Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Vincensini

# Sur certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 75, nº 2 (1958), p. 153-166

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_2_153_0>

# SUR CERTAINES ÉQUATIONS
## AUX
# DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE

PAR M. PAUL VINCENSINI.

INTRODUCTION. — Cet article, qui complète une Communication faite au *Congrès national des Sociétés Savantes* de 1958, a trait à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre en relation avec une transformation géométrique, dont j'ai déjà eu l'occasion de faire diverses applications [1], et qui, de par la considération des invariants associés, permet de présenter sous une forme nouvelle, et parfois même *de résoudre complètement* le problème de leur intégration.

La transformation géométrique en question, que nous désignerons dans la suite par $T(O, \alpha)$, est un cas particulier d'une transformation de l'espace réglé, dont j'ai étudié les propriétés générales dans le Mémoire cité [1] du *Bulletin des Sciences mathématiques*, et à laquelle on peut rattacher, en les présentant sous un jour nouveau, de nombreux résultats relatifs à des théories diverses, et parfois assez éloignées, de la Géométrie différentielle des surfaces.

Nous nous bornerons, dans la suite, à signaler celles des propriétés de la transformation $T(O, \alpha)$ que nous aurons à utiliser pour l'objet précis que nous avons en vue.

1. LA TRANSFORMATION $T(O, \alpha)$ ET LES INVARIANTS ASSOCIÉS. — O étant un point fixe quelconque de l'espace euclidien à trois dimensions et D une droite quel-

[1] P. VINCENSINI, *Sur une transformation des congruences les unes par les autres* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 70, 1946, p. 155). *Voir* aussi : *Sur certaines congruences normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations* [*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 48, 1931, p. 397-438]; *Sur les généralisations de quelques problèmes de Géométrie différentielle et sur certains cycles de congruences* (*Acta Mathematica*, t. 71, 1939, p. 145); *Sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 65, 1941, p. 183).

conque de cet espace, menons par O la parallèle $\Delta$ à D, et faisons tourner D autour de $\Delta$ (dans un sens déterminé suivi par continuité) d'un angle constant $\alpha$. D vient occuper une nouvelle position D', et la transformation $T(O, \alpha)$ à laquelle il a été fait allusion est celle qui fait passer de chaque droite D à la droite D' correspondante.

L'ensemble des transformations $T(O, \alpha)$ relatives aux différentes valeurs de $\alpha$ forme évidemment un groupe, deux transformations inverses ou la transformation identique étant respectivement obtenues (à $2k\pi$ près) pour deux valeurs opposées ou pour la valeur nulle de $\alpha$.

La transformation continue $T(O, \alpha)$ [pour O fixe et $\alpha$ variable] appliquée aux différentes droites de l'espace transforme une congruence (D) en une autre (D'), et jouit d'un certain nombre de propriétés d'invariance qui en font un remarquable instrument d'investigation géométrique.

Les rayons de (D) étant supposés orientés dans un sens déterminé, nous désignerons par $\vec{N}(u, v)$ le vecteur unitaire porté par le rayon D, $u$ et $v$ étant les deux paramètres fixant D dans (D). $I(u, v)$ étant la projection orthogonale de O sur D, la congruence peut alors être définie par la donnée des vecteurs $\overrightarrow{OI}(u, v)$ [supposés rapportés à un repère orthogonal d'origine O], et par les points $N(u, v)$ de la sphère unitaire $\Sigma$ de centre O (extrémités des vecteurs menés par O équipollents aux vecteurs $\vec{N}$ qui viennent d'être définis) dont l'ensemble constitue la représentation sphérique de la congruence.

Le $ds^2$ de $\Sigma$, que nous pouvons supposer orthogonal moyennant un choix convenable des coordonnées curvilignes $u, v$ $\left(ds^2 = d\vec{N}^2 = E\,du^2 + G\,dv^2\right)$, est la première forme fondamentale de la congruence (D), la deuxième forme étant, comme il est bien connu :

$$d\vec{N}\,d\vec{I} = e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$

$e, f, f', g$ ayant les expressions

$$e = \frac{\partial\vec{N}}{\partial u}\frac{\partial\vec{I}}{\partial u}, \qquad f = \frac{\partial\vec{N}}{\partial u}\frac{\partial\vec{I}}{\partial v}, \qquad f' = \frac{\partial\vec{N}}{\partial v}\frac{\partial\vec{I}}{\partial u}, \qquad g = \frac{\partial\vec{N}}{\partial v}\frac{\partial\vec{I}}{\partial v}.$$

