ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

Un théorème sur l'intégrale de Laplace-Stieltjes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 75, nº 1 (1958), p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_1_1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

UN THÉORÈME SUR L'INTÉGRALE DE LAPLACE-STIELTJES

PAR M. HUBERT DELANGE.

1. INTRODUCTION. — *Soit $\alpha(t)$ une fonction réelle ou complexe définie pour $t \geqq 0$ et à variation bornée sur tout intervalle fini, et supposons que l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha(t)$$

ait une abscisse de convergence σ_c finie et soit égale pour $\mathcal{R}s > \sigma_c$ à $f(s)$.

Dans des travaux précédents (¹), nous avons établi des théorèmes permettant d'affirmer, moyennant des hypothèses convenables, l'existence d'un point singulier pour la fonction $f(s)$, soit au point σ_c, soit sur un certain segment de la droite $\mathcal{R}s = \sigma_c$. Nous nous proposons ici d'établir encore le théorème suivant, que nous avons déjà énoncé sans démonstration par ailleurs (²) :

Supposons que l'on ait

$$\alpha(t) = \int_0^t e^{i\psi(u)}\, dv(u),$$

(¹) *Sur certaines intégrales de Laplace* [*Bull. Sc. Math.*, (2), t. 77, 1953, p. 141-168]; *Sur les points singuliers de la fonction définie par une intégrale de Laplace-Stieltjes* (*J. Anal. Math.*, t. 5, 1956-1957, p. 1-33).

(²) *Sur les singularités des fonctions définies par des intégrales de Laplace* (*Rend. Sem. Matem. Fis. di Milano*, t. 26, 1954-1955).

où $v(t)$ est une fonction réelle non décroissante pour $t \geqq 0$ et $\psi(t)$ une fonction réelle continue pour $t \geqq 0$ (3).

Supposons, en outre, qu'il existe un nombre positif k tel que l'on ait quels que soient t' et $t'' \geqq 0$

$$|\psi(t'') - \psi(t')| \leqq k\,|t'' - t'|, \tag{1}$$

ce qui implique évidemment que la fonction $\psi(t)$ soit à variation bornée sur tout intervalle fini.

Alors, si l'on a, quand t tend vers $+\infty$,

$$\int_0^t |d\psi(u)| = o[t], \tag{2}$$

le point σ_c est un point singulier de la fonction $f(s)$.

On voit immédiatement que ce théorème entraîne comme corollaire le théorème bien connu suivant de Fabry (4) :

Soit la série entière $\sum_0^{+\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence 1 et de somme $F(z)$, et supposons que, pour chaque $n \geqq 0$,

$$a_n = r_n e^{i\theta_n}, \qquad \text{avec} \quad r_n \geqq 0 \quad \text{et} \quad \theta_n \text{ réel.}$$

Si, quand N tend vers $+\infty$,

$$\sum_1^N |\theta_n - \theta_{n-1}| = o[N],$$

le point 1 est un point singulier de $F(z)$.

Il est évident qu'on peut sans inconvénient supposer que, pour chaque $n \geqq 1$, $|\theta_n - \theta_{n-1}| \leqq \pi$.

En effet, si cette condition n'était pas réalisée, on pourrait définir une suite $\{\theta'_n\}$ en prenant $\theta'_0 = \theta_0$, puis déterminant θ'_n pour $n \geqq 1$, par

$$e^{i\theta'_n} = e^{i\theta_n} \qquad \text{et} \qquad \theta'_{n-1} - \pi \leqq \theta'_n < \theta'_{n-1} + \pi.$$

On aurait ainsi $a_n = r_n e^{i\theta'_n}$ pour tout $n \geqq 0$ et

$$\sum_1^N |\theta'_n - \theta'_{n-1}| \leqq \sum_1^N |\theta_n - \theta_{n-1}| \quad \text{pour tout } N \geqq 1,$$

---

(3) Notons que ceci implique que la variation de $\alpha(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ soit $v(T) - v(0)$.

