .

Si f est soit partout > 0 , soit partout < 0 , on dira qu'elle « garde un signe constant ».

Considérons les théorèmes 2 et 2 b ; si l'on écrit « d -zéro » au lieu de « c -zéro », ils restent valables. On les appellera resp. « théorème 3 » et « théorème 3 b ».

Des théorèmes 2, 2 b , 3 et 3 b on passe de façon évidente aux résultats analogues pour les séries.

Dans le reste de ce paragraphe, on supposera toujours que $E = (a, b) \subset \mathbf{R}$.

Une fonction strictement monotone f peut atteindre chacune de ses d -valeurs au plus une fois; donc, si f ne garde pas un signe constant dans (a, b) , (a, b) contient exactement un d -zéro de f .

Réciproquement, si f , supposée par exemple strictement croissante, a un d -zéro ξ dans $]a, b[$, on a $f(\xi - \varepsilon) < 0$ et $f(\xi + \varepsilon) > 0$, quel que soit $\varepsilon > 0$ (pourvu que $a < \xi - \varepsilon < \xi + \varepsilon < b$).

La conjonction de cette remarque et des théorèmes 1 et 3 démontrent la

PROPOSITION 2. — Soit $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille de fonctions $(a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ qui varient dans le même sens et dont au moins une est strictement monotone. La fonction

(strictement monotone) définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ dans l'intervalle de convergence (γ, δ) de cette série a les propriétés suivantes : 1° Si, pour n assez grand,

$f_n = \sum_{n=0}^n g_n$ ne garde pas un signe constant dans (γ, δ) , la suite des d -zéros ξ_n des f_n

converge vers un d -zéro de f ; elle converge donc vers le d -zéro de f . 2° Si f

possède un d -zéro ξ (nécessairement unique) et si $\xi \in]\gamma, \delta[$, tout voisinage V de ξ contient un d -zéro, nécessairement unique, de f_n , quel que soit $n \geq n_0(V)$.

On possède donc, dans le cas des fonctions f_v strictement monotones, une extension *complète* du théorème de Hurwitz énoncé pour les d -zéros, (elle s'applique évidemment aux zéros eux-mêmes quand toutes les f_v sont *continues*).

3. LES APPLICATIONS J-H ET LE PREMIER THÉORÈME D'EXTENSION. — Soit E un espace topologique dont tout point possède un système fondamental *dénombrable* de voisinages et soit $(A_v)_{v \in \mathbf{N}}$ une famille de parties de E . On dira que $A \subset E$ est l'« *ensemble d'accumulation* » de $(A_v)_{v \in \mathbf{N}}$, si A est la réunion des points $x \in E$ ayant la propriété suivante : *Chaque voisinage de x rencontre une infinité d'ensembles A_v* . On notera $A = J((A_v))$. C'est la définition de Janiszewski ([16], p. 244), formulée dans sa généralité propre.

Considérons l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ (resp. $\mathcal{F}$) des applications $E \rightarrow \mathbf{C}$, muni de la structure (uniforme) de la convergence dans les ensembles d'une partie $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{P}(E)$ (resp. de la convergence *compacte*). Terminologie : celle de [18] (chap. X).

DÉFINITION. — Une application $\varphi : \mathcal{F}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ [resp. $\mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{P}(E)$] sera appelée « *application J-H* », par rapport à $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathfrak{P}$), si elle a la propriété suivante : *Pour toute suite convergente $(f_v)_{v \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ (resp. $\mathcal{F}$) $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v = f$ implique que $J((\varphi(f_v))) \cap K \subset \varphi(f) \cap K$, quel que soit l'ensemble K de $\mathfrak{S}$ (resp. la partie compacte K de E)*. « J » et « H » veulent rappeler les noms de Janiszewski et de Hurwitz (pour son théorème déjà cité).

La définition ensembliste suivante est parfois utile : Supposons que *le même* ensemble d'indices, $\mathbf{N}$, est *définitivement* choisi pour *toutes* les suites dénombrables (x_v) d'éléments d'un ensemble X . On dira, alors, que $(x_v)_{v \in \mathbf{N}}$ et $(x'_v)_{v \in \mathbf{N}}$ sont « *essentiellement distinctes* », si l'on a $x_v \neq x'_v$ pour une *infinité* de valeurs de v .

DÉFINITION 4. — Si $(f_v)_{v \in \mathbf{N}}$ converge vers f on appellera « *multiplicité relative* à $((f_v), \varphi)$ » de $\xi \in \varphi(f)$ le nombre (fini ou non) des suites *essentiellement distinctes* (ξ_n) de points $\xi_n \in \varphi(f_n)$ qui admettent la valeur d'adhérence ξ .

Ces définitions entraînent que, si, dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ (resp. $\mathcal{F}$) $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v = f$, tout ensemble K de $\mathfrak{S}$ (resp. toute partie compacte K de E) contient un nombre de points de $\varphi(f)$ au moins égal au nombre des suites *essentiellement distinctes* (ξ_n) ($\xi_n \in \varphi(f_n)$) ayant une valeur d'adhérence dans K . Appelons ça « *lemme 2* ».

Moyennant des conditions évidentes, on peut remplacer ci-dessus $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ (resp. $\mathcal{F}$) par une de ses parties.

Faisons correspondre maintenant à chaque application $E \rightarrow \mathbf{C}$ l'ensemble de

ses c - (resp. d -) zéros, et désignons l'application $\mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{P}(E)$ ainsi définie par φ . Alors, si les hypothèses du théorème 2 b (resp. 3 b) sont vérifiées, φ est une J-H application.

APPLICATION. — Soit : E = un cercle ouvert $|z| < l$ de $\mathbf{C}$; $(^1)$ f = fonction quelconque $E \rightarrow \mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$); (f_ν) = famille de fonctions $E \rightarrow \mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$) convergeant uniformément vers f dans toute partie fermée de E ; $\mathbf{C} (^1)$ contient au moins p c - (resp. d -) zéros de f_ν , quel que soit $\nu \geq \nu_0$. $(^2)$

On notera $\zeta_{n1}, \dots, \zeta_{np}$ « les » p plus petits, en valeur absolue, c - (resp. d -) zéros de f_n , avec $|\zeta_{ni}| \leq |\zeta_{n,i+1}|$, en choisissant arbitrairement un nombre suffisant de ζ_{ni} de valeur absolue $|\zeta_{np}|$ parmi les c - (resp. d -) zéros de f_n ayant cette même valeur absolue. Notation : $r_p = \liminf_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{np}|$.

Le lemme 2 entraîne alors la

PROPOSITION 3. — Si $r_p < l$, le cercle fermé $|z| \leq r_p$ contient au moins p c - (resp. d -) zéros de f , dont au moins un est situé sur la circonférence $|z| = r_p$.

COROLLAIRE 3.1. — Si, pour tout $n \geq n_0$, M_n majore les valeurs absolues d'au moins p c - (resp. d -) zéros de f_n et si $\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n < l$, alors, $\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n$ majore les valeurs absolues d'au moins p c - (resp. d -) zéros de f .

EXEMPLE. — f = fonction analytique régulière dans E ; f_n = polynôme-section de degré n de f . Les hypothèses générales sont alors automatiquement vérifiées. La seconde assertion du théorème de Hurwitz permet, dans ce cas, de compléter la proposition 3, pourvu que f ne soit pas identiquement nulle.

PROPOSITION 4. — 1° Si $r_p < l$, le cercle ouvert $|z| < r_p$ contient au plus $p-1$ zéros de f . 2° Dans le cas particulier $p=1$, on peut supprimer l'hypothèse $r_p < l$, à condition de remplacer le cercle considéré par le cercle $|z| < \min\{l, r_1\}$. 3° Quand $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{np}| < l$, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{np}|$ existe.

COROLLAIRE 4.1. — 1° Si μ_n minore $|\zeta_{np}|$ et si $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n < l$, le cercle ouvert $|z| < \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ contient au plus $p-1$ zéros de f . 2° Quand $p=1$, le cercle $|z| < \min\{l, \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n\}$ ne contient aucun zéro de f . 3° Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n < l$, le cercle ouvert $|z| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ contient au plus $p-1$ zéros de f . Quand $p=1$, le cercle $|z| < \min\{l, \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n\}$ ne contient aucun zéro de f .

Le seul point qui reste à démontrer est le 3° de la proposition 4.

$(^1)$ (resp. $\mathbf{R}$).

$(^2)$ E ne contient que de c - (resp. d -) zéros de f , situés sur une suite des circonférences $|z| = l_i (i \in \mathbf{N}^*)$, où $l_i < l_{i+1}$.

Démonstration. — I. Cas $p = 1$: Soit ρ_1 une valeur d'adhérence de $(|\zeta_{n1}|)_{n \geq n_0}$; il existe alors une sous-suite $(|\zeta_{m1}|)_{m \in \mathbb{N}}$ de $(|\zeta_{n1}|)$ qui converge vers ρ_1 . Le théorème de Hurwitz implique donc que $|z| < \rho_1 - \varepsilon$ ne contient *aucun* zéro de f ; l'autre assertion du même théorème implique alors que $|z| < \rho_1 - \varepsilon$ ne contient aucun zéro de f_n , pour $n \geq n_1(\varepsilon)$ (f étant limite uniforme des f_n); donc $\rho_1 = \liminf_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{n1}| (= r_1)$.

Le résultat est également conséquence de la théorie des familles normales.

II. *Cas général* : Supposons le théorème établi pour $p \leq \nu$ et considérons le cas $p = \nu + 1$. Il suffit d'appliquer le même raisonnement à la couronne circulaire $r_\nu - \varepsilon < |z| < \rho_{\nu+1} - \varepsilon$.

REMARQUE. — Le 2° du corollaire 4.1 *étend* (dans le sens indiqué là) *aux séries de Taylor toutes les inégalités connues pour la minoration, en valeur absolue, de tous les zéros d'un polynôme de degré quelconque.*

(*Exemple.* — Le théorème d'Eneström-Kakeya, suivant lequel un polynôme non constant $\sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$, à coefficients positifs vérifiant les inégalités $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ ($\nu = 0, \dots, n-1$) ne s'annule pas dans le cercle $|z| < 1$, conduit au résultat (connu) : Une série $\sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$, $a_\nu \geq a_{\nu+1} \geq 0$ ($\nu \in \mathbb{N}$), non constante, ne s'annule pas dans $|z| < 1$.)

Dans le cas général, cette extension ne semble pas avoir été remarquée auparavant.

L'ensemble des propositions et des corollaires démontrés dans ce paragraphe seront appelés « *premier théorème d'extension* ».

Application. — La validité du théorème de Pellet pour les polynômes implique sa validité pour les séries de Taylor (voir aussi § 5).

4. EXTENSION AUX SÉRIES DU THÉORÈME DE CAUCHY POUR LA « COMPARAISON » DES POLYNÔMES. — DÉFINITION 5. — Si h est une fonction quelconque $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $(a, b) \rightarrow \mathbf{R}$) telle que $h(a) \geq 0$ [resp. $h(b) \geq 0$], on notera $\underline{\xi}(h)$ [resp. $\bar{\xi}(h)$] le nombre suivant : Si $h(x)$ n'a aucun d-zéro, on posera $\underline{\xi}(h) = b$ [resp. $\bar{\xi}(h) = a$]; si non, on appellera $\underline{\xi}(h)$ le plus petit [resp. $\bar{\xi}(h)$ le plus grand] d-zéro de h . Quand il n'y a pas de danger de confusion, on abrégera $\underline{\xi}$ et $\bar{\xi}$ en ξ .

Soit $(g_v)_v \in \mathbf{N}^*$ une famille de fonctions croissantes $[a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, dont au moins une est strictement croissante, telles que $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(a)$ converge et soit α_0 une constante positive au moins égale à $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(a)$. Considérons la fonction strictement décroissante $f: [a, \delta] \rightarrow \mathbf{R}$, définie par $f(x) = \alpha_0 - \sum_{v=1}^{\infty} g_v(x)$ dans l'intervalle de convergence $[a, \delta]$ de cette série; alors, $f(a) \geq 0$ et, si $f(a) \neq 0$, l'ensemble des $x \in [a, \delta]$ tels que $f(x) > 0$ est un intervalle non vide $[a, \delta']$; donc, $f(a) = 0$ équivaut à $\xi(f) = 0$ et $f(a) \neq 0$ entraîne $\xi(f) = \delta'$. Notations: $f_n = \alpha_0 - \sum_{v=1}^n g_v$, $\xi_n = \xi_n(f_n)$.

PROPOSITION 5. — La suite $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est manifestement décroissante et possède, par conséquent, une limite ρ .

- I. Si $\rho \leq \delta$, on a $\rho = \xi(f)$; si, de plus, $\rho < \delta$, $\rho (= \xi)$ est l'unique d -zéro de f .
- II. Si f possède un d -zéro [nécessairement unique et égal à $\xi(f)$], on a $\xi(f) = \rho$.
- III. Dans tous les cas, $\min\{\delta, \rho\} = \xi(f)$.

Démonstration. — Le fait que (ξ_n) est décroissante est évident. Il en est de même de l'énoncé tout entier dans le cas où, quel que soit n , $\xi_n = b$. On peut donc supposer que $f_{n_0}(x) \leq 0$ pour un certain $x \in [a, b]$; mais on a, alors, $f_n(x) \leq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Les ξ_n sont donc, pour $n \geq n_0$ les plus petits d -zéros des f_n respectifs. Supposons que $\rho < \delta$; alors, pour n assez grand on a $\xi_n < \delta$ et la proposition 2 (1°) montre que ρ est un d -zéro de f . Réciproquement, la proposition 2 (2°) montre que $\xi < \delta$ implique $\rho = \xi$. On ne peut donc avoir à la fois $\xi < \delta$ et $\rho \geq \delta$; donc, en particulier, $\rho = \delta$ entraîne $\xi = \delta$. I et II étant ainsi complètement démontrés, l'assertion III l'est aussi, car elle est une conséquence de I et de II.

COROLLAIRE 5.1. — Si, sous les hypothèses de la proposition 5, μ_n minore ξ_n , $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$\min\{\delta, \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n\} \leq \xi(f).$$

Notation: $\mu = \min\{\quad\}$. Alors, $[a, \mu]$ ne contient aucun d -zéro de f . En d'autres termes, il suffit de démontrer que $[a, \mu_n]$ ne contient pas de d -zéro de f_n , $n \in \mathbf{N}^*$, pour assurer que $[a, \mu]$ ne contient pas de d -zéro de f .

Remplaçons dans les hypothèses précédant la proposition 5 croissante par décroissante, $\sum_{v=1}^{\infty} f_v(a)$ par $\sum_{v=1}^{\infty} f_v(b)$, $[a, \delta]$ par $(\gamma, b]$, $[a, \delta']$ par $(\gamma', b]$, δ' par γ'

et $\underline{\xi}$ par $\bar{\xi}$; on peut démontrer pour $\bar{\xi}(f)$, sous ces hypothèses, une proposition (notée aussi prop. 5) analogue à la proposition 5. Si l'on suppose que M_n majore $\bar{\xi}(f_n)$, $n \in \mathbf{N}^*$, on peut également démontrer un corollaire (noté aussi cor. 5.1) analogue au corollaire 5.1, c'est-à-dire que

$$\max \left\{ \gamma, \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n \right\} \geq \bar{\xi}(f).$$

L'adjonction de l'hypothèse de la continuité des g_n transformerait les résultats précédents en des résultats pour les zéros véritables des fonctions f_n et f .

Remarque.— Mêmes hypothèses générales que dans le corollaire 5.1. Soit $\tau : [a, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction ayant une valeur $\leq \alpha_0$ en a et satisfaisant à $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(x) \leq \tau(x)$, quel que soit $x \in [a, \delta)$; notons $h(x) = \alpha_0 - \tau(x)$. Alors, $\underline{\xi}(h) \leq \underline{\xi}(f)$.

Tout minorant de $\underline{\xi}(h)$ est donc *a fortiori*, minorant de $\underline{\xi}(f)$; si en particulier, $\underline{\xi}(f)$ est le d -zéro de f , $\underline{\xi}(h)$ est lui aussi le plus petit d -zéro de h .

Remarque analogue pour $\bar{\xi}(f)$.

Ce fait simple est à la base de plusieurs démonstrations connues qui reviennent essentiellement à utiliser des fonctions $\tau(x)$ obtenues à partir de $\sum g_v(x)$ par des inégalités classiques. Voir, par exemple, [125].

Les définitions et les remarques précédentes permettent, en particulier, d'établir des rapports simples mais utiles entre certaines fonctions d'une variable complexe, munies de leurs c -zéros, et certaines fonctions d'une variable réelle, munies de leurs d -zéros. La première idée de ses rapports est contenue dans le théorème suivant de Cauchy ([36, p. 10; [68], p. 95): Dans $\mathbf{C}$, les valeurs abso-

lues des zéros du polynôme $\sum_{v=0}^n a_v z^v$ sont toutes minorées par la racine positive de

l'équation $|a_0| = \sum_{v=1}^n |a_v| x^v$ et majorées par la racine positive de l'équa-

tion $|a_n| x^n = \sum_{v=0}^{n-1} |a_v| x^v$.

(L'utilisation de la transformation $z = z^{-1}$ rend immédiate l'équivalence de ces deux assertions pour les polynômes.)

Commençons par généraliser les circonstances de ce théorème. Soit : $\emptyset \neq D \subset \mathbf{C}$, $(\sigma_v)_{v \in \mathbf{N}^*}$ une famille de fonctions $D \rightarrow \mathbf{C}$, φ une surjection de D sur un intervalle $[a, b)$ (resp. $(a, b]$) de $\mathbf{R}$ ($g_v)_{v \in \mathbf{N}^*}$ une famille de fonctions $[a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ (resp. $(a, b] \rightarrow \mathbf{R}$) telles que, 1° $|\sigma_v(z)| = g_v(\varphi(z))$, quel que soit $z \in D$, et 2° $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(x)$ converge dans un intervalle $[a, \delta)$ (resp. $(\gamma, b]$).

Exemples. — Les séries de Taylor, avec $\varphi(z) = |z|$; les séries générales de Dirichlet, avec $\varphi(z) = \mathfrak{N}(z)$ (voir les applications de la proposition 1, où l'on doit remplacer f_v par g_v).

Soit α_0 une constante complexe telle que $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(a) \leq |\alpha_0|$ (resp. $\sum_{v=1}^{\infty} g_v(b) \leq |\alpha_0|$)

et soit f la fonction $D' \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(z) = \alpha_0 - \sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(z)$ dans l'ensemble de

convergence $D' \subset D$ de $\sum_{v=1}^{\infty} \sigma_v(z)$; associons à f la fonction $h : [a, \delta) \rightarrow \mathbf{R}$ (resp.

$(\gamma, b] \rightarrow \mathbf{R}$) définie par $h(x) = |\alpha_0| - \sum_{v=1}^{\infty} g_v(x)$ dans l'intervalle de convergence $[a, \delta)$ (resp. $(\gamma, b]$) de cette série.

Il est évident que $D' \supset \bar{\varphi}^{-1}([a, \delta))$ (resp. $D' \supset \bar{\varphi}^{-1}((\gamma, b])$).

En vertu de la définition 5, $[a, \xi(h)[$ (resp. $]\bar{\xi}(h), b]$) ne contient aucun d -zéro de $h(x)$.

D'autre part, on a, pour tout $z \in D'$,

$$|F(z)| \geq |\alpha_0| - \sum_{v=1}^{\infty} g_v(x), \quad \text{où } x = \varphi(z).$$

Quand $x \in [a, \delta)$ (resp. $x \in (\gamma, b]$), le second membre de cette inégalité est fini; quand $x < \delta$ (resp. $< \gamma$), ce membre vaut $-\infty$. Elle donne le

THÉOREME 4 (« de comparaison »). — Si $[a, \mu] \subset [a, \xi(h)[$, il existe $\theta > 0$ tel que $|f| > \theta$ quel que soit $z \in \bar{\varphi}^{-1}([a, \mu])$; donc, $\bar{\varphi}^{-1}([a, \xi(h)[$) ne contient aucun c -zéro de f . Résultat analogue pour $\bar{\xi}(h)$.

Si les g_v sont monotones, l'hypothèse que l'ensemble de convergence de $\sum g_v$ est un intervalle est assurément satisfaite. Si, en particulier, $\sum g_v$ est *strictement monotone*, la deuxième assertion du théorème 4 se laisse préciser :

PROPOSITION 6. — Ou bien $f(z)$ n'a aucun c -zéro dans D' , ou bien les valeurs absolues des images par φ de ses c -zéros sont toutes minorées (resp. majorées) par l'unique d -zéro de $h(x)$. Dès lors, la proposition 5 et le corollaire 5.1 s'appliquent de façon évidente.

La proposition 6 s'applique aux séries générales de Dirichlet, avec $\varphi(z) = \mathfrak{N}(z)$, et aux séries de Taylor, avec $\varphi(z) = |z|$. Dans ce dernier cas, nous avons plus précisément, le

COROLLAIRE 6.1. — Soit $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ne s'annule pas de dans le cercle de convergence, soit $h(x) = 0$ a une racine positive (unique) ρ et ρ minore les valeurs absolues de tous les zéros de $f(z)$. Seule la seconde alternative s'offre aux fonctions entières qui n'admettent pas 0 comme valeur exceptionnelle de Picard; d'où, le théorème de Cauchy cité au début de ce paragraphe.

Si l'on pose $h_n(x) = |a_0| - \sum_{v=1}^n |a_v| x^v$ et $\rho_n =$ racine positive de $h_n = 0$, on obtient le

COROLLAIRE 6.2. — Si ρ_n minore ρ , le cercle ouvert

$$|z| < \min \left\{ \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho_n \right\}$$

ne contient aucun zéro de $f(z)$.

5. APPLICATIONS « DU LEMME D'EXTENSION ». — Sauf mention expresse du contraire, les notations de ce paragraphe sont indépendantes des conventions faites dans les paragraphes 2-4.

Le lemme évident suivant précise une situation qui se présente souvent.

LEMME (d'extension.) — Soient E et H des ensembles non vides, F un ensemble non vide d'applications $E \rightarrow H$, S un espace topologique, φ une application $F \rightarrow S$, et A une partie fermée de S. Alors :

I. si Φ est un filtre sur F, la validité de la relation $\varphi(f) \in A$ pour tout élément f d'une base de filtre Φ entraîne sa validité pour tout f correspondant à une valeur d'adhérence de φ suivant Φ ;

II. si $\mathfrak{T}$ est une topologie sur F et si φ est continue, la validité de $\varphi(f) \in A$ pour tout élément f d'une partie F_0 de F, partout dense dans F, entraîne sa validité pour tout $f \in F$.

Ce lemme sert à unifier les démonstrations d'un grand nombre de propositions; nous en citons ci-dessous quelques-unes, en rapport avec notre sujet.

Diverses formules de l'Analyse classique (réelle ou complexe) peuvent être mises sous l'une des formes $\varphi(f) = 0$, $\varphi(f) \geq 0$, $\varphi(f) \leq 0$, où f et φ vérifient les hypothèses du lemme; prenons resp. $A = \{0\}$, $A = \mathbf{R}_+$, $A = \mathbf{R}_-$; il suffit alors d'avoir démontré ces formules pour une base de filtre convergeant vers f , pour qu'elles s'appliquent à f . Remarque analogue pour II. [Au cas où $\varphi(f) = 0$, on pouvait également appliquer le « principe de prolongement des identités »; [48], chap. I, p. 54.]

Exemples. — 1. Inégalités appelées « moyennes élémentaires » ; extension aux séries.

Ces inégalités peuvent, en général, être mises sous la forme $\varphi((b_\nu), \dots, (l_\nu)) \in \mathbf{R}_+$, où J est fini et φ est une fonction définie par une expression algébrique *explicite* (« expression algébrique », *au sens d'Abel*) des variables *positives* $b_\nu, \dots, l_\nu (\nu \in J)$, telle que tout radical qui y entre a une valeur réelle. (Voir [41].)

2. Le fait que, dans les définitions usuelles de l'intégrale, $\int_E f dt$ est fonction *continue* de f , rend souvent possible l'application du lemme avec $\varphi(f) = \int_E f dt$.

Exemple. — La validité du théorème fondamental et de la formule intégrale de Cauchy pour les polynômes implique leur validité pour les séries de Taylor.

3. Indépendamment de 2, la validité des inégalités de Cauchy pour les séries de Taylor est conséquence de leur validité pour les polynômes, parce qu'elles peuvent être écrites $(\max_{|z|=r} |f(z)| - |a_p| r^p) \in \mathbf{R}_+$ et que l'expression entre parenthèses est fonction continue de la série convergente de Taylor $f(z)$; c'est cette expression qui sera notre fonction φ . (Il existe des démonstrations vraiment élémentaires de ces inégalités, dans le cas des polynômes. Une a été donnée par Montel [87], qui se réfère aussi à l'intérêt de Mittag-Leffler pour la question ; une autre est due à Pompeiu [102]. Dans l'extension de ces démonstrations aux séries, le « passage à la limite » remplace le lemme.)

La méthode ayant été suffisamment illustrée, passons au cas qui nous intéresse : Soit E une région (ensemble ouvert connexe) de $\mathbf{C}$, et soit F l'ensemble des restrictions à E des fonctions analytiques qui sont régulières *au moins dans* E ; munissons F de la topologie de la convergence compacte. Le théorème précité de Hurwitz se laisse mettre alors sous la forme suivante :

THÉORÈME [de la continuité des zéros (réguliers) d'une fonction analytique.] — Les zéros z_i de f définissent, localement, des fonctions $z_i(f)$ continues dans F .

Considérons l'espace-produit $E = \prod_{\nu=0}^n A_\nu$, où $A_\nu = \mathbf{C}$; a_ν parcourt A_ν .

Soit F l'ensemble des polynômes $f(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$, où z parcourt $\mathbf{C}$, muni de la topologie de la convergence compacte. L'application $\sigma : E \rightarrow F$, définie par $\sigma(a_0, \dots, a_n) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$, est continue ; donc, aussi la composée de σ et de $z_i(f)$ est continue. C'est le théorème classique sur *la continuité des zéros d'un*

polynôme par rapport à l'ensemble des coefficients du polynôme. Le langage adopté ici montre que le théorème de Hurwitz constitue une véritable extension de ce théorème aux fonctions analytiques, *pourvu qu'on remplace la notion* (inadéquate dans le dernier cas) *de l'« ensemble des coefficients » par la notion « élément de l'espace fonctionnel F ».*

Les considérations précédentes s'appliquent inchangées aux fonctions méromorphes dans une région E , puisque le théorème primitif de Hurwitz s'applique à elles ([22] I, p. 194).

Application. — Soit E le cercle $|z| \leq \rho$, privé de petits cercles ouverts c_i des centres b_i , et soit F l'ensemble des fonctions méromorphes f dans $|z| < \rho + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), différentes de zéro et de l'infini sur $|z| = \rho$, ayant les mêmes pôles b_i ($i = 1, \dots, m$) et le même nombre m des zéros dans $|z| \leq \rho$, muni de la topologie de la convergence compacte dans E . Soient, $\zeta_i(f)$ les zéros de f ; ils sont, localement, des fonctions continues de f . Soit, enfin, $\varphi(f; \zeta_1(f), \dots, \zeta_m(f))$ une fonction continue par rapport à l'ensemble des variables $f, \zeta_1, \dots, \zeta_m$; donc φ est une fonction $\varphi_1(f)$ continue dans F .

Conséquence. — Si $A \subset \mathbf{C}$ est fermé, il suffit que $\varphi_1(f) \in A$ soit vrai pour les f rationnelles, pour qu'il soit vrai pour une f quelconque. Cela s'applique en particulier, avec $A = \{0\}$, à la formule classique $\log |f| = \dots$ « de Poisson-Jensen », due à R. Nevanlinna ([91], p. 3). (On pouvait même supposer ici les zéros $\zeta_i(f)$ fixes.)

On peut également appliquer le lemme à la localisation des zéros des fonctions, mais, dans les cas étudiés ici, les méthodes des paragraphes précédents conduisent à des résultats au moins aussi généraux. Toutefois, on retiendra de la méthode actuelle le fait que, *les problèmes de la localisation sont*, en général, *des problèmes pour des espaces fonctionnels.*

Application. — Soit E une région de $\mathbf{C}$ et soit F l'ensemble des fonctions analytiques qui sont régulières dans E (au moins) *et qui possèdent au moins un zéro dans E* , muni de la topologie usuelle; notons $z_i(f)$ les divers zéros de f contenus dans E . La fonctionnelle $\min_i |z_i(f)|$ est alors définie en tout point de F et elle est continue (en vertu du théorème de la continuité des zéros). La recherche de minorants (dits souvent « limites inférieures ») des valeurs absolues de tous les zéros d'un polynôme, dans le sens de la littérature classique, entre donc naturellement dans la recherche de fonctionnelles (définies dans F) qui minorent la fonctionnelle $|z_i(f)|$.

Même remarque dans le cas de p zéros de f . Toutefois, la recherche de majorantes d'au moins p zéros de f a un sens seulement si l'on suppose que F est constitué de fonctions ayant au moins p zéros dans E . Cette condition explique pourquoi la plupart des majorantes connues d'au moins p zéros d'un polynôme ne

s'étendent pas, par un passage à la limite immédiat, aux séries de Taylor; en effet, ces majorantes dépendent de $p + 1$ seulement coefficients du polynome et devraient, par conséquent, rester inchangées dans le passage à la limite indiqué dans la proposition 3, si l'extension était valable. Or, si le reste des coefficients de la série est arbitrairement choisi, la série peut même diverger en tout point $z \neq 0$. On est alors tenté à reformuler les résultats classiques de Montel ([78], [82]) et de Van Vleck ([112],) de la manière suivante : « Si tous les coef-

ficients d'indice $\nu > n$ d'une série de Taylor $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$ sont nuls, ... » afin de souligner la dépendance de la majorante des coefficients $a_{\nu} (\nu > n)$ et non seulement des $p + 1$ dits coefficients.

Si l'on remplace $\min |z_i(f)|$ par le cercle $|z| \leq \min_i |z_i(f)|$, on est conduit à considérer comme l'espace H du lemme l'ensemble des cercles de centre O , muni de sa topologie naturelle. Il ne serait pas plus difficile de considérer un espace H ayant pour support un ensemble *convenable* de domaines (fermetures des régions) simplement connexes, autres que les cercles.

Exemple. — Les « roues dentées », de centre O , du théorème de Lipka ([68], p. 101); d'où, l'extension immédiate de ce théorème aux séries de Taylor, cas particulier de l'extension du théorème de Lipka-Marden (*loc. cit.*, [68]); nous avons déduit, dans [125], cette extension de la remarque que la démonstration de Marden s'applique également au cas des séries, mais, *la présente méthode permet d'affirmer a priori la validité de l'extension aux séries de Taylor de tout théorème de ce genre* (par rapport à un ensemble convenable de domaines) *pour les polynomes, pourvu qu'on suppose, quand $p > 0$, que E contient au moins p zéros de f . C'est dans l'implication de cette dernière hypothèse que réside l'intérêt particulier du théorème de Pellet-Lipka-Marden pour les séries* [125].

Notes. — 1. Il faut dire ici que Pellet avait démontré son théorème pour les séries de Taylor, fait que j'ignorais pendant la rédaction de [125], car il ne figure que dans le Mémoire de Pellet [97], les autres auteurs de ma connaissance se bornant à l'énoncer et à le démontrer pour les polynomes.

2. Un exemple intéressant de fonctionnelle $\mu(f)(\leq |z_i(f)|)$ *discontinue* est offert par un théorème de Westerfield [120].

6. PROBLÈMES DES FONCTIONNELLES COMPARABLES. — Soit : E un ensemble $\neq \emptyset$, F un ensemble ordonné $\neq \emptyset$, et $\varphi_i = E \rightarrow F$ deux applications telles que $\varphi_1(E) = \varphi_2(E)$. Si l'on a, *quel que soit $x \in E$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ [resp. $\varphi_2(x) \leq \varphi_1(x)$]*, les $\varphi_i (i = 1, 2)$ seront dites « comparables » et φ_1 sera appelée « minorante » (resp. « majorante ») de φ_2 . (Quand $F = \mathbf{R}$, les fonctions $E \rightarrow F$ seront souvent appelées « fonctionnelles ».)

Hypothèses et notations : $[a, b) \subset \mathbf{R}$; A_ν est un ensemble $\neq \emptyset$; α_ν parcourt A_ν ; $g_\nu(\alpha_\nu, x)$ est une application $A_\nu \times [a, b) \rightarrow \mathbf{R}_+$; $g_0(\alpha_0, x)$ est indépendante de x ; quand $\nu \geq 1$, $g_\nu(\alpha_\nu, x)$ est croissante en x , au moins une des g_ν l'étant strictement, $g_\nu(\alpha_\nu, a) = 0$; α parcourt $\prod_{\nu \in \mathbf{N}} A_\nu$; $\bar{h}_\nu : \prod_{\nu \in \mathbf{N}} (A_\nu \times [a, b)) \rightarrow \mathbf{R}$ est définie par $\bar{h}(\alpha, x) = g_0(\alpha_0) - \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(\alpha_\nu, x)$ et h est la restriction de $\bar{h}$ à l'ensemble de convergence de cette série, ensemble qui, en vertu du théorème 1, se réduit, pour chaque valeur de α , à un intervalle $[a, \delta)$; $\delta = \delta(\alpha)$; on suppose qu'il existe un point $\alpha_\nu \in A_\nu$ auquel $g_\nu(\alpha_\nu, x)$ s'annule identiquement par rapport à x ($\nu \in \mathbf{N}^*$); notons-le β_ν ; alors, $h_n(\alpha, x) = h((\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots, x))$ identiquement en x , et en $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

On va appliquer maintenant les résultats et les notations des paragraphes 3-4. Ainsi, $\underline{\xi}(h(\alpha))$ est la fonctionnelle $\prod_{\nu \in \mathbf{N}} A_\nu \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par la définition 5; on notera $\underline{\xi}(\alpha) = \underline{\xi}(h(\alpha))$, $\xi_n(\alpha) = \underline{\xi}(h_n(\alpha))$.

Problème « fini » : Définir des minorantes de $\xi_n(\alpha)$.

Problème « infini » : Définir des minorantes de $\underline{\xi}(\alpha)$.

Le corollaire 5.1 entraîne le

THÉOREME 5. — Ces deux problèmes sont équivalents, dans le sens suivant :

- I. Si $\mu(\alpha)$ minore $\underline{\xi}(\alpha)$, $\mu((\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots))$ minore $\xi_n(\alpha)$.
- II. Si, quel que soit $\nu \in \mathbf{N}^*$, $\mu_n((\alpha_0, \dots, \alpha_n))$ minore $\xi_n(\alpha)$, la fonctionnelle $\min \left\{ \delta(\alpha), \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n((\alpha_0, \dots, \alpha_n)) \right\}$ minore $\underline{\xi}(\alpha)$.

D'où, le

THÉOREME 5. b. — La recherche des minorantes du $\underline{\xi}(\alpha)$ d'une série de Taylor de la forme $h(x) = \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu x^\nu$, où α_ν parcourt $\mathbf{R}_+$, (rappelons que, en tout point α où h possède un zéro positif $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\alpha) = \underline{\xi}(\alpha)$) se ramène, par la manière simple indiquée dans le théorème 5(II), au problème analogue pour les polynômes de la forme $h_n(x) = \alpha_0 - \sum_{\nu=1}^n a_\nu x^\nu$, où a_ν parcourt $\mathbf{R}_+$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

Remplaçons maintenant les hypothèses et les notations du début de ce paragraphe par les suivantes : $0 \in A_\nu \subset \mathbf{C}$; $0 \in D \subset \mathbf{C}$; $\nu \in \mathbf{N}$; a_ν parcourt A_ν et α parcourt une partie de E de $\prod_{\nu \in \mathbf{N}} A_\nu$ laquelle contient, en particulier, tous les élé-

ments de $\prod A_v$ qui n'ont qu'un nombre fini de coordonnées non nulles;
 $\sigma_v : A_v \times D \rightarrow \mathbf{C}$ est définie par $\sigma_v(\alpha_v, z) = \alpha_v z^v$; $l(\alpha) = \left(\limsup_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|\alpha_v|} \right)^{-1}$;
 $f(\alpha, z) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v z^v$, partout où cette série converge; $|\alpha| = (|\alpha_0|, |\alpha_1|, \dots)$;
 $f_n(\alpha, z) = \sum_{v=0}^n \alpha_v z^v = f((\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots), z)$.

Définition. — Pour chaque valeur de $\alpha (\in E)$, on notera :

- 1° $r(\alpha) =$ minimum des valeurs absolues des zéros de $f(\alpha, z)$, lorsque le cercle $|z| \leq l(\alpha)$ contient des zéros de cette série;
- 2° $r(\alpha) = l(\alpha)$, lorsque de tels zéros n'existent pas.