Les abscisses $\rho_1 = \overline{IF}_1$ et $\rho_2 = \overline{IF}_2$ des foyers portés par le rayon D sont les racines de l'équation

$$EG\rho^2 + (gE + eG)\rho + eg - ff' = 0, \tag{1}$$

et la somme et le produit de ces abscisses ont respectivement pour expressions

$$\left\{\begin{aligned} S &= \overline{IF}_1 + \overline{IF}_2 = -\frac{gE + eG}{EG}, \\ P &= \overline{IF}_1 \times \overline{IF}_2 = \frac{eg - ff'}{EG}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Si l'on désigne par I′ la projection orthogonale de O sur le rayon D′, transformé de D, dans la congruence (D′) transformée de (D) par T(O, $\alpha$), on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}'} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} \cos\alpha + \left(\overrightarrow{\mathrm{ON}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right) \sin\alpha,$$

et de là on déduit sans difficulté la deuxième forme fondamentale de (D′),

$$\varepsilon\, du^2 + (\varphi + \varphi')\, du\, dv + \gamma\, dv^2,$$

dont les coefficients s'expriment *linéairement* au moyen de ceux de la deuxième forme fondamentale de (D) par les relations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon &= e \cos\alpha - f' \sin\alpha,\\ \varphi &= f \cos\alpha - g \sin\alpha,\\ \varphi' &= f' \cos\alpha + e \sin\alpha,\\ \gamma &= g \cos\alpha + f \sin\alpha. \end{aligned}\right.$$

Les relations (3) permettent de calculer les éléments différentiels du premier ordre attachés à un rayon quelconque de la congruence (D′) à partir des mêmes éléments de (D). On trouve, en particulier, pour la somme et le produit des abscisses (comptées à partir de I′) des foyers portés par D′,

$$\mathrm{S}' = -\left(\frac{g\mathrm{E} + e\mathrm{G}}{\mathrm{EG}}\right) \cos\alpha + \frac{f' - f}{\sqrt{\mathrm{EG}}} \sin\alpha,$$

$$\mathrm{P}' = \frac{eg - ff'}{\mathrm{EG}},$$

soit en tenant compte des relations (2) et en introduisant le paramètre moyen $\left(\pi = \frac{f' - f}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\right)$ de (D) :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{S}' &= \mathrm{S} \cos\alpha + \pi \sin\alpha,\\ \mathrm{P}' &= \mathrm{P}. \end{aligned}\right.$$

La dernière relation (4) montre que le produit des abscisses (comptées à partir de la projection orthogonale du point fixe O) des deux foyers situés sur un rayon quelconque de (D) *reste invariant* au cours de la transformation continue (au paramètre $\alpha$) T(O, $\alpha$).

La première relation (4) se simplifie si la congruence (D) soumise à la transformation est *normale* ($\pi = 0$). On a alors

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S} \cos\alpha,$$

ce qui montre que par la transformation T(O, $\alpha$) la distance du plan médiateur du segment $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ (plan moyen du rayon D) est multipliée par le facteur constant $\frac{1}{2}\cos\alpha$; la surface *enveloppée moyenne* (enveloppe des plans moyens) de la transformée (D′) est donc homothétique de celle de (D) dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}\cos\alpha$. Cette surface enveloppée moyenne se réduit au point O pour la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ (les foyer $F'_1$ et $F'_2$ de $D'$ sont alors symétriques par rapport à $I'$, et par suite équidistants du point fixe O), et l'on voit de même que, réciproquement, les transformées par $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ des congruences admettant pour enveloppée moyenne le point O sont des congruences normales.

En dehors de l'invariant P la transformation $T(O, \alpha)$ admet, de par sa définition même, l'invariant évident $\overrightarrow{OI}^2$ ; mais elle en admet d'autres qu'il convient de signaler.

Si nous appliquons à $(D')$ la transformation $T(O, -\alpha)$ nous retrouvons $(D)$; nous pouvons donc écrire

$$S = S'\cos\alpha - \pi'\sin\alpha, \tag{5}$$

$\pi'$ étant le paramètre moyen de $D'$.