(4) *Sur les points singuliers d'une fonction...* [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. 13, 1896, p. 367-399].

puisque, pour chaque $n \geqq 1$,

$$|\theta'_n - \theta'_{n-1}| \leqq |\theta_n - \theta_{n-1}|.$$

Si maintenant on définit les fonctions $v(t)$ et $\psi(t)$ pour $t \geqq 0$ par

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ \sum_0^n r_j & \text{pour } n < t \leqq n+1, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\psi(n) = \theta_n \qquad \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots$$

et ψ linéaire sur chaque intervalle $[n, n+1]$,
on voit que ces fonctions satisfont aux hypothèses de notre théorème avec $k = \pi$, et que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha(t), \qquad \text{où} \quad \alpha(t) = \int_0^t e^{i\psi(u)}\, dv(u),$$

se ramène à la série $\sum_0^{+\infty} a_n e^{-ns}$, donc a pour abscisse de convergence O et est égale pour $\mathcal{R}s > 0$ à $F(e^{-s})$.

Notre théorème implique donc que le point O soit un point singulier de $F(e^{-s})$.

2. Remarques préliminaires. — 2.1. Remarquons d'abord qu'*on peut sans inconvenient se restreindre au cas où $\sigma_c = 0$.*

En effet, si $\sigma_c \neq 0$, posons

$$\alpha_1(t) = \int_0^t e^{-\sigma_c u}\, d\alpha(u) \qquad \text{et} \qquad v_1(t) = \int_0^t e^{-\sigma_c u}\, dv(u).$$

Quel que soit s, on a pour $T > 0$

$$\int_0^T e^{-st}\, d\alpha_1(t) = \int_0^T e^{-(s+\sigma_c)t}\, d\alpha(t).$$

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha_1(t)$ est convergente ou non en même temps que $\int_0^{+\infty} e^{-(s+\sigma_c)t}\, d\alpha(t)$ et, lorsqu'il y a convergence, les deux intégrales sont égales. Autrement dit, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\, d\alpha_1(t)$ a pour abscisse de convergence O et représente la fonction $f(s + \sigma_c)$.

Si le point O est un point singulier de $f(s + \sigma_c)$, σ_c est un point singulier de $f(s)$.

Mais on a $\alpha_1(t)=\int_0^t e^{i\psi(u)}\,d\varphi_1(u)$, et $\varphi_1(t)$ est encore une fonction non décroissante pour $t\geqq 0$.

2.2. *On peut aussi sans inconvénient supposer que la fonction $\psi(t)$ est linéaire par morceaux sur tout intervalle fini* (5).

Pour le voir, introduisons la fonction ψ_1 définie pour $t\geqq 0$ par

$$\psi_1(\log n)=\psi(\log n) \qquad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots,$$

avec ψ_1 linéaire sur chaque intervalle $[\log n, \log(n+1)]$.

Il est clair que l'on a encore, quels que soient t' et $t''\geqq 0$,

$$|\psi_1(t'')-\psi_1(t')|\leqq k\,|t''-t'|.$$

D'autre part, pour $\log n\leqq t<\log(n+1)$,

$$\int_0^t |d\psi_1(u)|\leqq\int_0^{\log(n+1)}|d\psi(u)|,$$

d'où

$$\frac{1}{t}\int_0^t |d\psi_1(u)|\leqq\frac{1}{t}\int_0^{\log(n+1)}|d\psi(u)|\leqq\frac{\log(n+1)}{\log n}\,\frac{1}{\log(n+1)}\int_0^{\log(n+1)}|d\psi(u)|.$$

Donc, quand t tend vers $+\infty$,

$$\int_0^t |d\psi_1(u)|=o[t].$$

Mais nous allons voir que, si l'on pose

$$\beta(t)=\int_0^t e^{i\psi_1(u)}\,d\varphi(u),$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\beta(t)$ a même abscisse de convergence que $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)$ et la fonction qu'elle représente a les mêmes points singuliers que $f(s)$ sur la droite $\mathcal{R}s=\sigma_c$.

Ce résultat sera évidemment établi quand nous aurons prouvé que, si

$$\delta(t)=\beta(t)-\alpha(t),$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\,d\delta(t)$ est absolument convergente pour $\mathcal{R}s>\sigma_c-1$, autrement dit, quel que soit σ réel $>\sigma_c-1$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t}|d\delta(t)|$ est convergente.

---

(5) Nous disons qu'une fonction est *linéaire par morceaux* sur un intervalle si celui-ci peut être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels la fonction est linéaire.