Abréviation : $r_n(\alpha) = r((\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots)) =$ minimum des valeurs absolues des zéros de $f_n(\alpha, z)$.

Problème « fini » (resp. « infini ») : Définir des minorantes de $r_n(\alpha)$ (resp. $r(\alpha)$).

(Le symbole r_n introduit ci-dessus est sans rapport avec le r_p de la proposition 4.)

Le corollaire 4.1 (3°) entraîne le

THÉOREME 6. — Ces deux problèmes sont équivalents, dans le sens suivant :

- I. Si $\mu(\alpha)$ minore $r(\alpha)$, $\mu((\alpha_0, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots))$ minore $r_n(\alpha)$.
- II, Si, quel que soit $v \in \mathbf{N}^*$, $\mu_n((\alpha_0, \dots, \alpha_n))$ minore $r_n(\alpha)$, la fonctionnelle $\min \{ l(\alpha), \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n((\alpha_0, \dots, \alpha_n)) \}$ minore $r(\alpha)$.

Abréviation : $\mu_n(\alpha) = \mu_n(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$.

On supposera, dans le reste de ce paragraphe, que $|\alpha| \in E$, quel que soit $\alpha \in E$; on notera $|E|$ l'ensemble des $|\alpha| \in E$, h la fonction définie par la série

$$h(|\alpha|, x) = |\alpha_0| - \sum_{v=1}^{\infty} |\alpha_v| x^v \text{ et } h_n \text{ la fonction définie par le polynome}$$

$$h_n(|\alpha|, x) = |\alpha_0| - \sum_{v=1}^n |\alpha_v| x^v.$$

REMARQUE. — En vertu du théorème 4, $\xi(|\alpha|) = (\xi(h(|\alpha|)))$ minore $r(\alpha)$. D'autre part, $\xi(|\alpha|) = r(\alpha)$ n'est pas, en général, une identité et, par conséquent, l'ensemble des minorantes de $r(\alpha)$ ne coïncide pas, en général, avec l'ensemble des minorantes de $\xi(|\alpha|)$; toutefois, cette coïncidence a lieu si l'on ne retient dans le premier ensemble que les minorantes qui dépendent seulement de $|\alpha|$, et que nous

appellerons « minorantes de première espèce » de $r(\alpha)$. Compte tenu du théorème 5 b, cela entraîne le

THÉOREME 5 c. — *La recherche des minorantes de première espèce de $r(\alpha)$ se ramène à celle des minorantes de $\xi_n(|\alpha|)$.*

Les auteurs qui ont traité la localisation des zéros des polynômes ont trouvé un grand nombre de minorantes, de première espèce surtout, de $r_n(\alpha)$. Les théorèmes du présent paragraphe nous permettent d'affirmer, *a priori* que leurs résultats s'étendent tous au cas des séries de Taylor, de la façon immédiate indiquée ci-dessus. Ces auteurs avaient donc traité (apparemment sans le savoir) le cas des séries de Taylor (et même des cas plus généraux, quelquefois). Cela s'applique, en particulier, à la liste des minorantes classiques de première espèce de $r_n(\alpha)$, donnée dans le paragraphe 8. En ce qui concerne notre propre recherche de minorantes de première espèce de $r(\alpha)$ (sujet principal de la partie B' de ce chapitre), il suffira de les établir dans le cas de $h_n(|\alpha|)$.

Réciproquement, les minorantes bien connues de $r(\alpha)$ trouvées par Petrovitch, Landau et Caramata (voir § 8) sont établies une fois qu'on les a démontrées pour les polynômes; par exemple, leur démonstration commune, dans le cas des polynômes, par Markovitch (§ 8) s'étend *a priori*, aux séries.

Dans le cas de ces dernières minorantes et dans bien d'autres cas, pour toute valeur de α telle que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\alpha) < l(\alpha)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\alpha)$ existe, ce qui entraîne des simplifications des expressions considérées. En d'autres termes, la minorante $\mu(\alpha) [= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\alpha)]$ est une fonctionnelle *continue* $\mu(f)$, où f parcourt l'ensemble des f vérifiant l'inégalité $\mu(f) < l(\alpha)$, muni de la topologie de la convergence compacte; c'est le cas des minorantes considérées dans le paragraphe 5.

Terminologie : Pour abréger, on dira qu'une minorante $\mu(\alpha)$ [resp. $\mu_n(\alpha)$] est « associée » à $f(\alpha, z)$ [resp. $f_n(\alpha, z)$] au lieu de dire qu'elle minore $r(\alpha)$ [resp. $r_n(\alpha)$].

7. GÉNÉRALITÉ PROPRE DE CERTAINS RÉSULTATS. — Pour la terminologie et les notations, voir aussi la partie A' du chapitre III. Le théorème de Cauchy-Hadamard, le théorème de Cauchy sur la comparaison des polynômes et son extension aux séries de Taylor, plusieurs de leurs corollaires enfin, restent valables en présence de structures moins fortes que celles du corps complexe $\mathbf{C}$; citons, par exemple, l'extension bien connue du théorème de Cauchy-Hadamard aux corps valués complets.

En fait, les hypothèses pour la multiplication : { existence d'éléments inverses, commutativité, associativité } sont beaucoup trop fortes; elles cachent les hypothèses réellement utiles.

Terminologie de ce paragraphe. — Anneau = anneau non nécessairement associatif. Algèbre B_A = un anneau B qui est un A -module sur l'anneau A (pour lequel on ne fait aucune hypothèse particulière). K_0 -valeur absolue sur un anneau A (K_0 étant un corps ordonné) = application $\varphi: A \rightarrow K_{0+}$, jouissant des propriétés : 1° $\varphi(a) = 0$ est équivalente à $a = 0$, 2° $\varphi(ab) = \varphi(a) \varphi(b)$, 3° $\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$. Si l'on remplace 1° et 2°, resp., par les propriétés plus faibles 1° $\varphi(0) = 0$ et 2° $\varphi(ab) \leq \varphi(a) \varphi(b)$, on doit également remplacer « K_0 -valeur absolue » par « K_0 -norme », Considérons l'algèbre B_A , où A est muni d'une K_0 -valeur absolue φ ; $f: B_A \rightarrow K_{0+}$ sera appelée « K_0 -norme » sur l'algèbre B_A , si f est une K_0 -norme sur l'anneau B_A et si, de plus, on a, quel que soit $\lambda \in A$ et $b \in B_A$, $f(\lambda b) = \varphi(\lambda) f(b)$.

La relation $(-a)(-b) = ab$, vraie dans tout anneau A , entraîne pour un anneau A muni d'une K_0 -valeur absolue φ , $\varphi(-a) = \varphi(a)$; si A possède un élément unité, à gauche ou à droite, e , $\varphi(e) = 1$. Si, alors, B_A est une algèbre normée par f , on a encore $f(-a) = f(a)$.

Telles seront toutes les algèbres considérées par la suite.

Si l'on pose $\sigma(a, b) = f(a - b)$, σ est un K_0 -écart sur B_A [resp. $d(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda - \mu)$ est une K_0 -distance sur A]. La structure uniforme ainsi définie sur $B_A \times B_A$ et la topologie sur B_A déduite de celle-ci sont manifestement compatibles avec la structure d'algèbre de B_A ; quand ledit espace uniforme est complet, l'algèbre sera appelée *complète*.

Notation. — Ci-dessous, toutes les normes et les valeurs absolues seront notées $|a|$.

Exemple d'algèbre $\mathbf{R}$ -normée complète non associative et non commutative. — L'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, muni de la multiplication vectorielle $a \wedge b$, est une telle algèbre sur $\mathbf{R}$, qui sera notée $B_{\mathbf{R}}$; la valeur absolue ordinaire sur $\mathbf{R}^3$ est une $\mathbf{R}$ -norme sur $B_{\mathbf{R}}$; $B_{\mathbf{R}}$, munie de cette $\mathbf{R}$ -norme, est complète.

Considérons les « séries formelles » $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(x_{\nu_1}(\dots(x_{\nu_{\nu}}))\dots)$ sur une algèbre B_A . Si B_A est $\mathbf{R}$ -normée complète, soit D l'ensemble (éventuellement vide) des systèmes des valeurs des variables (dans B_A) pour lesquels la série d'éléments de B_A obtenue converge, et soit D' la partie de D en chaque élément de laquelle $|x_{\mu\nu}| = |x_{k\lambda}|$, quel que soit (μ, ν, k, λ) . (Par exemple, dans le cas d'une série de Taylor, $D' = D$ puisque $x_{\mu\nu} = x_{k\lambda}$.) Ces hypothèses entraînent le

THÉOREME 7. — *D' contient le cercle de Cauchy-Hadamard; dans tout cercle circonferencié contenu dans le cercle de C-H, la série converge uniformément. Si, de plus, la $\mathbf{R}$ -norme considérée est une $\mathbf{R}$ -valeur absolue, D' coïncide avec le cercle de C-H, sauf, éventuellement, en certains points de sa circonférence.*

C'est le « théorème de Cauchy-Hadamard » pour B_A . Application évidente à B_R : le cas particulier des séries de Taylor est alors trivial.

On appellera « THÉOREME 8 » l'extension analogue (qui est évidente) du théorème 4, énoncé pour la minoration des R -valeurs absolues des zéros des séries de Taylor (première assertion du corollaire 6.1). Ce sera le « *théorème de comparaison de Cauchy* » pour les séries de Taylor dans B_A .

Le cas particulier des séries à coefficients dans C est instructif; en effet, on vient de voir que le *théorème de comparaison s'applique non seulement aux zéros contenus dans C mais, également, à tous les zéros contenus dans une extension quelconque d'algèbre R -normée complète de C* , pourvu que la norme considérée induise sur C la valeur absolue ordinaire. De sorte qu'on peut dire, de façon imagée, qu'*aucune de ces extensions ne saurait mettre en défaut le théorème de Cauchy*. Application évidente aux « zéros-quaternions ».

Remarque. — Certains théorèmes élémentaires pour les séries numériques restent valables dans une algèbre R -normée complète; exemple : la règle d'Abel [109].

Dans le cas des polynômes, le théorème de comparaison de Cauchy a une généralité propre encore plus grande; en effet, *la version concernant la minoration est vraie dans une algèbre quelconque munie d'une K_0 -norme* (K_0 étant un corps ordonné maximal), *et la version concernant la majoration est vraie dans une algèbre quelconque munie d'une K_0 -valeur absolue*. (Ce sont là des conséquences immédiates de la théorie des corps ordonnés d'E. Artin et O. Schreier.) C'est notre « PROPOSITION 7 ».

Enfin, nous avons l'utile

PROPOSITION 8. — *Le problème de la recherche de minorantes de première espèce associées à une série de Taylor (resp. polynôme), dans une R -algèbre normée complète (resp. K_0 -normée) qui est une extension de R (resp. de K_0), coïncide avec le problème analogue dans R (resp. K_0). En effet, les deux ensembles des minorantes coïncident.*

C'est la raison qui nous a conduit à distinguer les minorantes de *première espèce*.

Note. — La structure d'algèbre considérée ci-dessus n'est pas la structure algébrique la plus générale possible dans laquelle on puisse formuler un théorème de comparaison de Cauchy.

8. RÉSULTATS CONNUS; REMARQUES. — I. *Réurrence-itération.* — L'histoire (au sens large) des méthodes des approximations successives des racines remonte au moins jusqu'à Archimède. *Plusieurs de ces méthodes déterminent des suites approximantes des minorants (resp. majorants) des valeurs absolues des racines des équations « numériques ».* Pour ce qui concerne la théorie de l'itération,

des récurrences, etc., nous nous référons à l'exposé fait par S. Pincherle (et les références qu'il cite) [100], au livre de Valiron [110] et, surtout, au livre récent de Montel [88]. L'étude détaillée de ces méthodes, afin de distinguer les cas où l'on détermine également des minorantes (resp. majorantes) *au sens des fonctionnelles comparables* (au moins, pour une partie assez grande de $\prod A_v$), nous semble devoir être instructive; malheureusement, nous ne pouvons pas la faire ici. Signalons, toutefois, deux méthodes intéressantes :

1. Soit $x^n = a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ une équation à coefficients dans $\mathbf{R}_+$; on peut noter $\bar{\xi}$ sa racine positive. Soient x_0 un nombre $> \bar{\xi}$, $\varphi(x) = \sqrt[n]{a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}}$ (racine *positive*), et $(x_v)_{v \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $x_{v+1} = \varphi(x_v)$. On sait depuis longtemps (voir les références de Pincherle, *loc. cit.*, p. 59) que $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v$ existe et est la racine $\bar{\xi}$. La démonstration repose sur le fait que (x_v) est (strictement) *décroissante*, ce qui est le fait intéressant pour notre point de vue.

A. Lomnicki ([67], 1924) redécouvre ces faits, pour $x_0 = 1 + \sum_{v=0}^{n-1} a_v$, et, *faisant le rapprochement avec la recherche des majorants de $\bar{\xi}$, il remarque qu'on obtient ainsi des majorants aussi proches qu'on veut de $\bar{\xi}$; on peut donc toujours construire des fonctionnelles majorantes (définies sur $\prod A_v$, $A_v = \mathbf{R}_+$) meilleures que toute fonctionnelle majorante (de la fonctionnelle $\bar{\xi}$) donnée. Les remarques analogues pour la racine $\underline{\xi}$ de $a_0 = a_1x + \dots + a_nx^n$ ($a \neq 0$) sont évidentes.*

Ce résultat n'étant pas mentionné expressément par les auteurs des exposés systématiques sur la localisation (quoique de simples références à Lomnicki, hors texte, existaient), nous l'avons retrouvé indépendamment dans [125], pour un nombre > 0 arbitraire x_0 .

Remarque. — Si la série $a_0 - \sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v$, avec $a_v \in \mathbf{R}_+$ et $a_0 > 0$, possède un zéro positif $\underline{\xi}$,

$$\underline{\xi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{v \rightarrow \infty} a_v^{\frac{1}{n}} x_v^{\frac{n-1}{n}} (a_1 + a_2x + \dots + a_nx_v^{n-1})^{-\frac{1}{n}} \right).$$

2. *La méthode de Markovitch, en liaison avec son procédé approximatif des polynômes; voir [72], [73], [74] et [75].* Elle conduit en divers problèmes nouveaux, que nous examinerons ailleurs.

II. *Séries de Taylor.* — 1. Rappelons le principe d'une méthode inaugurée par Bernoulli et développée par Wronski [121], Runge, Hadamard [44], etc.

Le zéro de valeur absolue minimum d'une série $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ($a_0 \neq 0$) est un pôle

de la fonction $[f(z)]^{-1}$, situé sur la circonférence du cercle de convergence du développement taylorien de $[f(z)]^{-1}$ en 0; donc, la valeur absolue de ce zéro est $(\limsup_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{|b_v|})^{-1}$, b_v désignant le coefficient de z_v dans ce développement. Des formules de récurrence permettent de calculer les b_v à partir des a_v (voir Montel [88], p. 31). De nombreux auteurs ont utilisé ce principe; citons, par exemple, R. de Montessus (1905, [89]), Carmichael (1917, [24]) et Markovitch (1954, [73]).

2. M. Petrovitch (1901, [99]) a démontré, par l'inégalité des déterminants de Hadamard, le remarquable résultat qui suit et qui est à l'origine d'une série de recherches faites par Landau [63 a], Montel ([82], § 10), Karamata [49] et Markovitch [71]: THÉOREME P. 1 : Soit r un nombre > 0 . Si $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ($a_0 \neq 0$)

converge pour $|z| = r$, elle ne s'annule pas dans le cercle $|z| < |a_0| r \left(\sum_{v=0}^{\infty} |a_v|^2 r^{2v} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Du théorème P. 1, Petrovitch a déduit le THÉOREME P. 2 : Sous les hypothèses du théorème P. 1, $f(z)$ ne s'annule pas dans $|z| < |a_0| r \left(\sum_{v=0}^{\infty} |a_v| r^v \right)^{-1}$; elle ne s'annule donc pas dans $|z| < |a_0| \max_{|z| \leq r} \left(|z| \sum_{v=0}^{\infty} |a_v| |z|^v \right)^{-1}$.

Ces résultats furent approfondis par Landau (1905, [63 a]). Il donne 1° une démonstration élémentaire immédiate de P. 2 et 2° une démonstration élémentaire de P. 1 par l'inégalité de Cauchy-Schwarz; 3° il prouve le THÉOREME L. 1 : Sous les hypothèses de P. 2, $f(z)$ ne s'annule pas dans $|z| < |a_0| r (\max_{|z|=r} |f(z)|)^{-1}$; 4° il montre que les théorèmes P. 1, P. 2 et L. 1 sont des corollaires de la formule classique de Jensen; cette démonstration de Landau utilise la formule

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi = \sum_{v=0}^{\infty} |a_v|^2 r^{2v} \text{ et les propriétés classiques des moyennes.}$$

Montel, dans la dernière partie de son Mémoire [82], généralise ces inégalités, dans le cas où $f(z)$ est un polynome; la formule citée de Jensen lui permet de démontrer le THÉOREME M. 1 : Si l'on note

$$\mathfrak{M}_m(r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^m d\theta \right)^{\frac{1}{m}} \quad (m \geq 0),$$

les zéros z_i de $f(z)$ vérifient les inégalités $\frac{|a_0| r^{n-1}}{\mathfrak{M}_m(r)} \leq |z_i| \leq \frac{\mathfrak{M}_m(r)}{|a_n| r^{n-1}}$; elles vérifient donc, en particulier, les inégalités obtenues de celles-ci pour $r = 1$.

Landau [64] et Karamata [49] ont démontré le THÉOREME L-K : $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ($a_0 \neq 0$) ne s'annule pas dans $|z| < |a_0| t(|a_0| + \sup_{v \geq 1} \{ |a_v| t^v \})^{-1}$,

quel que soit le nombre $t > 0$. [Quand $t >$ rayon de convergence de $f(z)$, le résultat est trivialement vrai.]

Markovitch a employé dans plusieurs problèmes, avec beaucoup de succès, les inégalités classiques

$$\min_{1 \leq \nu \leq n} \{a_\nu\} \leq \frac{\sum_{\nu=1}^n a_\nu b_\nu}{\sum_{\nu=1}^n b_\nu} \leq \max_{1 \leq \nu \leq n} \{a_\nu\}, \quad \text{pour } (a_\nu, b_\nu) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+;$$

il en a déduit de là une méthode générale de « comparaison » (1939, [70]; 1948, [71]). En l'appliquant, il a démontré très simplement le théorème L-K et, en remplaçant l'inégalité de Cauchy-Schwarz employée par Landau (1905, [63 a]) par celle de Hölder, il a pu généraliser le théorème P.1 [71]; sa généralisation est distincte de celle de Montel.

REMARQUES. — I. *Le fait que Montel et Markovitch considèrent uniquement des polynômes ne restreint nullement la portée de leurs résultats*, pourvu qu'on les énonce sous la forme : « ... , $f(z)$ ne s'annule pas dans $|z| < \dots$ ». La validité de ces énoncés pour les séries de Taylor est conséquence immédiate de notre *théorème 6* (ou du *lemme d'extension* du paragraphe 5).

II. $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^m\right)^{\frac{1}{m}}$, où $b_\nu \geq 0$, étant fonction décroissante de la variable positive m

([45], p. 28), le théorème P.1 entraîne le THÉORÈME : $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ ($a_0 \neq 0$) ne s'annule

pas dans $|z| < |a_0| r \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^m r^{m\nu}\right)^{-\frac{1}{m}}$, où $0 \leq m \leq 2$, quel que soit $r > 0$.

L'application de ce résultat à $f(z) = z^2 - a_1 z - a_2$ ($a_\nu \geq 0$) donne l'inégalité

$$(1 + a_1^m + a_2^m)^{\frac{2}{m}} \geq a_1 (1 + a_1^m + a_2^m)^{\frac{1}{m}} + a_2.$$

Elle illustre la méthode simple suivante pour la formation d'inégalités : Si $R(a_0, \dots, a_n)$ est une majorante générale des valeurs absolues des zéros de $a_n z^n = a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_\nu \geq 0$, $a_n \neq 0$), on a $a_n R^n \geq a_{n-1} R^{n-1} + \dots + a_0$. Ces inégalités sont, souvent, trop faibles.

III. *Polynômes.* — La localisation des zéros des polynômes fut souvent traitée en rapport avec le problème plus général de la localisation des zéros des fonctions analytiques; c'est le cas, par exemple, du problème de Landau-Montel [78]; voir aussi Biernacki ([10], [11]), Dieudonné [34], Favard ([38],

[39]) et Walsh [118], pour d'autres exemples. Par contre, en ce qui concerne la recherche de *minorantes des valeurs absolues de tous les zéros d'un polynôme*, les spécialistes du xx^e siècle se sont, le plus souvent, satisfaits du cadre des *polynômes*; il suffira, pour le voir, de comparer les chapitres sur le sujet des livres de Dieudonné [36] et de Marden [68] avec le chapitre correspondant de l'« *Analyse algébrique* » de Cauchy et avec l'esprit des œuvres de Laguerre [61]; Dieudonné et Marden sont beaucoup plus riches en résultats, mais Cauchy et Laguerre adoptent un point de vue plus général. Cela s'explique, peut-être, par le fait que les auteurs modernes se sont occupés surtout de la recherche de *majorantes* (tout en citant l'équivalence évidente, pour les *polynômes*, de ce problème avec celui de la recherche de *minorantes*), tandis que c'est le cas des *minorantes* celui où les résultats pour les polynômes s'étendent d'une façon naturelle aux séries de Taylor.

La non-coordination de la littérature par rapport aux problèmes des polynômes et des séries est illustrée par l'exemple suivant : La majorante $(1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ des valeurs absolues des zéros du polynôme $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ est universellement connue sous le nom de « *théorème de Carmichael et Mason* » ([23], 1914). Or, *c'est un cas très particulier du théorème P.1 de Petrovitch* (publié en 1901) *pour les séries de Taylor*; toutes les deux démonstrations reposent sur le théorème des déterminants de Hadamard.

Les considérations de notre paragraphe 6 étendent, en général, les résultats de cette sorte aux séries de Taylor les plus générales.

D'après ce que je sais, les spécialistes se sont occupés seulement des polynômes *sur* $\mathbf{C}$ (ou sur $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$). Ainsi, certains résultats intéressants obtenus par les algébristes qui s'occupaient des corps valués ultramétriques n'ont pas eu des répercussions sur la localisation proprement dite.

Pour tout ce qui est en rapport avec les remarquables propriétés des corps valués, nous renvoyons à [6] et aux travaux bien connus de M. Krasner; voir par exemple [53]-[58].) Le paragraphe 7 de ce travail constitue un premier essai d'étudier la généralité propre *algébrique* des résultats pour les *minorantes* dans $\mathbf{C}$.

La classification suivante des *minorantes* (resp. *majorantes*) est justifiée par des raisons d'exposition : On appellera une fonction $\varphi(a_0, \dots, a_n; \lambda_0, \dots, \lambda_n)$ « *explicite* » si φ appartient à une *extension résoluble* du corps $\mathbf{Q}(a_0, \dots, a_n; \lambda_0, \dots, \lambda_n)$. Par abus de langage, on appellera aussi « *explicite* » une fonction qui serait explicite si, dans l'expression qui la définit, les exposants irrationnels qui figurent étaient remplacés, d'une manière *arbitraire*, par des exposants rationnels. Toute fonction non explicite sera dite « *implicite* ».

Note. — Donc, *algébrique explicite* = « *expression* » algébrique au sens d'Abel [4], sans que des racines imaginaires de l'unité y entrent.

La liste suivante (A et B) de majorantes de première espèce associées à $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} z^{n-\nu}$, avec $a_0=1$, est assez représentative de l'ensemble des résultats connus, pourvu qu'on y ajoute les résultats déjà cités, dans I et II.

A. Majorantes (de 1^{re} espèce) implicites :

1. La racine positive de

$$x^n = \sum_{\nu=1}^n |a_{\nu}| x^{n-\nu} \quad (\text{Cauchy, 1829}).$$

2. La racine positive de

$$x^n = 2^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^n |a_{\nu}| x^{n-\nu} \quad (\text{Gauss, 1849}).$$

(Résultat moins fort que 1.)

3. $\max \{ \xi_1, \xi_2 \}$, où ξ_1 et ξ_2 sont resp. les racines positives des équations

$$\begin{aligned} x^m &= |a_1| x^{m-1} + \dots + |a_{m-1}| x + |a_m| + c, \\ x^{n-m} &= c^{-1} (|a_{m+1}| x^{n-m-1} + \dots + |a_n|), \end{aligned}$$

le nombre strictement positif c et l'entier $m \in [1, n-1]$ étant choisis arbitrairement.

C'est la *méthode de Carmichael* (1917, [24]); l'intéressant résultat 10 de la liste B, ci-dessous, est un corollaire de celle-ci.

4. Notation : $b_{\nu} = a_{\nu}$.

La racine positive de

$$x^m = \left(\sum_{\nu=1}^{k_1} |b_{\nu}| \right) x^{m-1} + \left(\sum_{\nu=k_1+1}^{k_2} |b_{\nu}|^2 \right) x^{m-2} + \dots + \left(\sum_{\nu=k_{m-1}+1}^n |b_{\nu}|^m \right) \quad (\text{Carmichael, loc. cit.}).$$

5. Même notation.

La racine positive de

$$x^m = \left(\sum_{\nu=1}^{k_1} |b_{\nu}| \right) x^{m-1} + \left(\sum_{\nu=k_1+1}^{k_2} |b_{\nu}|^{k_1+1} \right) x^{m-k_1-1} + \dots \quad (\text{Carmichael, loc. cit.}).$$

6. Une autre méthode intéressante a été donnée par Westerfield (1933, [420]). On peut l'énoncer comme il suit : Considérons l'équation en u_{ν} ($1 \leq \nu \leq n$),

$$(h+k)^n = \sum_{\nu=1}^n u_{\nu} (h+k)^{n-\nu}$$

et astreignons les inconnues u_ν à être des polynômes de la forme $\sum h^i k^j$. L'équation admet alors plusieurs solutions distinctes; soit $u_\nu = P_\nu(h, k)$ l'une d'elles. S'il existe alors deux fonctions $h = h(|a_1|, \dots, |a_n|)$ et $k = k(|a_1|, \dots, |a_n|)$ telles que $|a_\nu| \leq P_\nu(h, k)$, quel que soit $(|a_1|, \dots, |a_n|)$, $h(|a_1|, \dots, |a_n|) + k(|a_1|, \dots, |a_n|)$ est une majorante. Westerfield a, en particulier, démontré ainsi simplement plusieurs résultats connus.

Remarque. — Ainsi énoncée, cette méthode est un cas particulier de la méthode suivante : considérons l'équation en u_ν ($1 \leq \nu \leq n$)

$$[\varphi(d_1, \dots, d_n)]^n = \sum_{\nu=1}^{n-1} u_\nu [\varphi(d_1, \dots, d_n)]^\nu,$$

φ étant une fonction positive donnée des variables positives d_ν , et les u_ν étant astreints à appartenir à une certaine classe de fonctions positives de $d_1, \dots, d_n$ et de φ , telle que l'équation en question possède toujours des solutions. S'il existe alors n fonctions $d_\nu(|a_1|, \dots, |a_n|)$ ($1 \leq \nu \leq n$) telles que $|a_\nu| \leq u_\nu(d_1, \dots, d_n)$, quel que soit $(|a_1|, \dots, |a_n|)$, φ est une majorante.

Application. — Soit $\varphi = \sum_{\nu=1}^n d_\nu$. Alors $\left(\sum_{\nu=1}^n d_\nu\right)^n = \sum_{\nu=1}^{n-1} u_\nu \left(\sum_{\nu=1}^n d_\nu\right)^{n-\nu}$ admet la solution $u_\nu = d_\nu(d_1 + \dots + d_n)^{\nu-1}$; la méthode s'applique donc, *a fortiori*, avec $d_\nu^{\nu-1}(d_1 + \dots + d_n) = |a_\nu|$, ce qui démontre le résultat 8 ci-dessous.

7. Westerfield ordonne l'ensemble des nombres $\left\{|a_1|, |a_2|^{\frac{1}{2}}, \dots, |a_n|^{\frac{1}{n}}\right\}_{m-1}$ en suite décroissante, notée $q_1, \dots, q_n$; il note y_n la racine positive de $y^m = \sum_{\nu=0}^{m-1} y^\nu$. Il démontre alors (1933, [420]) le THÉOREME : Si $(g_1, \dots, g_n)$ est la solution positive du système $\sum_{\nu=1}^m g_\nu = y_m$ ($1 \leq m \leq n$), $\sum_{\nu=1}^n g_\nu q_\nu$ est une majorante.

Remarque. — $\sum g_\nu q_\nu$ n'est pas continue par rapport à a_ν , contrairement à ce qui arrive à la plupart des autres majorantes de la littérature.

8. $\sum_{\nu=1}^n d_\nu$, où d_m est la racine positive de

$$\left(\sum_{\nu=1}^m d_\nu\right) d_m^{m-1} = |a_m| \quad (\text{Rudnicki, 1934, [104]}).$$

9. $\max_{1 \leq \nu \leq n} \left\{ \gamma_n \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \right| \right\}$, γ_n étant la racine positive de

$$\gamma^n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma^\nu \quad (\text{Anghelutza, 1934, [4]}).$$

10. *Méthode « de comparaison par la moyenne arithmétique »*, de Markovitch (1939, [70]; 1948, [71]). Illustrons son principe par un exemple : Associons à l'équation (1) : $x^n = \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| x^\nu$ l'équation (2) : $x^n = M \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu x^\nu$, les b_ν étant des nombres positifs, *arbitrairement choisis* et M étant le $\max \left\{ \frac{|a_\nu|}{b_\nu} \right\}$; alors, $M b_\nu \geq |a_\nu|$; donc, la racine positive de $x^n = \sum_{\nu=0}^{n-1} |a_\nu| x^\nu$ est $\leq$ de la racine positive de $x^n = \sum_{\nu=0}^{n-1} (M b_\nu) x^\nu$. La méthode revient alors à définir des fonctions $b_\nu = b_\nu(|a_1|, \dots, |a_n|)$, ce qui peut être fait d'une façon *absolument arbitraire*; c'est là que réside la puissance de sa méthode.

Remarque. — La remarque qui suit le corollaire 5.1 (*voir* aussi [125]) généralise, théoriquement, cette méthode; techniquement, son intérêt est dû au choix $\tau(x) = x^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} (M b_\nu) x^\nu$, avec $M = \max \left\{ \frac{|a_\nu|}{b_\nu} \right\}$, de Markovitch.

B. *Majorantes (de 1^{re} espèce) explicites :*

Notation : $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

1. $1 + \max \{ |a_\nu| \} \quad (1 \leq \nu \leq n) \quad (\text{Cauchy, 1829, [26]}).$

2. $\max \left\{ (n |a_\nu|)^{\frac{1}{\nu}} \right\} \quad (\text{Cauchy, 1829, [26]}).$

3. $(\sqrt[n]{1 + M^{-1}} - 1)^{-1}$, où $M = \max \left\{ \frac{|a_\nu|}{C_n^\nu} \right\}$.

Notation : C_n^ν = le $\nu^{\text{ème}}$ coefficient du binôme.

(Cité par Jules Tannery, 1906, [108].)

4. $\left(1 + \sum_{\nu=1}^n |a_\nu|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

(Cas particulier du théorème P.1 de Petrovitch, retrouvé indépendamment par Carmichael et Mason, 1914, [23], et connu sous leur nom.)

$$5. \quad \max \left\{ \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}, 2 \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \right\} \quad (0 < n < \infty).$$

(Kojima, 1914, [51]; démonstration initiale par l'inégalité des déterminants de Hadamard.)

$$6. \quad (2^n - 1)^{-1} \max \left\{ \left(\frac{|a_n|}{C_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\} \quad (\text{G. D. Birkhoff, 1915 [13]; Jensen [48]})$$

$$7. \quad \text{Pour toute suite de nombres } \lambda_n > 0, \text{ tels que } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \leq 1,$$

$$\max \left\{ (\lambda_n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \right\} \quad (\text{Fujiwara, 1916, [42]}).$$

Cette intéressante méthode a influencé plusieurs auteurs; voir, par exemple, Carmichael [24]. On sait, d'ailleurs, que plusieurs des résultats de la présente liste se démontrent aisément par cette méthode ([36], chap. III).

$$8. \quad \text{Pour tout couple } (p, q) \text{ de nombres positifs tels que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$\left[1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \quad (\text{Kuniyeda [39], Montel [79], [80]}).$$

$$9. \quad \max \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right)^{\frac{1}{n}}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right\};$$

donc,

$$\max \left\{ 1, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right\} \quad (\text{Montel [80]}).$$

$$10. \quad \text{Pour toute suite de nombres } \lambda_n > 0,$$

$$\max \left\{ |a_1| + \lambda_1, \frac{|a_2|}{\lambda_1} + \lambda_2, \frac{|a_3|}{\lambda_1 \lambda_2} + \lambda_3, \dots, \frac{|a_{n-1}|}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-2}} + \lambda_{n-1}, \frac{|a_n|}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}} \right\}.$$

(Kojima, 1917 [52]; voir aussi A.3.)

$$10b. \quad \max \{ 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|; |a_n| \} \quad (\text{Carmichael [24]}).$$

$$11. \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{Carmichael, 1917 [24]; il le démontre par deux voies différentes. Walsh le retrouve en 1924, [117], par une autre voie, et le résultat est souvent attribué à lui, seulement.})$$

$$12. \quad \text{Avec les notations de A.7, } q_1 + q_2 \quad (\text{Westerfield, 1931, [119]}).$$

13. $2 \max \left\{ |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \right\}$ (Montel, 1934, [82]).

14. $2 \max \left\{ \frac{|a_\nu|}{|a_{\nu-1}|} \right\}$ (Anghelutza, 1934, [4]; corollaire de A.9).

15. Pour tout $\lambda > 0$,

$$\left(\sqrt[n]{(1+\lambda)^{-1}} \right) \max \left\{ \left(\frac{|a_\nu|}{\lambda C_n^\nu} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right\} \quad (\text{Markovitch, 1939, [70]}).$$

16. Pour tout couple (m, m') de nombres > 1 tels que $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$, et pour tout $t > 0$,

$$t^{-1} \left[1 + \left(\sum_{\nu=1}^n |a_\nu|^m t^{m\nu} \right)^{\frac{m'}{m}} \right]^{\frac{1}{m'}} \quad (\text{Markovitch, 1939, [70]}).$$

17. Pour $\lambda_0 = 1$, $\lambda_n = 0$ et $\lambda_\nu > 0$ ($1 \leq \nu \leq n-1$),

$$\max \left\{ \frac{1+\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}} \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \right| \right\}.$$

(Cowling et Thron, 1954 [28]; nous avons retrouvé, indépendamment, ce résultat, par une voie différente, dans [125]. Voir aussi l'article [29], 1956, de Cowling et Thron.)

18. Pour toute n -ade de nombres $l_\nu > 0$ ($1 \leq \nu \leq n$),

$$\max \left\{ l_1 \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|, l_2 \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \right|, \dots, l_{n-1} \left| \frac{a_2}{a_1} \right|; \frac{\sum_{\nu=1}^n \prod_{\sigma=1}^{\nu} l_\sigma}{\prod_{\sigma=1}^n l_\sigma} |a_1| \right\}.$$

(Cowling et Thron, 1954 [28]; corollaire de 17.)

L'intéressante méthode 17-18 a permis à ses auteurs de démontrer simplement plusieurs des résultats de cette liste.

$$19. \max \left\{ 1, \frac{1}{2} \left[|a_1| + \left(|a_1|^2 + 4 \sum_{\nu=2}^n |a_\nu|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}.$$

(Corollaire du théorème [20] de A. Brauer pour les matrices, cité par M. Parodi dans [95], 1952 et dans [96], 1959.)

Il est évident que, quand le polynôme est *lacunaire*, plusieurs des résultats précédents se renforcent.

Notes historiques. — I. Le résultat intéressant B.3 (J. Tannery, 1906, [108]) n'est cité par aucun des auteurs de notre connaissance. II. Les méthodes

générales A.3 de Carmichael et B.10 de Kojima restent ignorées par la littérature (quoique les articles correspondants sont cités hors texte), tandis que le résultat assez particulier B.5 de Kojima est universellement cité. III. Le résultat B.11 de Carmichael-Walsh a occasionné plusieurs recherches; citons les démonstrations de Rudnicki (application de A.8, [104], 1934), de Markovitch ([70], 1939), d'Anghelutza ([5], 1941) et de Vythoulkas ([115], 1947). Westerfield l'a amélioré sensiblement (A.7 et B.12, 1933 et 1931).

On n'étudiera pas, dans ce chapitre, de majorantes (resp. minorantes) qui ne soient pas de première espèce.