Remplaçons dans (5) $S'$ par son expression (4); nous obtenons la formule de transformation du paramètre moyen

$$\pi' = \pi\cos\alpha - S\sin\alpha, \tag{6}$$

et (6), jointe à la première relation (4) donne aussitôt

$$S'^2 + \pi'^2 = S^2 + \pi^2, \tag{7}$$

qui montre que la quantité $S^2 + \pi^2$ *est un invariant* de la transformation $T(O, \alpha)$.

Un autre invariant intéressant résulte de la relation

$$\pi^2 = 4\,d^2 - 4\,\delta^2 \tag{8}$$

liant, pour toute congruence, le paramètre moyen $\pi$ relatif à un rayon quelconque, aux distances respectives $2\,\delta$ et $2\,d$ des deux foyers et des deux points limites portés par le rayon envisagé. On a

$$4\,\delta^2 = (\overline{IF}_2 - \overline{IF}_1)^2 = (\overline{IF}_1 + \overline{IF}_2)^2 - 4\,\overline{IF}_1 \times \overline{IF}_2 = S^2 - 4\,P,$$

et par suite, d'après (8)

$$4\,d^2 = S^2 + \pi^2 - 4\,P.$$

$S^2 + \pi^2$ et P étant invariants il en est de même de $2\,d$ : la distance des deux points limites sur chaque rayon de (D) *reste donc constante au cours de la transformation* $T(O, \alpha)$.

Un cas particulier important est celui où (D) est normale et à foyers associés $(F_1, F_2)$ équidistants du point O (congruence normale à enveloppée moyenne point). On a alors

$$S = \pi = 0,$$

(6) montre que $\pi' = 0$ [c'est-à-dire que toutes les congruences $(D')$ transformées de (D) par $T(O, \alpha)$ sont normales], et (7) prouve que pour toutes les

congruences (D'), on a $S' = 0$ [les congruences (D') ont toutes leurs couples de foyers associés équidistants du point fixe O].

Si d'ailleurs S reste constamment nulle au cours d'une transformation $T(O, \alpha)$, l'invariance de $S^2 + \pi^2$ montre qu'il en est de même de $\pi$, de sorte que les seules congruences à enveloppée moyenne point (O) restant telles par une transformation continue $T(O, \alpha)$ (et il suffit pour cela qu'elles le restent pour *une* transformation particulière pour laquelle $\alpha \neq k\pi$) sont les congruences normales à foyers associés équidistants du point O.

2. Les formules de Weingarten et les expressions des invariants attachés a une congruence normale. — Dans le cas où la congruence (D) soumise à la transformation $T(O, \alpha)$ est normale, les invariants qui viennent d'être mis en évidence sont susceptibles d'expressions intéressantes ne mettant en jeu que les paramètres de Beltrami relatifs au $ds^2$ de la sphère unitaire ($\Sigma$) sur laquelle est effectuée la représentation de la congruence, $ds^2$ que nous supposerons avoir la forme la plus générale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

On peut, dans ce cas, définir la congruence (D) au moyen de l'une des surfaces $\Theta$ orthogonales à ses différents rayons. Si D est le rayon normal à $\Theta$ au point $M(u, v)$ et I la projection orthogonale de O sur D, $\overline{IM}$ est une fonction $\Phi(u, v)$ des deux variables $u$ et $v$ [ou du point $N(u, v)$, représentation sphérique de D sur la sphère unitaire $\Sigma$], et la connaissance de cette fonction permet de représenter la congruence par la formule vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{OI} = \Delta(\overrightarrow{N}, \Phi), \tag{9}$$

qui condense les trois formules classiques de Weingartein :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= \Delta(X, \Phi) = \frac{E\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + G\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}}{EG - F^2},\\
\mathfrak{Y} &= \Delta(Y, \Phi) = \ldots,\\
\mathfrak{Z} &= \Delta(Z, \Phi) = \ldots,
\end{aligned}$$

où $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires du point I, (X, Y, Z) les composantes du vecteur unitaire $\overrightarrow{N}(u, v)$ porté par le rayon D (ou les coordonnées cartésiennes du point N image de D sur $\Sigma$), et où $\Delta(X, \Phi)$ est le paramètre différentiel mixte de Beltrami calculé pour les fonctions X et $\Phi$ relativement au $ds^2$ de la sphère unitaire.