On voit d'abord que, si $\log n \leqq t < \log(n+1)$, avec $n \geqq 1$, on a

$$|\psi(t) - \psi(\log n)| \leqq k(t - \log n) \leqq k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et

$$|\psi_1(t) - \psi(\log n)| \leqq k(t - \log n) \leqq k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$|\psi_1(t) - \psi(t)| \leqq 2k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{2k}{n}.$$

Or

$$\frac{2k}{n} = \frac{2k}{n+1}\,\frac{n+1}{n} \leqq \frac{4k}{n+1} \leqq 4k e^{-t}.$$

Donc, pour tout $t \geqq 0$,

$$|\psi_1(t) - \psi(t)| \leqq 4k e^{-t},$$

et, par suite,

$$|e^{i\psi_1(t)} - e^{i\psi(t)}| \leqq 4k e^{-t}.$$

Soit maintenant un nombre réel $\sigma > \sigma_c - 1$.

Fixons un nombre positif $a < \frac{\pi}{2k}$ et un nombre réel σ' satisfaisant à $\sigma_c < \sigma' < \sigma + 1$.

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma' t}\, d\alpha(t)$ est convergente, $\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, d\alpha(u)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$. Il existe donc un $T_0 \geqq 0$ tel que, pour $t \geqq T_0$,

$$\left|\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, d\alpha(u)\right| \leqq \cos ka.$$

Mais

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, d\alpha(u) = \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, e^{i\psi(u)}\, d\nu(u),$$

d'où

$$e^{-i\psi(t)} \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, d\alpha(u) = \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, e^{i[\psi(u)-\psi(t)]}\, d\nu(u),$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left\{e^{-i\psi(t)} \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, d\alpha(u)\right\} &= \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} \cos[\psi(u) - \psi(t)]\, d\nu(u), \\ &\geqq \cos ka \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, d\nu(u),\end{aligned}$$

puisque, pour $t \leqq u \leqq t+a$,

$$|\psi(u) - \psi(t)| \leqq ka.$$

Donc, pour $t \geqq T_0$,

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\, d\nu(u) \leqq 1.$$

Par ailleurs,

$$\delta(t)=\int_0^t [e^{i\psi_1(u)}-e^{i\psi(u)}]\,d\nu(u),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+a} e^{-\sigma u}\,|d\delta(u)| &= \int_t^{t+a} e^{-\sigma u}\,|e^{i\psi_1(u)}-e^{i\psi(u)}|\,d\nu(u),\\ &\leqq 4k\int_t^{t+a} e^{-(\sigma+1)u}\,d\nu(u),\\ &\leqq 4k\,e^{-(\sigma+1-\sigma')t}\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u}\,d\nu(u),\end{aligned}$$

car, pour $t \leqq u \leqq t+a$,

$$(\sigma+1)u \geqq \sigma' u + (\sigma+1-\sigma')t.$$

Donc, pour $t \geqq T_0$,

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma u}\,|d\delta(u)| \leqq 4k\,e^{-(\sigma+1-\sigma')t}.$$

En particulier, pour $n \geqq \dfrac{T_0}{a}$,

$$\int_{na}^{(n+1)a} e^{-\sigma u}\,|d\delta(u)| \leqq 4k\,e^{-na(\sigma+1-\sigma')},$$

et, par suite, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{na}^{(n+1)a} e^{-\sigma u}\,|d\delta(u)|$ est convergente.

2.3. Rappelons par ailleurs le résultat suivant, valable sous la seule hypothèse que $\sigma_c=0$:

Soit une suite de fonctions réelles ou complexes $h_n(y)$ définies sur l'intervalle fermé $[-l, +l]$ et à variation bornée sur cet intervalle.

Supposons que l'on ait

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left[\int_{-l}^{+l}|d\,h_n(y)|\right]^{\frac{1}{n}} \leqq 1$$

et posons

$$H_n(t)=\int_{-l}^{+l} e^{-iyt}\,d\,h_n(y).$$

Alors, si la fonction $f(s)$ est holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$, on a, quels que soient $x>0$ et λ et μ satisfaisant à $0<\lambda<1<\mu$,

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left\{\frac{1}{n!}\left|\int_{\frac{\lambda n}{x}}^{\frac{\mu n}{x}} e^{-xt}t^n H_n(t)\,d\alpha(t)\right|\right\}^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{x}.$$

Nous avons démontré ce résultat au début de notre article : *Sur les points singuliers de la fonction définie par une intégrale de Laplace-Stieltjes* (6).