Nous allons exposer maintenant une méthode qui, appliquée au cas particulier des polynômes, *permet de construire très simplement autant de majorantes (resp. minorantes) qu'on veut; elle permet, en particulier, de démontrer d'une manière uniforme tous les résultats de la liste B, et plusieurs résultats implicites, en les généralisant, le plus souvent.*

Il serait juste aussi facile — aux notations près — d'appliquer cette méthode, *énoncée pour les minorantes*, directement aux séries de Taylor (comme c'est le cas dans [124] et [125]); seulement, il n'est pas nécessaire de le faire puisque, en vertu du paragraphe 6, les dites extensions sont *a priori* valables (pourvu qu'on les énonce convenablement).

B'. — La méthode des fonctions décroissantes; applications.

PRINCIPE DE LA MÉTHODE. — On désignera par F l'ensemble des hypothèses suivantes : E et E' sont des ensembles *totalelement ordonnés*; $[a, b]$ est un segment de E; I et Λ sont des ensembles (quelconques) d'indices; i (resp. λ) parcourt I (resp. Λ); (x_i) [resp. (x_λ)] est une famille de variables qui parcourent $[a, b]$; $\sigma((x_\lambda); (x_i))$ est une fonction à valeurs dans E', *croissante par rapport à chaque x_λ et décroissante par rapport à chaque x_i* . Si $I \cup \Lambda$ est infini, on supposera en plus que σ est croissante (resp. décroissante) par rapport à (x_λ) (resp. x_i), au sens indiqué ci-dessous.

Notations. — Pour abréger, on écrira $\sigma(x_\lambda; x_i)$ au lieu de $\sigma((x_\lambda); (x_i))$. $\sigma(x; x)$ désignera la fonction $[a, b] \rightarrow E'$ qu'on obtient, quand on remplace chaque x_λ et chaque x_i par x . Si M_ν et M'_ν appartiennent à E, $(M_\nu) \leq (M'_\nu)$ signifiera : $M_\nu \leq M'_\nu$, quel que soit ν .

LEMME 3. — *Ajoutons aux hypothèses F l'hypothèse que les éléments (quelconques) $R_\lambda, R'_\lambda, M_i$ et M'_i de E vérifient les relations $(R_\lambda) \leq (R'_\lambda)$ et $(M_i) \leq (M'_i)$. Conclusion : $\sigma(R_\lambda; M'_i) \leq \sigma(R'_\lambda; M_i)$.*

Démonstration. — Quand on remplace, dans $\sigma(R_\lambda; M'_i)$, un seul R_λ par R'_λ , la valeur de σ ne diminue pas, puisque σ est croissante par rapport à x_λ ; même remarque, si l'on remplace, dans $\sigma(R_\lambda; M'_i)$, un seul M'_i par M_i . De là, on

démontre le lemme par une récurrence évidente, quand $I \cup \Lambda$ est fini. Le lemme est évident, si $I \cup \Lambda$ est infini ⁽¹⁾.

On désignera par F' l'ensemble des hypothèses suivantes : Ajoutons aux hypothèses F l'hypothèse que $E = E'$ et que E est un demi-groupe (monoïde) additif, totalement ordonné ($x \leq y$ entraînant $x + z \leq y + z$, quel que soit z), contenant un élément neutre (noté 0).

LEMME 4. — Ajoutons aux hypothèses F' les hypothèses : $g : [a, b] \rightarrow E$ est une fonction vérifiant la relation $g(x) + \sigma(x; x) = x$; $x_0 \in [a, b]$; R_λ (resp. r_λ) $\in [a, b]$ et $r_\lambda \leq x_0 \leq R_\lambda$. Conclusion : On a, quels que soient les éléments M_i de $[a, b]$ et l'élément $M \geq M_i$ (resp. $\mu \leq M_i$) de $[a, b]$,

$$\min \{ \mu, g(x_0) + \sigma(r_\lambda; M_i) \} \leq x_0 \leq \max \{ M, g(x_0) + \sigma(R_\lambda; M_i) \}.$$

Démonstration. — Considérons, par exemple, l'inégalité de gauche. Si $x_0 \leq \mu$, on a $\sigma(x_0; x_0) \geq \sigma(r_\lambda; \mu) \geq \sigma(r_\lambda; M_i)$, ce qui entraîne $x_0 \geq g(x_0) + \sigma(r_\lambda; M_i)$. Ce lemme simple entraîne le

THÉOREME 9. — Sous les hypothèses du lemme 4, toute racine ρ de l'équation $g(x) = 0$ vérifie les inégalités

$$(A) \quad \min \{ \mu, \sigma(r_\lambda; M_i) \} \leq \rho \leq \max \{ M, \sigma(R_\lambda; M_i) \}.$$

Dans le cas particulier où, quel que soit λ , σ est indépendante de x_λ , on peut mettre ces inégalités sous la forme

$$(B) \quad \min \{ \mu, \sigma(M_i) \} \leq \rho \leq \max \{ M, \sigma(M_i) \}.$$

L'intérêt des inégalités (A) et (B) réside aux faits : 1° que ρ ne figure plus dans les membres de gauche et de droite, et 2° que les M_i sont des éléments arbitrairement choisis de $[a, b]$.

REMARQUES. — 1. Même du point de vue « applications », la généralité des notions et des énoncés considérés ci-dessus est justifiée par plusieurs raisons ; la possibilité de définir des « sommes » non dénombrables dans certains demi-groupes totalement ordonnés (exemple : les nombres ordinaux) en constitue une, la notion d'intégrale définie par Banach dans [8] (intégrale définie sur toutes les parties d'un certain ensemble) en constitue une autre. Ces deux exemples seront étudiés ailleurs.

2. Désignons par H l'ensemble des hypothèses suivantes : E, E' et E'' sont des ensembles totalement ordonnés ; $[a, b] \subset E$, $(\gamma, \delta) \subset E'$; $J =$ ensemble quelconque ; $(I_j)_{j \in J}$ est une famille d'ensembles d'indices ; i_j parcourt I_j ; $(x_{i_j})_{i_j \in I_j}$ est une famille de variables qui parcourent $[a, b]$; φ_j est une fonction de toutes les

(1) En vertu de l'hypothèse supplémentaire introduite dans ce cas.

variables $x_{i_j} (i_j \in I_j)$, monotone par rapport à chacune d'elles, avec le même type de monotonie pour toutes; φ_j a (γ, δ) comme ensemble des valeurs. $(y_j)_{j \in J}$ est une famille de variables qui parcourent (γ, δ) ; $f((y_j)_{j \in J})$ est une fonction à valeurs dans E'' , monotone par rapport à y_j dans le sens contraire à celui de φ_j .

Les fonctions de la forme $f((\varphi_j))$ se présentant très souvent dans les inégalités « positives », il est utile de leur donner un nom; appelons-les « fonctions doublement monotones ».

Des exemples immédiats de telles fonctions sont fournis par les séries $\sum a_\nu x^{-\nu}$, les produits $\prod a_\nu x^{-\nu}$ (finis ou non) et par les sommes, produits, racines positives, etc. de telles fonctions, quand $a_\nu \in \mathbf{R}_+$ et ν parcourt une partie de $\mathbf{N}$; mais, ces exemples ne sont pas les seuls.

3. Le théorème 9 admet diverses généralisations; il suffit d'appliquer aux fonctions σ nos considérations de [425].

LEMME 5. — Ajoutons aux hypothèses F' l'hypothèse plus forte que E est un corps ordonné maximal et remplaçons « $= x$ » par « $= x^t$ » dans F' , avec $t \in \mathbf{Q}_+^*$ et $[a, b] \subset E_+$ si $t \neq 1$. L'hypothèse du lemme 4 entraîne alors les inégalités

$$\min \left\{ \mu, [g(x_0) + \sigma(r_\lambda; M_t)]^{\frac{1}{t}} \right\} \leq x_0 \leq \max \left\{ M, [g(x_0) + \sigma(R_\lambda; M_t)]^{\frac{1}{t}} \right\}.$$

PROPOSITION 9. — Sous les hypothèses du lemme 5, toute racine $\rho \in [a, b]$ de $g(x) = 0$ satisfait aux inégalités

$$(C) \quad \min \left\{ \mu, [\sigma(r_\lambda; M_t)]^{\frac{1}{t}} \right\} \leq \rho \leq \max \left\{ M, [\sigma(R_\lambda; M_t)]^{\frac{1}{t}} \right\}.$$

L'hypothèse qu'on a fait dans le lemme 5, permettrait de développer l'essentiel du paragraphe 10 pour un corps ordonné maximal quelconque E . Pour fixer les idées, nous choisissons $E = \mathbf{R}$, ci-dessous.

10. APPLICATIONS DE LA MÉTHODE. — Elles concernent le problème : Construire des majorantes de la fonctionnelle $\xi(a_1, \dots, a_n)$, définie par la racine positive ξ de l'équation

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad \text{où } a_\nu \in \mathbf{R}_+.$$

Formules générales. — Quand $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ (seul cas intéressant), ξ est aussi la racine positive de l'équation $x^t = a_1 x^{t-1} + \dots + a_n x^{t-n}$, où $0 < t \leq 1$. Cela conduit à poser

$$f(y_j) = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n;$$

$$\varphi_j(x_{i_j}) = \left(\prod_{i_j \in I_j} x_{i_j}^{\theta_{ij}} \right)^{-1}, \quad \text{où } \theta_{ij} > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i_j} \theta_{ij} = j - t.$$

L'application de la proposition 9 à $f(\varphi_j(x_{i_j}))$ donne alors

$$(10) \quad \xi \leq \max \left\{ M, \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{\prod_{i_j \in I_j} M_{i_j}^{\theta_{i_j}}} \right)^{\frac{1}{l}} \right\}, \quad \text{où } M = \max \{ M_{i_j} \}.$$

On peut considérer des produits $\prod x_{i_j}^{\theta_{i_j}}$ finis ou infinis; nous nous limitons ci-dessous au cas fini, dans lequel on va considérer divers cas particuliers de (10).

I. $\theta_{i_j} = 1$; $l = 1$. Notons alors : $I_j = \{(j, 1), \dots, (j, j-1)\}$. On obtient

$$(11) \quad \xi \leq \max \left\{ M, a_1 + \frac{a_2}{M_{21}} + \frac{a_3}{M_{31}M_{32}} + \dots + \frac{a_n}{M_{n1} \dots M_{n,n-1}} \right\}.$$

Choix particuliers des $M_{j\nu}$:

1. $M_{j\nu} = M$. Cela donne

$$(11.1) \quad \xi \leq \max \left\{ M, a_1 + \frac{a_2}{M} + \frac{a_3}{M^2} + \dots + \frac{a_n}{M^{n-1}} \right\}.$$

Remarque. — On utilise souvent le fait simple suivant :

$$a_1 + \frac{a_2}{M} + \dots + \frac{a_n}{M^{n-1}} \leq M$$

implique que $\xi \leq M$.

2. $M_{j\nu} = M_j$. Cela donne

$$(11.2) \quad \xi \leq \max \left\{ M_2, \dots, M_n; a_1 + \frac{a_2}{M_2} + \frac{a_3}{M_2^2} + \dots + \frac{a_n}{M_n^{n-1}} \right\}.$$

3. $M_{j\nu} = M_\nu$. Cela donne

$$(11.3) \quad \xi \leq \max \left\{ M_2, \dots, M_n; a_1 + \frac{a_2}{M_2} + \frac{a_3}{M_2 M_3} + \dots + \frac{a_n}{M_2 \dots M_n} \right\}.$$

Remarques. — 1. Il est, quelquefois, utile d'exprimer le résultat (11) comme il suit : Soit $J = \{1, \dots, n\}$, $I_j = \{(j, 1), \dots, (j, j)\}$ et $M = \max \{ M_{j\nu} \}$.

Alors, si

$$\frac{a_1}{M_{11}} + \frac{a_2}{M_{21}M_{22}} + \dots + \frac{a_n}{M_{n1} \dots M_{nn}} \leq 1,$$

on a $\xi \leq M$.

2. Sous la même hypothèse, on a l'inégalité plus forte

$$\xi \leq (a_1 M^{n-1} + a_2 M^{n-2} + \dots + a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

II. $J = \{1, \dots, n\}$, $I_j = \{j; (j, 1), \dots, (j, j)\}$; $\theta_j = -t$, $\theta_{jv} = 1$.

Alors,

$$(12) \quad \xi \leq \max \left\{ M, \left(\frac{a_1 M_1^t}{M_{11}} + \frac{a_2 M_2^t}{M_{21} M_{22}} + \dots + \frac{a_n M_n^t}{M_{n1} \dots M_{nn}} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Quand $t \rightarrow 0$, on retrouve la remarque 1.

La racine positive ξ de $x^n = a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ coïncide avec la racine positive de $x^2 = a_1 x + (a_2 + a_3 x^{-1} + \dots + a_n x^{2-n})$, donc, avec la racine positive de

$$x = \frac{1}{2} [a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4(a_2 + a_3 x^{-1} + \dots + a_n x^{2-n})}];$$

le second membre de cette équation étant de la forme $f(\varphi_j(x))$, on a

$$(13) \quad \xi \leq \max \left\{ M, \frac{1}{2} [a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4(a_2 + a_3 M_{31}^{-1} + a_4 M_{41}^{-1} M_{42}^{-1} + \dots + a_n M_{n1}^{-1} \dots M_{n,n-2}^{-1})}] \right\}.$$

Remarque. — La racine positive de l'équation

$$x = a + \sqrt[m_1]{b_1 + \frac{b_2}{x} + \dots + \frac{b_{n_1}}{x^{n_1}}} + \dots + \sqrt[m_s]{l_1 + \frac{l_2}{x} + \dots + \frac{l_{n_2}}{x^{n_2}}}$$

($a, b_{\mu}, \dots, l_{\nu}$ sont des constantes positives) vérifie une inégalité analogue à (13); cette remarque s'applique également à certaines fonctions algébriques explicites définies par des expressions algébriques plus compliquées.

L'inégalité de Hölder permettrait d'obtenir des nouvelles inégalités à partir des inégalités précédentes, tout comme dans le cas de Montel [82], Markovitch [71] et [125].

Appliquons maintenant les formules générales précédentes à la démonstration de certains résultats connus.

Applications de (I.1.4). — *Notation* : $F(M) = \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} M^{\nu-1}$.

1° Soit λ une constante > 0 et soit A le max $\{a_{\nu} \lambda^{\nu}\}$; alors, $a_{\nu} \leq A \lambda^{-\nu}$ et $F(M) \leq A \lambda^{-1} \sum_{\nu=1}^n (M \lambda)^{\nu-1}$; donc, si $M \lambda > 1$, on a

$$F(M) \leq A \lambda^{-1} \frac{1}{1 - (M \lambda)^{-1}} = A M (M \lambda - 1)^{-1};$$

alors, $M \geq F(M)$ équivaut à $M \geq \lambda^{-1}(1 + A)$. D'autre part, $M \geq \lambda^{-1}(1 + A)$ entraîne $M \lambda > 1$; donc, $M \geq \lambda^{-1}(1 + A)$ entraîne $M \geq F(M)$; par conséquent, $\xi \leq \lambda^{-1}(1 + A)$. C'est le théorème de Landau et Karamata (§ 8). Le cas particulier $\lambda = 1$ donne le théorème B.1 de Cauchy.

2° $\max \{1, F(1)\} = \max \left\{ 1, \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \right\}$; donc, $\xi \leq \max \left\{ 1, \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} \right\}$. Cela démontre la dernière partie du théorème B.9 de Montel.

3° Soient $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ des constantes positives (> 0) de somme 1 et soit Λ le max $\left\{ (a_\nu \lambda_\nu)^{\frac{1}{\nu}} \right\}$; alors, $a_\nu \leq \lambda_\nu^{-1} \Lambda^\nu$ et $F(M) \leq \Lambda \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu^{-1} \left(\frac{\Lambda}{M} \right)^{\nu-1}$. Le choix $M = \Lambda$ entraîne $F(M) \leq \Lambda \cdot 1 = M$; donc, $\xi \leq \max \left\{ (a_\nu \lambda_\nu)^{\frac{1}{\nu}} \right\}$. C'est le théorème B.7 de Fujiwara.

Remarques. — Les applications 1°, 2° et 3° de la méthode montrent clairement que sa généralité propre est au moins celle des séries de Taylor, la restriction au cas des polynômes étant tout à fait artificielle.

II. On a déjà remarqué (voir Dieudonné [36], chap. III) que les théorèmes B.2 de Cauchy, B.9 et B.13 de Montel peuvent être obtenus comme corollaires de B.7, pour les choix respectifs : 1° $\lambda_\nu = \frac{1}{n}$, 2° $\lambda_\nu = \frac{1}{a_\nu} \sum_{\nu=1}^n a_\nu$ et 3° $\lambda_\nu = \rho^\nu$, où $\rho'' = \rho^{n-1} + \rho^{n-2} + \dots + 1$. Il arriverait au même d'appliquer directement notre méthode.

4° Soit λ une constante positive (> 0) et soit $\alpha = \max \left\{ \left(\frac{a_\nu}{C_n^\nu} \right)^{\frac{1}{\nu}} \right\}$; alors, $a_\nu \leq \lambda C_n^\nu \alpha^\nu$ et

$$F(M) \leq \lambda M \sum_{\nu=1}^n C_n^\nu \left(\frac{\alpha}{M} \right)^\nu = \lambda M \left[\left(1 + \frac{\alpha}{M} \right)^n - 1 \right];$$

donc $M \geq F(M)$ équivaut à $M \geq \alpha \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]^{-1}$; donc,

$$\xi \leq \alpha \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]^{-1}.$$

C'est le théorème B.15, de Markovitch; le cas particulier $\lambda = 1$ donne le théorème B.6 de G. D. Birkhoff et Jensen.

5° Faisons le « changement de variable » $M = \rho \beta$, $\rho > 0$, où l'on a posé $\beta = \max \left\{ \frac{a_\nu}{C_n^\nu} \right\}$. Alors, $a_\nu \leq \beta C_n^\nu$ et $F(M) = \rho \beta^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^n - 1 \right]$. On a $M \geq F(M)$ équivaut à $\rho \beta \geq \rho \beta^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^n - 1 \right]$ équivaut à $M \geq \left[\left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]^{-1}$. Donc, $\xi \leq \left[\left(1 + \frac{1}{\beta} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]^{-1}$. C'est le théorème B.3 (J. Tannery [408]).

Remarque. — La majoration systématique de la somme $F(M)$ que nous avons fait dans les exemples précédents revient à une application tacite de la remarque faite après le corollaire 5.4. Certains procédés de Montel [82] et la méthode précitée de Markovitch ([70], [71]) pouvant également être considérés comme

des applications de cette remarque, cela explique les ressemblances que présentent certaines applications de ces méthodes.

6° Posons $d_v = \frac{a_v}{M^{v-1}}$ ($1 \leq v \leq n$); il suffit alors d'avoir $M \leq \sum_{v=1}^n d_v$, pour qu'on ait $\xi \leq \sum_{v=1}^n d_v$; il suffit donc d'avoir : $M^{m-1} \leq \left(\sum_{v=1}^n d_v \right)^{m-1}$ ($2 \leq m \leq n$), ce qui équivaut à $\frac{a_m}{d_m} \leq \left(\sum_{v=1}^n d_v \right)^{m-1}$; cette dernière inégalité sera *a fortiori* satisfaite si l'on a $a_m = d_m^{m-1} \sum_{v=1}^n d_v$. Cela démontre le théorème A.8 de Rudnicki.

Application de (11.2). — Le choix $M_v = a_v^{\frac{1}{2}}$ ($2 \leq v \leq n$) donne

$$\xi \leq \max \left\{ a_2^{\frac{1}{2}}, \dots, a_n^{\frac{1}{n}}; a_1 + \frac{a_2}{a_2^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{a_n}{a_n^{\frac{1}{n}}} \right\} = a_1 + a_2^{\frac{1}{2}} + \dots + a_n^{\frac{1}{n}}.$$

C'est le théorème B.11 de Carmichael et Walsh.

Applications de (11.3). — 1° Faisons dans (11.3) le changement des variables $M_v = \mu_v^{-1} \frac{a_v}{a_{v-1}}$ ($2 \leq v \leq n$). Cela donne

$$(11.3 b) \quad \xi \leq \max \left\{ \mu_2^{-1} \frac{a_2}{a_1}, \dots, \mu_n^{-1} \frac{a_n}{a_{n-1}}; (1 + \mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \dots + \mu_2 \dots \mu_n) a_1 \right\}.$$

Si l'on pose $\mu_v^{-1} = l_{n-v}$, (11.3b) devient le théorème B.18 de Cowling et Thron.

2° Le changement des variables $\mu_v^{-1} = \frac{1 + \lambda_v}{\lambda_{v-1}}$ ($2 \leq v \leq n-1$), $\mu_v^{-1} = \lambda_{n-1}$, avec $\lambda_v > 0$, donne

$$\mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \dots + \mu_2 \dots \mu_n = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3)} + \dots + \frac{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_{n-1})}.$$

Cette somme est $< \lambda_1$ car, le coefficient de λ_1 dans le numérateur de la fraction obtenue ne contient pas tous les termes, par hypothèse > 0 , du développement du produit $(1 + \lambda_2) \dots (1 + \lambda_{n-1})$. Donc,

$$\xi \leq \max \left\{ \frac{1 + \lambda_v}{\lambda_{v-1}} \frac{a_v}{a_{v-1}} (2 \leq v \leq n-1), \frac{1}{\lambda_{n-1}} \frac{a_n}{a_{n-1}}; (1 + \lambda_1) a_1 \right\};$$

c'est le théorème B.17 de Cowling et Thron; le cas particulier $\lambda_v = 1$ donne le théorème B.5 de Kojima. Voir aussi [125].

3° Posons $\mu_v = \rho^{-1}$. Alors, $\mu_2 + \mu_2 \mu_3 + \dots + \mu_2 \dots \mu_n = \rho^{-1} + \rho^{-2} + \dots + \rho^{1-n}$; donc, si ρ est la racine positive de l'équation $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1$, on a

$1 + \mu_2 + \dots + \mu_2 \dots \mu_n = \rho$ et $\xi \leq \rho \max \left\{ \frac{a_v}{a_{v-1}} \right\}$. C'est le théorème A.9 de Anghelutza.

4° Le choix $\mu_v^{-1} = 2 (2 \leq v \leq n-1)$, $\mu_n = 1$ donne directement le théorème B.5.

Revenons à la formule générale (11.3).

5° Le changement des variables $M_v = \frac{a_v}{\lambda_1 \dots \lambda_{v-1}} + \lambda_v (2 \leq v \leq n-1)$, $M_n = \frac{a_n}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}$, avec $\lambda_v > 0$, donne

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a_2}{M_2} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{M_2} = \frac{a_2}{M_2} + \frac{a_3}{M_2 M_3} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{M_2 M_3} \\ &= (\text{démonstration par induction}) \frac{a_2}{M_2} + \frac{a_3}{M_2 M_3} + \dots + \frac{a_n}{M_2 \dots M_n}. \end{aligned}$$

D'où

$$\xi \leq \max \left\{ \frac{a_v}{\lambda_1 \dots \lambda_{v-1}} + \lambda_v (2 \leq v \leq n-1), \frac{a_n}{\lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}; a_1 + \lambda_1 \right\}.$$

C'est le théorème B.10 de Kojima. Le choix particulier $\lambda_v = 1$ donne le théorème B.10 b qui améliore légèrement B.4.

Remarque. — L'intéressante identité $\lambda_1 = \frac{a_2}{M_2} + \dots + \frac{a_n}{M_2 \dots M_{n-1}}$ reste vraie dans tout corps commutatif, pourvu que les M_v et les λ_v soient non nuls.

6° Le choix $\lambda_v = \max \left\{ a_{\frac{1}{v+1}}, \dots, a_{\frac{1}{n}}; a_1, \dots, a_{\frac{1}{v-1}} \right\} (1 \leq v \leq n-1)$, dans 5°, démontre que $\xi \leq \max \left\{ a_1 + \lambda_1, a_2^{\frac{1}{2}} + \lambda_2, \dots, a_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} + \lambda_{n-1}; a_n^{\frac{1}{n}} \right\}$, résultat un peu plus fort que le théorème B.12 de Westerfield.

Application de (13). — Le choix $M_{j_v} = 1$ donne

$$\xi \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{2} [a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4(a_2 + \dots + a_n)}] \right\}.$$

C'est le théorème B.19 que Parodi démontre dans [95] comme corollaire d'un théorème [20] de A. Brauer pour les majorants des modules des valeurs caractéristiques d'une matrice d'ordre n .

Emploi de l'inégalité de Hölder. — 1. Soient $c_v (1 \leq v \leq n)$ des constantes > 0 arbitrairement choisies; comme $\frac{a_1}{c_1} \frac{c_1}{M_{11}} + \dots + \frac{a_n}{c_n} \frac{c_n}{M_{nn}} \leq 1$ entraîne $\xi \leq M$, on a alors que, *a fortiori*, pour tout couple (k, k') de nombres > 0 tels que $k^{-1} + k'^{-1} = 1$,

$$\left[\left(\frac{a_1}{c_1} \right)^k + \dots + \left(\frac{a_n}{c_n} \right)^k \right]^{\frac{1}{k}} \left[\left(\frac{c_1}{M_{11}} \right)^{k'} + \dots + \left(\frac{c_n}{M_{11} \dots M_{nn}} \right)^{k'} \right]^{\frac{1}{k'}} \leq 1$$

entraîne que $\xi \leq M = \max \{M_{\nu\sigma}\}$. (On pourrait aussi formuler d'autres implications, analogues à celle-ci.) Cela démontre, pour $c_\nu = c$ et

$$M_{\nu\sigma} = c^{-1} \left[1 + \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^k t^{k\nu} \right)^{\frac{k'}{k}} \right]^{\frac{1}{k'}},$$

le théorème B.16 de Markovitch, généralisation du théorème P.1 de Petrovitch. L'emploi des paramètres c_ν et, essentiellement, l'idée de cette démonstration sont dus à Markovitch [71].

2. Soit ξ la racine positive de l'équation $a_0 = \sum_{\nu=1}^n a_\nu x^\nu$, $a_\nu \geq 0$, $a_0 = 1$ et $a_n \neq 0$. Soit θ un nombre $\in [0, 1[$ et soit (k, k') le couple considéré dans 1.

Alors, ξ majore la racine positive ρ de l'équation

$$a_0 = \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^k x^{\theta k \nu} \right)^{\frac{1}{k}} (x^{(1-\theta)k'})^{\frac{1}{k'}};$$

donc, si $\xi < 1$, ξ majore la racine positive ρ_1 de l'équation

$$1 = \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^k x^{\theta k \nu} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{x^{(1-\theta)k'}}{1 - x^{(1-\theta)k'}} \right)^{\frac{1}{k'}};$$

si l'on pose $\Phi(x) = \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^k x^{\theta k \nu} \right)^{\frac{1}{k}}$, ρ_1 est aussi la racine positive de

$\frac{1}{x^{(1-\theta)k'}} = 1 + \Phi(x)$, donc également de $\frac{1}{x} = (1 + \Phi(x))^{\frac{1}{(1-\theta)k'}}$. En posant $y = x^{-1}$,

nous passons maintenant au cas des majorants de la racine positive $\bar{\xi}$

de $a_0 y^n = \sum_{\nu=1}^n a_{n-\nu} y^\nu$, puisque $\bar{\xi}$ est majorée par la racine positive de

$y = [1 + \Phi(y^{-1})]^{\frac{1}{(1-\theta)k'}}$. Or, $\Phi(y^{-1})$ est doublement monotone. Donc,

$$(14) \quad \bar{\xi} \leq \max \left\{ 1, M, \left(1 + \left[\sum_{\nu=1}^n a_\nu^k (M_{\nu 1}^{-1} \dots M_{\nu n}^{-1})^{\theta k} \right]^{\frac{k'}{k}} \right)^{\frac{1}{k(1-\theta)}} \right\} \quad (M = \max \{M_{\nu\sigma}\}).$$

Pour $\theta = 0$ et $M_{\nu\sigma} = 1$, (14) donne le théorème B.8 de Kuniyeda et Montel; voir aussi [125].

Remarque. — Comme le cas $k = k' = 2$ de ce théorème coïncide avec le théorème P.1 de Petrovitch (ou, de Carmichael-Mason) pour les polynômes et comme le théorème B.8 pour les minorantes s'étend (en vertu du paragraphe 6) aux séries de Taylor, il s'ensuit que B.8 généralise P.1, même dans le cas des séries; même remarque pour le théorème B.16 de Markovitch, par rapport à P.1.

Nouveaux résultats. — Les inégalités générales (11)-(14) permettent de construire autant de majorantes qu'on veut. En voici certains choix, faits au hasard :

1. (11.1) donne pour $M = 2$:

$$\xi \leq \max \left\{ 2, a_1 + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} \right\}.$$

2. (11.2) donne, pour $M_\nu = a_\nu^{\frac{1}{\nu-1}}$ ($2 \leq \nu \leq n$) :

$$\xi \leq \max \left\{ a_\nu^{\frac{1}{\nu-1}} (2 \leq \nu \leq n; a_1 + n) \right\}.$$

3. (11.3 b) donne, pour $\mu_\nu = 1$ ($2 \leq \nu \leq n$) :

$$\xi \leq \max \left\{ \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} (2 \leq \nu \leq n); na_1 \right\}.$$

Si l'on veut obtenir des majorantes de la forme considérée traditionnellement, le corollaire suivant de (11.2) est assez suggestif :

Si l'on subdivise la suite $a_2, \dots, a_n$, de façon tout à fait arbitraire, en des sous-suites $a_{l_1^{(1)}}, \dots, a_{l_{\nu^{(1)}}^{(1)}}; a_{l_1^{(m)}}, \dots, a_{l_{\nu^{(m)}}^{(m)}}$ (les indices d'une même sous-suite vont en croissant) et si l'on fait le changement de variables défini par

$$M_{l_\sigma^{(k)}}^{l_\sigma^{(k)}-1} = c_k \left(\sum_{\sigma=1}^{\nu^{(k)}} a_{l_\sigma^{(k)}} \right)^{y_k} \quad (\sigma = 1, \dots, \nu^{(k)}; k = 1, \dots, m),$$

les variables M_l et c_k étant positives et les y_k réelles, on a

$$(15) \quad \xi \leq \max \left\{ \left[c_k \left(\sum_{\sigma=1}^{\nu^{(k)}} a_{l_\sigma^{(k)}} \right) \right]^{\frac{y_k}{l_1^{(k)}-1}}, \left[c_k \left(\sum_{\sigma=1}^{\nu^{(k)}} a_{l_\sigma^{(k)}} \right) \right]^{\frac{y_k}{l_{\nu^{(k)}}^{(k)}-1}} \quad (k = 1, \dots, m); \right. \\ \left. a_1 + c_1^{-1} \left(\sum_{\sigma=1}^{\nu^{(1)}} a_{l_\sigma^{(1)}} \right)^{1-y_1} + \dots + c_m^{-1} \left(\sum_{\sigma=1}^{\nu^{(m)}} a_{l_\sigma^{(m)}} \right)^{1-y_m} \right\}.$$

Plusieurs des majorantes de la liste B sont des cas particuliers de (15).

(15) entraîne le corollaire (15 b) :

Hypothèse supplémentaire :

$$\begin{aligned} \text{Si } \sum_{\sigma=1}^{\nu(k)} a_{l_{\sigma}^{(k)}} &\leq 1, & y_k &\geq \frac{l_{\nu(k)}^{(k)} - 1}{l_{\nu(k)}^{(k)}}; \\ \text{si } \sum_{\sigma=1}^{\nu(k)} a_{l_{\sigma}^{(k)}} &\geq 1, & y_k &\leq \frac{l_1^{(k)} - 1}{l_1^{(k)}}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$(15 b) \quad \xi \leq a_1 + \left(\sum_{\sigma=1}^{\nu(1)} a_{l_{\sigma}^{(1)}} \right)^{1-y_1} + \dots + \left(\sum_{\sigma=1}^{\nu(k)} a_{l_{\sigma}^{(k)}} \right)^{1-y_m}.$$

Applications de (15 b). — 1° Subdivision : $m = 1$. Si, alors,

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{n-1}{n} & \text{quand } \sum_{j=2}^n a_j &\leq 1, \\ y &\leq \frac{1}{2} & \text{quand } \sum_{j=2}^n a_j &\geq 1, \end{aligned}$$

on a

$$\xi \leq a_1 + \left(\sum_{j=2}^n a_j \right)^{1-y}.$$

($y = 0$ donne la majorante B.9 de Montel.)

2° Subdivision : $\nu^{(k)} = 1$; $k = 1, \dots, n-1$. Alors, si

$$\begin{aligned} y_k &\leq \frac{k}{k+1} & \text{quand } a_{k+1} &\geq 1, \\ y_k &\geq \frac{k}{k+1} & \text{quand } a_{k+1} &\leq 1, \end{aligned}$$

on a

$$\xi \leq a_1 + a_2^{1-y_1} + \dots + a_n^{1-y_n}.$$

(Ceci est également un corollaire du théorème B.11; ce dernier correspond à $y_k = \frac{k}{k+1}$, d'où sa perfection.)

Application de (15). — Subdivision : $m = 1$. Alors,

$$(15.1) \quad \xi \leq \max \left\{ \left[c \left(\sum_{j=2}^n a_j \right)^y \right]^{\frac{1}{y}} \mid (1 \leq y \leq n-1); a_1 + c^{-1} \left(\sum_{j=2}^n a_j \right)^{1-y} \right\}.$$

Application de (15.1). — 1° $c = 1$ et $y = 0$ donnent la dernière assertion de B.9.

2° $y = 0$ donne $\xi \leq \max \left\{ c, c^{\frac{1}{n-1}}, a_1 + c^{-1} \left(\sum_{j=2}^n a_j \right) \right\}$. Le choix particulier $c = \sum_{j=2}^n a_j$ donne, enfin, $\xi \leq \max \left\{ \sum_{j=2}^n a_j, 1 + a_1 \right\}$ [ce qui résulterait aussi du choix : $c = 1$ et $y = 1$, dans (15.1)]. Ce dernier résultat admet une généralisation très simple : *Subdivisons la suite $a_2, \dots, a_n$ en deux sous-suites, (a_μ) et $(a_{\nu_0+\nu})$, l'ensemble $\{a_\mu\}$ pouvant éventuellement être vide; alors,*

$$(15.2) \quad \xi \leq \max \left\{ 1 + a_1 + \sum_{\mu} a_{\mu}, \sqrt[n_0]{\sum_{\nu} a_{\nu_0+\nu}} \right\}.$$

COROLLAIRE :

$$(15.2b) \quad \xi \leq \max \left\{ 1 + a_1 + \sum_{\mu} a_{\mu}, \sum_{\nu} a_{\nu_0+\nu} \right\}.$$

Le résultat reste vrai quand $\{a_{\nu_0+\nu}\}$ est vide, mais il est alors un corollaire des théorèmes B.1 et B.9.

Remarque. — (15) est utile surtout pour *suggérer* des propositions. La démonstration directe de celles-ci, à partir de (11.2) est ensuite, souvent immédiate; par exemple, (15.1) résulte du corollaire suivant de (11.2) :

$$\xi \leq \max \left\{ M \geq 1, \frac{\sum_{\mu} a_{\mu}}{1} + \frac{\sum_{\nu} a_{\nu_0+\nu}}{M^{n_0-1}} \right\}.$$

CHAPITRE II.

LOCALISATION DES ZÉROS DES POLYNOMES DANS UN CORPS COMMUTATIF DE CARACTÉRISTIQUE QUELCONQUE.

A'. — Définition et propriétés des $d. c.$

1. PRÉLIMINAIRES. — *Terminologie, notations* : $E - A =$ complémentaire de l'ensemble $E \cap A$ par rapport à E ; dans le cas où E est muni d'une loi de groupe additif et où $A \subset E$, l'ensemble des éléments $x - y$ de E , avec $x \in E$ et $y \in A$, sera noté $E + (-A)$; si $A = \{a\}$, où $a \in E$, on abrégera $(-\{a\})$ en $(-a)$.

En ce qui concerne les termes habituels, ils sont, pour la plupart, empruntés à Bourbaki; ainsi, on appellera *permutation* d'un ensemble E une application biunivoque de E sur lui-même; fonction = application.

L'ensemble $\mathbf{C}$, muni de la topologie habituelle, et $\mathbf{R}^2$ seront identifiés, en tant qu'espaces topologiques, et on les appellera *plan complexe*. On appellera *cercles* les disques de ce plan. Le compactifié $\mathbf{C} \cup \{\omega\}$ de $\mathbf{C}$ (par adjonction d'un point à l'infini ω), muni de la structure algébrique de *corps projectif*, sera noté $\mathbf{C}_\omega$; nous appellerons « d. c. » de $\mathbf{C}_\omega$:

Les parties de $\mathbf{C}(\emptyset, \mathbf{C}$, les cercles ou demi-plans ouverts et leurs réunions avec une partie connexe de leur frontière).