La considération des différentes congruences normales de l'espace permet d'attribuer une signification géométrique remarquable aux paramètres différentiels $\Delta$, $\Delta_2$, $\Delta_{22}$ du premier et du deuxième ordre de Beltrami *relatifs au* $ds^2$

*sphérique* calculés pour une même fonction quelconque $\Phi(u, v)$ :

$$\Delta\Phi = \frac{E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta_2\Phi = \frac{G\Phi_{11} - 2F\Phi_{12} + E\Phi_{22}}{EG - F_2},$$

$$\Delta_{22}\Phi = \frac{\Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2}{EG - F^2},$$

$\Phi_{ij}(i, j = 1, 2)$ désignant les dérivées secondes covariantes de $\Phi$ relatives au $ds^2$ considéré, à savoir

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_k^{(1,2)} \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \frac{\partial\Phi}{\partial u_k} \qquad (u_1 = u,\ u_2 = v),$$

$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ étant les symboles de deuxième espèce de Christoffel :

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG) - F^2)}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG - F^2)}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u}}{2EG - F^2)}.$$

Dans le Mémoire des *Annales de l'École Normale Supérieure* cité dans l'Introduction, j'ai formé l'équation donnant les abscisses (comptées à partir du point I) des foyers $F_1$ et $F_2$ situés sur un rayon quelconque D d'une congruence normale définie, conformément à la représentation ci-dessus de Weingarten, par la fonction $\Phi(u, v)$ (définie à une constante additive près) donnant la distance du point fixe O au plan tangent à l'une quelconque des surfaces $\Theta$ orthogonales aux rayons [ou, ce qui revient au même, la distance du point I au point $M(u, v)$ où le rayon envisagé perce l'une quelconque de ces surfaces]. Cette équation peut être mise sous la forme

$$(10) \qquad \rho^2 + \Delta_2\Phi . \rho + \Delta_{22}\Phi = 0,$$

d'où l'on déduit les expressions invariantes suivantes de la somme $S = \overline{IF_1} + \overline{IF_2}$ et du produit $P = \overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \overline{IF_1} + \overline{IF_2} &= -\Delta_2\,\Phi, \\ \overline{IF_1} \times \overline{IF_2} &= \quad \Delta_{22}\Phi. \end{aligned} \right.$$

En ce qui concerne le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta\Phi$, la formation du carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{OI}$ défini par (9) montre aussitôt qu'on a

$$\overrightarrow{OI}^2 = \Delta\Phi. \tag{12}$$

(11) et (12) fournissent les significations géométriques annoncées pour $\Delta\Phi$, $\Delta_2\Phi$, $\Delta_{22}\Phi$.

Les relations précédentes permettent d'obtenir immédiatement (et *sous forme invariante*) les équations aux dérivées partielles d'un grand nombre de congruences normales jouissant de propriétés focales (ou de surfaces jouissant de propriétés de courbure) données. Ainsi par exemple, considérons les congruences normales telles que les deux foyers $F_1$, $F_2$ situés sur chaque rayon soient conjugués par rapport à une sphère fixe, que nous pouvons supposer être la sphère unitaire de $\Sigma$ de centre O. Si $M_1$ et $M_2$ sont les points (symétriques par rapport à I) où le rayon générateur D de l'une des congruences envisagées perce la sphère $\Sigma$, la conjugaison des foyers situés sur D par rapport à $\Sigma$ s'exprime par la relation

$$\overline{IF_1} \times \overline{IF_2} = \overline{IM}_1^2 = 1 - \overline{OI}^2,$$

soit d'après (11) et (12)

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = 1, \tag{13}$$

équation qui définit, pour une représentation sphérique arbitrairement donnée, les fonctions $\Phi(u, v)$ correspondant aux différentes congruences normales du type considéré.