3. Démonstration du théorème. — Compte tenu des remarques qui précèdent, *nous supposerons que $\sigma_c = 0$ et que la fonction $\psi(t)$ est linéaire par morceaux sur tout intervalle fini.*

Nous prouverons, à l'aide du théorème rappelé au paragraphe précédent, que, quel que soit l positif, la fonction $f(s)$ ne peut être holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$.

3.1. Fixons-nous d'abord un nombre positif φ inférieur à $\frac{\pi}{4}$, un nombre positif h au plus égal à $\frac{\varphi}{k}$, et un nombre positif ω inférieur à 1.

3.2. Définissons une fonction $\Phi(t)$ pour $t > \frac{2h}{\omega}$ par

$$\Phi(t) = \int_{(1-\omega)t}^{t-2h} \left\{ \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega t}(t-u)\right]\right\} |d\psi(u)| + \int_{t+2h}^{(1+\omega)t} \left\{ \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h)\right]\right\} |d\psi(u)|.$$

On va voir que l'on a

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0. \tag{3}$$

En effet, soit η réel satisfaisant à $0 < \eta < \omega$.

Pour $t > \frac{2h}{\eta}$, on peut écrire

$$\Phi(t) = A(t) + B(t) + C(t) + D(t), \tag{4}$$

avec

$$A(t) = \int_{(1-\omega)t}^{(1-\eta)t} \left\{ \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega t}(t-u)\right]\right\} |d\psi(u)|,$$

$$B(t) = \int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega t}(t-u)\right]\right\} |d\psi(u)|,$$

$$C(t) = \int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h)\right]\right\} |d\psi(u)|,$$

$$D(t) = \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} \left\{ \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h)\right]\right\} |d\psi(u)|.$$

(1) montre que l'on a

$$B(t) \geq k \int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega t}(t-u)\right]\right\} du$$

(6) *J. Anal. Math.*, t. 5, 1956-1957, p. 1-33.

et

$$C(t) \geqq k \int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h) \right] \right\} du.$$

Mais on a, en faisant le changement de variable $u = t(1-v)$,

$$\int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t-u) \right] \right\} du = t \int_{\frac{2h}{t}}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} v \right] \right\} dv > t \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} v \right] \right\} dv,$$

et, en faisant le changement de variable $u = (t+h)(1+v)$,

$$\int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(u-t-h) \right] \right\} du = (t+h) \int_{\frac{h}{t+h}}^{\frac{\eta t-h}{t+h}} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega t}(t+h)v \right] \right\} dv$$

$$> (t+h) \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} v \right] \right\} dv.$$

Donc

$$B(t) + C(t) \geqq k(2t+h) \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} v \right] \right\} dv. \tag{5}$$

Par ailleurs, on a évidemment pour $t > \dfrac{2h}{\eta}$

$$A(t) \geqq \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{4\omega} \right) \right] \int_{(1-\omega)t}^{(1-\eta)t} |d\psi(u)|$$

et

$$D(t) \geqq \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi\eta}{4\omega}\left(1 - \frac{h}{\eta t}\right) \right] \right\} \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)| \geqq \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|,$$

de sorte que

$$A(t) + D(t) \geqq \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_{0}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|. \tag{6}$$

(4), (5) et (6) montrent que, pour $t > \dfrac{2h}{\eta}$,

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geqq k \frac{2t+h}{t} \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} v \right] \right\} dv + \frac{1}{t} \left[\log\left(\sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_{0}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|,$$

et, en tenant compte de (2), ceci entraîne

$$\varliminf_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \geqq 2k \int_{0}^{\eta} \left\{ \log\left[\sin \frac{\pi}{4\omega} v \right] \right\} dv.$$

Comme η peut être pris arbitrairement petit, on en déduit en faisant tendre η vers zéro

$$\varliminf_{t \to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \geqq 0,$$

d'où (3) puisque $\Phi(t) \leqq 0$.

3.3. Désignons maintenant par ψ'_n et ψ''_n le minimum et le maximum de $\psi(t)$ dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$.