Les complémentaires de ces ensembles dans $\mathbf{C}_\omega$.

« d. c. » rappelle le terme « domaine circulaire », utilisé quelquefois dans la théorie des fonctions analytiques (Montel [85]) pour désigner ces ensembles.

Notation : $\mathcal{O}(\mathbf{C}_\omega)$ = ensemble des d. c. de $\mathbf{C}_\omega$.

Notion usuelle de *convexité*, par rapport à $\mathbf{R}$, dans $\mathbf{C}$; $B_{\mathbf{C}}$ = ensemble des parties convexes de $\mathbf{C}$.

On ne considérera que des zéros de la fonction $f(x)$ contenus dans son ensemble de définition, et différents de ω .

Le même symbole « = » sera utilisé dans les identités et dans les équations, le texte permettant de faire la distinction.

Toutes les fois que nous introduirons une notion nouvelle, elle sera désignée par une combinaison de lettres (par exemple, « s. e. », « d. e. »), que nous spécifierons.

PROPRIÉTÉS DES D. C. — I. *Tout d. c. ne contenant pas ω est convexe*. II. *Si $\zeta \in \mathbf{C}$, la permutation φ_ζ de $\mathbf{C}_\omega$, définie par $\varphi_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$, transforme tout d. c. ne contenant pas ζ en un d. c. ne contenant pas ω , donc en une partie convexe de $\mathbf{C}$.*

III. *La permutation f de $\mathbf{C}_\omega$, définie par $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (appelée « homographie »), où $ac \neq bd$, induit une permutation de $\mathcal{O}(\mathbf{C}_\omega)$; c'est-à-dire, f échange les d. c. entre eux (« f transforme les cercles en cercles »).*

Ces propriétés sont à la base de plusieurs résultats classiques; il y a donc intérêt à généraliser ces propriétés à des structures moins fortes que celle de $\mathbf{C}$; pour cela, il est nécessaire de généraliser la notion de d. c. La définition que nous proposons s'inspire du théorème suivant : *Soit A une partie de $\mathbf{C}_\omega$; si, quel que soit $\zeta \in \mathbf{C} - A$, $\varphi_\zeta(A)$ est convexe, alors A est un d. c.*

Donc, la propriété II caractérise $\mathcal{O}(\mathbf{C}_\omega)$ dans $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbf{C}_\omega))$.

Le théorème cité est un cas particulier des théorèmes 2 et 2b du chapitre III.

2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES D. E. — Considérons un corps quelconque K , non nécessairement commutatif; adjoignons à K un élément « infini » ω , et munissons $K \cup \{\omega\}$ de la structure suivante, dite de *corps projectif* : 1° la partie K de $K \cup \{\omega\}$ garde sa structure initiale de corps; 2° pour tout $a \in K$, $a + \omega = \omega + a = \omega$; pour tout $a \in K - \{0\}$, $a\omega = \omega a = \omega$; et 3° $0^{-1} = \omega$, $\omega^{-1} = 0$.

Notation : φ_ζ = la permutation de K_ω définie par $\varphi_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$.

DÉFINITION 1. — Une partie B de $\mathfrak{P}(K)$ sera dite « S-ensemble » si l'on a :
 1° $\emptyset \in B$, $K \in B$ et, pour tout $x \in K$, $x \in B$; 2° $B + x = xB = Bx = B$ ⁽¹⁾.
 Les éléments de B seront appelés « s. e. ».

Notation : $(K_\omega, B) = K_\omega$ muni de B .

Exemples de S-ensembles. — 1° B_C ; 2° Les traces des d. c. de C_ω sur C .

Définition. — Une permutation de K_ω sera appelée *homographie de pôle ζ* si elle est de la forme $z' = (az + b)(z - \zeta)^{-1}$, avec $b + a\zeta \neq 0$, où $(a, b, \zeta) \in K^3$, ou de la forme $z' = (z - \zeta)^{-1}(za + b)$, avec $b + \zeta a \neq 0$.
 Chaque homographie est bijective et son application réciproque est également une homographie.

DÉFINITION 2. — (K_ω, B) est donné. Une partie A de K_ω sera appelée « d. e. » si elle est soit un des ensembles $\emptyset$, K , K_ω , soit telle que : 1° pour tout $\zeta \in K - A$, $\varphi_\zeta(A)$ est un s. e., et 2° si A n'est pas un s. e., $\omega \in A$.

Notation : $\mathcal{O}(K_\omega, B)$ = ensemble des d. e. de (K_ω, B) .

Les hypothèses $B + x = Bx = xB = B$ et les identités par rapport à $z \in K - \{0\}$:

$$(az + b)(z - \zeta)^{-1} = a + (a\zeta + b)(z - \zeta)^{-1}, \quad (z - \zeta)^{-1}(za + b) = a + (z - \zeta)^{-1}(\zeta a + b)$$

montrent que si A est un d. e. $\nexists \zeta$, toute homographie de pôle ζ le transforme en un s. e.; on pourrait donc remplacer, dans la définition 2, φ_ζ par une homographie de pôle ζ .

Pour $(a, \zeta) \in K^2$, on a les identités par rapport à $z \in K$:

$$z + a - (\zeta + a) = z - \zeta, \quad az - a\zeta = a(z - \zeta), \quad za - \zeta a = (z - \zeta)a;$$

ceci démontre que chacune des homographies spéciales $z' = az + b$, $z' = za + b$ ($a \neq 0$) induit une permutation de $\mathcal{O}(K_\omega, B)$; en fait, il y a plus :

THÉOREME 1. — Chaque homographie induit une permutation de $\mathcal{O}(K_\omega, B)$.

Donc, chaque homographie transforme les d. e. en d. e.

Démonstration. — Puisque les homographies sont des applications bijectives et que leurs applications réciproques sont également des homographies, il suffit de démontrer que chaque homographie transforme les d. e. en d. e. Ce fait étant déjà démontré pour $z' = az + b$ et $z' = za + b$, il suffit de le démontrer pour $z' = (\zeta - z)^{-1}$, avec $\zeta \neq \omega$.

(1) Dans cette notation abrégée $B + x$ signifie, en fait, la famille des $E + \{x\}$, où $E \subset K$ parcourt B . Le sens de Bx et xB est analogue.

Soit A un d. e. et $\xi \in K - \varphi_\zeta(A)$; nous avons à montrer que : 1° $\varphi_\xi(\varphi_\zeta(A))$ est un s. e., et 2° si $\varphi_\zeta(A)$ n'est pas un s. e., $\omega \in \varphi_\zeta(A)$. Or, on a

$$\varphi_\xi \varphi_\zeta(z) = \begin{cases} (\alpha) & \xi^{-1}[(\zeta - \xi^{-1}) - z]^{-1}(\xi - z) & \text{si } \xi \neq 0, \\ (\beta) & z - \zeta & \text{si } \xi = 0; \end{cases}$$

$$\varphi_\zeta(\zeta - \xi^{-1}) = \xi \in K_\omega - \varphi_\zeta(A);$$

$$K_\omega - \varphi_\zeta(A) = \varphi_\zeta(K_\omega - A) \quad (\varphi_\zeta \text{ étant bijective}).$$

Dans tous les cas, si $\varphi_\zeta(A)$ n'est pas un s. e., $\zeta \in A$ et, par conséquent, $\omega \in \varphi_\zeta(A)$.

Dans le cas (α) , $\varphi_\xi \varphi_\zeta$ est une homographie de pôle $\zeta - \xi^{-1} \in K - A$, donc $\varphi_\xi \varphi_\zeta(A)$ est un s. e. Dans le cas (β) , $\varphi_\xi \varphi_\zeta$ est la translation $z - \zeta$; alors, si $\varphi_\xi \varphi_\zeta(A)$ n'était pas un s. e., A aussi ne serait pas un s. e., donc $\omega \in A$, donc $0 \in \varphi_\zeta(A)$ contrairement à l'hypothèse $0 = \xi \in K - \varphi_\zeta(A)$; donc, $\varphi_\xi \varphi_\zeta(A)$ est un s. e.

Le théorème 1 généralise le résultat classique : Les homographies transforment les domaines circulaires (les d. c.) du plan complexe en des domaines circulaires.

Les raisons de ce théorème sont donc assez algébriques.

Pour tout $a \in K_\omega$, $\{a\}$ et $K_\omega - \{a\}$ sont, trivialement, des d. e.

Remarque. — Pour chaque $x \in K_\omega$, posons $V(x) =$ ensemble des d. e. $\ni x$. $(V(x))_{x \in K_\omega}$ a les propriétés :

- a. Pour tout $a \neq \omega$, $V(x + A) = V(x) + a$.
- b. Pour tout $a \neq 0, \omega$, $V(ax) = aV(x)$ et $V(xa) = V(x)a^{(1)}$.
- c. $V(x^{-1}) = [V(x)]^{-1}$ (= ensemble des images réciproques des d. e. $\ni x$).

Il suffit donc de connaître un seul $V(x)$ pour les connaître tous.

Les conséquences apparaîtront plus clairement dans le paragraphe 4.

3. EXEMPLES :

E.1. $B = \{K\} \cup \{\{x\}; x \in K\} \cup B_0$, où $B_0 =$ ensemble des parties de K de même nombre cardinal a ($a \leq$ du nombre cardinal de K). Alors,

$$\omega(K_\omega, B) = \{\emptyset\} \cup \{K_\omega\} \cup \{\{x\}; x \in K_\omega\} \cup \{K_\omega - \{x\}; x \in K_\omega\} \cup B_1,$$

où $B_1 =$ ensemble des parties de K_ω de cardinal a .

E.2. Soient k_0 un corps intermédiaire entre $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$, et K un surcorps de k_0 . $B =$ ensemble des parties convexes, par rapport à k_0 , de K .

(¹) Dans cette notation abrégée $V(x) + a$ signifie, en fait, la famille des $E + \{a\}$, où E parcourt l'ensemble $V(x)$ des d. e. contenant x .

E.3. Le même K que dans E.2. $B =$ ensemble des parties de K pouvant être mis sous la forme $A \cup \Gamma$, où $A \cap \Gamma = \emptyset$, A est soit vide, soit convexe, et Γ est un ensemble de cardinal $\leq a$.

E.4. On définira maintenant une notion de « convexité » dans un espace vectoriel U dont le corps des scalaires k est de caractéristique *quelconque*.

Notation : $\mathbf{I}_p =$ anneau des entiers modulo p .

DÉFINITION 3. — Soit U un espace vectoriel sur un corps commutatif k de caractéristique p (resp. 0). On dira qu'une partie A de U est « p -convexe »

(resp. « 0-convexe ») si, *quels que soient* $\left[\begin{array}{l} \text{les entiers } m \not\equiv 0 \text{ et } n \not\equiv 0 \pmod{p} \\ \text{(resp. } m > 0 \text{ et } n > 0), \text{ la suite } \mu_1, \dots, \mu_m \text{ d'entiers quelconques (resp. } \geq 0) \\ \text{avec } \sum_{i=1}^m \mu_i = n, \text{ et la suite } a_1, \dots, a_m \text{ de points de } A \end{array} \right]$ le point x défini par $nx = \sum_{i=1}^m \mu_i a_i$ appartient à A . Convention : $\emptyset$ est p (resp. 0)-convexe.

Abréviation. — On désignera aussi 0 par p , dans « 0-convexe ».

L'ensemble des parties p -convexes de U , muni de l'intersection ensembliste, est un $\cap$ -demi-treillis complet, ayant $\emptyset$ (resp. U) comme élément minimal (resp. maximal). Si $E \subset U$, on appellera l'intersection de toutes les parties p -convexes contenant E , « enveloppe p -convexe » de E .

(Comparer la définition 3 à la définition donnée dans [18], chap. II, p. 69.)

Remarques. — 1. Il reviendrait au même de prendre $m = 2$, dans la définition 3.

2. Soit A une partie p -convexe de U . 1^{er} cas : $p \neq 0$. Alors, si A contient deux points distincts, il contient *au moins* p points distincts. [*Démonstration* : Soit $(a, b) \in A^2$ et $b \neq a$. Les p points de A , $\nu^{-1}(a + (\nu - 1)b)$, où ν décrit $\mathbf{I}_p - \{0\}$, sont tous distincts.] Ainsi, si $U = \mathbf{I}_p$, $A = \mathbf{I}_p = U$. 2^e cas : $p = 0$. Alors, si $(a, b) \in A^2$ et $b \neq a$, le segment rationnel $[a, b] \subset A$.

Soit K un corps et k un sous-corps commutatif non trivial de K . Quand on considère K comme un espace vectoriel sur k , on peut aussi considérer les parties p -convexes de K . Leur ensemble est manifestement un S -ensemble; notons-le Γ_K . Γ_K ne dépend pas du choix de $k \subset K$.

E.5. Soit M une partie fixe d'un corps commutatif K , avec $(0, 1) \in M^2$. $B =$ ensemble des parties A de K telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'appartenance des éléments $a_1, \dots, a_n$ à A implique l'appartenance de $\sum_{i=1}^n \mu_i a_i$ à A , quelle que soit la suite $\mu_1, \dots, \mu_n$ d'éléments de M satisfaisant à $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$.

Γ_K est un exemple d'un tel S-ensemble B.

C'est encore un $\cap$ -demi-treillis complet, etc.

4. HYPOTOPOLOGIE; L'HYPOTOPOLOGIE DES D. E.

DÉFINITION. — *Un ensemble $\mathfrak{E}$ des parties d'un ensemble E définit sur E une structure « hypotopologique » (une « hypotopologie ») s'il est un $\cup$ -demi-treillis complet, contenant $\emptyset$ et E. Les éléments de $\mathfrak{E}$ seront appelés ensembles ouverts de l'hypotopologie définie par $\mathfrak{E}$.*

Définissons les notions d'*ensemble fermé*, de *voisinage*, d'*adhérence*, etc. de la même manière qu'on les définit dans la topologie générale à partir des ouverts (texte de référence : Bourbaki [18], chap. I). Ainsi, dans l'hypotopologie, les voisinages d'un point vérifient tous les axiomes de la topologie pour les voisinages sauf, éventuellement, l'axiome des intersections finies.

On peut vérifier facilement que la majorité des « théorèmes » et des « propositions » contenues dans le chapitre I du texte cité expriment des propriétés *hypotopologiques*.

Les rapports de l'hypotopologie avec les « closure relations » de E. H. Moore (voir [14], p. 49) sont évidents; O. Ore ([93], [94]) a mis en relief l'importance de la notion et il en a approfondi les conséquences générales. Il utilise une autre terminologie. L'existence, actuellement, du texte cité de Bourbaki nous a permis de faire une vérification systématique du fait qu'une grande partie de la topologie générale est de caractère hypotopologique.

Application. — La remarque de la fin du paragraphe 2 suggère de considérer l'hypotopologie suivante sur K_ω : *ensemble des voisinages de $x \in K_\omega$ = ensemble des parties de K_ω contenant au moins un d. e. $\ni x$ non réduit à $\{x\}$.* (On suppose toujours que B est donné d'avance.)

Dans les notations du paragraphe 2, $V(x) - \{x\}$ est alors un système fondamental de voisinages de x [nous avons préféré $V(x) - \{x\}$ à $V(x)$ car ce dernier choix donnerait toujours la topologie discrète]; les homographies sont des homéomorphismes puisque, en vertu de la dite remarque, elles transforment $V(z) - \{z\}$ en $V(z') - \{z'\}$; par conséquent, les classes d'intransitivité de $\mathcal{O}(K_\omega, B)$, par rapport au groupe engendré par les homographies, sont constituées d'ensembles homéomorphes entre eux.

L'ensemble des d. e. non réduits à un point forme une base de l'hypotopologie en question.

Exemple. — Considérons (C_ω, B_C) . La topologie naturelle de C_ω est moins fine, en tant qu'hypotopologie, que l'hypotopologie définie ci-dessus. Il existe 11 classes d'intransitivité de $\mathcal{O}(C_\omega)$, par rapport au groupe des homographies, dont l'explicitation est évidente.

B'. — Applications à la localisation des zéros des polynômes
d'une variable dans K_ω .

5. UN PROBLÈME FONDAMENTAL POUR LA LOCALISATION DANS $\mathbf{C}_\omega$. — *Rappel I.* — La donnée des zéros d'un polynôme $f(z)$ détermine entièrement les zéros de sa dérivée $f'(z)$. L'étude de cette dépendance dans le but de « localiser » les zéros de $f'(z)$ a été commencée par Gauss ([68], p. vi) et est à l'origine de nombreux travaux. Le plus souvent on se ramène au problème, équivalent dans $\mathbf{C}_\omega$, des relations entre les zéros et les pôles d'une fonction rationnelle $\frac{f'(z)}{f(z)}$; plus généralement, on étudie une fonction rationnelle de la forme $q(z) = \sum_{i=1}^m \delta_i (z - \alpha_i)^{-1}$, où $\delta_i > 0$. [Notation : $q(z)$ gardera cette signification dans tout ce paragraphe.] Un certain nombre de questions de localisation se ramènent à ce problème. Examinons-le.

Nous énonçons ci-dessous certains résultats classiques pour le plan complexe (sous une forme et dans un ordre appropriés à notre objectif).

Le théorème suivant, dû essentiellement à Laguerre ([61]; [36], p. 38) et à Walsh ([113], p. 653) est fondamental :

THÉORÈME L. — Si les δ_i ($i = 1, \dots, m$) sont des nombres positifs constants de somme 1 et si le d. c. A contient tous les points α_i ($\neq \omega$), les deux assertions suivantes sont vraies et (manifestement) « équivalentes » :

a. Si $\xi \in \mathbf{C}_\omega - A$, tous les zéros de la fonction de z ,

$$\sum_{i=1}^m \delta_i (z - \alpha_i)^{-1} - (z - \xi)^{-1}$$

sont contenus dans A.

b. La relation

$$\sum_{i=1}^m \delta_i (\zeta - \alpha_i)^{-1} = (\zeta - \xi)^{-1}$$

fait correspondre à chaque point $\zeta \in \mathbf{C} - A$ un point $\xi \in A$.

Ces énoncés sont légèrement plus forts que les énoncés classiques correspondants, car l'ensemble des d. c., que nous utilisons, est plus riche que l'ensemble des « domaines circulaires » ouverts ou fermés considérés traditionnellement.

Chacun des énoncés a et b entraîne que, si $\omega \notin A$, $q(z)$ ne s'annule pas dans $\mathbf{C} - A$, résultat dû essentiellement à Gauss et à Lucas ([113], p. 644; [36], p. 37; [68], p. 14; [118], p. 5).

Le cas particulier où tous les δ_i sont rationnels démontre que, *tout d. c. qui ne contient pas ω et qui contient tous les zéros d'un polynôme $f(z)$, contient aussi tous les zéros de sa dérivée $f'(z)$* ; proposition équivalente, dans $\mathbf{C}_\omega$, au théorème de Gauss-Lucas proprement dit (origine historique de la théorie en question), qui affirme que, *les zéros d'un polynôme $f'(z)$ sont contenus dans l'enveloppe convexe des zéros de $f(z)$* (cette enveloppe est un certain polygone). Ce théorème est l'un des théorèmes les plus largement utilisés dans la localisation. Signalons que Biernacki a trouvé en 1955 [12] une réciproque au théorème de Gauss-Lucas.

Les résultats précédents ont constitué jusqu'aujourd'hui un outil très efficace dans l'étude du problème de Landau-Montel (voir § 8), ainsi que dans l'étude des *polynômes apolaires* (voir § 9); chercher dans quelle mesure cela n'est pas un accident, est l'un des buts du présent chapitre.

6. LA FORME INTRINSÈQUE (ENSEMBLISTE) DU THÉORÈME L. — *Hypothèses et notations* : $E' =$ ensemble non vide; $F \subset \mathfrak{P}(E')$ et F est un $\cap$ -demi-treillis complet (le fait évident que F est alors un vrai treillis ne sera pas utilisé ici). Tout élément de F sera appelé « f. e. ». L'intersection de tous les f. e. contenant un ensemble donné A est un f. e., qui sera appelé « *f-enveloppe* » de A , et noté $f(A)$; on désignera par f l'application isotone $\mathfrak{P}(E') \rightarrow F$ définie par $A \rightarrow f(A)$. $E =$ ensemble non vide; σ est une application $E \rightarrow E'$.

DÉFINITION 4 a. — Un élément H de $\mathfrak{P}(E)$ sera appelé « *h_σ . e.* » si $\sigma(H)$ est un f. e.

THÉORÈME 2 a. — Si un *h_σ . e.* H contient l'ensemble A , alors

$$\sigma(H) \supset f(\sigma(A));$$

si, en particulier, σ est biunivoque,

$$H \supset \sigma^{-1}(f(\sigma(A))).$$

COROLLAIRE 2 a. 1. — Si, de plus, $y \in E'$ et $\sigma^{-1}(y) \cap H = \emptyset$, alors

$$y \notin f(\sigma(A)).$$

Soit maintenant τ une application de certains sous-ensembles X de E' dans E' telle que $\tau(X) \in f(X)$. Si l'on se place alors dans les hypothèses du théorème 2 a, avec σ biunivoque, on a le

THÉORÈME 2 a. 1. — Si un *h_σ . e.* H contient X , alors

$$\sigma^{-1} \tau \sigma(X) \in H.$$

Associons à chaque ensemble $A \in \mathfrak{P}(E)$ une famille $(\sigma_j)_{j \in I_A}$ d'applications $\sigma_j : E \rightarrow E'$.

DÉFINITION 4 b. — Un élément θ de $\mathfrak{P}(E)$ sera appelé « *h. e.* », par rapport à $(\sigma_j)_{j \in I_0}$, si, quel que soit $j \in I_0$, $\sigma_j(\theta)$ est un f. e.

THÉOREME 2 b. — Si un h. e. θ contient un ensemble A , on a, pour tout $j \in J_0$, $\sigma_j(\theta) \supset f(\sigma_j(A))$; si, en particulier, chaque σ_j est biunivoque, on a $\theta \supset \sigma_j^{-1}(f(\sigma_j(A)))$.

Corollaire 2 b. 1 et théorème 2 b. 1 évidents.

Application. — $E' = E = \mathbf{C}_\omega$, F = ensemble des parties convexes de $\mathbf{C}$, $\sigma_j(z) = (j - z)^{-1}$ et $J_A = \mathbf{C} - A$. Alors, les h. e. de E sont les d. e. de $\mathbf{C}_\omega$, donc les d. c. de $\mathbf{C}_\omega$. Soit maintenant τ l'application qui à chaque ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ de points de $\mathbf{C}$ fait correspondre le point $\sum_{i=1}^n \delta_i x_i$ de $\mathbf{C}$, les δ_i ayant

été choisis de manière qu'on ait $\delta_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \delta_i = 1$. Soit θ un d. c. de $\mathbf{C}_\omega$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ des points de $\theta \cap \mathbf{C}$; soit $j \in \mathbf{C} - \theta$; alors, l'image réciproque par $(j - z)^{-1}$ de $\tau \cdot \{(j - \alpha_1)^{-1}, \dots, (j - \alpha_m)^{-1}\}$ appartient à θ , en vertu du théorème 2 b. 1; donc, la relation $\sum_{i=1}^n \delta_i (\alpha_i - j)^{-1} = (j - \xi)^{-1}$ fait correspondre à $j \in \mathbf{C} - \theta$ un $\xi \in \theta$. C'est le théorème L. On déduit d'une façon analogue le théorème de Gauss-Lucas à partir du corollaire 2 b. 1.

7. APPLICATIONS A LA LOCALISATION.

Hypothèses G.1 : $E = E'$ et E contient au moins deux éléments; $\emptyset \neq E_0 \subset E$. Soit g une application de l'ensemble Δ des parties *finies* non vides de E_0 dans $\mathfrak{P}(E)$ satisfaisant à la condition : Pour tout $A \in \Delta$, $A \subset g(A)$. Appelons « g. e. » toute partie $\mathcal{X}$ de E_0 telle que, quelle que soit la partie finie non vide A de $\mathcal{X}$, on a $g(A) \subset \mathcal{X}$; posons : G = ensemble des g. e. de E_0 . G est alors un $\cap$ -demi-treillis complet, donc (dans la terminologie du paragraphe 6) un ensemble F sur E_0 , donc aussi un ensemble F sur tout surensemble de E_0 . Particularisons maintenant ces hypothèses :

Hypothèses G.2 : E_0 = corps commutatif K ; $E = E' = K_\omega$; M = partie fixe de K , $(0, 1) \in M^2$; B = partie de $\mathfrak{P}(K)$, définie comme dans E.5 (§ 3). B est alors un ensemble G (suivant G.1) sur K et un ensemble F sur K_ω ; donc, B est à la fois un S -ensemble sur K et un ensemble F sur K_ω . Supposons maintenant que $J_0 = K - \theta$ et que $\sigma_z(z) = (\zeta - z)^{-1}$; il y a alors coïncidence des d. e. de (K_ω, B) et des h. e. par rapport à $(\sigma_z)_{z \in K - \theta}$.

Cela donne, pour A finie, la généralisation suivante du théorème L :

THÉOREME 3. — Si (sous les hypothèses G.2) $\mu_i \in M$, $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ et le d. e. θ contient les n éléments $\alpha_i (\neq \omega)$, les deux assertions suivantes sont vraies :

a. Si $\xi \in K_\omega - \emptyset$, tous les zéros de la fonction de z ,

$$\sum_{i=1}^n \mu_i (z - \alpha_i)^{-1} - (z - \xi)^{-1}$$

sont contenus dans $\emptyset$.

b. La relation

$$\sum_{i=1}^n \mu_i (\xi - \alpha_i)^{-1} = (\xi - \xi)^{-1}$$

fait correspondre à chaque élément $\zeta \in K - \emptyset$ un élément $\xi \in \emptyset$.

COROLLAIRE 3.4. — Si, de plus, $\omega \notin \emptyset$, alors $\emptyset$ contient toutes les racines de l'équation en ζ ,

$$(\varepsilon) \quad \sum_{i=1}^n \mu_i (\zeta - \alpha_i)^{-1} = 0.$$

Cela généralise le théorème de Gauss-Lucas énoncé pour les d. c.; l'énoncé pour les polygones se généralise par l'évident

COROLLAIRE 3.4.1. — L'intersection des d. c. $\mathfrak{P}\omega$ qui contiennent tous les α_i ($i = 1, \dots, n$) contient toutes les racines de (ε) .

Dans la suite, nous nous contenterons d'énoncer les résultats analogues au corollaire 3.4, les énoncés analogues au corollaire 3.4.1 étant évidents modulo les premiers.

Soit K un corps commutatif. On notera p sa caractéristique et l'on utilisera la terminologie et les notations du paragraphe 3 et de G.1, G.2. Soit $B = \Gamma_K$. L'application $\Delta \rightarrow \mathfrak{P}(K)$, définie par $A(\in \Delta) \rightarrow$ enveloppe p -convexe de A , est une application g ; Γ_K vérifie donc les hypothèses de G.2. Supposons en plus que K est algébriquement clos, et désignons l'ensemble de ces hypothèses par G.3. Le théorème 3 entraîne alors le

THÉOREME 4. — Si, dans les hypothèses G.3, $\varpi(z)$ est un polynôme de degré n [$n \not\equiv 0 \pmod{p}$], si $p > 0$; n quelconque, si $p = 0$], à coefficients dans K , tout d. c. $\mathfrak{P}\omega$ contenant tous les zéros de $\varpi(z)$ contient également tous les zéros de sa dérivée formelle $\varpi'(z)$.

COROLLAIRE 4.1. — Si, dans les hypothèses du théorème 4, $\emptyset$ est un d. c. $\mathfrak{P}\omega$ ne contenant pas tous les zéros de $\varpi'(z)$, $K - \emptyset$ contient au moins un zéro de $\varpi(z)$ (« lemme F »).

Le théorème 3 a entraîne le

COROLLAIRE 4.2 (théorème de Laguerre). — Si, dans les hypothèses du théorème 4, $\emptyset$ est un d. c. contenant tous les zéros de $\varpi(z)$ et $\xi \in K - \emptyset$, $\emptyset$ contient tous les zéros du polynôme $Q(z) = n\varpi(z) - (z - \xi)\varpi'(z)$.

COROLLAIRE 4.2.1. — Si, dans les hypothèses du théorème 4, θ est un d. e. ne contenant ni 0 ni la totalité des zéros de $Q(z) = n\varpi(z) - (z - \xi)\varpi'(z)$, $K - \theta$ contient au moins un zéro de $\varpi(z)$ (« lemme B »).

Quand $(K_\omega, B) = (C_\omega, B_C)$, le théorème 4 est celui de Gauss-Lucas, et les lemmes F et B sont resp. dus à Fejér [40] et à Ballieu [7].

Note. — Soit $p \neq 0$; existe-il une généralisation de la notion de d. e. permettant d'étendre la validité du théorème 4 à tous les polynomes de degré n , $n \equiv 0 \pmod{p}$? Non. Exemple : le polynome $z^n - 1$.

8. LE PROBLÈME DE LANDAU-MONTEL. — Landau [63] a posé le problème suivant : Dans C , le polynome

$$\varpi_m(z) = 1 + z + a_{\nu_1} z^{\nu_1} + \dots + a_{\nu_{m-1}} z^{\nu_{m-1}},$$

à $m + 1$ termes non nuls, a-t-il toujours un zéro dont la valeur absolue ne dépasse pas un nombre $\sigma(m)$, ne dépendant que du nombre des termes non nuls de $f(z)$?

Remplaçons dans cet énoncé « C » par « K_ω », où K est un corps commutatif algébriquement clos, « dont ... $\sigma(m)$ » par « qui soit contenu dans le complémentaire d'un d. e. $\theta(m)$ ». Le problème ainsi obtenu a un sens; en voici une réponse :

THÉOREME 5. — Ajoutons aux hypothèses du théorème 4 l'hypothèse que, si $p \neq 0$, $\nu_i \not\equiv 0$ et $\nu_i \not\equiv 1 \pmod{p}$ ($i = 1, \dots, m - 1$). Alors, si θ est un d. e. ne contenant ni 0, ni l'élément $-\left(\frac{\nu_1}{\nu_1 - 1}, \dots, \frac{\nu_{m-1}}{\nu_{m-1} - 1}\right)$, $K - \theta$ contient au moins un zéro de $\varpi_m(z)$.

Démonstration : $\varpi_2(z) = 1 + z + a_{\nu_1} z^{\nu_1}$; le polynome

$$Q_2(z) = \nu_1 \varpi_2 - z \varpi_2' = \nu_1 + z(\nu_1 - 1)$$

a le seul zéro $-\frac{\nu_1}{\nu_1 - 1}$. Dans ce cas, le théorème 5 résulte du lemme B. Achéons la démonstration par récurrence. Supposons le théorème établi pour $\varpi_\lambda(z)$ et considérons

$$Q_{\lambda+1}(z) = \nu_\lambda \varpi_{\lambda+1} - z \varpi_{\lambda+1}' = \nu_\lambda \left(1 + \frac{\nu_\lambda - 1}{\nu_\lambda} z + \frac{\nu_\lambda - \nu_1}{\nu_\lambda} a_1 z^{\nu_1} + \dots + \frac{\nu_\lambda - \nu_{\lambda-1}}{\nu_\lambda} a_{\lambda-1} z^{\nu_{\lambda-1}} \right).$$

Le polynome entre parenthèses est le transformé par $z = \frac{\nu_\lambda}{\nu_\lambda - 1} x$ d'un polynome de la forme $\varpi_\lambda(x)$, c'est-à-dire d'un polynome vérifiant l'hypothèse de la récurrence. D'autre part, pour $\nu_\lambda > 1$, θ est un d. e. si et seulement si $\frac{\nu_\lambda}{\nu_\lambda - 1} \theta$ est un d. e., en vertu du théorème 1.

Dans le cas classique, le théorème 5 rejoint le résultat de Ballieu ([7], p. 129) cité dans le *Rappel II*, ci-dessous; si $\nu_1 = 2$, il améliore un cas particulier d'un résultat de Markovitch [69].

Rappel II. — Landau et Hurwitz [63] ont résolu des cas particuliers du problème de Landau. La première solution générale fut donnée par Allardice [3]. La méthode de démonstration la plus féconde est due à Fejér ([40], utilisation du théorème de Gauss-Lucas).

Casabonne a donné (*Selecta Paul Montel*, p. 204) une démonstration intéressante de la partie qualitative du théorème d'Allardice. Montel a montré, dans un Mémoire fondamental [78], le fond du problème classique et l'a généralisé dans plusieurs directions; les nombreux problèmes posés par Montel furent étudiés d'une façon approfondie par plusieurs auteurs; on peut trouver des indications sur ces importants travaux dans Biernacki [11] ainsi que dans [36] et [68]. En ce qui concerne le problème de Landau déjà cité, Ballieu ([7], p. 129) a obtenu une nette amélioration du théorème d'Allardice; le même résultat fut retrouvé, indépendamment, par Vythoulcas [116]. Une autre amélioration du théorème d'Allardice a été obtenue en 1950 par Markovitch [69].

9. POLYNOMES APOLAIRES. — Sauf mention expresse du contraire, la signification des lettres f , φ , g , q et F dans ce paragraphe n'aura aucun rapport avec leur signification dans les paragraphes précédents.

On supposera invariablement que *le corps K est commutatif et algébriquement clos* (sa caractéristique étant toujours notée p), *et que les polynômes considérés sont de degré :*

*quelconque, si $p = 0$;
 $< p$, si $p \neq 0$.*

Notation : C_n^λ = nombre des combinaisons simples des n objets pris λ à λ .

Rappelons la définition des *polynômes apolaires* dans $\mathbf{C}$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu a_\nu z^\nu \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{\nu=0}^n C_n^\nu b_\nu z^\nu$$

sont dits « apolaires » quand leurs coefficients vérifient la relation

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu C_n^\nu a_\nu b_{n-\nu} = 0.$$

Cette définition se transporte dans K .

Remarque. — La déduction de certains résultats bien connus liant les d. c. de $\mathbf{C}_\omega$ et les polynômes apolaires, en particulier du théorème fondamental de Grace, n'utilise, en réalité, que des raisonnements valables dans nos hypothèses générales.

Énonçons certaines des généralisations ainsi obtenues.

Notation : Les fonctions symétriques élémentaires des lettres $z_1, \dots, z_n$ seront désignées par les lettres S_i ($i = 1, \dots, n$), dans l'ordre $S_1 = \sum_{j=1}^n z_j, \dots, S_n = z_1 \dots z_n$; on posera $S_0 = 1$.

THÉOREME DE COÏNCIDENCE (Szegö, 1922, [106], p. 16). — Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les zéros du polynome $f(z) = \sum_{v=0}^n C_n^v a_v z^v$ et $(z_1, \dots, z_n)$ une solution de la relation $\sum_{v=0}^n a_v S_v = 0$ [notée (R)]. Alors, tout d. e. qui contient tous les α_i contient au moins un z_i .

La démonstration est essentiellement la même que dans Montel ([85], p. 16); la seconde partie de cette démonstration se ramène au théorème de Laguerre. La récurrence utilisée dans cette démonstration (et, implicitement, dans celle de [68]) nous a obligé de supposer $n < p$, si $p \neq 0$.

Les z_i du théorème précédent sont les zéros de $g(z) = \sum_{v=0}^n C_n^v b_v z^v$, où les b_v sont définis par $S_0 = (-1)^v C_n^v b_{n-1} b_n^{-1}$. (R) s'écrit alors : $\sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v a_v b_{n-v}$; par conséquent, $f(z)$ et $g(z)$ sont apolaires. Le théorème de Szegö revient donc à : *Tout d. e. contenant tous les zéros de f contient au moins un zéro de g .*

La symétrie des hypothèses dans l'explicitation de cet énoncé entraîne la symétrie des conclusions; donc : *Si les polynomes $f(z)$ et $g(z)$ sont apolaires, tout d. e. qui contient tous les zéros de l'un d'eux contient au moins un zéro de l'autre.*

Quand $(K_\omega, B) = (C_\omega, B_\alpha)$, c'est le *théorème d'apolarité* de Grace (1901, [85], p. 19; [113], p. 650; [36], p. 11; [68], p. 45).

COROLLAIRE. — Dans les hypothèses du théorème de coïncidence, tout d. e. contenant tout les z_i contient au moins un α_i (Walsh, 1922, [117]; [113], p. 652). « Classiquement », on démontrait souvent cela par le raisonnement suivant : sinon, il existerait un d. c. θ contenant tous les z_i et pas de α_i , puisque $C_\omega - \theta$ est aussi un d. e.; il existerait donc un d. c. contenant tous les α_i et pas de z_i . Mais, dans (K_ω, B) le fait que θ est un d. e. n'implique pas nécessairement que $K_\omega - \theta$ soit un d. e.