Les congruences normales dont les couples de foyers associés $F_1$, $F_2$ sont conjugués par rapport à la sphère imaginaire de centre O et de rayon $i$ sont, comme on le voit aussitôt, définies par l'équation

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = -1. \tag{4}$$

Dans le cas, intermédiaire entre les deux précédents, où les couples de foyers associés sont conjugués par rapport à la sphère point O (congruences normales telles que les différents segments focaux $F_1$, $F_2$ soient vus du point O sous un angle droit), l'équation donnant $\Phi$ se réduit à

$$\Delta_{22}\Phi + \Delta\Phi = 0. \tag{5}$$

Les transformées par polaires réciproques (relativement à une sphère de centre O) des congruences normales définies par (15), jouissent évidemment de la propriété que les plans focaux issus d'un rayon quelconque $F_1F_2$ (respectivement perpendiculaires à $OF_1$ et $OF_2$) sont *orthogonaux*; ces congruences sont donc *normales*, et de là résulte que l'équation (15) définit la famille (complète) des congruences normales *transformables en congruences normales par une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère fixe de centre* O.

Si D et $d$ sont deux rayons homologues dans deux congruences normales se correspondant dans une telle polarité, si I et $i$ sont les projections orthogonales de O sur D et $d$, et si R est le rayon de la sphère définissant la polarité, on a

$$\overline{OI} \times \overline{Oi} = R^2,$$

et l'on déduit de là que l'inverse de la droite $d$ dans l'inversion de pôle O et de puissance $2R^2$ est le cercle (C) passant par O et ayant pour axe la droite D.

L'ensemble des $\infty^2$ cercles (C) inverses des $\infty^2$ rayons de la congruence ($d$) est (puisque la congruence des droites $d$ est normale) orthogonal à une famille de $\infty^1$ surfaces et constitue par suite un *système cyclique*. La congruence (D) est donc non seulement normale mais aussi *cyclique* (formée par les axes des cercles d'un système cyclique). On peut donc considérer l'équation (15) comme définissant *les congruences rectilignes cycliques normales pour lesquelles les cercles du système cyclique associé passent par un même point fixe de l'espace.*

Comme autre exemple intéressant de familles de congruences normales dont on peut écrire aussitôt l'équation aux dérivées partielles, on peut citer celui fourni par les congruences normales à couples de foyers associés $F_1$, $F_2$ équidistants du point O signalées à la fin du n° 1. Ces congruences conservent, comme on l'a vu, leur double propriété de rester normales et d'avoir leurs couples de foyers associés équidistants du point O lorsqu'on les soumet à la transformation continue (au paramètre $\alpha$) $T(O, \alpha)$. On obtient l'équation aux dérivées partielles qui les définit en exprimant la nullité de la somme $\overline{IF_1} + \overline{IF_2}$, ce qui, d'après (11) donne

$$\Delta_2 \Phi = 0. \tag{16}$$

Les inverses des congruences précédentes dans des inversions de pôle O sont les systèmes cycliques, formés de cercles issus du point fixe O, restant cycliques lorsqu'on fait tourner chaque cercle d'un angle déterminé quelconque $\alpha$, dans un sens déterminé autour de sa tangente en O.

Eu égard à la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, on voit que, moyennant une telle transformation, le problème de la recherche des congruences normales définies par les équations (13), (14) ou (15) est susceptible d'une transformation remarquable, présentant sous un aspect tout à fait nouveau la question de l'intégration des équations du type envisagé.

La transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ appliquée aux congruences normales à couples de foyers associés conjugués par rapport à la sphère fixe $\Sigma$ de centre O et de rayon 1, ramène (n° 1) la détermination de ces congruences à celle de types déterminés de congruences à foyers associés équidistants du point O. Les relations géométriques caractérisant ces dernières s'obtiennent, vu l'invariance simultanée du produit $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ et de la distance OI signalée au n° 1, en remplaçant dans les équations (13), (14) et (15), $\Delta_{22}\Phi = \overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ et $\Delta\Phi = \overline{OI}^2$

respectivement par $\overline{I'F'_1} \times \overline{I'F'_2}$ et $\overline{OI'}^2$, les accents prime désignant les éléments transformés des éléments de même définition de la congruence normale initiale.