On a évidemment

$$\psi'_n \leqq \psi(nh) \leqq \psi''_n.$$

3.3.1. Si l'on a

$$\psi(nh) - \pi + 2\varphi \leqq \psi'_n \leqq \psi''_n \leqq \psi(nh) + \pi - 2\varphi \qquad \text{et} \qquad \psi''_n - \psi'_n \leqq \pi, \tag{7}$$

on peut trouver un nombre réel γ_n satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leqq \gamma_n \leqq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi,$$

tel que

$$\cos[\psi(t) - \gamma_n] \geqq 0 \qquad \text{pour} \quad (1-\omega)nh \leqq t \leqq (1+\omega)nh.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\gamma_n = \psi''_n - \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \quad \psi''_n \geqq \psi(nh) + 2\varphi,$$

$$\gamma_n = \psi'_n + \frac{\pi}{2} \qquad \text{si} \quad \psi''_n < \psi(nh) + 2\varphi \quad \text{et} \quad \psi'_n \leqq \psi(nh) - 2\varphi,$$

$$\gamma_n = \psi(nh) \qquad \text{si} \quad \psi(nh) - 2\varphi < \psi'_n \leqq \psi''_n < \psi(nh) + 2\varphi.$$

Notons que les inégalités (7) ont certainement lieu pour $n \leqq \frac{2}{\omega}$, car, si $n \leqq \frac{2}{\omega}$, on a pour $(1-\omega)nh \leqq t \leqq (1+\omega)nh$,

$$|\psi(t) - \psi(nh)| \leqq k|t - nh| \leqq k\omega nh \leqq 2kh \leqq 2\varphi < \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} < \psi'_n \leqq \psi''_n < \psi(nh) + \frac{\pi}{2}.$$

3.3.2. Si l'on n'a pas les inégalités (7), quel que soit γ satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leqq \gamma \leqq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi,$$

la fonction $\cos[\psi(t) - \gamma]$ prend des valeurs de signe contraire dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$.

Si $\psi''_n - \psi'_n > \pi$, c'est évident puisque $\psi(t) - \gamma$ parcourt un intervalle de longueur supérieure à π.

Si $\psi'_n < \psi(nh) - \pi + 2\varphi$, $\psi(t) - \gamma$ a un minimum inférieur à $-\frac{\pi}{2}$ et prend une valeur au moins égale à $-\frac{\pi}{2} + 2\varphi$ pour $t = nh$; donc, pour ε positif assez petit, $\psi(t) - \gamma$ prend les valeurs $-\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Si $\psi''_n > \psi(nh) + \pi - 2\varphi$, le maximum est supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et la valeur pour

$t = nh$ est au plus égale à $\frac{\pi}{2} - 2\varphi$; donc, pour ε positif assez petit, $\psi(t) - \gamma$ prend les valeurs $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

La fonction $\psi(t)$ étant linéaire par morceaux sur l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$, celui-ci peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels sur chacun desquels $\cos[\psi(t) - \gamma]$ est croissante, ou décroissante, ou constante. Il en résulte que l'ensemble des points de l'intervalle ouvert $](1-\omega)nh, (1+\omega)nh[$ où $\cos[\psi(t)-\gamma] \neq 0$ se compose d'un nombre fini d'intervalles ouverts sur chacun desquels $\cos[\psi(t)-\gamma]$ a un signe constant.

Deux intervalles ouverts consécutifs sur lesquels $\cos[\psi(t)-\gamma]$ a des signes contraires sont séparés, soit par un point t_0 tel que $\cos[\psi(t_0)-\gamma] = 0$, soit par un intervalle fermé $[t'_0, t''_0]$ sur lequel $\cos[\psi(t)-\gamma] = 0$.

Dans le premier cas, nous dirons qu'il y a changement de signe pour $\cos[\psi(t)-\gamma]$ au point t_0, dans le second qu'il y a changement de signe au point $\frac{t'_0 + t''_0}{2}$.

Le nombre total des points de changement de signe dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ est borné supérieurement par un nombre indépendant de γ. En effet, si $[t', t'']$ est un intervalle fermé contenu dans $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ et dans lequel $\psi(t)$ est linéaire, le nombre des points de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma]$ appartenant à $[t', t'']$ ne peut dépasser $\frac{|\psi(t'') - \psi(t')|}{\pi} + 1$.

D'autre part, il n'y a aucun point de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma]$ dans l'intervalle ouvert $](n-2)h, (n+2)h[$.