THÉOREME DE COMPOSITION DES POLYNOMES (Szegö, [68], p. 47). — Soient

$$f(z) = \sum_{v=0}^n C_n^v a_v z^v, \quad g(z) = \sum_{v=0}^n C_n^v b_v z^v, \quad q(z) = \sum_{v=0}^n C_n^v a_v b_v z^v;$$

soient α_i les zéros de $f(z)$, β_i ceux de $g(z)$ et γ_i ceux de $q(z)$. Alors, tout d. e. qui contient tous les α_i contient des α'_i tels que $\gamma_i = -\alpha'_i$, β_{j_i} ($i = 1, \dots, n$).

Démonstration. — On applique le théorème de Grace aux polynômes $f(z)$ et $z^n g(-\gamma_i z^{-1})$; lesquels sont apolaires en vertu de l'égalité

$$\sum_{v=0}^n (-1)^v C_n^v a_v (-1)^v b_v \gamma_i^v = 0.$$

Les résultats fondamentaux de Grace et de Szegö furent exposés dans leurs Mémoires [43] et [106].

En 1947, de Bruijn [31] a fait la remarque importante que plusieurs théorèmes connus pour les polynômes peuvent être facilement déduits à partir de théorèmes du genre Gauss-Lucas-Grace, par une méthode uniforme. L'intérêt de cette méthode réside non seulement aux généralisations étendues, dans $\mathbf{C}$, auxquelles elle a conduit de Bruijn mais, également, à ce qu'elle se prête à la généralisation algébrique, considérée ci-dessous et dans le chapitre IV.

Les versions classiques des résultats cités ci-dessous sont dues à de Bruijn (*loc. cit.*) et constituent des généralisations de résultats contenus dans un remarquable Mémoire de Schaake et Van der Corput (1936, [105]).

THÉOREME. — Soit $\varpi(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$, $f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{v=0}^n a_v S_v$, θ un d. e., et A une partie non vide de K . Si l'on a, quel que soit $z \in \theta$, $f(z, \dots, z) \in A$, alors, $z_i \in \theta$ ($i = 1, \dots, n$) entraîne que $f(z_1, \dots, z_n) \in A$.

Démonstration. — On remarque, avec de Bruijn, que cela est un corollaire du théorème d'apolarité de Grace.

COROLLAIRE. — Soit $\varpi(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$, θ un d. e., $A = \varpi(\theta)$, $z \in \theta$, et $\xi \in \theta$. On a, alors,

$$\varpi(z) - \frac{(z - \xi) \varpi'(z)}{n} \in A.$$

Démonstration : En effet, on a

$$f(z, \dots, z, \xi) = \varpi(z) - \frac{(z - \xi) \varpi'(z)}{n}.$$

En 1955, Biernacki [12] a déduit du théorème de composition de Szegö, l'important résultat suivant, qui constitue, en quelque sorte, une réciproque du théorème de Gauss-Lucas dans $\mathbf{C}$:

« Supposons que tous les zéros d'un polynôme soient contenus dans un domaine A , borné, fermé et convexe. Soit $a \in A$. Alors, 1° tous les zéros de $\int_a^z f(z) dz$ sont

contenus dans le domaine fermé $Y(A, a)$ contenant A et délimité par la courbe Γ , transformée par homothétie du centre a et de rapport 2 de la podaire de la frontière de A ; 2° on constate aisément que la frontière de $Y(A, a)$ est aussi l'enveloppe des circonférences qui passent par le point a et dont les centres décrivent la frontière de A . Le domaine $Y(A, a)$ ne peut être remplacé par un domaine strictement contenu dans $Y(A, a)$. »

En fait, ce théorème précise un théorème vrai dans nos hypothèses générales.

Soient : θ un d. e. contenant les zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $f(z) = \sum_{v=0}^n C_n^v a_v z^v$; $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ les zéros de $h(z) = z^{-1} \int_0^z f(z) dz$ ($\int$ ayant ici un sens purement formel); $\beta_1, \dots, \beta_n$ les zéros de

$$g(z) = z^{-1} \int_0^z (1+z)^n dz = \frac{(1+z)^{n+1} - 1}{(n+1)z} = \sum_{v=0}^n C_n^v \frac{z^v}{v+1}.$$

$h(z)$ est donc composé (dans le sens du théorème de Szegő) des polynômes $f(z)$ et $g(z)$; θ contient donc des éléments α'_i tels que $\gamma_i = -\alpha'_i \beta_{j_i}$ ($i = 1, \dots, n$); donc, $\gamma_i = (-\beta_{j_i}) \alpha'_i$. L'ensemble $(-\beta_{j_i})\theta$ est un d. e. D'autre part, les β_{j_i} sont les racines non nulles de l'équation $(z+1)^{n+1} = 1$, c'est-à-dire les n éléments $-1 + \sqrt[n+1]{1}$ ($i = 2, \dots, n+1$). D'où, le

THÉORÈME 6. — Si θ est un d. e. contenant les zéros $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ du polynôme $f(z)$ de degré n , chaque zéro du polynôme $h(z) = z^{-1} \int_0^z f(z) dz$ (intégration formelle) est contenu dans au moins un des d. e. $(1 + \sqrt[n+1]{1})\theta$ ($i = 2, \dots, n+1$).

Le théorème 6 ne présuppose pas que θ soit p -convexe ou que $o \in \theta$.

Rappel III. — Un corollaire célèbre du théorème de Grace est le résultat suivant de Grace (1901, [43]) [retrouvé indépendamment par Heawood (1907)] : Considérons dans $\mathbf{C}$ un polynôme $f(z)$ de degré constant n , à coefficients variables, qui a deux zéros distincts z_1, z_2 fixes et les autres zéros entièrement arbitraires : Alors, 1° z_1 et z_2 déterminent un cercle qui contient au moins un zéro de $f'(z)$; 2° le cercle de centre $\frac{z_1+z_2}{2}$ et de rayon $\frac{|z_2-z_1|}{2} \cotg \frac{\pi}{n}$ est un tel cercle.

Ce résultat « remplace » dans $\mathbf{C}$ le théorème de Rolle. (Mais, il n'est pas une généralisation de ce dernier. Dieudonné [33] et Favard [38 a] ont donné des généralisations du théorème de Rolle pour des classes étendues des fonctions.)

L'extension du théorème d'apolarité de Grace à K_ω entraîne l'extension sui-

vante du théorème de Grace-Heawood : Considérons dans K_ω deux zéros distincts de $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$, z_1, z_2 ; alors, $\sum_{v=1}^n a_v (z_1^v - z_2^v) = 0$; mais, $\sum_{v=1}^n v a_v \frac{z_1^v - z_2^v}{v} = 0$ est une relation linéaire par rapport aux coefficients $v a_v$ de la dérivée formelle $f'(z)$ de $f(z)$; elle détermine donc, à un commun multiple près, les coefficients d'un polynome $g(z)$ apolaire à $f'(z)$; les coefficients de $g(z)$ ne dépendent que de z_1 , de z_2 et de n ; en fait

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{v=1}^n (-1)^{v-1} C_{n-1}^{v-1} \frac{z_1^v - z_2^v}{v} z^{n-v} \\ &= \sum_{v=1}^n (-1)^{v-1} \frac{C_n^v}{n} (z_1^v - z_2^v) z^{n-v} = \frac{1}{n} [(z_1 - z)^n - (z_2 - z)^n]. \end{aligned}$$

D'où, le

THÉORÈME 7. — Soit $f(z)$ un polynome de degré fixe n ayant deux zéros distincts z_1, z_2 fixes et les autres $n-2$ zéros arbitraires dans K . Le couple z_1, z_2 détermine alors complètement un ensemble de d. e., dont chacun contient au moins un zéro de la dérivée formelle $f'(z)$ de $f(z)$: cet ensemble est constitué de tous les d. e. qui contiennent toutes les racines de l'équation $(z - z_1)^n = (z - z_2)^n$.

On peut ([36], p. 12) énoncer le théorème de coïncidence comme suit : Si n éléments $z_1, \dots, z_n$ de K vérifient une relation de la forme $a_0 + a_1 S_1 + \dots + a_n S_n = 0$, tout d. e. contenant $z_1, \dots, z_n$ contient n éléments confondus en ζ et vérifiant cette relation. On en déduit le

THÉORÈME 8 (de Walsh [113], p. 652; [68], p. 46). — Si $L(z_1, \dots, z_n)$ est une fonction symétrique des z_i , linéaire-affine par rapport à chaque z_i et si le d. e. θ contient les éléments $\xi_1, \dots, \xi_n$, il existe un élément $\xi \in \theta$ tel que

$$L(\xi_1, \dots, \xi_n) = L(\xi, \dots, \xi).$$

Walsh a tiré de ce théorème des corollaires très utiles; leur extension à (K_ω, B) est immédiate.

COROLLAIRE 8.1. — Si un d. e. θ contient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, à chaque élément $x \in K$ correspond un élément $\alpha [= \alpha(x)] \in \theta$ tel que

$$\prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) = (x - \alpha)^n.$$

COROLLAIRE 8.2. — Si un d. e. θ contient tous les zéros d'un polynome $f(z)$ de degré n et si $c \in K$, la réunion (ensembliste) des n d. e. $\theta + \sqrt[n]{c} (i=1, \dots, n)$ contient tous les zéros de $f(z) - c$.

Application : $f_1(z) = z + a_1$ a le seul zéro $-a_1$. Considérons

$$f_2(z) = (z + a_1)z + a_2;$$

si un d. e. θ_1 contient $-a_1$ et o, la réunion des d. e. $\theta_{2i} = \theta_1 + (-\sqrt{a_2})$ ($i = 1, 2$) contient tous les zéros de $f_2(z)$; chaque d. e. contenant tous les quatre éléments $-a_1 - \sqrt{a_2}$, $-\sqrt{a_2}$ ($i = 1, 2$) est à la fois un θ_{21} et θ_{22} , donc il contient tous les zéros de $f_2(z)$. Une récurrence évidente achève la démonstration du

THÉORÈME 9. — Soit $f_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Chaque d. e. contenant tous les points de la forme

$$-a_1 - \sqrt[i_2]{a_2} - \dots - \sqrt[i_n]{a_n}, \quad -\sqrt[i_2]{a_2} - \dots - \sqrt[i_n]{a_n}, \quad \dots, \quad -\sqrt[i_n]{a_n}$$

(les i_j décrivent, indépendamment les uns des autres, resp. les ensembles $\{1, \dots, j\}$), contient tous les zéros de $f_n(z)$.

Quand $(K_\omega, B) = (C_\omega, B_C)$, un tel d. e. est un cercle fermé de centre O et de rayon $\sum_{v=1}^n |a_v|^{\frac{1}{v}}$; cela donne un théorème de Walsh ([36], p. 14).

REMARQUES. — 1. *Hypothèse* : $(K_\omega, B) = (C_\omega, B_C)$. Soient f et g des polynômes apolaires; désignons resp. par F et G les ensembles de leurs zéros. On a alors le théorème de Takagi ([107]; [68], p. 46) : Si $A_F(\supset F)$ et $A_G(\supset G)$ sont des parties fermées convexes de C , alors $A_F \cap A_G \neq \emptyset$. Ce théorème s'applique, en particulier, aux deux polygones qui sont resp. les enveloppes convexes de F et de G.

La remarque évidente suivante (cas particulier d'un théorème de Carathéodory [21]) permet de préciser ce résultat : L'enveloppe convexe d'un ensemble fini E de points du plan est un polygone convexe dont tous les sommets appartiennent à E (démonstration par induction).

THÉORÈME 10. — Dans les hypothèses du théorème de Takagi,

$$(A_F \cap G) \cup (A_G \cap F) \neq \emptyset.$$

Le chapitre IV permet d'étendre cela à tout corps commutatif algébriquement clos de caractéristique o, $K [= K_0(i)]$.

2. Le théorème 9 n'est pas la seule généralisation possible du résultat cité de Walsh; voir [124] et le paragraphe 10 du chapitre IV.

3. La définition de l'apolarité de deux polynomes $f(z) = \prod_{i=1}^n (z - \alpha_i)$ et $g(z) = \prod_{i=1}^n (z - \beta_i)$ est équivalente à la condition : Il existe des éléments $\lambda_i \in K$

tels que $f(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (z - \beta_i)^{n_i}$. *Démonstration* : Transcription de celle du cas classique ([85], p. 19). Il serait peut-être intéressant d'étudier les polynômes apolaires en partant de cette définition.

4. Donnons à la situation qui se présente dans le théorème 8 sa généralité propre : Soient E et E' des ensembles non vides, J un ensemble non vide d'indices et σ une application $E^J \rightarrow E'$; notation : $\Delta =$ diagonale de E^J .

Définition. — Une partie A de E sera appelée « σ . w. » si $\sigma(A)^J = \sigma(\Delta)$. L'ensemble des σ . w. sera noté « $W(\sigma)$ ».

Posons-nous maintenant dans une structure mathématique telle que les considérations qui suivent aient un sens. (Exemple : la structure de corps algébriquement clos avec des applications σ_i appropriées.) Soient σ_i des applications $E \times E^J \rightarrow E'$ et soit

$$(\alpha) \quad f(z; (\sigma_i(z; (\alpha_{ij})_{j \in J}))_{i \in I}) = 0;$$

une équation en z (les α_{ij} sont fixes).

Considérons la fonction f et attribuons, pour un moment, une valeur fixe à z ; considérons les α_{ij} comme des variables, de sorte que σ_i soit actuellement une fonction des α_{ij} . S'il existe alors, pour chaque $i \in I$, un σ_i . w. A_i contenant tous les α_{ij} ($j \in J$), on peut remplacer α_{ij} , dans $\sigma_i(z; (\alpha_{ij}))$, par certain $\zeta_i \in A_i$, le même pour tous les $j \in J$. Les racines de l'équation (α) appartiennent donc à l'ensemble des racines des équations en z , $f(z; (\sigma_i(z; (\sigma_i(z; (\zeta_i))))_{i \in I}) = 0$, où les ζ_i décrivent, respectivement et indépendamment les uns des autres, les A_i .

Il peut arriver que (α) soit remplacée ainsi par un ensemble d'équations plus simples. Exemple :

THÉORÈME DES COMBINAISONS LINÉAIRES DES POLYNÔMES (Marden [68], p. 54). — Soient $\sigma_i(z)$ ($i = 1, \dots, m$) des polynômes des degrés resp. n_i . Alors, si θ est

un d. e. contenant tous les zéros de $\sigma_i(z)$, les zéros du polynôme $f(z) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sigma_i(z)$,

où $\lambda_i \neq 0$, appartiennent à l'ensemble des zéros des polynômes $\sum_{i=1}^m \lambda_i (z - \zeta_i)^{n_i}$, où, indépendamment les uns des autres, les ζ_i décrivent resp. les θ_i .

5. Dans les paragraphes 5-9, nous avons obtenu les « d. e. généralisations » d'un certain nombre de résultats de la localisation. Dans la tentative de faire une « géométrie » des d. e. de (K_n, B) , on peut aussi considérer ces résultats comme des informations indirectes sur les d. e.

CHAPITRE III.

RAPPORTS DE LA LOCALISATION AVEC LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES.

A'. — Quelques remarques sur les espaces vectoriels topologiques.

1. PRÉLIMINAIRES. — *Terminologie.* — Les termes utilisés ci-dessous sont soit empruntés à Bourbaki, soit formés sur le modèle de ceux-ci.

Corps ordonné = corps commutatif muni d'une structure d'ordre total compatible avec sa structure de corps.

I. Soit E un ensemble *totalelement ordonné*. Les réunions d'intervalles ouverts de E sont les ensembles ouverts d'une topologie sur E , notée $\mathfrak{T}_0(E)$; cet espace topologique est *complètement normal* (voir Birkhoff [14], p. 39; Bourbaki [18], chap. I, p. 17, chap. IV, p. 77-78 et chap. IX, p. 96).

Soit K_0 un *corps ordonné*; un tel corps est nécessairement *non discret*. La topologie $\mathfrak{T}_0(K_0)$ de l'ensemble totalelement ordonné K_0 est compatible avec la structure de corps de K_0 , qui devient ainsi un *corps topologique*. L'anneau complété $\hat{K}_0$ de K_0 est un *corps commutatif topologique complet*, dont la topologie coïncide avec $\mathfrak{T}_0(\hat{K}_0)$.

Le corps K_0 est soit archimédien, soit non archimédien. Si K_0 est *archimédien*, il est un sous-corps de $\mathbf{R}$ et $\hat{K}_0 = \mathbf{R}$.

Si K_0 est *non archimédien*, il est *totalelement discontinu* et l'intersection des sous-groupes du groupe additif K_0 , engendrés par les voisinages de 0, est $\{0\}$; alors, $\hat{K}_0$ aussi est non archimédien, donc *totalelement discontinu*. Puisque tout intervalle (a, b) de $\hat{K}_0$, distinct d'un point, est non connexe, il existe des parties de (a, b) ne possédant pas une borne supérieure dans $\hat{K}_0$; donc, *il existe aussi des parties de $(a, b) \cap K_0$ ne possédant pas une borne supérieure dans $\hat{K}_0$* . Par conséquent, *aucun intervalle de K_0 n'est compact*; K_0 n'est pas localement compact.

II. Si l'on pose, dans K_0 : $|x| = \sup(x, -x)$, on a

$$(V) \quad \begin{cases} |x| = 0 \text{ est équivalente à } x = 0; \\ |xy| = |x| \cdot |y| \quad \text{et} \quad |x+y| \leq |x| + |y|. \end{cases}$$

On dira que l'application $| \cdot |$ est la « valeur absolue intrinsèque » de K_0 , ou la « K_0 -valeur absolue de K_0 »; plus généralement, si k est un corps quelconque et si une application $f: k \rightarrow K_{0+}$, notée $f(x) = |x|$, a les propriétés (V), on dira que f est une « K_0 -valeur absolue » de k et, pour abréger, que k est un corps « K_0 -valué ».

III. Soit G un groupe abélien totalement ordonné, *non discret*, noté additivement; on appellera « groupe achevé » et l'on notera $\underline{G}$ la structure algébrique obtenue par l'adjonction à G de deux éléments $-\infty$ et $+\infty$, vérifiant les conditions : Pour tout $a \in G$,

$$\begin{aligned} a + (+\infty) &= (+\infty) + a = +\infty, & a + (-\infty) &= (-\infty) + a = -\infty, \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty, & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty \quad \text{et} \quad -\infty < a < +\infty. \end{aligned}$$

L'ensemble des éléments positifs de G (resp. $\underline{G}$) sera noté G_+ (resp. $\underline{G}_+$).

Définition. — Étant donné un ensemble E , on appellera *G-écart sur E* toute application $f: E \times E \rightarrow \underline{G}_+$ telle que, quels que soient les éléments x, y et z de E , on a

$$f(x, x) = 0, \quad f(y, x) = f(x, y) \quad \text{et} \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y).$$

Soit f un G -écart sur E ; pour tout $a > 0$, posons $U_a = f^{-1}([0, a])$; lorsque a parcourt l'ensemble des éléments non nuls de G_+ , les U_a forment un *système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur E* . On peut, par suite, poser la définition : Étant donné un G -écart f sur un ensemble E , on appelle *structure uniforme définie par f* la structure uniforme sur E qui a pour système fondamental d'entourages la famille des ensembles $f^{-1}([0, a])$, où a parcourt $G_+ - \{0\}$. On dit que deux G -écarts sur E sont *équivalents* s'ils définissent la même structure uniforme.

On peut maintenant aisément vérifier que plusieurs des propriétés connues des écarts sont, en fait, des propriétés des G -écarts.

IV. Définition évidente de la *G-distance*. Un ensemble muni d'une G -distance sera appelé *espace G-métrique*. Il est facile de voir que ces espaces possèdent un grand nombre des propriétés des espaces métriques ordinaires.

Soit maintenant E un groupe abélien, noté additivement, et $x \rightarrow |x|$ une application de E dans G satisfaisant aux conditions $|-x| = |x|$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ et $|x| = 0$ équivaut à $x = 0$. La fonction $d(x, y) = |x - y|$ est alors une *G-distance invariante sur E* ; la topologie $\mathfrak{T}$ qu'elle définit sur E est compatible avec la structure de groupe de E , et la structure uniforme qu'elle définit est identique à la structure uniforme du groupe topologique obtenu en munissant E de la topologie $\mathfrak{T}$.

V. *Définition.* — Étant donné un espace vectoriel E (à gauche, par exemple) sur un corps commutatif K_0 -valué non discret k , on appelle *K_0 -norme sur E* une application $x \rightarrow \varphi(x)$ de E dans K_{0+} satisfaisant aux conditions suivantes : $\varphi(x) = 0$ est équivalente à $x = 0$; $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$; et $\varphi(tx) = |t| \varphi(x)$.

Si l'on pose $d(x, y) = \varphi(x - y)$, d est une K_0 -distance invariante sur le groupe additif E et définit sur E la topologie d'espace K_0 -métrique considérée dans IV; comme l'application $(t, x) \rightarrow tx$ est continue dans $k \times E$, la dite topo-

logie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de E . Sur ce sujet, voir aussi Krasner [53].

Supposons que K_0 est complet et soient E un espace K_0 -normé sur un corps K_0 -valué non discret, φ la K_0 -norme sur E , $\hat{E}$ le groupe topologique additif complété du groupe additif E . La fonction $(t, x) \rightarrow tx$ se prolonge par continuité à $\hat{k} \times \hat{E}$, et définit sur $\hat{E}$ une structure d'espace vectoriel par rapport à k ; la K_0 -norme φ se prolonge par continuité à $\hat{E}$ en une norme $\bar{\varphi}$ qui définit la topologie de $\hat{E}$.

Quand $K_0 = \mathbf{R}$, les constatations précédentes rejoignent celles de Bourbaki ([18], chap. IX).

Le K_0 -écart est un cas particulier d'écart abstrait. (Voir Kurepa [60], Krasner [53], Fréchet [41], Menger [77], Colmez [27] et les auteurs cités par ce dernier; nos K_0 -écarts illustrent l'intérêt des notions plus générales considérées par ces auteurs.)

Références générales pour les ensembles ordonnés et leurs applications : [14], [37] et [66].

Nous renvoyons à l'Appendice III (qui forme, essentiellement, le complément de A') pour certaines définitions et pour certains résultats qui, dans le cas ordinaire ($K_0 = \mathbf{R}$) sont contenus dans Bourbaki ([19], chap. I) et qui se généralisent de façon immédiate à un K_0 quelconque. Les théorèmes tout à fait généraux pour les espaces vectoriels topologiques ne sont pas cités, puisqu'ils sont vrais indépendamment du corps des scalaires. Abréviation : evt = espace (s) (s) vectoriel (s) topologique (s). Le contenu de A' et de l'Appendice III sera tacitement utilisé dans la suite.

B'. — Rapports de la localisation avec les espaces vectoriels.

2. LE THÉOREME 2 (DU CHAPITRE II) POUR LES ESPACES VECTORIELS. — Le contenu du paragraphe 6 et des hypothèses G.1 (§ 7) est purement ensembliste; on peut donc, en particulier, l'appliquer aux espaces vectoriels.

Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif k et M une partie de k , avec $(0, 1) \in M^2$; soit B l'ensemble des parties A de E telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

l'appartenance des éléments $a_1, \dots, a_n$ à A implique que $\sum_{i=1}^n \mu_i a_i \in A$, pour

tout $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in M^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$. B est alors un $\cap$ -demi-treillis complet.

Soit φ une surjection de E sur lui-même. On peut appliquer aux données $\{E, B, \varphi\}$ le théorème 2a; corollaires évidents; par exemple, le résultat analogue

au théorème 3b s'énonce : Si $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ ($\mu_i \in M$) et si H est un h_φ , e. contenant tous les α_i ($i = 1, \dots, n$), il existe $\xi \in H$ tel que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \varphi(\alpha_i) = \varphi(\xi).$$

3. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS. — Adjoignons à k un élément ∞ faisant de $k \cup \{\infty\}$ un *corps projectif* k_∞ et à E un élément ω tel que, si $a \in E$ et $\lambda \in k - \{0\}$; 1° $a + \omega = \omega + a = \omega$; $\lambda\omega = \omega$; 3° si $a \neq 0$, $\infty a = \omega$.

Notation : $E_\omega = E \cup \{\omega\}$ muni de cette structure.

Définition. — Une permutation f de E_ω , définie par $x \rightarrow f(\zeta - x)$ où ζ est un élément fixe de E , sera dite *invertive* si l'on a : Pour tout $(\lambda, a) \in k_\infty \times E$, $f(\lambda a) = \lambda^{-1} f(a)$. On dira que f a le *pôle* ζ .

Notation : $\varphi_\zeta(x) = f(\zeta - x)$.

Conséquences. — a. Si $\mu \in k^*$, aussi $f(\mu(\zeta - x))$ est invertive; en particulier, $f(x - \zeta)$ est invertive; b. $\varphi_\zeta(\omega) = 0$; c. $\varphi_\zeta(0) = \omega$.

Dans la suite, on supposera invariablement que K_0 est *pythagoricien* et que $\langle x, y \rangle$ est un produit scalaire tel que, pour tout $(x, y) \in K_0^2$, $\langle x, y \rangle = xy$.

Notation : $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = |x|$. $|x| = 0$ est supposée équivalente à $x = 0$, de sorte, que E soit séparé.

L'ensemble $\{x : \langle x - a, b \rangle = \gamma\}$, où (a, b, γ) est un élément donné de $E \times E \times K_0$, est un hyperplan. L'ensemble $\{x : \langle x - a, b \rangle < \gamma\}$ enrichi d'une partie (éventuellement vide) de l'hyperplan précédent sera dit « *demi-espace* » (ceci élargit un peu la définition de demi-espace donnée dans l'Appendice III); on dira que l'hyperplan considéré ci-dessus est « l'hyperplan » d'un quelconque des demi-espaces correspondant au même élément (a, b, γ) . Cette définition entraîne que l'ensemble $\{x : \langle x - a, b \rangle < \gamma\}$ enrichi d'une partie quelconque de l'hyperplan déjà cité est également un demi-espace correspondant au même hyperplan que $\{x : \langle x - a, b \rangle < \gamma\}$.

Considérons E_ω . L'application $\varphi_b : \varphi_b(x) = \frac{x - b}{\langle x - b, x - b \rangle}$ est une permutation invertive de E_ω de pôle b ; on l'appellera *inversion* de E_ω . Notation : $\langle x - b \rangle^2 = \langle x - b, x - b \rangle$.

DÉFINITION 1. — Une partie A de E_ω sera appelée « *d. e.* » de E_ω si elle est soit un des ensembles $\emptyset, E, E_\omega$, soit telle que : 1° pour tout $b \in E - A$, $\varphi_b(A)$ est K_0 -convexe, et 2° si A n'est pas K_0 -convexe, $\omega \in A$.

On appellera « triviaux » les d. e. suivants : $\emptyset$, E , E_ω , E_ω moins un point et $\{x\}$, où $x \in E_\omega$.

Abus de langage : d. e. de E = la restriction à E d'un d. e. de E_ω .

Notation : $\mathcal{O}(E_\omega)$ = ensemble des d. e. de E_ω .

JUSTIFICATION. — Si l'on identifie les espaces homéomorphes $K_{0\omega}^2$ et $K_\omega = K_0(i) \cup \{\omega\}$, et si l'on pose B = ensemble des parties K_0 -convexes de K_ω , on a $\mathcal{O}(K_{0\omega}^2) = \mathcal{O}(K, B)$.

Considérons les transformations de la forme $\sigma_b = a + \lambda \varphi_b$, où $(a, \lambda) \in E \times K_0 - \{0\}$; si l'on remplaçait, dans la définition 1, φ_b par une quelconque des σ_b , cela n'affecterait pas $\mathcal{O}(E_\omega)$.

Si les données du théorème du paragraphe 2 du présent chapitre sont $\{E_\omega, M = K_{0+}, \varphi_b, \text{ et } H \text{ est un d. e.}\}$, H est un h_{φ_b} . e. ($b \in E - H$) et, également, un h_{σ_b} . e., dans les notations du paragraphe 6 du chapitre II. Donc, le théorème énoncé dans le paragraphe 2 du présent chapitre est vérifié par ces données.

Dans un espace K_0 -métrique quelconque, les ensembles $\{x : |x - a| \leq r\}$ et $\{x : |x - a| < r\}$, où $(a, r) \in E \times K_{0+}$ est donné, seront appelés resp. « boule sphérée » et « boule non sphérée ». Ces termes sont dus à Krasner; ils permettent d'éviter la confusion avec les termes topologiques « fermée » et « ouverte » qui ne leur sont pas toujours équivalents. Dans le cas d'un espace ultramétrique Krasner appelle les boules sphérées (resp. non sphérées) *cercles circonferenciés* (resp. *non circonferenciés*). $\{x : |x - a| = r\}$ est la *sphère* qui correspond aux boules considérées.

Revenons maintenant définitivement à E_ω où E est muni de $\langle x, y \rangle$, etc., et considérons la classe suivante des parties de E_ω :

- 1° Les parties de E : $\emptyset$, E , les boules sphérées, les boules non sphérées, les demi-espaces d'équation $\langle \rangle > 0$ et ceux d'équation $\langle \rangle \geq 0$;
- 2° les complémentaires des ensembles de 1° dans E_ω .

Chaque élément de cet ensemble sera dit « b. g. » (boule généralisée) de E_ω . La frontière d'un b. g. sera appelée « s. g. » (sphère généralisée).

Notations : $B_g(E_\omega)$ [resp. $S_g(E_\omega)$] = ensemble des b. g. (resp. s. g.) de E_ω .

Abus de langage : La restriction d'un b. g. (resp. s. g.) de E_ω à E sera appelée b. g. (resp. s. g.) de E .

Transformons $A : \langle x - a \rangle^2 \leq r^2$ (resp. $\geq r^2$) par $y = \varphi_\xi(x)$; on obtient

$$1 + 2\langle y, \xi - a \rangle + (\langle \xi - a \rangle^2 - r^2)y^2 \leq 0 \quad (\text{resp. } \geq 0).$$

D'où, la

PROPOSITION 1. — *Toute transformation σ_ξ induit une permutation de $B_g(E_\omega)$ [resp. $S_g(E_\omega)$].*

1. montre que $B_g(E_0)$ a par rapport aux transformations σ_z la propriété essentielle que $\mathcal{O}(K_0, B)$ a par rapport aux homographies (chap. II, § 2).

4. EXTENSION DU THÉORÈME DE JENSEN À E. — Il est facile maintenant d'étendre à E un résultat classique de Jensen [47]. On raisonne dans la structure affine de E. Soient a un vecteur donné, b un point donné et λ un élément donné de K_0 . Considérons les points $b + \lambda a$ et $b - \lambda a$; ils sont situés sur la sphère $\{x : |x - b| = |\lambda| \cdot |a|\}$.

Notations. — Si a et x sont deux éléments de E, on posera $p_a(x) = \frac{\langle x, a \rangle}{|a|}$ et l'on appellera $p_a(x)$ *projection de x sur a*; S = la sphère précitée, W = la boule non sphérée de sphère S.

Considérons la fonction vectorielle

$$f(x) = \frac{x - (b + \lambda a)}{\langle x - (b + \lambda a) \rangle^2} + \frac{x - (b - \lambda a)}{\langle x - (b - \lambda a) \rangle^2},$$

définie pour $x \neq b + \lambda a, b - \lambda a$; le signe de $p_a(f(x))$ est le même que le signe de $2I = \langle x - (b + \lambda a) \rangle^2 \langle x - (b - \lambda a) \rangle^2 p_a(f(x))$; or

$$I = \langle x - b, a \rangle (\langle x - b \rangle^2 + \lambda^2 a^2) - 2 \langle \lambda a, a \rangle \langle x - b, \lambda a \rangle.$$

Posons $\langle x - b \rangle^2 = \lambda^2 a^2 + \delta$; alors, $I = \delta \langle x - b, a \rangle$. Donc

(1) $\{\delta > 0 \text{ et } \langle x - b, a \rangle > 0\}$ implique $I > 0$;

(2) $\{\delta > 0 \text{ et } \langle x - b, a \rangle < 0\}$ implique $I < 0$.

(1) et (2) montrent que I ne peut s'annuler dans le complémentaire de la réunion de l'hyperplan $\langle x - b, a \rangle = 0$ et de la boule sphérée $W \cup S$.

Note. — Dans le cas particulier où $E = \mathbf{R}^2$, ceci fut démontré par Walsh ([118], p. 10), dans le langage des « attractions et répulsions mécaniques » de Gauss.

THÉORÈME (de Jensen). — Dans l'espace affine E sur K_0 (resp. sur $\mathbf{R}$), soient a un vecteur donné non nul, $c_i = \lambda_i a$ ($\lambda_i \in K_0$) une suite finie (resp. dénombrable) donnée de vecteurs et (b_i) une suite donnée de points. Considérons les boules sphériques $\{x : |x - b_i| \leq |c_i|\}$ et désignons par E_1 le complémentaire par rapport à E de la réunion de ces boules; considérons maintenant l'intersection E_2 de la famille de demi-espaces $\{x : \langle x - b_i, a \rangle > 0\}$ et l'intersection E_3 de la famille de demi-espaces $\{x : \langle x - b_i, a \rangle < 0\}$. Alors, $(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_3)$ ne contient pas de zéros de la fonction vectorielle

$$f(x) = \sum_i \delta_i \left[\frac{x - (b_i + c_i)}{\langle x - (b_i + c_i) \rangle^2} + \frac{x - (b_i - c_i)}{\langle x - (b_i - c_i) \rangle^2} \right],$$

où les δ_i sont des éléments de K_{0+} non tous nuls.

Démonstration. — En effet, pour tout $x \in E_1 \cap E_{i \ (i=2, 3)}$, tous les termes de la somme considérée ont un même signe.

Cas particulier : $E = \mathbf{R}^2$, tous les b_i appartiennent à une même droite, $\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_n = 1$ et $\delta_i = 0$ pour $i > n$. Sous ces hypothèses, notre théorème donne le théorème précité de Jensen, énoncé par lui dans [47] et démontré par Walsh. L'énoncé de Jensen ([47], p. 190) laisse supposer qu'il avait démontré son théorème non seulement pour les polynômes mais, également, pour certaines séries.

5. APPLICATIONS CONVEXISANTES. LES THÉORÈMES DE GAUSS-LUCAS-PORTER ET DE BÔCHER. — Revenons au cas d'un espace vectoriel *quelconque* E sur un corps ordonné *quelconque* K_0 . Terminologie de ce paragraphe : K_0 -*automorphisme* de E (resp. de E_ω) = automorphisme de la structure algébrique de E (resp. de E_ω) induisant l'automorphisme identique sur K_0 (resp. avec $\omega \rightarrow \omega$). Application *convexisante* pour A = application $E \rightarrow E$ (resp. $E_\omega \rightarrow E_\omega$), transformant la partie A de E (resp. E_ω) en une partie K_0 -*convexe* de E . Les cas qui correspondent à E_ω seront sous-entendus ci-dessous.

Les K_0 -automorphismes de E préservent la K_0 -convexité. Donc, si φ est une permutation de E convexisante pour A et si τ est un K_0 -automorphisme de E , aussi $\tau\varphi$ est convexisante pour A .

Soit $((f_j)_{j \in J_\lambda})_{\lambda \in \mathcal{P}(E_\omega)}$ une famille de familles de permutations de E_ω ; θ désignera une partie de E telle que *chaque* $f_j (j \in J_\theta)$ soit *convexisante* pour θ . On peut alors élargir l'ensemble donné des f_j en l'ensemble $\{\tau f_j\}$, τ étant un K_0 -automorphisme de E , sans que ceci affecte l'ensemble des θ .

Revenons définitivement à l'hypothèse que K_0 est pythagoricien et que E est muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle$.

DÉFINITION 2a. — Tout ensemble de E_ω (resp. E) qui est constitué d'un b. g. A et d'une partie de la frontière de A sera appelé « d'_1 . c. ». Tout d'_1 . c. qui est un d. e. sera appelé « d_1 . c. ».

L'intersection d'un d'_1 . c. (resp. d_1 . c.) et d'une variété linéaire est un d'_1 . c. (resp. d_1 . c.) dans cette variété.

Considérons le cas : $E = K_0^n$, f_j = inversion φ_j de pôle j et $J_\lambda = K_0^n - A$, avec $A \subset E_\omega$.

Toute inversion φ_j dont le pôle n'appartient pas à un d_1 . c. donné est convexisante pour ce d_1 . c. et les propriétés qui découlent de ce fait se transposent au cas plus général des permutations $\tau\varphi_j$ (τ désignant un K_0 -automorphisme de K_0^n). Tel est, par exemple, le cas du théorème de Gauss-Lucas.