La détermination des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à la sphère $\Sigma$ revient ainsi à celle des congruences à foyers associés équidistants du point O jouissant de la propriété supplémentaire

$$\overline{I'F'_1} \times \overline{I'F'_2} + \overline{OI'}^2 = 1,$$

soit puisque $\overline{I'F'_1} + \overline{I'F'_2} = 0$,

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F'_1}^2 = 1. \tag{13'}$$

Celles des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à la sphère imaginaire de centre O et de rayon $i$, revient à celle des congruences à foyers associés équidistants du point O telles qu'on ait, pour chaque rayon

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F'_1}^2 = -1. \tag{14'}$$

Enfin, la détermination des congruences normales dont les segments focaux $(F_1, F_2)$ sont vus du point O sous un angle droit, équivaut à celle des congruences à foyers associés équidistants du point O pour lesquelles on a, pour chaque rayon

$$\overline{OI'}^2 - \overline{I'F'_1}^2 = 0, \tag{15'}$$

soit

$$OI' = I'F'_1 = I'F'_2,$$

condition qui exprime que *tous les triangles déterminés par le point fixe* O *et par un couple quelconque de foyers associés sont rectangles isoscèles.*

Les relations (13'), (14'), (15') caractérisent les congruences à foyers associés équidistants du point O correspondantes par la *forme* qu'affecte le triangle isoscèle déterminé par le point O et par les foyers $F'_1$, $F'_2$ situés sur un même rayon quelconque, forme qui *ne dépend que de la distance* OI' *du point* O *au rayon envisagé,* et qui est *complètement déterminée* (triangle rectangle isoscèle) pour les congruences du troisième type $\left[\text{transformées par } T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)\right.$ des congruences normales dont les segments focaux sont vus du point fixe O sous un angle droit$\left.\right]$.

5. Transformation du problème de l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. — Les équations (13), (14), (15) rentrent dans le type général

$$\mathcal{F}(\Delta_{22}\Phi, \Delta\Phi) = 0, \tag{17}$$

où $\mathcal{F}$ est une fonction arbitraire des deux paramètres différentiels du premier et du deuxième ordre $\Delta\Phi$ et $\Delta_{22}\Phi$ relatifs au $ds^2$ sphérique. Ce qui a été dit pour les trois types particuliers d'équations dont il vient d'être question s'applique à toutes les équations de la forme (17). Ces équations définissent les congruences normales (D) pour lesquelles, sur chaque rayon D, les positions des foyers $F_1$, $F_2$ sont liées par la relation fixe

$$\mathcal{F}\left(\overline{IF_1}\times\overline{IF_2},\ \overline{OI}^2\right)=0,$$

et leur intégration est un problème équivalent à celui de la recherche des congruences (D′) à foyers associés équidistants d'un point fixe pour lesquelles on a, sur chaque rayon D′

$$\mathcal{F}\left(\overline{I'F'_1}\times\overline{I'F'_2},\ \overline{OI'}^2\right)=0,$$

soit en vertu de $\overline{I'F'_1}+\overline{I'F'_2}=0$,

$$(17') \qquad \mathcal{F}\left(-\overline{I'F'_1}^2,\ \overline{OI'}^2\right)=0.$$

(17′) exprime que la *forme* du triangle $OF'_1F'_2$ (isoscèle de sommet O) relatif à un rayon quelconque D′ de (D′) *ne dépend que de la distance du rayon au point fixe* O, et si l'on veut déterminer les congruences (D′) satisfaisant à (17′), l'intégration de (17) pourra, comme on va le voir, être réalisée par la quadrature d'une différentielle totale exacte.

Supposons connues les congruences à foyers associés équidistants du point fixe O vérifiant la relation (17′), et soit (D′) l'une quelconque d'entre elles. On connaîtra donc les vecteurs $\overrightarrow{OI'}$ et $\vec{N}$ (vecteur unitaire de D′), dont les positions sont des fonctions des deux paramètres $u$ et $v$ qui fixent l'image du rayon D′ sur la sphère unitaire $\Sigma$ de centre O. On pourra par suite construire la congruence *normale* (D) dont (D′) dérive par la transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, et la fonction $\Phi(u, v)$ relative à cette congruence sera la solution générale de l'équation aux dérivées partielles (17). Cette solution $\Phi(u, v)$ se détermine de la façon suivante :

On obtient le point I du rayon générateur D de la congruence normale (D) en faisant tourner $\overrightarrow{OI'}$ de $-\frac{\pi}{2}$ autour de la parallèle $\Delta$ à D′ issue du point fixe O; I′ vient alors en I tel que

$$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OI'}\wedge\vec{N},$$

et D est la droite issue de I de vecteur unitaire $\vec{N}$.