En effet, sur cet intervalle,

$$|\psi(t) - \psi(nh)| \leqq k\,|t - nh| < 2kh \leqq 2\varphi,$$

d'où

$$\psi(nh) - 2\varphi < \psi(t) < \psi(nh) + 2\varphi,$$

et, par suite, $-\frac{\pi}{2} < \psi(t) - \gamma < +\frac{\pi}{2}$, de sorte que

$$\cos[\psi(t) - \gamma] > 0.$$

3.3.3. Ceci étant, dans le cas où l'on n'a pas les inégalités (7), nous définirons une fonction $G_n(\gamma)$ sur l'intervalle $\left[\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi, \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi\right]$ de la façon suivante :

$t_1, t_2, \ldots, t_p$ étant les points de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma]$ dans l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$, on prend

$$G_n(\gamma) = \sum_{j=1}^{p} L_n(t_j),$$

avec

$$\mathrm{L}_n(t)=\begin{cases}\log\left[\sin\dfrac{\pi}{4\omega nh}(nh-t)\right] & \text{pour}\quad (1-\omega)nh\leqq t\leqq(n-2)h,\\ \log\left\{\sin\dfrac{\pi}{4\omega nh}[t-(n+1)h]\right\} & \text{pour}\quad (n+2)h\leqq t\leqq(1+\omega)nh.\end{cases}$$

3.3.4. $\mathrm{G}_n(\gamma)$ est bornée sur l'intervalle $\left[\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi, \psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi\right]$ puisque p est borné supérieurement et

$$\log\left[\sin\frac{\pi}{4\omega n}\right]\leqq \mathrm{L}_n(t)\leqq 0.$$

On va voir qu'elle est continue, sauf peut-être en un nombre fini de points, donc intégrable au sens de Riemann, et que l'on a

$$\int_{\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi}^{\psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi}\mathrm{G}_n(\gamma)\,d\gamma\geqq\Phi(nh), \tag{8}$$

où Φ est la fonction définie au paragraphe 3.2.

En effet, d'après nos hypothèses, l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ peut être décomposé en intervalles partiels $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_{q-1}, a_q]$ sur chacun desquels la fonction $\psi(t)$ est linéaire.

Nous supposerons que, sur $[a_{r-1}, a_r]$,

$$\psi(t)=b_r t+c_r.$$

Pour chaque entier r satisfaisant à $0\leqq r\leqq q$, il existe exactement un nombre réel θ'_r satisfaisant à

$$\psi(nh)-\frac{\pi}{2}\leqq\theta'_r<\psi(nh)+\frac{\pi}{2}\qquad\text{et}\qquad\cos[\psi(a_r)-\theta'_r]=0.$$

Ceux des points θ'_r qui sont intérieurs à l'intervalle

$$\left[\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi,\ \psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi\right]$$

partagent celui-ci en un nombre fini d'intervalles partiels, que nous désignerons par $[\theta_0, \theta_1]$, $[\theta_1, \theta_2]$, ...

Lorsque γ varie dans un intervalle ouvert $]\theta_{m-1}, \theta_m[$, le nombre p des points de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma]$ sur l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ reste constant et, si $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont ces points *rangés par ordre croissant*, pour chaque j, t_j reste à l'intérieur de l'un des intervalles $[a_{r-1}, a_r]$ pour lesquels $b_r\neq 0$, soit $\left[a_{r_{j-1}}, a_{r_j}\right]$.

On a pour chaque j une relation de la forme

$$t_j=\frac{1}{b_{r_j}}\gamma+d_j,$$

ce qui montre que $G_n(\gamma)$ est continue sur l'intervalle ouvert $]\theta_{m-1}, \theta_m[$, et, quand γ parcourt cet intervalle, chaque t_j parcourt un intervalle ouvert $]\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}[$ contenu dans l'intervalle ouvert $]a_{r_{j-1}}, a_{r_j}[$.

On a

$$\beta_{m,j} \leqq (n-2)h \quad \text{ou} \quad \alpha_{m,j} \geqq (n+2)h,$$

puisque t_j ne peut jamais appartenir à l'intervalle $](n-2)h, (n+2)h[$.

Les différents intervalles $[\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}]$ sont donc tous contenus dans la réunion des intervalles fermés $[(1-\omega)nh, (n-2)h]$ et $[(n+2)h, (1+\omega)nh]$.