Il suffit donc de faire la démonstration pour les inversions « géométriques » $\varphi_j = \frac{x - \xi}{\langle x - \xi \rangle^2}$; celles-ci se prêtent à un langage vectoriel simple. C'était, au fond,

pour cette raison que, dans le plan complexe $\mathbf{C}$, certains auteurs passaient aux relations conjuguées des relations algébriques de la forme $\sum (\zeta_i - z_i)^{-1} = 0$, etc., et utilisaient ensuite l'interprétation mécanique introduite par Gauss ([113], [118]).

Nous tenons compte ici de l'isomorphisme des groupes topologiques additifs K_0^2 et $K_0(i)$ et du fait évident : Si $x - \xi = a + bi$,

$$\frac{x - \xi}{\langle x - \xi \rangle^2} = \frac{a + bi}{a^2 + b^2}, \quad (a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}, \quad \text{donc} \quad \overline{(a + bi)^{-1}} = \frac{x - \xi}{\langle x - \xi \rangle^2}.$$

Entre l'inversion géométrique φ et l'inversion algébrique τ il y a donc la relation $\sigma = \tau\varphi$.

D'où, la coïncidence des d. e. de K_{00}^2 et des d. e. de $K_0(i)_0$ (par rapport à la K_0 -convexité).

Quand $K_0 = \mathbf{R}$, on peut ainsi étendre aisément à $\mathbf{R}^n$ le théorème de Porter ([68], p. 16) pour $\mathbf{R}^2$. Signalons, pour cela, l'évident :

LEMME. — Si $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ est une suite de vecteurs non tous nuls de $\mathbf{R}^n$, telle que $p_a(x_j) \geq 0$ pour tout j , alors $\sum_{j=0}^{\infty} x_j \neq 0$.

Ce lemme généralise les exercices 1 et 2 de ([68], p. 5.). Il permettrait de démontrer directement le théorème de Gauss-Lucas pour $\mathbf{R}^2$, dans son énoncé relatif à l'enveloppe convexe des zéros, etc. ([68], p. 14). La situation est analogue dans $\mathbf{R}^n$; soit, en effet, $(x_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite de points de $\mathbf{R}^n$ et Δ leur enveloppe convexe fermée; Δ est alors l'intersection des demi-espaces fermés contenant Δ . Soit Π le plan qui est la frontière, dans $\mathbf{R}^n$, d'un de ces demi-espaces, et x un point du demi-espace complémentaire de ce demi-espace. La suite $\left(\frac{x_j - x}{\langle x_j - x \rangle^2}\right)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie l'hypothèse du lemme, donc la somme de ses termes est $\neq 0$. D'où, le

THÉORÈME (de Gauss-Lucas-Porter). — Les zéros de la fonction vectorielle $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x - x_j}{\langle x - x_j \rangle^2}$, où $x_j \in \mathbf{R}^n$, sont tous contenus dans l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des x_j .

Dans le cas $n = 2$, ceci démontre le résultat classique suivant de Porter ([68], p. 16) : Toute région convexe (infinie) qui contient tous les zéros d'une fonction entière de genre 0, contient également tous les zéros de sa dérivée.

Des résultats très importants furent obtenus dans cette direction par Arnaud Denjoy [32].

Nous allons étendre maintenant à K_0^n un résultat classique de Bôcher pour $\mathbf{R}^3$ ([68], p. 35).

Notations ([18], chap. VI, p. 40) : S_{n-1} = la sphère unité dans $\mathbf{R}^n$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, γ = la projection stéréographique de x ; il n'y a pas de rapport nécessaire entre la signification des lettres F, f ci-dessous et leur utilisation précédente; $m_j \in K_0 - \{0\}$ ($j = 1, \dots, l$).

THÉOREME (de Bôcher). — Soit $F(x) = \sum_{j=1}^l \frac{m_j(x-x_j)}{\langle x-x_j \rangle^2}$, $f(y) = \sum_{j=1}^l \frac{m_j(y-y_j)}{\langle y-y_j \rangle^2}$,
 $\sum_{j=1}^l m_j = 0$ et $(x, x_j) \in S_{n-1} \times S_{n-1}$.

Alors 1° le vecteur $F(x)$ est tangent à S_{n-1} , et 2° sa projection stéréographique est le vecteur $\frac{1+|y|^2}{2} f(y)$.

Démonstration. — 1° Il suffit de démontrer que

$$\left\langle x, \sum_{j=1}^l \frac{m_j(x-x_j)}{\langle x-x_j \rangle^2} \right\rangle = 0,$$

donc, puisque $\sum_{j=1}^l m_j = 0$ par hypothèse, que

$$\sum_{j=2}^l m_j \left(\frac{|x|^2 - \langle x_j, x \rangle}{\langle x-x_j \rangle^2} - \frac{|x|^2 - \langle x_1, x \rangle}{\langle x-x_1 \rangle^2} \right) = 0;$$

cela sera assurément vrai si, pour $j = 2, \dots, n$,

$$\frac{|x|^2 - \langle x_j, x \rangle}{\langle x-x_j \rangle^2} = \frac{|x|^2 - \langle x_1, x \rangle}{\langle x-x_1 \rangle^2};$$

mais cette dernière égalité résulte de l'hypothèse $|x|^2 = |x_j|^2 = |x_1|^2$.

2° La démonstration est tout à fait analogue à celle du cas $n = 3$, exposée dans ([68], p. 36).

En généralisant de façon évidente l'interprétation mécanique de Gauss à K_0^n , on obtient la corollaire : *Les points d'équilibre du champ sphérique se projettent sur les points d'équilibre du champ plan.* Ceci généralise un résultat connu dans le cas $K_0 = \mathbf{R}$ et $n = 3$ ([68], p. 37).

En correspondance avec Birkhoff-MacLane [15], signalons l'extension immédiate au cas d'un corps des scalaires ordonné, pythagoricien *quelconque* : n° 9 du chapitre VIII (bases orthonormales); théorèmes 5, 6 et 7; n° 2 du chapitre IX (les groupes orthogonal et euclidien) de [15].

Tout espace K_0^n (K_0 étant ordonné pythagoricien) sera dit « espace K_0 -euclidien ». Si $x \in K_0^n$, tout système fondamental de voisinages de x possède une base totalement ordonnée (par l'inclusion ensembliste).

11. CARACTÉRISATION INDUCTIVE DES d'_1 . c. DE K_0^n .

Ci-dessous, K_0 est supposé maximal.

THÉORÈME 1. — Soit p un entier donné ≥ 2 et n un entier $\geq p + 1$; soit $A \subset K_0^n$. Si toute section de A par une variété linéaire de dimension p est un d'_1 . c. dans cette variété, A est un d'_1 . c. dans le sous-espace vectoriel de K_0^n qu'engendre A . Donc si A est de dimension n , il est un d'_1 . c. dans K_0^n .

D'où, une caractérisation inductive évidente des d'_1 . c. de K_0^n .

Démonstration. — Notation : H_{p+j} = variété linéaire de dimension $p + j$.

Supposons le théorème démontré pour $n = p + 1$, quel que soit $p \geq 2$, et considérons le cas $n = p + 2$. Si, dans ce cas, A est une H_{p+1} , le théorème est évident; on peut donc supposer que A n'est pas une H_{p+1} .

Considérons alors l'ensemble $A \cap H_{p+1}$, où H_{p+1} est arbitrairement choisie; gardons fixe cet ensemble et considérons $(A \cap H_{p+1}) \cap H_p$, où H_p décrit l'ensemble de toutes les variétés linéaires de dimension p de H_{p+1} ; chaque $(A \cap H_{p+1}) \cap H_p$ étant par hypothèse un d'_1 . c. dans H_p , $A \cap H_{p+1}$ doit être un d'_1 . c. dans H_{p+1} (en vertu de l'hypothèse pour le cas $n = p + 1$). La variété linéaire H_{p+1} ayant été arbitrairement choisie dans K_0^{p+2} , une seconde application du cas $n = m + 1$ (avec $m = p + 1$) montre que A doit être un d'_1 . c. dans K_0^{p+2} . Une induction évidente achève la démonstration du cas $n = p + l$ ($l > 1$). Seul reste donc à démontrer le cas $n = p + 1$. Il est un corollaire du résultat plus fort que constituent les lemmes 1 a et 1 b démontrés ci-dessous.

Signalons, tout d'abord, le fait suivant qui est souvent utilisé tacitement dans le cours du présent chapitre : Soient dans K_0^n (K_0 étant toujours supposé maximal) B une boule (de dimension n) de sphère S , a un point intérieur à B et P une variété linéaire de dimension ≥ 1 qui passe par a . Alors, $P \cap S \neq \emptyset$; plus précisément, $P \cap S$ est une sphère dans P . (Proposition évidente dans le cas particulier où $K_0 = \mathbf{R}$.)

Démonstration. — Le fait essentiel que cette démonstration utilise est que $K_0(i)$ est algébriquement clos. Soit $\sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 = r^2$ l'équation de S et soit

$a = (a_1, \dots, a_n)$; puisque a est intérieur à B , on a $\sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2 < r^2$.

Considérons une quelconque des droites de la variété linéaire P qui passent par a ; notons-la D et soient $\{x_i = a_i + \lambda_i t \ (i = 1, \dots, n)\}$ ses équations. $S \cap D$ constitue l'ensemble des racines de l'équation $\sum_{i=1}^n (a_i + \lambda_i t - c_i)^2 = r^2$, donc de $\sum_{i=1}^n [(a_i - c_i) + \lambda_i t]^2 - r^2 = 0$; si l'on désigne par $f(t)$ le premier membre de

cette équation, on a $f(0) < 0$, et, pour des valeurs de $t \in K_0$ assez grandes en valeur absolue, $f(t) > 0$. Or, $f(t)$ étant un polynôme à coefficients dans le corps maximal K_0 , on peut lui appliquer le théorème de la théorie des corps ordonnés ([17], chap. VI, § 5, p. 39) qui affirme que, alors $f(t)$ a au moins un zéro > 0 . Le reste de la démonstration est le même que dans le cas $K_0 = \mathbf{R}$.

LEMME 1 a. — Soit A une partie, dont la frontière contient au moins $n + 1$ points $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}$, non contenus dans une même variété linéaire de dimension $n - 1$. Hypothèse : 1° L'hyperplan H déterminé par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ coupe A suivant un d'_1 . c. dans H ; 2° Tout plan P de dimension 2 qui passe par trois points-frontières de A coupe A suivant un d'_1 . c. dans ce plan. Conclusion : A est un d'_1 . c. de K_0 .

Démonstration. — Il est évident que tout point-frontière d'une section de A par une variété linéaire est également point-frontière de A . Réciproquement, tout point-frontière β de A qui appartient à H est un point-frontière de $A \cap H$. Démonstration : Premier cas : La fermeture du d'_1 . c. $A \cap H$ est une boule de H . Alors, β ne peut pas être extérieur à $A \cap H$; car si l'on considère la fermeture $\bar{A}$ de A dans K_0^n , $\bar{A} \cap H$ est la fermeture de $A \cap H$ dans H , donc c'est le d'_1 . c. qui coïncide avec la fermeture du d'_1 . c. $A \cap H$ (dans H); β devrait alors à la fois appartenir (en tant que point-frontière de A) à $\bar{A} \cap H$ et non appartenir (puisqu'il est extérieur à $\bar{A} \cap H$ dans H) à $\bar{A} \cap H$, ce qui est impossible. On va voir maintenant que β ne peut également être intérieur à $A \cap H$ (dans H).

Soit P un plan quelconque de dimension 2 passant par α_{n+1} et par une corde de $A \cap H$. Ce plan rencontre la frontière de $A \cap H$ aux deux extrémités x_1, x_2 de cette corde. Or, comme P passe par trois points-frontières de A (α_{n+1}, x_1 et x_2), il doit couper A (et, également, $\bar{A}$) suivant un d'_1 . c. dans P ; $\bar{A} \cap H$ contient alors assurément le triangle $x_1 \alpha_{n+1} x_2$. Quand x_1 décrit la frontière de $A \cap H$, ce triangle décrit la surface latérale du cône convexe de sommet α_{n+1} et de base $\bar{A} \cap H$. On appellera C_1 ce cône, qui est tout entier contenu dans $\bar{A}$.

Comme $(P \cap \bar{A}) \cap H$ ne peut pas contenir des points extérieurs à $\bar{A} \cap H$, les points-frontières de $P \cap \bar{A}$ qui sont situés sur H sont exactement les deux points où $P \cap \bar{A}$ coupe la frontière de $\bar{A} \cap H$. Mais, alors, le d'_1 . c. $P \cap \bar{A}$ (dans P) est nécessairement un cercle; par conséquent, si l'on stipule que α_{n+1} est au-dessus de H , $P \cap \bar{A}$ a des points-frontières situés strictement au-dessous de H ; soit α' un d'eux. Le cône convexe de sommet α' et de base $\bar{A} \cap H$ est tout entier contenu dans $\bar{A}$; appelons-le C_2 .

$C_1 \cup C_2$ est contenu dans $\bar{A}$ et l'intérieur $\dot{C}_1 \cup \dot{C}_2$ de $C_1 \cup C_2$ est contenu dans A (on voit cela en considérant le triangle ouvert $x_1 \alpha_{n+1} x_2$ à la place du triangle fermé homologue). $\beta \in \dot{C}_1 \cup \dot{C}_2$, donc il est intérieur à A , contrairement à l'hypothèse.

Deuxième cas : $\bar{A} \cap H$ est le complémentaire d'une boule de H . Démonstration analogue à la précédente. On pourrait d'ailleurs, se ramener à celle-ci en considérant les complémentaires dans K_0^n et dans les variétés linéaires considérées chaque fois, des d'_i . c. respectifs.

Troisième cas : $\bar{A} \cap H$ est un demi-espace de H . Soit D la variété linéaire de dimension $n - 2$ qui est la frontière de ce demi-espace. Tout point de D est point-frontière de A .

Un point de H extérieur à $A \cap H$ est également extérieur à $\bar{A} \cap H$, donc il n'appartient pas à $\bar{A}$, donc il n'est pas point-frontière de A .

Supposons qu'il existe un point-frontière β de A qui est intérieur à $A \cap H$ et considérons un plan P de dimension 2 passant par α_{n+1} et β ; ce plan coupe D en un point x , qui est point-frontière de A ; donc $A \cap P$ est un d'_i . c. Si $\bar{A} \cap P$ est un cercle, ce cercle coupe H et en un point (nécessairement point-frontière de A) non situé sur D ; d'où, contradiction. Si, quel que soit P , $\bar{A} \cap P$ est un demi-plan de P , A contient le demi-espace ouvert de K_0^n dont la frontière est déterminée par D et $\alpha_{n+1}x$, et β est intérieur à ce demi-espace; d'où, contradiction avec l'hypothèse initiale.

Comme dans ce cas D doit contenir tous les points-frontières de A situés sur H , D doit également contenir $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Mais, ceci contredit l'hypothèse que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ est de dimension n . Donc, $\bar{A} \cap H$ est soit une boule, soit le complémentaire d'une boule.

α_{n+1} est point-frontière de $\bar{A} \cap P$ dans P , quel que soit le plan P de dimension 2 qui passe par α_{n+1} et par les deux extrémités d'une corde de $A \cap H$. Démonstration : Soit c un point intérieur de $A \cap H$ et considérons les plans P qui passent par α_{n+1} et c . Si α_{n+1} n'est pas point-frontière de $A \cap P$, un point α'_{n+1} situé strictement au-dessus ⁽¹⁾ de α_{n+1} le sera, pour un plan donné P' . Comme $\alpha'_{n+1} \in \bar{A}$, il appartient à $\bar{A} \cap P$, quel que soit P . Donc, le cône convexe de sommet α'_{n+1} et de base $A \cap H$ est tout entier contenu dans A ; donc α_{n+1} qui est intérieur à ce cône est intérieur à A , contrairement à l'hypothèse.

Si γ est un point-frontière quelconque de A , on démontre de la même manière qu'il est point-frontière de tout d'_i . c. de dimension 2 qui passe par ce point.

Considérons maintenant la sphère S de dimension n déterminée par $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. Tout point γ de S est situé sur un plan de dimension 2 qui passe par α_{n+1} et qui rencontre $A \cap H$ ($\bar{A} \cap H$ étant actuellement un cercle de cette sphère), donc sur la frontière du d'_i . c. suivant lequel ce plan coupe A ; donc γ est un point-frontière de A . Aucun point non situé sur S ne peut être un point-frontière de A ; car ceci entraînerait que le plan de dimension 2 qui passe par ce point,

(1) Par rapport à H , sur la demi-droite $\subset \alpha_{n+1}$.

par α_{n+1} et par un point intérieur à $A \cap H$ ne pourrait pas couper A suivant un d'_1 . c. dans ce plan, contrairement à l'hypothèse.

Donc, S est la frontière de A .

LEMME 1 b. — Soit A une partie de K_0^n , dont la frontière F est un d'_1 . c. de dimension $n - 1$ (donc F est contenue dans un hyperplan H). Hypothèse : il existe une demi-droite $\alpha\beta$, $\alpha \in F$ et $\beta \in A \cap (K_0^n - H)$, telle que la section de A par un plan de dimension 2, quelconque, passant par la droite $\alpha\beta$, soit un d'_1 . c. de dans ce plan. Conclusion : A est un d'_1 . c. de K_0^n ; plus précisément, $\bar{A}$ est un demi-espace de K_0^n .

Démonstration. — Puisque A n'a pas de points-frontières extérieurs à H , soit toute la demi-droite $\alpha\beta$ est contenue dans l'intérieur de A , soit $A \cap \alpha\beta$ se termine par une lacune.

Comme toutefois les d'_1 . c. fermés de dimension 2 qui passent par $\alpha\beta$ doivent être, dans tous les cas, soit des demi-plans, soit des cercles, soit des complémentaires des cercles, le cas de la lacune ne peut pas se présenter; par conséquent, tous ces d'_1 . c. sont des demi-plans. Mais, alors F ne peut pas être une boule ou le complémentaire d'une boule dans H ; donc le d'_1 . c. F (dans H) coïncide avec H .

Notes. — 1. Le théorème 1 ne s'étend pas au cas $n = 2$.

2. Si A est de dimension n et si l'hypothèse du théorème 1 est vérifiée, il est immédiat que la frontière de A contient au moins $n + 1$ points dont l'ensemble est de dimension $\geq n - 1$; il suffit, pour le voir, de considérer $n + 1$ points de A linéairement indépendants et les d'_1 . c. situés sur les plans de dimension 2 qui passent par les droites que déterminent ces points.

12. CARACTÉRISATION DES d_1 . c. DE K_0^n . CARACTÉRISATION PARTIELLE DES D. E. DE K_0^n .

THÉOREME 2. — Dans K_0^n , pour qu'un d. e. non trivial soit un d_1 . c. il faut et il suffit que sa frontière contienne au moins $n + 1$ points, non contenus dans une même variété linéaire de dimension $n - 2$. (Il est indifférent que lesdits points appartiennent ou non au d. e. en question.)

Démonstration. — Le nécessaire de la condition étant évident, occupons-nous du suffisant. Il suffit de montrer que tout tel d. e. A est un d'_1 . c. On va voir ceci par induction. Supposons-le vrai pour $2 \leq n \leq m - 1$ et considérons le cas $n = m$.

Premier cas : L'ensemble des $m + 1$ points considérés est de dimension m . La variété linéaire L de dimension $m - 1$ déterminée alors par m de ces points coupe A suivant un d'_1 . c. dans L , en vertu de la définition des d. e. et de l'hypothèse de l'induction. Pour les mêmes raisons, tout plan de dimension 2 qui passe par trois points-frontières de A coupe A suivant un d'_1 . c. dans ce plan. L'hypothèse du lemme 1 a est donc vérifiée.

Deuxième cas : L'ensemble des $m+1$ points considérés est de dimension $m-1$ (done, contenu dans un hyperplan H). $H \cap A$ est alors un d'_1 . c. S'il existe un point $\beta \in A$ extérieur à H , et si l'on considère les plans de dimension 2 qui passent par la droite qui joint β à un point de $H \cap A$, on voit que l'hypothèse du lemme 1b est vérifiée. D'autre part, tout d. e. contenant plus d'un point est de dimension n : en effet, toute partie de H qui contient plus d'un point se transforme par une inversion de pôle extérieur à H en un ensemble non K_0 -convexe.

On est ainsi ramené au cas $n=2$, qui doit être démontré directement; posons-nous donc dans K_0^2 et considérons un d. e. A dont la frontière contient au moins trois points.

On peut toujours supposer que A est K_0 -convexe et borné (et, en particulier, que $\omega \notin A$). En effet l'isomorphisme des groupes topologiques K_0^2 et $K_0(i)$ applique biunivoquement les d. e. de $K_0^2 \cup \{\omega\}$ sur ceux de $K_0(i) \cup \{\omega\}$; on peut donc ici les identifier et, par conséquent, leur appliquer le théorème 1 du chapitre I. Considérons alors un d. e. non vide $A (\neq K_0^2)$ de K_0^2 ; si $\xi \in K_0^2 - A$, $\varphi_\xi(A)$ est un d. e. K_0 -convexe; or, si $\varphi_\xi(A)$ est un d'_1 . c., A doit également être un d'_1 . c., puisque les homographies transforment les d'_1 . c. en d'_1 . c.

Revenons à A , où $A \neq \emptyset$, K_0^2 . Si A est constitué de K_0^2 moins un seul point, il est un d'_1 . c. par définition. Dans les autres cas, A ne peut être dense dans K_0^2 . En effet, pour $\xi \in K_0^2 - A$, $\varphi_\xi(A)$ devrait être à la fois K_0 -convexe et dense dans K_0^2 , ce qui est impossible pour toute partie de K_0^2 autre que K_0^2 lui-même. Il existe donc ξ tel que $\xi \in K_0^2 - A$; $\varphi_\xi(A)$ est alors K_0 -convexe et borné.

On a déjà vu que tout d. e. A de K_0^2 qui contient plus d'un point est de dimension 2. Or, dans K_0^2 , tout ensemble K_0 -convexe Γ de dimension 2 est d'intérieur non vide. $\overset{\circ}{\Gamma}$ et $\bar{\Gamma}$ sont alors eux aussi K_0 -convexes. (Démonstration évidente.)

Si A est un d. e., aussi $\bar{A}$ est un d. e. En effet, $K_0^2 - \bar{A} \subset K_0^2 - A$ et $\varphi_\xi(\bar{A}) = \overline{\varphi_\xi(A)}$. Il suffit donc de démontrer le théorème pour les d. e. fermés.

Étendons maintenant aux parties étoilées (par rapport à un point) de K_0^2 la définition de la « coque » donnée dans ([18], chap. VI, p. 44), en tenant compte du fait qu'il peut exister ici des intervalles sans extrémité.

Si A est K_0 -convexe, sa coque par rapport à un point intérieur x_0 de A coïncide avec la frontière de A et est, par conséquent, indépendante du choix particulier de x_0 . Démonstration : $q =$ coque de A .

Si $x \in \bar{A}$, tout point de l'intervalle ouvert d'extrémités x_0 et x , est point intérieur de A (voir Appendice III, § 2, prop. 15); l'intervalle I qui est l'intersection de $\bar{A}$ et de la demi-droite x_0x est donc constitué de deux intervalles consécutifs I_1 et I_2 , où $I_1 = I \cap \overset{\circ}{A}$ et I_2 est l'ensemble des points-frontières de A que contient I . Tout revient donc à montrer que si $I_2 \neq \emptyset$, I_2 est constitué d'un seul point. Supposons, pour le voir, que I_2 contient deux points distincts β, β' . Comme $x_0 \in \overset{\circ}{A}$, on peut prendre sur une droite $\neq x_0x$ passant par x_0 deux points

α_1, α_2 , situés de part et d'autre de x_0 , avec $a_i \in \bar{A}$ ($i = 1, 2$); $\bar{A}$ étant K_0 -convexe, chacun des deux triangles fermés $\alpha_1 \beta \alpha_2, \alpha_1 \beta' \alpha_2$ est alors contenu dans $\bar{A}$ et l'un d'eux est contenu dans l'autre; donc, l'un des points β, β' appartient à $\bar{A}$, contrairement à l'hypothèse.

On peut donc alors parler de « la coque » de A . Tout homéomorphisme f préservant la K_0 -convexité d'un ensemble A , transforme sa coque en celle de $f(A)$.

Soit Δ l'ensemble des demi-droites d'origine x_0 et soit $d \nsubseteq x_0$ une droite donnée. L'ordre des points de d induit un ordre (total) sur le sous-ensemble de Δ dont les éléments rencontrent d ; cet ordre se prolonge, de façon évidente, à Δ tout entier; de là, on définit un sens de parcours sur la coque q de A . Quand on considérera un « arc » de cette coque (c'est-à-dire, une partie de cette coque en correspondance biunivoque, au moyen de Δ , avec un arc de longueur $\leq 2\pi$ du cercle unité de centre x_0), on supposera toujours qu'il est décrit dans le sens de parcours précité.

On suppose ci-dessous que A est fermé, borné et K_0 -convexe et que sa coque q contient (au moins) trois points distincts α_1, α_2 et α_3 . On peut alors supposer qu'au moins un des arcs $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1$ et $\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$, de q , n'est pas un arc de cercle; sinon, A serait un d.l.c. et la démonstration serait achevée.

Supposons, par exemple, que $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ n'est pas un arc de cercle; soit γ la circonférence (de cercle) qui passe par a_i ($i = 1, 2, 3$); notation : $\widehat{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} =$ arc de γ correspondant à l'arc $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ de q ; $\Gamma =$ cercle fermé de coque γ .

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° $\Gamma \subset A$: Au moins un des arcs $\alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \alpha_3 \alpha_1$ possède alors des points extérieurs à Γ ; supposons, par exemple, que c'est le cas de $\alpha_1 \alpha_2$ et que $\delta \in \alpha_1 \alpha_2 \cap K_0^2 - \Gamma$, et considérons l'inversion φ_{α_3} . $\varphi_{\alpha_3}(\Gamma)$ est un demi-plan fermé ayant pour frontière la droite $\varphi_{\alpha_3}(\gamma)$, $\varphi_{\alpha_3}(A) \supset \varphi_{\alpha_3}(\Gamma)$, les points $\varphi_{\alpha_3}(\alpha_1), \varphi_{\alpha_3}(\alpha_2)$ et $\varphi_{\alpha_3}(\delta)$ appartiennent à la frontière de $\varphi_{\alpha_3}(A)$ et $\varphi_{\alpha_3}(\delta)$ est à distance finie $\neq 0$ de $\varphi_{\alpha_3}(\Gamma)$. Donc, $\varphi_{\alpha_3}(A)$ n'est pas K_0 -convexe.

Soit maintenant z un point qui s'approche de α_3 en restant extérieur à A . Si z est assez proche de α_3 , $\varphi_z(\alpha_i)$ ($i = 1, 2$) [resp. $\varphi_z(\delta)$] est aussi proche qu'on veut de $\varphi_{\alpha_3}(\alpha_i)$ [resp. $\varphi_{\alpha_3}(\delta)$], tandis que, dans toute partie bornée de K_0^2 choisie d'avance, $\varphi_z(\gamma)$ est aussi proche qu'on veut de $\varphi_{\alpha_3}(\gamma)$.

$\varphi_z(A)$ est, par conséquent, non K_0 -convexe.

2° Il existe des points de γ extérieurs à A : Soit ξ un tel point. Supposons, par exemple, $\xi \in \widehat{\alpha_1 \alpha_2}$. $\varphi_\xi(\Gamma)$ est alors un demi-plan fermé ayant pour frontière la droite $\varphi_\xi(\gamma)$ et les points $\varphi_\xi(\alpha_i)$ ($i = 1, 2, 3$) appartiennent à la frontière de $\varphi_\xi(A)$ (fig. 1).

La K_0 -convexité de $\varphi_\xi(A)$ implique que le segment $\varphi_\xi(\alpha_2) \varphi_\xi(\alpha_3) \varphi_\xi(\alpha_1)$ soit contenu tout entier dans $\varphi_\xi(A)$. Le seul cas concevable est alors celui où ce

segment est tout entier constitué de points-frontières de $\varphi_\xi(A)$; mais, cela implique que $A \subset \Gamma$ et que $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ coïncide avec $\widehat{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1}$ (fig. 2).

Soit β un point de $\widehat{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$, distinct de α_i . Si l'on considère alors $\varphi_\beta(A)$, $\varphi_\beta(\alpha_1 \alpha_2)$ ne coïncide pas avec le segment $\varphi_\beta(\alpha_1) \varphi_\beta(\alpha_2)$ et contient des points situés à distance finie de ce segment (fig. 3).

Soit maintenant γ un point qui s'approche de β en restant extérieur à $\Gamma \cup A$. Un raisonnement tout à fait analogue à celui de 1° montre que pour γ assez proche de β , $\varphi_\gamma(A)$ ne saurait être K_0 -convexe.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

REMARQUES. — 1. M. Bouligand nous a suggéré d'étudier le problème analogue (rapports des « d. e. » et des « d'. c. ») pour un espace sphérique S^n (S^n s'obtient comme l'ensemble des points vérifiant $\sum_{v=1}^{n+1} x_v^2 = 1$ dans K_0^{n+1}); démontrer le théorème analogue au théorème 2 dans S^n et en déduire de celui-là le théorème 2 pour K_0^n , en utilisant la projection stéréographique de S^n sur un hyperplan de K_0^{n+1} . Un des avantages de la démonstration de M. Bouligand est qu'on n'a à considérer que des ensembles bornés dans S^n .

La notion suivante de « convexité » remplacera dans S^n la K_0 -convexité ordinaire : Une partie A de S^n sera dite « convexe » si, $(x y) \in A^2$ entraîne que le plus petit arc du « grand » cercle xy (un des plus petits arcs s'il s'agit d'une demi-circonférence) (« grand cercle xy » = cercle de centre O , situé sur le plan de dimension 2, Oxy , passant par x et par y) soit contenu dans A .

On peut appliquer alors des raisonnements analogues aux précédents.

La remarque de M. Bouligand montre que la notion de d. e. considérée et sa propriété fondamentale (th. 2) sont en liaison avec les espaces sphériques S^n .

2. Quand $K_0 = \mathbf{R}$, la frontière d'une partie K_0 -convexe de K_0^n d'intérieur non vide contient une infinité de points, non contenus dans une même variété linéaire de dimension $n - 2$. D'où, le

COROLLAIRE 2. 1. — Dans R^n , les notions de d. e. et de d. c. coïncident.

3. En ce qui concerne les d. e. fermés de K_0^n , on peut remplacer, dans leur définition, la condition que $\varphi_\zeta(A)$ soit K_0 -convexe par la suivante :

Si $(x, y) \in \varphi_\zeta(A) \times \varphi_\zeta(A)$, une partie du segment rectiligne $[x, y]$ partout dense dans $[x, y]$ est contenue dans $\varphi_\zeta(A)$; cas particulier : $\varphi_\zeta(A)$ est F-convexe, F étant un sous-corps de K_0 partout dense dans K_0 .

4. Walsh ([148], p. 62) avait déjà trouvé, par une voie différente, le résultat suivant : Si A est un ensemble fermé de $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^2$ étant identifié à $\mathbf{C}$) tel que pour toute triple (z_1, z_2, ξ) avec $\{z_1 \in A, z_2 \in A \text{ et } \xi \notin A\}$ il existe $\xi \in A$ vérifiant l'équation $\frac{1}{\xi - z_1} + \frac{1}{\xi - z_2} = \frac{2}{\xi - z}$, alors A est une « région circulaire » (un d. c. fermé).

La condition imposée à A implique que la condition de la remarque 3 soit vérifiée par $\varphi_\zeta(A)$.

13. CARACTÉRISATION DES D. E. DE FRONTIÈRE NON VIDE DANS $K_{0\omega}^n$. — Adjoignons à l'ensemble des b. g. l'ensemble des images par les transformations σ_b (notations de la proposition 1) des cônes maximaux, au sens de la définition du paragraphe 2 de l'App. III. L'ensemble ainsi obtenu sera noté B_g^* et ses éléments seront appelés « b*. g. ».

DÉFINITION 2b. — Toute partie de E_ω (resp. E) qui est constituée d'un b*. g. A et d'une partie de la frontière de A sera appelé « d'. c. ». Si un d'. c. est un d. e. (cela dépend uniquement de la frontière du d'. c. considéré), il sera appelé « d. c. ».

THÉORÈME 2b. — Soit $E = K_0^n$. Dans E_ω , les notions de d. c. et de d. e. de frontière non vide coïncident.

Démonstration du cas $n = 2$. — Tout comme dans la démonstration du théorème 2, il suffit de démontrer le résultat pour un d. e. A K_0 -convexe et borné. D'autre part, les seuls cas qui ne rentrent pas dans la démonstration du théorème 2 sont ceux où A a, exactement, un ou deux points-frontières dans E_ω . Remarquons, tout d'abord, que, dans chacun de ces cas, il est indifférent de supposer que A contient ou non lesdits points-frontières; en effet, leur adjonction ou élimination n'affecte pas la propriété de $\varphi_\zeta(A)$ d'être K_0 -convexe, pour $\zeta \in E - A$. On suppose ci-dessous que le point-frontière a de A n'appartient pas à A.

1° A possède deux points-frontières, a et b ; on peut supposer que $b \in A$.

Considérons $\varphi_a(A)$. Puisqu'il est K_0 -convexe et sa frontière contient ω , il existe une demi-droite d d'origine $\varphi_a(b)$ qui soit contenue dans $\varphi_a(A)$.

Considérons maintenant l'ensemble Δ des demi-droites d'origine $\varphi_x(b)$ contenues dans $\varphi_a(A)$ et ordonnons-le par l'un des ordres totaux induits par les deux sens de parcours d'un cercle de centre $\varphi_a(b)$; $\Delta \neq E_\omega$, puisque $\varphi_a(b)$ est un point-frontière, et $\Delta \neq \emptyset$, puisque $d \in \Delta$. Alors, l'absence des points-frontières de $\varphi_a(A)$ à distance finie autres que $\varphi_a(b)$ implique la non-existence d'éléments extrémaux de Δ . $\varphi_a(A)$ est, par conséquent, la réunion d'une famille d'« angles » K_0 -convexes de sommet $\varphi_a(b)$. Or, si un tel ensemble $\varphi_b(A)$ n'est pas un cône maximal de sommet $\varphi_a(b)$, il n'est pas un d. e., car une inversion de pôle $\xi \in E - \varphi_a(b)$ le transforme en un ensemble non K_0 -convexe.

2° A possède un seul point-frontière a . On a déjà supposé $a \notin A$.

En considérant $\varphi_a(A)$, on voit alors qu'il doit être la réunion d'une famille de demi-plans dont les plans-frontières sont parallèles; démonstration essentiellement analogue à la précédente.

L'extension de la démonstration au cas général est aisée. On utilisera le fait que, si A est un d. e. de K_0^n , $A \cap P$ est un d. e. de P , quel que soit le plan P de dimension 2, et l'on considérera $\varphi_\alpha(A)$, α étant un point-frontière de A avec $\alpha \notin A$.

Remarques. — L'examen des définitions 1 des chapitres II et III et des démonstrations des paragraphes 7 et 8 de ce chapitre montrent que le rôle particulier du point ω est apparent, dans le sens que cette particularité cesse d'exister si l'on se place dans un espace sphérique S^n , comme nous l'a suggéré M. Bouligand.

2. La démonstration donnée ci-dessus au théorème peut être formulée de façon à couvrir aussi le cas du théorème 2.

9. APPLICATION DU THÉORÈME 2b A LA DESCRIPTION CONCRÈTE DES D. E. D'UN CORPS COMMUTATIF ALGÈBRIQUEMENT CLOS, DE CARACTÉRISTIQUE ZÉRO — Soit F un tel corps. Son sous-corps premier P est isomorphe au corps des rationnels $\mathbf{Q}$; on peut donc munir P de l'ordre de $\mathbf{Q}$. La *théorie des corps ordonnés* d'E. Artin et O. Schreier ([111], t. 1, p. 225; [17], chap. VI, p. 31) montre alors (dans la terminologie de [17]) qu'il existe un corps K_0 , contenu entre P et F , avec les propriétés suivantes : 1° On peut prolonger à K_0 l'ordre de P , de façon à obtenir un corps ordonné K_0 ; 2° K_0 est alors un corps ordonné maximal; et 3° $F = K_0(i)$, où $i^2 + 1 = 0$.

(Voir, en particulier; [111], t. 1, p. 230, th. 7c et [17], chap. VI, théorème d'Euler-Lagrange.)

Ci-dessous, K_0 désigne toujours le *corps ordonné maximal* en question.