Quant à la fonction $\Phi$ solution générale de (17), qui représente comme l'on sait la distance algébrique, $\Phi=\overline{IM}$, du point I au point M où D perce l'une quelconque des surfaces $\Theta$ orthogonales aux rayons de la congruence (D), on l'obtient en exprimant l'orthogonalité de $\overrightarrow{dM}=d\left(\overrightarrow{OI}+\Phi\vec{N}\right)$ et de $\vec{N}$, ce qui donne

$$d\Phi = -\vec{N}\, d\overrightarrow{OI},$$

le second membre étant une différentielle totale exacte puisque (D) est une congruence normale.

En remplaçant $\overrightarrow{OI}$ par son expression donnée plus haut, on obtiendra la solution générale de l'équation (17) qui est fournie par la quadrature

$$\Phi = \int \vec{N}\, d\left(\overrightarrow{OI'} \wedge \vec{N}\right). \tag{18}$$

4. Cas d'intégration complète. — La transformation $T\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ nous a permis de réaliser, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles (17), un progrès à rapprocher de celui que la célèbre méthode de Weingarten a réalisé pour l'intégration de l'équation de Monge-Ampère du problème général de la déformation des surfaces.

Dans ce dernier cas l'intégration est, comme l'on sait, ramenée à la détermination d'une famille de surfaces définies par une certaine relation entre les couples de rayons de courbure principaux associés.

Dans le cas des équations (17) l'intégration est ramenée à la détermination d'une famille, non plus de surfaces comme dans la méthode de Weingarten, mais de congruences rectilignes, définies par une relation déterminée entre les positions des couples de foyers associés.

La méthode de Weingarten a permis, comme il est bien connu, d'obtenir les différents cas (au nombre de cinq) d'intégration complète de l'équation du problème de la déformation. Nous allons indiquer ici un type particulier d'équations (17) susceptible lui aussi d'une intégration complète.

Soit l'équation

$$\Delta\Phi - \Delta_{22}\Phi = 1, \tag{19}$$

qui ne diffère que par le signe placé devant $\Delta_{22}\Phi$ de l'équation (13) (qu'on ne sait pas intégrer complètement). La méthode exposée au n° 3 ramène, comme on l'a vu, l'intégration de (19) à la recherche des congruences (D'), à foyers associés équidistants du point O, caractérisées par la propriété géométrique

$$\overline{OI'}^2 + \overline{I'F'_1}^2 = 1, \tag{19'}$$

qu'on obtient en remplaçant dans (19), $\Delta_{22}\Phi = \overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ par $\overline{I'F'_1} \times \overline{I'F'_2} = -\overline{I'F'_1}^2$, et $\Delta\Phi = \overline{OI}^2$ par $\overline{OI'}^2$.

Le premier membre de (19') n'est autre chose que $\overline{OF'_1}^2$, et la relation (19') exprime que $F'_1$ et $F'_2$ sont situés sur la sphère $\Sigma$ de centre O et de rayon 1. Il en résulte que les deux nappes focales de la congruence (D′), devant être portées toutes les deux par la sphère Σ, *se réduisent à deux courbes* (pouvant d'ailleurs être confondues) tracées sur Σ. Les remarques géométriques du n° 3 vont alors permettre de ramener à de simples calculs algébriques et à l'intégration de différentielles totales exactes, la détermination de la solution générale de toutes les équations aux dérivées partielles du type (19) correspondant aux différentes formes possibles de l'élément linéaire de la sphère unitaire Σ.

Supposons cet élément linéaire ($ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$) déterminé par un choix arbitraire des coordonnées curvilignes $(u, v)$ du point courant $\mathrm{N}(u, v)$ de Σ, et traçons, sur Σ, deux courbes quelconques $(\mathrm{P}_1)$ et $(\mathrm{P}_2)$, décrites par les points $\mathrm{P}_1(\alpha)$ et $\mathrm{P}_2(\beta)$ dont les positions sont respectivement définies par les deux paramètres α et β.

Le point I′ du rayon $\mathrm{D}' \equiv \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ de la congruence (D′) est défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}'} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}}{2}, \tag{20}$$

et le vecteur unitaire $\vec{\mathrm{N}}$ de D′ a pour expression

$$\vec{\mathrm{N}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\right\|}. \tag{21}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OI}'}$ et $\vec{\mathrm{N}}$ sont des fonctions connues de α et β, paramètres qui sont liés aux paramètres $u$ et $v$ auxquels est rapporté l'élément linéaire de Σ par la relation

$$\vec{\mathrm{N}}(\alpha, \beta) \doteq \vec{\mathrm{N}}(u, v),$$

moyennant laquelle on peut regarder α et β comme exprimés en $u$ et $v$.