K_0^2 , muni de la topologie-produit $\mathfrak{T}_0(K_0) \times \mathfrak{T}_0(K_0)$, est un evt que nous avons déjà étudié, ainsi que l'isomorphisme des evt (sur K_0) K_0^2 et $K_0(i)$. On a vu que les d. e. du corps topologique (ainsi obtenu) $K_0(i)$ coïncident avec les d. e. de l'espace K_0 -euclidien K_0^2 . Le théorème 2b donne alors le

COROLLAIRE 2.b.1. — *Les notions de d. e. de frontière non vide, du corps topologique $K_0(i)$ et de d. c. de l'evt K_0^2 coïncident, dans l'identification des evt K_0^2 et $K_0(i)$.*

Cette description simple des d. e. de frontière non vide, enlève une grande partie de leur mystère aux d. e. d'un *corps commutatif algébriquement clos de caractéristique 0*.

CHAPITRE IV.

LOCALISATION DANS UN CORPS COMMUTATIF ALGÈBRIQUEMENT CLOS, DE CARACTÉRISTIQUE ZÉRO.

1. DÉFINITION DES ANGLES ET DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DANS K_0^2 . — K_0 est un corps ordonné pythagoricien. Les evt K_0^2 et $K_0(i)$ seront identifiés, dans la suite. On utilisera des coordonnées « K_0 -cartésiennes » dans K_0^2 et l'on appellera axe « K_0 -réel » l'axe des x et axe « K_0 -imaginaire » l'axe des y . Pour abrégé, on supprimera « K_0 » dans les « K_0 -termes » toutes les fois qu'il n'y a pas de danger de confusion. Il sera sous-entendu donc, dans la suite, que le « plan complexe Oxy » considéré est un plan K_0 -complexe.

Considérons la circonférence $(r) : x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$, la droite $x = c (c > 0)$ et le faisceau F des droites passant par O ; munissons l'ensemble des points de la droite de l'ordre total induit par l'ordre de l'ensemble D des ordonnées de ces points, c'est-à-dire de l'ordre de K_0 . La correspondance biunivoque entre D et $F - \{Oy\}$, établie par le point d'intersection d'une droite, qui parcourt F , et de D (l'existence de ce point d'intersection est assurée par le fait que K_0 est pythagoricien), permet de munir $F - \{Oy\}$ d'un ordre total, de sorte que D et $F - \{Oy\}$ soient isotones.

L'ordre de $F - \{Oy\}$ induit un ordre total sur l'ensemble des points $x^2 + y^2 = r^2$ et $x > 0$; on peut prolonger cet ordre, de façon évidente, à la circonférence $x^2 + y^2 = r^2$ tout entière. Il est également évident qu'à chaque point de (r) correspondent deux ordres totaux opposés, définies de façon analogue et ayant ce point comme point initial (nous avons déjà utilisé, implicitement, ces faits, quelquefois, dans B' du chapitre III).

On remarque, par ailleurs, que si l'on prend les circonférences de différents rayons dont le centre est O , les ordres qui y sont induits par le faisceau pré-

cèdent des droites, sont, évidemment, semblables. D'un autre côté, il est clair que les ordres induits de la manière précédente sur les circonférences d'un même rayon sont encore semblables, car on peut appliquer chacune de ces circonférences sur chacune des autres, et ceci sans changer la direction des axes des coordonnées, par une translation.

Soit S l'ensemble des points de (r) , muni de l'un de ces ordres, et considérons l'ensemble $\mathbf{Z} \times S$ des éléments (j, s) , totalement ordonné par la condition : Si $j_1 < j_2$, on a $(j_1, s_1) < (j_2, s_2)$; si $j_1 = j_2$ et $s_1 < s_2$, on a $(j_1, s_1) < (j_2, s_2)$. $\mathbf{Z} \times S$ sera dit le « *recouvrement* » de la circonférence S . Si $\alpha = (j, s)$ est un point de ce recouvrement, $\bar{\alpha} = s$ sera dit son « *point-support* ».

L'ordre que nous venons de définir donne un sens à la notion du « *parcours indéfini* » de (r) , dans les deux sens, à partir du point fixe choisi.

DÉFINITION 1. — Soit $A \subset \mathbf{Z} \times S$. Si A est un *intervalle* de l'ensemble ordonné $\mathbf{Z} \times S$, A , *muni de cet ordre*, sera appelé « *arc de cercle* ». Un arc de cercle strictement inférieur à une circonférence (resp. demi-circonférence) sera appelé « *c-arc de cercle* » (resp. « *c'-arc de cercle* »).

Ainsi considéré A est un arc positif. Si l'on munit A de l'ordre opposé, il sera un arc négatif.

Quand on considérera un arc indépendamment de son sens de parcours, on l'appellera « *a-arc* ».

Considérons l'arc (α, β) [où $\alpha = (j_1, s_1)$, $\beta = (j_2, s_2) \in \mathbf{Z} \times S$]. Il existe alors un et un seul *c-arc* positif (α, β_c) de même origine et tel que β et β_c ont un même point-support [autrement dit, si $\beta_c = (j_c, s_c)$, on doit avoir $s_c = s_2$ et, ou bien $j_c = j_1$ et $s_c \geq s_1$, ou bien $j_c = j_1 + 1$ et $s_c < s_1$]. Alors, (α, β_c) sera dite la « *c-composante* » de (α, β) et $j_2 - j_c$ sera dit le nombre de tours supplémentaires.

DÉFINITION 2. — Tout arc (A_1, A_2) (resp. *c-* ou *c'-*, resp. *a-*) d'une circonférence de centre M et de rayon 1 sera appelé « *angle* » (resp. *c-* ou *c'-*, resp. *a-*) *du couple ordonné* (resp. *ordonné*, resp. *non-ordonné*) *des demi-droites, ou des vecteurs* MA_1, MA_2 . Si (A_1, A_2) est un multiple impair d'une demi-circonférence, ledit angle sera appelé « *angle droit* ».

CONSÉQUENCE. — *Les vecteurs* MB_1, MB_2 *sont orthogonaux si et seulement si leur angle est droit.*

Démonstration — Rappelons que, deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Les vecteurs OA_1 et OA_2 , avec $A_1 = (1, 0)$ et $A_2 = (0, 1)$ sont orthogonaux et forment un angle droit. Or, les transformations euclidiennes préservent l'orthogonalité et transforment les demi-circonférences en demi-circonférences.

Comme toute transformation *euclidienne* est *linéaire* (puisqu'elle préserve

les distances), elle *préserve les longueurs des vecteurs* $(0, 1)$ et $(1, 0)$ et leur *orthogonalité*, elle doit donc être de la forme

$$(E) \quad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + x_0 \\ y' = \beta_1 x + \beta_2 y + y_0, \end{cases}$$

où (α_1, α_2) et (β_1, β_2) sont orthogonaux et de longueur 1.

Considérons maintenant les groupes des déplacements euclidiens du plan K_0^2 , c'est-à-dire les transformations (E) de déterminant 1. Si S et S' sont des circonférences de même rayon, il est clair que toute transformation de ce groupe qui applique le centre de S sur celui de S', applique S sur S'. Il est facile de voir par des considérations analogues à celles du cas $K_0 = \mathbf{R}$ que tout déplacement euclidien transforme un c -arc de S en un c -arc de S' en préservant les relations d'inclusion. Il est également facile de voir que si, en plus, on se donne un point α de S et un point α' de S', il existe une et une seule transformation ρ appliquant S sur S' et telle que $\rho\alpha = \alpha'$. Alors, si (α, β) et (α', β') sont deux c -arcs des cercles correspondants, on les considérera comme égaux si et seulement si l'on a, pour une telle transformation ρ , $\rho\beta = \beta'$. Si (α, β) et (α', β') sont deux arcs quelconques de S, S' resp., on les considérera comme égaux si et seulement si leurs c -composantes le sont et leurs nombres de tours supplémentaires sont les mêmes.

Si l'on considère les arcs d'une circonférence fixe dont l'origine est la même, l'ordre de leurs autres extrémités sur $\mathbf{Z} \times S$ est le même que leur ordre d'inclusion, et l'ordre considéré des arcs d'origine α sur S est transformé par le déplacement ρ précédent en ordre des arcs d'origine $\alpha' = \rho\alpha$, qui leur sont égaux. Si $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{Z} \times S$ et $(\alpha', \beta') \subset \mathbf{Z} \times S'$ sont deux arcs, on dira que $(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta')$ s'il existe un arc $(\alpha', \bar{\beta}') \subset \mathbf{Z} \times S'$ tel que $\bar{\beta}' < \beta'$ et que $(\alpha, \beta) = (\alpha', \bar{\beta}')$. Il est clair que cette relation d'ordre est préservée quand on remplace les arcs par des arcs égaux.

Si deux arcs de la même circonférence sont *adjacents*, la seule considération de leurs extrémités suffit pour pouvoir définir leur somme d'une façon raisonnable; en effet, si α, β , et γ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z} \times S$) sont leurs extrémités, il suffit de stipuler que $(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma)$.

Cette définition de la somme peut être étendue de manière à être préservée par l'égalité des arcs. En effet, désignons par $R[(\alpha, \beta)]$ la classe des arcs de n'importe quelle circonférence de rayon r égaux à (α, β) . On posera $R[(\alpha, \beta)] < R[(\alpha', \beta')]$ si $(\alpha, \beta) < (\alpha', \beta')$ (on a vu que cette définition est cohérente). Soit $R = R[(\alpha, \beta)]$ et $R' = R[(\alpha', \beta')]$. Soit (β, γ) l'arc de la circonférence S égal à (α', β') . Alors, on posera $R + R' = R[(\alpha, \gamma)]$ et l'on voit immédiatement que $R + R'$ ainsi défini ne dépend pas du choix des représentants $(\alpha, \beta) \in R$ et $(\alpha', \beta) \in R'$ et que les classes d'égalité d'arcs forment un groupe abélien ordonné par rapport à l'ordre et à l'addition ainsi définies. L'élé-

ment neutre de ce groupe additif est la classe des *arcs nuls* (α, α) , et $-R[(\alpha, \beta)] = R[(\beta, \alpha)]$. On appellera $R[(\alpha, \beta)]$, considérée comme un élément de ce groupe ordonné [et qu'on notera d'une manière plus courte $\overline{(\alpha, \beta)}$] la « *mesure* » de l'arc (α, β) .

Définissons maintenant les « nombres trigonométriques » d'un angle de la manière élémentaire (bien connue pour $K_0 = \mathbf{R}$) au moyen du triangle rectangle. Dans le cas particulier d'un angle (OA, OB) , où $A = (1, 0)$ et $B = (\xi, \eta)$, avec $\xi^2 + \eta^2 = 1$, cette définition donne $\cos(OA, OB) = \xi$, $\sin(OA, OB) = \eta$.

Si l'on appelle θ l'angle des demi-droites $\{(0, 0), (0, 1)\}, \{(x_0, y_0), (\alpha_1, \alpha_2)\}$, les formules (E) s'écrivent

$$(E') \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta + x_0, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta + y_0. \end{cases}$$

On déduit les formules (bien connues pour $K_0 = \mathbf{R}$):

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, & \dots \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2, \end{aligned}$$

Notations : ϖ = angle correspondant à une demi-circonférence ; alors, $\cos(\varpi - \theta) = \sin \theta$, etc.

Si l'on pose $e(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, on a

$$e(\theta + \theta') = e(\theta) e(\theta') \quad \text{et} \quad e(-\theta) = [e(\theta)]^{-1}.$$

D'où

$$e(m\theta) = [e(\theta)]^m \quad (\text{formule de « de Moivre »}).$$

Note — Bourbaki contient deux références ([18], chap. VIII, p. 100 et 106) à une autre définition des angles φ ($0 \leq \varphi \leq 2$ droites) dans K_0^2 , mais le chapitre IX de son *Algèbre*, auquel il renvoie, n'a pas paru jusqu'à ce moment.

Nos remarques ont été formulées, pour la première fois, dans l'exposé du 9 mars 1959, au Séminaire Dubreil-Pisot.

On va définir maintenant la division d'un angle par un entier $\neq 0$. On supposera ici que K_0 est ordonné *maximal*.

Soit $0 < \varphi < 2\varpi$, $\alpha = e(\varphi)$ et $z^m = \alpha$. Cette dernière équation a m racines distinctes, situées sur $|z| = 1$; soient $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ dans l'ordre positif de cette circonférence, à partir du point initial $(1, 0)$.

DÉFINITION 3. — Soit m un entier ≥ 2 . Alors, le *c'-angle* $((0, 1), \alpha)$ sera appelé « angle $\frac{\varphi}{m}$ ».

Extension évidente au cas d'un angle quelconque.

Remarquons à présent que, dans la trigonométrie élémentaire de $\mathbf{R}^2$, seule la comparaison des arcs des cercles de même rayon joue un rôle essentiel ; l'axiome

d'Archimède, utilisé dans la théorie classique de la mesure des grandeurs, n'est pas nécessaire pour la déduction des formules usuelles de la trigonométrie. D'où, le

THÉOREME 1. — *Les formules usuelles de la trigonométrie élémentaire de $\mathbf{R}^2$ restent valables dans K_0^2 , quand K_0 est un corps ordonné maximal.*

Dans le reste du chapitre, on supposera toujours que K_0 est ordonné maximal.

2. LE PRINCIPE DE L'ARGUMENT ET LE THÉOREME DE ROUCHÉ. — On sait que la localisation des zéros *réels* des fonctions rationnelles *réelles* s'étend à *tout corps ordonné maximal* K_0 (voir [111], t. 1, p. 228 et [17], chap. VI, p. 45).

On va voir qu'il en est de même pour l'extension de la localisation des zéros des fonctions rationnelles *complexes* à $K_0(i)$. En fait, la plupart des théorèmes de ladite localisation qui ne rentrent pas dans nos généralisations des chapitres I, II et III sont des conséquences *des propriétés des angles*; celles de ces conséquences qui ne sont pas immédiates passent par le « *principe de l'argument* » ou par le « *théorème de Rouché* ». Il suffit donc d'étendre ces deux derniers résultats à $K_0(i)$; le dernier est d'ailleurs, conséquence du premier, tout comme dans le cas de $\mathbf{C}$.

Notations : $K = K_0(i)$; si $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\Gamma_\xi: (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 = 1$.

Notations : $K = K_0(i)$, Γ_{z_0} = la circonférence $|z - z_0| = 1$.

Soit I un intervalle $[\alpha, \beta]$ d'un ensemble totalement ordonné et σ une application $I \rightarrow \Gamma_{z_0}$ ayant la propriété suivante, appelée propriété (M) : il existe une décomposition de I en un nombre *fini* de sous-intervalles $I_\nu (\nu = 0, 1, \dots, m) = [\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}] (\alpha_0 = \alpha, \alpha_m = \beta)$ tels que, pour chaque ν , σ soit une application *monotone* de I_ν dans un *c-arc* $(\sigma(\alpha_\nu), \sigma(\alpha_{\nu+1}))$ de Γ_{z_0} .

Considérons maintenant $\mathbf{Z} \times \Gamma_{z_0}$, où l'on notera $\sigma^*(\alpha) = (0, \sigma(\alpha))$. Soit $(0, \gamma)$ l'origine des arcs sur $\mathbf{Z} \times \Gamma_{z_0}$ (en vertu de nos définitions, γ est alors l'origine des arcs sur Γ_{z_0} , et $(0, \gamma) \leq \sigma^*(\alpha)$) et considérons le *c-arc* $(\sigma(\alpha), \sigma(\alpha_1))$ de Γ_{z_0} . On posera dans $\mathbf{Z} \times \Gamma_{z_0}$,

$$\begin{aligned} \sigma^*(\alpha_1) &= (0, \sigma(\alpha_1)), & \text{si l'on a sur } \Gamma_{z_0} \quad 0 \leq (\gamma, \sigma(\alpha)) + (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha_1)) < 2\pi; \\ \sigma^*(\alpha_1) &= (1, \sigma(\alpha_1)), & \text{si l'on a sur } \Gamma_{z_0} \quad (\gamma, \sigma(\alpha)) + (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha_1)) \geq 2\pi; \end{aligned}$$

enfin,

$$\sigma^*(\alpha_1) = (-1, \sigma(\alpha_1)), \quad \text{si l'on a sur } \Gamma_{z_0} \quad (\gamma, \sigma(\alpha)) + (\sigma(\alpha), \sigma(\alpha_1)) < 0.$$

Définition inductive évidente de $\sigma^*(\alpha_\nu)$, pour $\nu = 2, \dots, m$. De cette manière, l'arc $(\sigma^*(\alpha), \sigma^*(\beta))$ de $\mathbf{Z} \times \Gamma_{z_0}$ est parfaitement défini. Cette définition s'appliquant aussitôt à tout sous-ensemble ordonné de I , donc aussi à tout sous-intervalle $[\alpha, \delta]$ de $[\alpha, \beta]$, on a défini ainsi une fonction $\sigma^* = I \rightarrow \mathbf{Z} \times \Gamma_{z_0}$.

Notations : On notera encore $w = f(z)$ et l'on utilisera deux plans distincts pour $z = x + iy$ et pour $w = u + iv$; ces plans sont isomorphes à K_0^2 en tant qu'evt et à $K_0(i)$ en tant que corps topologiques; K et K' désignent resp. ces corps. $\Gamma' =$ circonférence $u^2 + v^2 = 1$.

On va appliquer maintenant ces considérations à la définition de la « *variation de l'argument d'une fonction* $f: I \rightarrow K'$ entre α et β , suivant I », notée $\Delta_I \arg f(z)$.

Hypothèse : 1° $f(z) \neq 0$, quel que soit $z \in I$; et 2° l'application $\sigma(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ de I dans Γ' possède la propriété (M).

Si cette hypothèse est vérifiée, on désignera par $\Delta_I \arg f(z)$ l'arc $(\sigma^*(\alpha), \sigma^*(\beta))$ de $\mathbf{Z} \times \Gamma'$.

Abréviation : Si $\sigma(\alpha)$ est l'origine des arcs dans Γ' , on raccourcira quelquefois « $\Delta_I \arg f(z)$ » en « $\arg f(z)$ ».

Supposons maintenant que pour une même décomposition (I_ν) de I , $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions $I \rightarrow K'$ vérifiant les hypothèses 1° et 2°. En vertu des définitions et de la relation $\prod_{\lambda=1}^n e(\theta_\lambda) = e\left(\sum_{\lambda=1}^n \theta_\lambda\right)$, on a alors dans chaque intervalle de monotonie I_ν ,

$$\Delta_{I_\nu} \arg \prod_{\lambda=1}^n f_\lambda(z) = \sum_{\lambda=1}^n \Delta_{I_\nu} \arg f_\lambda(z).$$

D'où

$$(A) \quad \Delta_I \arg \prod_{\lambda=1}^n f_\lambda(z) = \sum_{\lambda=1}^n \Delta_I \arg f_\lambda(z).$$

Notations : $L =$ une circonférence, dans K , de centre ξ ; $\Lambda =$ le cercle fermé qui a L comme frontière.

Il y a lieu ci-dessous de prendre L pour l'ensemble totalement ordonné I du début; ce qu'il faut entendre par là, c'est qu'on considère L muni de l'ordre usuel où, de plus, il y a un dernier élément β , de même point-support que α .

Soit alors z_0 un point *extérieur* à Λ . On a

$$\Delta_L \arg(z - z_0) = 0.$$

Démonstration. — Les deux tangentes qu'on peut mener du point z_0 à L touchent L resp. aux points τ_1 et τ_2 .

Si l'on considère l'application $f: L \rightarrow K'$ définie par $f(z) = z - z_0$, l'application $\sigma(z) = \frac{z - z_0}{|z - z_0|}$ est monotone dans chacun de deux c -arcs (τ_1, τ_2) . Par conséquent, $\sigma(z)$ décrit sur Γ' [ou, sur Γ_{z_0} , si l'on voulait considérer $f(z)$ et

$\sigma(z)$ comme des applications $L \rightarrow K$] le même α -arc dans les deux sens. D'où, l'assertion.

COROLLAIRE. — *Sous ces hypothèses,*

$$\Delta_L \arg(z - z_0)^{-1} = 0.$$

Soit maintenant z_0 un point *intérieur* de Λ . On a

$$\Delta_L \arg(z - z_0) = 2\pi.$$

Démonstration. — Divisons L en deux c -arcs, de somme 2π , au moyen de deux points α_1, α_2 . $\sigma(z) = \frac{z - z_0}{|z - z_0|}$ est monotone dans chacun de ces arcs et sa monotonie est de même type dans tous les deux; $\sigma(L)$ est alors exactement une circonférence. D'où, l'assertion.

COROLLAIRE. — *Sous ces hypothèses,*

$$\Delta_L \arg(z - z_0)^{-1} = -2\pi.$$

Les deux corollaires se démontrent aisément au moyen de la relation (A).

PRINCIPE DE L'ARGUMENT. — *Soit $f(z)$ une fonction rationnelle, $\zeta_i (i = 1, \dots, \mu)$ [resp. $\xi_i = 1, \dots, \nu$] les zéros (resp. les pôles) de f contenus dans Λ ; on suppose que L ne contient pas de zéro ou de pôle de f . Alors, $\Delta_L \arg f(z)$ existe et vérifie la relation*

$$\Delta_L \arg f(z) = 2\pi(\mu - \nu).$$

Démonstration. — L'application f étant rationnelle et K étant algébriquement clos, $f(z)$ se décompose en facteurs linéaires d'exposant $+1$ ou -1 .

$f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{\mu+\mu'} (z - \zeta_i) \prod_{i=1}^{\nu+\nu'} (z - \xi_i)^{-1}$; le second membre possède l'arg parfaitement défini $\arg a_0 + \sum_{i=1}^{\mu+\mu'} \arg(z - \zeta_i) + \sum_{i=1}^{\nu+\nu'} \arg(z - \xi_i)^{-1}$, en vertu de (A). D'où, l'assertion.

THÉORÈME (de Rouché). — *Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions rationnelles, dont aucun pôle ou zéro n'est situé sur L ; on suppose que, en tout point de L , $|\varphi(z)| < |f(z)|$; μ_1, ν_1 (resp. μ_2, ν_2) sont les nombres des zéros et des pôles de f (resp. de $f + \varphi$) contenus dans Λ . Alors,*

$$\mu_1 - \nu_1 = \mu_2 - \nu_2.$$

Démonstration. — D'après le principe de l'argument, $\Delta_L \arg f(z) = 2\pi(\mu_1 - \nu_1)$, $\Delta_L \arg(f(z) + \varphi(z)) = 2\pi(\mu_2 - \nu_2)$. Il suffit donc de montrer que

$$\Delta_L \arg f = \Delta_L \arg(f + \varphi).$$

En vertu de (A), cela revient à $\Delta_L \arg \frac{f+\varphi}{f} = 0$, donc à $\Delta_L \arg \left(1 + \frac{\varphi}{f}\right) = 0$. Or, comme $|\varphi| < |f|$ sur L, le point $w = 1 + \frac{\varphi}{f}$ reste toujours dans le demi-plan ouvert positif quand, z décrit L; donc, $\Delta_L \arg w = 0$.

En voici une application du théorème de Rouché : Soit $f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$, r un élément donné > 0 , tel que $f(z) \neq 0$ pour $|z| = r$, et $0 < p \leq n$. La circonférence $|z| = r$ contient alors au moins un point z tel que $\left| \sum_{v=0}^{p-1} a_v z^v \right| \leq |f(z)|$. (Cette inégalité généralise l'inégalité de Cauchy, obtenue pour $p = 1$ et $K_0 = \mathbf{R}$).

Démonstration. — 1° Cas trivial : $\sum_{v=0}^{p-1} |a_v| = 0$. 2° $\sum_{v=0}^{p-1} |a_v| \neq 0$. Alors, si pour $|z| = r$ on avait $\left| \sum_{v=0}^{p-1} a_v z^v \right| > |f(z)|$, les polynômes $\sum_{v=0}^{p-1} a_v z^v$ et $\sum_{v=p}^n a_v z^v$ auraient le même nombre de zéros dans le cercle $|z| \leq r$; or, ceci est absurde, car $\sum_{v=p}^n a_v z^v = 0$ a p racines nulles.

THÉOREME (de la « continuité » des zéros d'un polynôme).

Soit

$$f(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v = a_n \prod_{j=1}^p (z - z_j)^{m_j}, \quad a_n \neq 0,$$

$$F(z) = (a_0 + \varepsilon_0) + (a_1 + \varepsilon_1)z + \dots + (a_{n-1} + \varepsilon_{n-1})z^{n-1} + a_n z^n$$

et soit

$$0 < r_v < \min |z_v - z_j| \quad (j = 1, \dots, v-1, v+1, \dots, p).$$

Il existe alors un élément $\varepsilon > 0$ tel que, si $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ ($i = 0, \dots, n-1$), $F(z)$ a précisément m_v zéros dans le cercle C_v de centre z_v et de rayon r_v . Il suffit de prendre $\varepsilon < \delta_v M_v^{-1}$, où

$$M_v = \sum_{j=0}^{n-1} (r_v + |z_v|)^j \quad \text{et} \quad \delta_v = |a_n| r_v^{m_v} \prod_{j=1, j \neq v}^p (|z_j - z_v| - r_v)^{m_j}$$

Cet énoncé est verbalement le même que dans Marden ([68], p. 14); il en est de même pour l'extension à $K_0(i)$ de la démonstration exposée dans ce texte.

COROLLAIRE C. — Hypothèse : $G(z, w) = \sum_{v=0}^n g_v(z) w^v$, $g_v(z)$ est un polynôme, $G(z, w)$ est irréductible, $g_n(z_0) \neq 0$ et w_0 est une racine m -uple de l'équa-

tion $G(z_0, \omega) = 0$. *Conclusion* : Pour chaque cercle $C_\varepsilon : |\omega - \omega_0| < \varepsilon$ de rayon assez petit $\varepsilon > 0$, il existe un cercle $\Gamma_\delta : |z - z_0| < \delta$, où $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tel que, pour tout point $z_1 \neq z_0$ de Γ_δ , l'équation $G(z, \omega) = 0$ a précisément m racines dans C_ε ; ces racines sont distinctes.

Le corollaire C permet, en particulier, de définir *localement*, dans un voisinage du point *non critique* ξ , la « fonction algébrique locale » $\omega(z)$, solution locale de $G(z, \omega) = 0$.

DÉFINITION. — On appellera « région » (resp. « s.c.-région ») de K_0^2 une partie (ouverte) de K_0^2 localement homéomorphe (resp. homéomorphe) à un cercle ouvert.

Notation : « s.c. » rappelle « simplement connexe ».

3. LE PRINCIPE DU MODULE MAXIMUM ET LE LEMME DE SCHWARZ. — Dans le cas des fonctions *algébriques* non constantes, on va étendre, ci-dessous, ces deux résultats classiques au cas de $K_0(i)$.

Posons-nous dans les hypothèses du corollaire de la fin du paragraphe 2. Supposons en plus que $m = 1$ et faisons correspondre à chaque $z \in \Gamma_\delta$ la racine ω de $G(z, \omega) = 0$; appelons f l'application $\Gamma_\delta \rightarrow C_\varepsilon$ ainsi définie. Soit $\sigma : f(\Gamma_\delta) \rightarrow \Gamma_\delta$

l'application réciproque à f . Comme on a, d'autre part, $G(z, \omega) = \sum_{v=0}^p \varphi_v(\omega) z^v$,

le corollaire précité implique que, si $\varphi_p(\omega_0) \neq 0$, z_0 étant une racine λ -uple de $G(z, \omega_0) = 0$, à chaque cercle assez petit $\Gamma_{\delta'} : |z - z_0| \leq \delta'$ correspond un cercle $C_\varepsilon : |\omega - \omega_0| \leq \varepsilon'(\delta')$, tel que, pour tout point $\omega_1 \neq \omega_0$ de C_ε , $G(z, \omega_1) = 0$ a précisément λ racines dans $\Gamma_{\delta'}$. Par conséquent, f est une application ouverte. Elle satisfait donc au

PRINCIPE DU MODULE MAXIMUM. — Quel que soit le point intérieur z_0 de l'ensemble de définition de f et le voisinage V de z_0 , il existe $\zeta \in V$ tel que $|f(\zeta)| > |f(z_0)|$.

La validité du principe de module maximum entraîne la validité du

LEMME (de Schwarz). — Soit $\varphi(z)$ une fonction algébrique, définie dans $\Gamma : |z| < 1$, pour laquelle tout point de Γ est point ordinaire, et soit $f(z) = z\varphi(z)$. Hypothèse : $z \in \Gamma$ entraîne $|f(z)| \leq 1$. Conclusion : $z \in \Gamma$ entraîne $|f(z)| \leq z$. S'il existe $\zeta \in \Gamma$ tel que $|f(\zeta)| = |\zeta|$, $f(\zeta) = e^{i\alpha}\zeta$ (α réel).

Démonstration. — Verbalement, la même que dans ([9], p. 40).

On peut aussi étendre aux fonctions algébriques de $K_0(i)$ les généralisations du lemme exposées dans Nehari ([90], p. 166) et Ahlfors ([2], p. 110).

4. REPRÉSENTATION CONFORME. HOMOGRAPHIES. — Notons, en premier lieu, que dans tout corps muni d'une K_0 -valeur absolue et de la topologie définie par celle-ci, la définition classique de la dérivée d'une fonction s'étend de façon immédiate; cela s'applique, en particulier, à K_0 et à $K_0(i)$.

Employons maintenant des coordonnées homogènes dans K_0^2 et soit $F(x, y, z) = 0$ une équation homogène en x, y et z , définissant une « courbe » algébrique (c) . Extension immédiate à K_0^2 des propriétés élémentaires bien connues (signalées, par exemple, dans [62], t. I, p. 6).

Un point de (c) sera appelé « ordinaire », si $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \neq (0, 0, 0)$.

Les mêmes raisons que dans le cas classique justifient la

DÉFINITION. — Si (x_0, y_0, z_0) est un point ordinaire de $F = 0$, la droite $x \frac{\partial F}{\partial x_0} + y \frac{\partial F}{\partial y_0} + z \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0$ sera appelée « tangente » de F au point (x_0, y_0, z_0) .

Les courbes algébriques forment un exemple de courbes possédant, en général, une tangente.

DÉFINITION. — Soit A une région de $K_0(i)$ et soit f une application : $A \rightarrow K_0(i)$. Si f possède une dérivée finie en chaque point de A , on dira qu'elle est « régulière » dans A . On dira que f est « régulière au point z_0 , s'il existe une région $A \ni z_0$, dans laquelle f est régulière.

Exemple. — Toute fonction algébrique est régulière dans sa région de définition.

THÉORÈME (de l'isogonalité). — Les applications régulières conservent les angles.

Démonstration : Évidente. (Voir [9], p. 7.)

Conformément à la terminologie des chapitres II et III, on appellera « homographies » les applications que plusieurs auteurs appellent transformations « homographiques », ou « linéaires ».

La partie suivante du livre [9] de Bieberbach s'étend immédiatement à $K_0(i)$, pourvu qu'on remplace les « fonctions analytiques » par les « fonctions algébriques, définies dans la région considérée » : [§ 2 (p. 13), § 6 (p. 50), sauf page 42].

La première partie du premier volume du livre [22] de Carathéodory (p. 1-83) s'étend à $K_0(i)$, sauf les définitions des longueurs des arcs comme des limites, les formules intégrales qui leur correspondent, et, éventuellement, le théorème de Carathéodory cité à la page 24.

5. APPLICATIONS A LA LOCALISATION DES ZÉROS DES POLYNÔMES. — A titre d'exemples, nous citons ci-dessous certains résultats (bien connus quand $K_0 = \mathbf{R}$), qui s'étendent au cas d'un K_0 *maximal quelconque*. Certains de ces résultats sont même valables dans des structures encore plus générales, considérées dans les chapitres I, II, IV.

En général, les citations sont faites suivant l'ordre chronologique des Mémoires cités.

1. *Conditions suffisantes pour qu'une équation $\sum_{v=0}^n a_v z^v = 0$ à coefficients réels possède des racines non réelles.*

Les conditions énoncées sous la forme $\{P_\mu(a_0, \dots, a_n) > 0 (\mu = 1, \dots, \lambda)\}$ (P_μ étant un polynôme en $a_0, \dots, a_n$) restent, en général, valables.

Exemples. — Le critère de P. Zervos, ainsi que sa méthode plus générale de démonstration par induction ([122], 1901) et son extension due à N. Petridis ([98], 1949).

2. *Sur les modules des zéros des polynômes*, par Paul MONTEL ([78], 1923).

Tous les résultats pour les *polynômes*, dont les démonstrations sont *contenues* dans ce Mémoire fondamental, sauf peut-être le théorème du paragraphe 13, restent valables.

En ce qui concerne le paragraphe 11, la démonstration de Montel s'étend à $K_0(i)$, si l'on change comme il suit la démonstration du lemme

Si $|a'_i| \leq |a_i| (i = 1, \dots, p)$ et, si $|a'_p| \geq |a_p|(p+1)^{-1}$, les zéros du polynôme

$$R(x) = x^p + a'_1 x^{p-1} + \dots + a'_p$$

restent, en valeur absolue, supérieurs à un nombre fixe > 0 ne dépendant que de $(a_1, \dots, a_p)$.

Posons $\varphi(x) = x^p + \dots + a'_{p-1}x$; alors, $|\varphi(x)| \leq |x|^p + \dots + |a'_{p-1}||x| = \varphi_1(|x|)$. D'autre part, pour $|x| \leq \varepsilon$, où ε est un élément fixe > 0 assez petit, $\varphi_1(|x|) < |a_p|(p+1)^{-1}$; donc, $|x| \leq \varepsilon$ entraîne $|\varphi(x)| < |a'_p|$. L'application du théorème de Rouché au cercle $|x| \leq \varepsilon$ achève alors la démonstration du lemme.

Voir aussi l'Appendice I, (après le chapitre IV).

3. *On the Location of Roots of Polynomials and Entire Functions*, par E. B. VAN VLECK ([113], 1929).

Tout le contenu des pages 644-657 de cette conférence reste valable.

4. *Sur les racines des équations algébriques*, par N. OBRECHKOFF ([92], p. 1933).

Tous les résultats de ce Mémoire restent valables, sauf la déduction du théorème de Gauss-Lucas, à la page 98, et la démonstration du théorème VIII.

5. *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes*, par Paul MONTEL ([82], 1934).

La condition *nécessaire* du paragraphe 1 peut encore être démontrée, par le théorème de Rouché cette fois; nous renvoyons à l'Appendice I, pour une extension de la condition suffisante.

Le contenu des paragraphes 2-9 reste valable.

6. *La théorie analytique des polynomes d'une variable*, par J. DIEUDONNÉ ([36], 1938).

Le contenu des chapitres I-III reste valable. L'applicabilité du chapitre I, en particulier, signifie que le problème du calcul (théorique) du nombre exact des racines d'une équation algébrique contenues dans un cercle ouvert (resp. fermé) donné se résout entièrement, et sa solution est la copie de la solution classique (due à Hermite, et à Fujiwara, Schur et Cohn).

En ce qui concerne le chapitre IV, nous renvoyons à 2 (ci-dessus), à notre chapitre II et à l'Appendice I; les théorèmes XVI et XVII sont des cas particuliers du théorème I de cet Appendice. Le théorème XXI (de Fekete) reste également valable.

Les n^{os} 1 et 2 du chapitre V restent valables.

Les théorèmes XXVIII, XXIX, XXX et les théorèmes de Walsh restent valables; la validité des théorèmes XXXI et XXXII de J. von Sz. Nagy sera examinée ailleurs.

Les n^{os} 1, 2, 3 et 5 du chapitre VIII restent valables; de même, pour les n^{os} 1, 2 et 6 du chapitre IX. Les n^{os} 1, 2, les théorèmes XLV, XLVI, les n^{os} 5 (avec une autre démonstration du théorème XLVII), 6, 7 et 8 du chapitre X restent valables; cela contient le théorème de Jentzsch.

7. *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable*, par M. MARDEN ([68], p. 1949).

Ce livre est le plus riche en résultats qu'a paru jusqu'à ce jour sur le sujet. *La majorité des résultats qu'il contient s'étend à $K_0(i)$* . Contentons-nous de signaler les résultats suivants, choisis au hasard: Les théorèmes 4.2 (de Siebeck) et 9.1; les corollaires 15.3 et 16.1; les théorèmes 16.2, 16.3, 17.2a, 17.2b, 17.3a, 17.3b, 17.3c et 18.1; le corollaire 18.1; le théorème 18.2; le corollaires 18.2a, 18.2b et 18c; les théorèmes 18.3, 20.1, 21.1, 22.1, 22.2, 22.3, 26.1 et 29.1; les paragraphes 32-33; le théorème 34.1 et les paragraphes 36-45.

8. *The Location of Critical Points of Analytic and Harmonic Functions*, par J. L. WALSH ([118], 1950).

Des remarques analogues s'appliquent, en partie, aux chapitres I-V.

9. *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées*, par M. PARODI ([95], 1952).

Une très grande partie du contenu s'étend à $K_0(i)$.

10. *La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications*, par M. PARODI ([96], 1959).

Même remarque.

11. *Inequalities concerning polynomials in the complex domain*, par N. G. DE BRUIJN ([31], 1947).

Plusieurs des résultats contenus dans ce Mémoire, déjà cité au paragraphe 9 du chapitre II, s'étendent à $K_0(i)$. En premier lieu, la démonstration que de Bruijn donne au théorème suivant de S. Bernstein :

Si $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes satisfaisant à

$$|P(z)| \leq |Q(z)| \quad \text{et} \quad Q(z) \neq 0, \quad \text{pour} \quad \operatorname{Im} z \geq 0,$$

on a aussi, pour ces valeurs de z , $|P'(z)| \leq |Q'(z)|$.

Les théorèmes 3-11 de ce Mémoire restent tous valables; contentons-nous de rappeler l'énoncé du

THÉORÈME (d'Erdős-Lax). — *Si le polynôme de degré n $P(z)$ satisfait à $0 < |P(z)| \leq 1$, pour $|z| \leq 1$, on a aussi, pour ces valeurs de z , $|P'(z)| \leq \frac{n}{2}$.*

12. *Sur les zéros des polynômes*, par M. BIERNACKI ([12], 1955).

Plusieurs des résultats contenus dans ce Mémoire, déjà cité au paragraphe 9 du chapitre II, s'étendent à $K_0(i)$. Ainsi, tous les résultats obtenus par Biernacki dans les paragraphes 3, 4 restent valables. Signalons, par exemple, son théorème III : *Si le polynôme $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$ ne s'annule pas dans le cercle $|z| < r$, le polynôme $Q(z) = a_0 + \dots + a_{n-p} z^{n-p}$ ($p < n$) ne s'annule pas dans le cercle $|z| < r(p+1)^{-1}$. Cette limite est atteinte, lorsque $P(z) = (1+z)^n$, $p = n-1$, $Q(z) = 1+nz$.*

Enfin, la partie 1° (voir le paragraphe 9 du chapitre II) de son théorème I reste valable.

EXEMPLE. — Soit $K_0(i)$ la clôture (algébrique) du corps des fonctions rationnelles d'une variable sur $\mathbf{C}$; en d'autres termes, $K_0(i) =$ le corps des « fonctions algébriques d'une variable » sur $\mathbf{C}$. Munissons-le de la valeur absolue ordinaire de $K_0(i)$, et appelons-le K_x .

Le fait que des résultats tels que le théorème d'Erdős-Lax et les théorèmes de Biernacki restent valables dans K_x , montre l'intérêt des généralisations considérées ci-dessus, ainsi que des méthodes de démonstration utilisées par Biernacki et de Bruijn.

APPENDICE I.

SUR LA LOCALISATION DANS UN CORPS COMMUTATIF, ALGÈBRIQUEMENT CLOS,
MUNI D'UNE K_0 -VALEUR ABSOLUE.

Soit F un tel corps, et soit $\sigma(z) = \sum_{v=0}^n a_v z^v$.

THÉOREME 1 (de Montel-Van Vleck). — Si $|a_0|, \dots, |a_{p-1}|$ et un des $|a_v|$ restants demeurent bornés, p zéros de $\sigma(z)$ restent bornés en valeur absolue.

Le cas particulier $F = \mathbf{C}$ de ce théorème est dû à Montel [82] et Van Vleck [112].

Le principe d'une démonstration de ce résultat dû à Markovitch [76] s'offre pour démontrer notre généralisation.

Démonstration. — 1° Supposons que $\sigma(z)$ possède au moins $n - p + 1$ zéros distincts, et soient z_μ ($\mu = 1, \dots, n - p + 1$) $n - p + 1$ tel zéros. Alors,

$$a_p z_\mu^p + \dots + a_{p+h-1} z_\mu^{p+h-1} + a_{p+h+1} z_\mu^{p+h+1} + \dots + a_n z_\mu^n = -(a_0 + \dots + a_{p-1} z_\mu^{p-1} + a_{p+h} z_\mu^{p+h}).$$

($\mu = 1, \dots, n - p + 1$).

De ces $n - p + 1$ relations, on peut éliminer les $n - p$ éléments $a_0, \dots, a_{p+h-1}, a_{p+h+1}, \dots, a_n$; on obtient

$$|z_\mu^p \dots z_\mu^{p+h-1} z_\mu^{p+h+1} \dots z_\mu^n; a_0 + \dots + a_{p-1} z_\mu^{p-1} + a_{p+h} z_\mu^{p+h}| = 0 \quad (\mu = 1, \dots, n - p + 1)$$

donc

$$(1) \quad \sum_{l=0}^{p-1} a_l H_l = a_{p+h} H_{p+h},$$

où l'on a posé

$$H_l = |z_\mu^p \dots z_\mu^{p+h-1} z_\mu^{p+h+1} \dots z_\mu^n z_\mu^l| \quad (0 \leq l \leq p-1, \mu = 1, \dots, n - p + 1)$$

et

$$H_{p+h} = (-1)^{n-p-h+1} |z_\mu^p \dots z_\mu^n| \quad (\mu = 1, \dots, n - p + 1).$$

Or, $|1 z_\mu \dots z_\mu^{n-p}|$ étant un déterminant de Van der Monde [46], on a

$$\begin{aligned} |z_\mu^p \dots z_\mu^n| &= (z_1 \dots z_{n-p+1})^p |1 z_\mu \dots z_\mu^{n-p}| \\ &= (z_1 \dots z_{n-p+1})^p (-1)^{\lambda} (z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_{n-p+1}) \\ &\quad \times (z_2 - z_3) \dots (z_2 - z_{n-p+1}) \\ &\quad \times \dots \dots \dots \\ &\quad \times (z_{n-p} - z_{n-p+1}). \end{aligned}$$

Considérons la relation (1), écrite sous la forme $a_{p+h} = \sum_{l=0}^{p-1} a_l \frac{H_l}{H_{p+h}}$. Chaque H_l contient le facteur $(z_1 - z_2) \dots (z_{n-p} - z_{n-p+1})$; chaque terme de H_l est de degré $(n-p)p + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2} + l - (p+h)$ et de H_{p+h} est de degré $(n-p)p + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$, par rapport à l'ensemble des éléments z_μ , et son coefficient est ± 1 ; la plus grande puissance de z_μ qui figure dans $\frac{H_l}{(z_1 - z_2) \dots (z_{n-p} - z_{n-p+1})}$ est z_μ^p , tandis que $\frac{(z_1 - z_2) \dots (z_{n-p} - z_{n-p+1})}{H_{p+h}}$ contient le facteur z_μ^p .

CONCLUSION. — L'hypothèse $|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_n|$ sur les zéros de $\sigma(z)$, z_μ ($\mu = 1, \dots, n-p+1$) étant supposés distincts, entraîne que

$$(3) \quad \frac{|H_l|}{|H_{p+h}|} \leq \frac{A_l}{|z_{n-p+1}|^{p+h-l}},$$

A_l étant le nombre des termes du quotient $\frac{H_l}{H_{p+h}}$.

Donc,

$$(4) \quad |a_{p+h}| \leq \sum_{l=0}^{p-1} |a_l| \frac{1}{|z_{n-p+1}|^{p+h-l}};$$

d'où,

$$(5) \quad |a_{p+h}| \cdot |z_{n-p+1}|^{p+h} \leq A_{p-1} |a_{p-1}| \cdot |z_{n-p+1}|^{p-1} + \dots + A_0 |a_0|.$$

2° Quand les $n-p+1$ zéros contiennent nécessairement des zéros multiples, on utilisera le fait que ces zéros annulent également certaines dérivées de $\sigma(z)$.

Aux recherches de Montel-Van Vleck on peut aussi associer les recherches de Varopoulos [114].

Résultats pratiques. — Notation :

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|.$$

Montel ([81], [82]) a utilisé la relation fondamentale

$$(6) \quad |z_p \dots z_n| \leq |a_{n-p+1}| + C_{n-p+1}^1 |a_{n-p+2}| \cdot |z_p|^{-1} + \dots + C_{n-1}^{p-1} |a_n| \cdot |z_p|^{1-p}$$

pour obtenir de majorants de $|z_p|$. Elle reste valable dans F ; donc, on peut aussi appliquer à (6) la méthode des fonctions décroissantes; (6) et (11.2) donnent, par exemple,

$$|z_p| \leq \max \left\{ M, \left(|a_{n-p+1}| + C_{n-p+1}^1 |a_{n-p+2}| M_1^{-1} + \dots + C_{n-1}^{p-1} |a_n| M_{p-1}^{1-p} \right)^{\frac{1}{n-p+1}} \right\}.$$

Remarque. — Pour $1 \leq \lambda \leq p-1$, $n \geq p \geq 2$, on a

$$C_{n-p+\lambda}^\lambda < (n-1)^{p-1} < p^{(n-p+1)(p-1)};$$

car, la fonction $x \mapsto 1 - p^{x-p+1}$ est strictement décroissante en x dans $[p, +\infty)$, pour $p \geq 2$. (6) donne alors

$$(7) \quad |z_p| \leq \max \{1, p^{p-1}, p^{p-1}(|a_{n-p+1}| + \dots + |a_n|)\}.$$

(7) et $|z_1| \leq \max \{1, |a_n|\}$ démontrent très simplement le fait qualitatif (contenu, évidemment, dans le théorème 1) que *les valeurs absolues de p zéros au moins de $f(z)$ sont bornées supérieurement par un nombre indépendant des coefficients a_v , $1 \leq v \leq n-p$, et de n .*

Note. — Considérons le Mémoire classique [82] de Montel. Le théorème 1 étend à F la condition *suffisante* du paragraphe 1. Le contenu des paragraphes 2-8 reste, essentiellement, valable.

Considérons maintenant le problème de Landau-Montel pour les polynômes lacunaires. Soit $f_m(z) = 1 + z + a_{v_1}z^{v_1} + \dots + a_{v_m}z^{v_m}$. Notation : $\varphi(m) =$ fonction de la seule variable m .

THÉOREME 2 (d'Allardice-Casabonne). — *Au moins un zéro de $f_m(z)$ est contenu dans un cercle de centre O et de rayon $\sigma(m)$. ([3], [25].)*

Voir [129] (p. 25) pour la démonstration, qui s'applique telle quelle au cas d'une K_0 -valeur absolue. (Quand $F = \mathbf{C}$ et $|\cdot|$ est la valeur absolue ordinaire, le principe de cette démonstration est dû à Casabonne [25]).

Quand $K_0 = \mathbf{R}$, le résultat quantitatif déduit de cette démonstration peut toujours être amélioré. En effet,

1° si $|\cdot|$ n'est pas *ultramétrique*, F est isomorphe à un sous-corps de $\mathbf{C}$, en vertu d'un théorème bien connu d'Ostrowski ([6]); on est donc dans le cas classique, où les cercles sont des d. e., auxquels on peut appliquer le théorème 5 du chapitre II;

2° si $|\cdot|$ est *ultramétrique*, il résulte de l'inégalité ultramétrique que $\left| \sum_{i=1}^{v_m} z_i^{-1} \right| = 1$ entraîne $\max_{i=1, \dots, v_m} (|z_i|^{-1}) \geq 1$, donc que $\min_{i=1, \dots, v_m} (|z_i|) \leq 1$. Le cercle de Casabonne est alors remplacé par le cercle $|z| \leq 1$, donc, par un cercle *indépendant du nombre des termes non nuls*. Ce renforcement du résultat classique pour les polynômes incite à étudier le problème de Landau-Montel dans les corps valués ultramétriques. [Rappelons que dans un tel corps F complet, on possède une théorie des fonctions analytiques d'une variable dans F , grâce aux travaux de M. Krasner ([54], [55], [56], [57], etc.).]

Or, dans le cas des corps valués ultramétriques algébriquement clos, on connaît depuis les travaux de Dumas et d'Ostrowski (et, en partie, depuis les premiers travaux de Hensel) la manière simple de définir les minorantes et les majorantes *exactes* des zéros d'un polynôme $f(x)$ [qu'on suppose non nul à l'origine s'il s'agit de minorantes ⁽¹⁾]. En effet, si $p_0 p_1 \dots p_s$ est le polygone de Newton de $f(x)$, le minimum des valuations des zéros de $f(x)$ est $\mu = e^{U_1}$, où U_1 est la pente du premier côté $P_0 P_1$ de ce polygone, et le maximum de ces valuations est $M = e^{U_s}$, où U_s est la pente du dernier côté $P_{s-1} P_s$ de ce polygone. Ces pentes ont une expression analytique très simple en fonction des valuations des coefficients de $f(x)$, qui est la suivante : Soit $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ($a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ dans le cas des minorantes). Alors,

$$U_1 = \max_i \left(\log \sqrt[i]{\left| \frac{a_i}{a_0} \right|} \right),$$

$$U_s = \min_i \left(\log \sqrt[n-i]{\left| \frac{a_n}{a_i} \right|} \right);$$

d'où

$$\mu = e^{U_1} = \max_i \left(\sqrt[i]{\left| \frac{a_i}{a_0} \right|} \right),$$

$$M = e^{U_s} = \min_i \left(\sqrt[n-i]{\left| \frac{a_n}{a_i} \right|} \right).$$

Ces limites sont, évidemment, plus précises que celles du cas général. La limite pour la minorante est encore valable si $f(x)$ est une série de Taylor, mais, on ne peut être certain qu'elle coïncide avec le minimum des valuations des zéros de $f(x)$ dans le corps valué K , qu'on ne considère que si K est un surcorps algébriquement clos d'un corps *complet* k contenant tous les coefficients de $f(x)$ (ceci résulte des travaux de Schöbe [105, b] et de Krasner).

APPENDICE II.

Soit F un *corps commutatif, algébriquement clos, de caractéristique zéro*, et soit $F = K_0(i)$; F est muni de la valeur absolue ordinaire de $K_0(i)$.

Le fait qui caractérise $\mathbf{C}$ (et les corps isomorphes à $\mathbf{C}$) parmi les corps F est qu'ils satisfont à la propriété (B) :

Toute partie majorée possède une borne supérieure.

⁽¹⁾ Autrement dit, cette minorante (resp. majorante) coïncide pour tout $f(x)$ avec le minimum (resp. maximum) des valuations de ses zéros.

Donc, si l'on peut démontrer un théorème 0 dans le plan complexe, sans utiliser (directement ou indirectement) la propriété (B), ce théorème (convenablement énoncé) reste vrai dans F .

Cette remarque simple a guidé les considérations du chapitre IV.

On pourrait, peut-être, l'utiliser pour étendre quelque peu (en tenant compte de l'ordre de K_0) le résultat classique suivant de Lefsetz : *En ce qui concerne les faits strictement algébriques, la géométrie algébrique sur un corps de base de caractéristique zéro est la même que la géométrie algébrique sur $\mathbf{C}$* [65].

APPENDICE III.

Quelques remarques sur les espaces vectoriels topologiques.

(Suite du A' du chapitre III.)

1. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES SUR UN CORPS K_0 -VALUÉ NON DISCRET k . [En correspondance avec Bourbaki (*EVT*, chap. I).]

Hypothèse. — La partie $|k|$ de K_0 est cofinale à K_0 .

EVT (§ 1) : Définition 2, propositions 2 et 4, définition 3 et proposition 5.

Signalons encore que, dans un espace K_0 -normé, un système fondamental de voisinages de 0 est formé par les transformées de la boule unité par les *homothéties* $x \rightarrow tx$, où t parcourt l'ensemble des éléments $\neq 0$ de k ([18], chap. IX, p. 66).

Variétés linéaires dans un evt (§ 2) : Proposition 2, corollaire, théorème 1, corollaires 1 et 2, théorème 2, corollaires 1, 2, 3 et 4, proposition 3, corollaire.

2. ENSEMBLES K_0 -CONVEXES. ESPACES LOCALEMENT K_0 -CONVEXES. — Sauf mention expresse du contraire, il ne sera question ci-dessous que d'espaces vectoriels et d'espaces affines sur un *corps ordonné* K_0 , muni de la topologie $\mathfrak{T}_0(K_0)$, etc. La définition du *barycentre* d'une famille finie $(x_i)_{i \in I}$ de points, affectés resp. des « masses » $\lambda_i \in K_0$, est immédiate; il en est de même des notions de *demi-droite*, de *segment*, etc.; on est ainsi conduit à la généralisation naturelle de la notion de *convexité* (appelée ici « K_0 -convexité ») et des notions qui s'y rattachent à celle-ci (*voir* aussi [19], chap. II, p. 68-69).

En correspondance avec Bourbaki (*EVT*, chap. II).

Ensembles K_0 -convexes (§ 1) : Définition 1, exemples 1, 2 et 3, propositions 1, 2, 3, 4, 5 et 6, corollaire (pour K_0''), proposition 7 (α et $\beta \in K_0$), définition 2, proposition 8, corollaire, définition 3 (Cônes K_0 -convexes), propositions 9 et 10, corollaires 1 et 2, proposition 11, corollaire, proposition 12.

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tout ensemble fini I , $\mu_i \in K_{0+}$ et $x_i \in C(i \in I)$ entraînent $\sum \mu_i x_i \in C$; or, $(\sum \mu_i)^{-1} \sum \mu_i x_i \in A$, par hypothèse, donc $\sum \mu_i x_i \in (\sum \mu_i)A$.

Définition. — Soit E un evt sur K_0 . On dit qu'un cône ouvert (resp. fermé) K_0 -convexe époinaté (resp. pointé) A (de sommet α) est *maximal*, s'il est élément maximal dans l'ensemble des cônes ouverts (resp. fermés) K_0 -convexes (de même sommet) $\neq E$, ordonné par inclusion (Voir aussi [19], chap. II, p. 76).

Quand $K_0 = \mathbf{R}$, tout A fermé (resp. $A - \{\alpha\}$ ouvert) est un *demi-espace* de la forme $f(x) \geq 0$ [resp. $f(x) > 0$], où f est une forme linéaire $\neq 0$ dans E .

Définition d'un espace vectoriel ordonné, propositions 13 et 14, définition 4, proposition 15, corollaires 1 et 2, proposition 16.

Espaces localement K_0 -convexes (§ 2) : Définition 1, proposition 1, corollaire, proposition 2, définition 2, proposition 3, lemme 1.

3. SÉPARATION DES ENSEMBLES K_0 -CONVEXES. — L'extension du théorème fondamental de Hahn-Banach et de ses corollaires n'est pas automatique, à cause de la non-connexité des evt sur un corps des scalaires non archimédien; son étude générale demande, en plus de l'hypothèse que K_0 soit *complet*, certaines restrictions sur les ensembles convexes considérés; nous ne la faisons pas ici. Il est plus utile pour notre sujet de considérer des evt plus particuliers, mais, sur un corps K_0 non nécessairement complet. Remplaçons donc le théorème de H-B par la

DÉFINITION. — Soit E un evt sur K_0 , A un ensemble ouvert convexe non vide dans E . S'il existe une variété linéaire M qui ne rencontre pas A , sans qu'il existe un hyperplan fermé H contenant M et ne rencontrant pas A , on dira que A est « H-B exceptionnel dans E ».

EXEMPLE. — Soit $E = K_0^n$. Les seuls cônes ouverts convexes H-B exceptionnels sont les cônes ouverts convexes épointés maximaux qui ne sont pas de demi-espaces.

En correspondance avec le paragraphe 3 de [19] (chap. II) :

Définitions 1, 2, 3 et 4. Proposition 3 : Soit A un corps convexe dans un evt E . Tout hyperplan d'appui de A est fermé. Si A n'est pas H-B exceptionnel dans E , tout point frontière de A appartient à un hyperplan d'appui de A au moins. Corollaire (pour cet A). Propositions 5 et 6.

4. K_0 -SEMI-NORMES. — En correspondance avec le paragraphe 5 de [19], (chap. II) :

Définition 1, propositions 1 et 2, corollaires 1 et 2, définition 2 (on remplace $\mathbf{R}$ par K_0) des K_0 -semi-normes. Proposition 3, 1°; en ce qui concerne 2°, on a :

Soit A un corps convexe, symétrique dans E , *a.* S'il existe une K_0 -semi-norme p telle que A soit identique à l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x) \leq 1$, cette K_0 -semi-norme est unique et est déterminée par la relation $p(x) = \inf_{\rho > 0, x \in \rho A} \rho$. *b.* Si $\inf_{\rho > 0, x \in \rho A} \rho$ existe, alors $p(x) = \inf_{\rho > 0, x \in \rho A} \rho$ est une K_0 -semi-norme p sur E telle que A soit identique à l'ensemble des $x \in E$ pour lesquels $p(x) \leq 1$, et p est continue dans E .

Toute K_0 -semi-norme p sur E est continue pour la topologie localement convexe la plus fine $\mathfrak{T}_0$. Remarque 2. K_0 -semi-normes dans les espaces localement convexes : Topologie Γ ; exemples 1 et 2. Proposition 5.

Soit E un espace localement convexe, dont la topologie est définie par un ensemble Γ de K_0 -semi-normes. Pour toute K_0 -semi-norme p , $p(x - y)$ est un K_0 -écart sur E . L'ensemble de ces K_0 -écarts, lorsque p parcourt Γ , définit la structure uniforme de l'evt E . Si E est séparé, les fonctions $p \in \Gamma$ se prolongent par continuité au complété $\hat{E}$ de E ; l'ensemble $\hat{\Gamma}$ de ces fonctions prolongées est un ensemble de K_0 -semi-normes définissant la topologie de $\hat{E}$.

Proposition 7 : Si K_0 est complet, tout espace séparé dont la topologie est définie par un ensemble de K_0 -semi-normes est isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces K_0 -normés complets sur K_0 .

Proposition 8, corollaire, proposition 9, corollaire.

La notion d'evt sur $\mathbf{C}$ se généralise par la notion d'evt sur $K_0(i)$; remarques évidentes.

6. ESPACES HILBERTIENS. — En correspondance avec le chapitre V de [49].

Dans tout ce chapitre, K désignera un corps ordonné K_0 , muni de $\mathfrak{T}_0(K_0)$ ou le corps $K_0(i)$, muni de $\mathfrak{T}_0(K_0) \times \mathfrak{T}_0(K_0)$; $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ désignera l'automorphisme identique de K si $K = K_0$, l'automorphisme qui, à tout élément $\xi = \alpha + i\beta$ [$(\alpha, \beta) \in K_0^2$] fait correspondre son conjugué $\bar{\xi} = \alpha - i\beta$ si $K = K_0(i)$.

Définition 1 [relations (1), (2) et (3)]; relations (4), (5) et (6); proposition 1, définition 2, proposition 2, relation (7), corollaires 1 et 2. La proposition 3 est vraie pour tout corps *pythagoricien* K_0 . On fera la même hypothèse sur K_0 , dans la suite, toutes les fois qu'on aura à considérer des K_0 -normes qui ne soient pas toutes élevées au carré.

Définition 3; définition du « produit K_0 -scalaire » $(x|y)$ de x et de y ; on écrira $\langle x, y \rangle$ au lieu de $(x|y)$.

Deux vecteurs x, y sont dits « orthogonaux » si $\langle x, y \rangle = 0$. La fonction $\|x\|^{\frac{1}{2}} = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ est une K_0 -semi-norme sur l'espace vectoriel E ; un espace K_0 -préhilbertien est toujours considéré comme muni de cette K_0 -semi-norme

(et par suite aussi de la topologie et de la structure uniforme correspondantes). Avec ces notations, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace K_0 -préhilbertien E s'écrit

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

et prouve que le produit scalaire est une forme *continue* sur $E \times E$.

Pour que E soit *séparé*, il faut et il suffit que $\|x\|$ soit une *norme* sur E .

Définition 4, K_0 étant supposé complet, et Proposition 4. Identité « de la médiane »; Proposition 5.

Abréviation : $|a|$, au lieu de $\|a\|$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. H. ABEL, *Œuvres complètes* (nouvelle édition), t. 2, p. 224; Christiania, 1881.
- [2] L. V. AHLFORS, *Complex Analysis*, New York, 1953.
- [3] R. E. ALLARDICE, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 13, 1906-1907, p. 443-447.
- [4] TH. ANGHELUTZA, *Bull. Acad. Roumaine*, vol. 16, 1934, p. 119.
- [5] TH. ANGHELUTZA, *Gaz. Mathem.*, vol. 54, Bucarest, 1941, p. 309-311.
- [6] E. ARTIN, *Algebraic Numbers and Algebraic Functions*, Princeton and New York, 1951.
- [7] R. BALLIEU, *Mém. Soc. Roy. Sc. Liège*, 4^e série, t. 1, 1936, p. 85-181.
- [8] S. BANACH, *Fund. Math.*, t. 4.
- [9] L. BIEBERBACH, *Conformal Mapping*, New York, 1953.
- [10] M. BIERNACKI, *Thèse (Bull. Acad. Pol., Sc. Math., A, 1927, p. 541-685)*.
- [11] M. BIERNACKI, *Selecta Paul Montel*, Paris, 1947, p. 255.
- [12] M. BIERNACKI, *Ann. Univ. Mariae Curie*, vol. 9, n° 5, (A), Lublin, 1955.
- [13] G. D. BIRKHOFF, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 21, 1914, p. 494-495.
- [14] G. BIRKHOFF, *Lattice Theory* (revised ed.) New York, 1948.
- [15] G. BIRKHOFF et S. MAC LANE, *A Survey of Modern Algebra*, New York, 1950.
- [16] G. BOULIGAND, *Questions de théorie des ensembles*. Note au *Précis d'analyse* d'E. LAINÉ, Paris, 1946.
- [17] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Paris.
- [18] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, (chap. 1-9) 2^e éd., Paris.
- [19] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Paris.
- [20] A. BRAUER, *Duke Math. J.*, t. 14, 1947, p. 21.
- [21] C. CARATHÉODORY, *Rend. Circ. Math. Palermo*, t. 32, 1911, p. 193-217.
- [22] C. CARATHÉODORY, *Theory of Functions*, New York, 1954.
- [23] R. D. CARMICHAEL et T. E. MAÏSSON, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 21, 1914, p. 14-22.
- [24] R. D. CARMICHAEL, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 24, 1918, p. 286-296.
- [25] CASABONNE, *Selecta Paul Montel*, Paris, 1947, p. 204.
- [26] A. L. CAUCHY, *Œuvres*, (2), vol. 9.
- [27] COLMEZ, *Thèse*, Paris.
- [28] COWLING et THRON, *Amer. Math. Monthly*, vol. 61, 1954, p. 682-687.
- [29] COWLING et THRON, *J. Ind. Math. Soc.*, 1956, p. 307.
- [30] N. CRITICOS, *Leçons des Mathématiques supérieures*, Athènes (en grec).

- [31] N. G. DE BRUIJN, *Nederland. Acad. Weten. Proc.*, vol. 50, n° 10, Amsterdam, 1947.
- [32] A. DENJOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 166, 1918, p. 31.
- [33] J. DIEUDONNÉ, *Ann. Math.*, vol. 31, 1930, p. 79-116.
- [34] J. DIEUDONNÉ, *Thèse (Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 3^e série, vol. 48, 1931, p. 247-358).*
- [35] J. DIEUDONNÉ, *Bull. Soc. math. Fr.*, vol. 60, 1932, p. 173-196.
- [36] J. DIEUDONNÉ, *La théorie analytique des polynômes d'une variable (Mémor. Sc. Math., fasc. 93, Paris, 1938).*
- [37] L. DUBREIL-JACOTIN, L. LÉSIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur la théorie des treillis. (Cahiers scient. Julia, n° 21, Paris, 1953).*
- [38a] J. FAVARD, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 59, 1931, p. 229-255.
- [38] J. FAVARD, *Les théorèmes de la moyenne pour les polynômes*, Hermann, Paris, 1937.
- [39] J. FAVARD, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 2^e série, vol. 60, 1936, p. 79-96.
- [40] L. FEJÉR, *Math. Ann.*, t. 65, 1908, p. 413-423.
- [41] M. FRÉCHET, *Portugalia Math.*, t. 3, 1946, p. 121-130.
- [42] M. FUJIWARA, *Tôhoku Math. J.*, t. 10, 1916, p. 167-171.
- [43] J. H. GRACE, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 11, 1902, p. 352-357.
- [44] J. HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Paris.
- [45] HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge, 1952.
- [46] N. HATZIDAKIS, *Éléments d'Algèbre supérieure*, Athènes, 1933, p. 39 (en grec).
- [47] J. L. W. JENSEN, *Acta. Math.*, vol. 36, 1913, p. 181-195.
- [48] J. L. W. JENSEN, *Nyt. Tidsskrift*, vol. 26, A. 1915, p. 6-13.
- [49] J. KARAMATA, *Glas. S. K. Akademije*, vol. 127.
- [50] C. KNOPP, *Theory of Functions*, New York, 1947.
- [51] T. KOZIMA, *Tôhoku Math. J.*, vol. 5, 1914, p. 58.
- [52] T. KOZIMA, *Tôhoku Math. J.*, vol. 11, 1917, p. 119-127.
- [53] M. KRASNER, *Séminaire sur les corps valués*, Institut H. Poincaré, Paris.
- [54] M. KRASNER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 1304.
- [55] M. KRASNER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 1996.
- [56] M. KRASNER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 2570.
- [57] M. KRASNER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1285.
- [58] M. KRASNER, *Quelques méthodes nouvelles dans la théorie des corps valués complets (Colloque d'Algèbre et de Théorie des nombres).*
- [59] M. KUNIEDA, *Tôhoku Math. J.*, vol. 9, 1916, p. 167-173, vol. 10, 1916, p. 185-188.
- [60] KUREPA, *C. R. Acad. Sc.*, t. 198, 1934, p. 1564.
- [61] E. LAGUERRE, *Œuvres*, t. 1, Paris, 1898.
- [62] E. LAINÉ, *Précis d'Analyse*, Paris, 1946.
- [63a] E. LANDAU, *Bull. Soc. Math. Fr.*, 1905.
- [63] E. LANDAU, *Vierteljahr. der naturf. Gesells.*, Zürich, t. 51, 1906, p. 316-318; *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 24, 1907, p. 179-201.
- [64] E. LANDAU, *Tôhoku Math. J.*, vol. 5, n°s 3-4, 1914.
- [65] S. LEFSCHETZ, *Algebraic Geometry*, Appendix.
- [66] L. LÉSIEUR, *Séminaire Albert Châtelet et Paul Dubreil*, Paris, 1953-1954, exposés 1-4.
- [67] A. LOMNICKI, *L'enseignement mathématique*, vol. 23, 1924, p. 84-91.
- [68] M. MARDEN, *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex variable*, New York, 1949.
- [69] D. MARKOVITCH, *Domaines contenant le zéro du plus petit module des polynômes (Publ. Inst. Math. Acad. Serbe, vol. 3, 1950).*
- [70] D. MARKOVITCH, *Bull. Acad. Sc. Serbe*, n° 6 1939, p. 91-97.

- [71] D. MARKOVITCH, *Publ. Inst. Math. Acad. Serbe*, vol. 2, 1948, p. 237-242.
- [72] D. MARKOVITCH, *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie*, vol. 5, n° 3-4, 1953, p. 45-51.
- [73] D. MARKOVITCH, *Ibid*, vol. 6, n° 1-2, 1954, p. 1-11.
- [74] D. MARKOVITCH, *Bull. Soc. Math. Phys. Macedoine*, vol. 7, 1956, p. 5-16.
- [75] D. MARKOVITCH, *Atti V Congr. Un. Math. Italiana*, 1956.
- [76] D. MARKOVITCH, *Mathematica*, vol. 13, Cluj, 1939, p. 8-11.
- [77] K. MENGER, *Géométrie générale (Mémor. Sc. Math., fasc. 124, Paris, 1954)*.
- [78] P. MONTEL, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 40, 1923, p. 1-34.
- [79] P. MONTEL, *C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 1931, p. 974-976.
- [80] P. MONTEL, *C. R. Sc. Varsovie*, vol. 24, 1932, p. 317-326.
- [81] P. MONTEL, *C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 651-653 et 760-762.
- [82] P. MONTEL, *Comment. Math. Helv.*, vol. 7, 1934-1935, p. 178-200.
- [83] P. MONTEL, *Mathematica*, Cluz, vol. 9, 1935, p. 47-55.
- [84] P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Coll. Borel, Paris, 1927.
- [85] P. MONTEL, *Leçons sur les fonctions univalentes et multivalentes*, Coll. Borel, Paris, 1933.
- [86] P. MONTEL, *Tôhoku Math. J.*, vol. 41, 1936, p. 311-316.
- [87] P. MONTEL, *Bull. Math. Soc. Roumaine Sc.*, 38, n° 2, 1936, p. 97-99.
- [88] P. MONTEL, *Leçons sur les récurrences et leurs applications*, Paris, 1947.
- [89] R. DE MONTESSUS, *La résolution numérique des équations*.
- [90] Z. NEHARI, *Conformal mapping*, New York, 1952.
- [91] R. NEVANLINNA, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Coll. Borel, Paris, 1929.
- [92] N. OBRECHKOFF, *Tôhoku Math. J.*, vol. 38, octobre 1933, p. 93-100.
- [93] O. ORE, *Duke math. J.*, t. 10, 1943, p. 761-785.
- [94] O. ORE, *Ann. Math.*, 2^e série, t. 47, 1946, p. 56-72.
- [95] M. PARODI, *Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées (Mémor. Sc. Math., fasc. 118, Paris, 1952)*.
- [96] M. PARODI, *La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications*, Paris, 1959.
- [97] A. PELLET, *Bull. Sc. math.*, t. 5, 1881, p. 393-395.
- [98] N. PETRIDIS, *Actes (polycopiés) du Congrès Math. Intern.*, Salzburg, 1952.
- [99] M. PETROVITCH, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 29, 1901.
- [100] S. PINCHERLE, *Encycl. Sc. Math.*, t. 2, 26.
- [101] CH. PISOT et M. ZAMANSKY, *Mathématiques Générales*, Paris, 1959.
- [102] D. POMPEIU, *Bull. Math. Soc. Roumaine Sc.*, t. 38, n° 1, 1936, p. 67-71.
- [103] F. RIESZ et B. SZ. NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, 3^e éd., 1955.
- [104] J. RUDNICKI, *Bull. Acad. Roumaine*, t. 7, 1934, p. 527-529.
- [105] SCHAAKE et VAN DER CORPUT, *Comp. Math.*, vol. 2, 1935, p. 321-361; *Berichtigung ibid.*, vol. 3, 1936, p. 128.
- [105 b] W. SCHÖBE, *Inaugural Dissertation*, Halle, 1930.
- [106] G. SZEGÖ, *Math. Z.*, vol. 13, 1922, p. 28-55.
- [107] T. TAKAGI, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, vol. 3, 1921, p. 175-179.
- [108] J. TANNERY, *Leçons d'Algèbre et d'Analyse*, t. 1, Paris, 1906, p. 126.
- [109] G. VALIRON, *Théorie des fonctions*, Paris, 1948, p. 12.
- [110] G. VALIRON, *Fonctions analytiques*, Coll. Euclide, 1954.
- [111] B. L. VAN DER WAERDEN, *Modern Algebra* (Rev. English, ed.), New York, 1953.
- [112] E. B. VAN VLECK, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 53, 1925, p. 105-125.

- [113] E. B. VAN VLECK, *On the Location of Roots of Polynomials and Entire Functions*, (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 1929).
 - [114] TH. VAROPOULOS, *Voir. P. Montel*, [82].
 - [115] D. VYTHOULKAS, *Thèse*, Athènes, 1947.
 - [116] D. VYTHOULKAS, *Proc. Inter. Congress Math.*, Cambridge, mars, 1950.
 - [117] J. L. WALSH, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 24, 1922, p. 163-180.
 - [118] J. L. WALSH, *The Location of Critical Points of Analytic and Harmonic Functions*, chap. 1-5. New York, 1950.
 - [119] E. WESTERFIELD, *Amer. Math. Monthly*, 1931, p. 30.
 - [120] E. WESTERFIELD, *Ibid.*, 1933, p. 18-23.
 - [121] H. WRONSKI, *Résolution générale des équations de tous les degrés (Messianisme, t. 3)*.
 - [122] P. ZERVOS, *L'Enseignement mathématique*, 1904, p. 297-299.
 - [123] P. ZERVOS, *Calcul infinitésimal* (en grec), Athènes, 1929.
 - [123b] P. ZERVOS, *La logique de l'infini*, Athènes, 1949.
 - [124] S. P. ZERVOS, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 394.
 - [125] S. P. ZERVOS, *Ibid.*, t. 245, 1957, p. 619.
 - [126] S. P. ZERVOS, *Ibid.*, t. 246, 1958, p. 2706.
 - [127] S. P. ZERVOS, *Ibid.*, t. 248, 1959, p. 1762.
 - [128] S. P. ZERVOS, *Ibid.*, t. 249, 1959, p. 219.
 - [129] S. P. ZERVOS, Exposé n° 3 du *Séminaire Dubreil-Pisot*, 1957-1958.
-