La relation (18) du n° 3 fait alors connaître la solution générale Φ de l'équation (19), qu'on obtient en calculant

$$\Phi = -\int \vec{\mathrm{N}}\, d\left(\vec{\mathrm{N}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OI}'}\right),$$

où $\overrightarrow{\mathrm{OI}'}$ et $\vec{\mathrm{N}}$ ont les expressions (20) et (21), et en remplaçant dans le résultat α et β par leurs expressions en $u$ et $v$.

Les deux fonctions dont dépend cette solution générale se manifestent géométriquement par les deux courbes $(\mathrm{P}_1)$ et $(\mathrm{P}_2)$, arbitrairement choisies sur la sphère Σ.

5. Remarques. — Les surfaces Θ orthogonales aux rayons des congruences normales dont les différents segments focaux sont vus d'un point fixe O sous

un angle droit (n° 2) sont, comme l'a montré G. Darboux ([2]), celles que la méthode de transformation de Weingarten à laquelle il a été fait allusion au n° 4 associe aux surfaces à courbure totale constante.

L. Bianchi ([3]) a montré que les surfaces orthogonales aux rayons des congruences normales à foyers associés conjugués par rapport à une sphère fixe (réelle ou de rayon imaginaire pur) considérées au n° 2 dérivent simplement des surfaces précédentes; ce sont les surfaces orthogonales aux congruences (normales) formées par les axes des cercles passant par O et orthogonaux aux surfaces $\Theta$ : le problème de la détermination des surfaces à courbure totale constante se trouvait ainsi ramené à celui de la recherche des surfaces de l'un quelconque des trois types ci-dessus.

Les travaux cités ne font pas mention des formes *invariantes* (13), (14), (15) qu'on peut donner aux équations aux dérivées partielles des surfaces des types envisagés, et que j'ai obtenues pour la première fois (simultanément avec celles des équations aux dérivées partielles de nombreux autres types de surface géométriquement intéressants) dans le Mémoire des *Annales de l'École Normale Supérieure* cité dans l'Introduction.

L'importance de l'invariance ci-dessus mérite d'être soulignée. Grâce à elle nous avons pu ici *prolonger la transformation de Weingarten* par une autre, fournissant une transformation plus radicale encore que celle de Weingarten du problème de la recherche des surfaces à courbure totale constante, et ramenant la détermination de ces dernières surfaces à celle de types déterminés de congruences rectilignes à foyers associés équidistants d'un point fixe, à savoir les congruences définies par les propriétés géométriques (13′), (14′), (15′) du n° 2.

Toute transformation de ces dernières congruences rectilignes en congruences de même type conduit à une méthode de transformation des surfaces à courbure totale constante en nouvelles surfaces à courbure totale constante; il y a là relativement à cette dernière transformation un point de vue nouveau que nous nous bornerons ici à signaler, pour lequel on pourra trouver quelques indications dans le Mémoire cité des *Annales de l'École Normale Supérieure*, et qui permet de compléter sur certains points les résultats obtenus sur ce sujet.

En ce qui concerne plus spécialement le cas d'intégration complète présenté par l'équation (19) du n° 4, il convient de remarquer que le succès de la méthode exposée tient, comme cela arrive souvent en pareille matière, à un phénomène de *dégénérescence*, se manifestant par la *réduction à deux courbes* des deux nappes de la surface focale des congruences à la détermination desquelles le problème de l'intégration est en définitive ramené.

Une telle dégénérescence se retrouve par exemple, ainsi qu'il est bien connu,

---

([2]) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 322.

([3]) L. Bianchi, *Opere*, vol. 8, p. 40.

à l'origine de la possibilité d'intégration complète des équations *de Laplace* pour lesquelles l'une des équations de la suite (de Laplace) des transformées a au moins un invariant nul, ce qui, pour la suite des surfaces représentatives des équations transformées successives, équivaut à dire que cette suite se termine dans un sens au moins, les surfaces terminant la suite dégénérant soit en courbes soit en surfaces développables.