On voit que l'on a

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} G_n(\gamma)\, d\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} L_n(t_j)\, d\gamma.$$

Mais, en faisant le changement de variable $\frac{1}{b_{r_j}}\gamma + d_j = u$, on obtient

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} L_n(t_j)\, d\gamma = \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\,|b_{r_j}|\, du = \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\,|d\psi(u)|.$$

On a donc

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} G_n(\gamma)\, d\gamma = \sum_{j=1}^{p} \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\,|d\psi(u)|,$$

et, par suite,

$$\int_{\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi}^{\psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi} G_n(\gamma)\, d\gamma = \sum_{m,j} \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u)\,|d\psi(u)|.$$

On voit par ailleurs que les intervalles $[\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}]$ sont non empiétants. Deux de ces intervalles correspondant à un même m sont évidemment non empiétants s'ils ne sont pas contenus dans le même intervalle $[a_{r-1}, a_r]$. Ils le sont encore s'ils sont contenus dans le même intervalle $[a_{r-1}, a_r]$, car alors $\psi(t)$ parcourt des intervalles non empiétants lorsque t les parcourt. Enfin, deux intervalles correspondant à deux valeurs différentes m' et m'' de m sont aussi non empiétants. En effet, s'ils avaient un point intérieur commun, soit τ, celui-ci serait point de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma]$ pour deux valeurs γ' et γ'' de γ appartenant l'une à l'intervalle ouvert $]\theta_{m'-1}, \theta_{m'}[$, l'autre à l'intervalle ouvert $]\theta_{m''-1}, \theta_{m''}[$, et l'on aurait

$$\cos[\psi(\tau)-\gamma'] = \cos[\psi(\tau)-\gamma''] = 0,$$

ce qui exigerait que $\gamma''-\gamma'$ soit multiple de π. Or ceci n'est pas possible avec $\gamma' \neq \gamma''$, puisque γ' et γ'' doivent appartenir à l'intervalle $\left[\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi, \psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi\right]$ dont la longueur est $\pi-4\varphi$.

La fonction $L_n(t)$ étant négative sur les intervalles

$$[(1-\omega)nh,\ (n-2)h] \quad \text{et} \quad [(n+2)h,\ (1+\omega)nh],$$

on voit finalement que

$$\int_{\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi}^{\psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi} G_n(\gamma)\,d\gamma \geqq \int_{(1-\omega)nh}^{(n-2)h} L_n(u)\,|d\psi(u)| + \int_{(n+2)h}^{(1+\omega)nh} L_n(u)\,|d\psi(u)|.$$

Mais le second membre est précisément $\Phi(nh)$.

3.3.5. L'inégalité (8) montre qu'on peut trouver un nombre réel γ_n satisfaisant à

$$\psi(nh)-\frac{\pi}{2}+2\varphi \leqq \gamma_n \leqq \psi(nh)+\frac{\pi}{2}-2\varphi$$

et tel que

$$G_n(\gamma_n) \geqq \frac{\Phi(nh)}{\pi-4\varphi}.$$

Notons que ceci entraîne que, pour $\gamma=\gamma_n$, le nombre des t_j soit au plus égal à

$$\frac{-\Phi(nh)}{(\pi-4\varphi)\log\sqrt{2}},$$

car, comme on le voit immédiatement, on a pour chaque j,

$$L_n(t_j) \leqq \log\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\log\sqrt{2}.$$

3.4. Dans ce qui suit, on supposera qu'on a déterminé une suite $\{\gamma_n\}$ en choisissant γ_n comme il est dit au paragraphe 3.3.1 dans le cas où l'on a les inégalités (7), et comme il est dit au paragraphe 3.3.5 dans le cas où l'on n'a pas ces inégalités.

Dans ce dernier cas, on désignera par $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_{p_n}^{(n)}$ les points de changement de signe de $\cos[\psi(t)-\gamma_n]$ dans l'intervalle $[(1-\omega)nh,\ (1+\omega)nh]$, et par q_n le nombre des $t_j^{(n)}$ qui sont supérieurs à nh.

D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$p_n \leqq \frac{-\Phi(nh)}{(\pi-4\varphi)\log\sqrt{2}}.$$

3.5. Nous allons maintenant montrer, en utilisant le résultat rappelé au paragraphe 2.3, que, quel que soit l positif, on arriverait à une contradiction si l'on supposait que $f(s)$ soit holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$.

Fixons donc un l positif.

3.5.1. Observons d'abord que, d'après (3), il existe un $n_0 > \frac{2}{\omega}$ tel que, pour $n \geqq n_0$,

$$\frac{\Phi(nh)}{nh} > -\frac{4\omega(\pi-4\varphi)\log\sqrt{2}}{\pi}\,l,$$

d'où

$$(9)\qquad \frac{-\Phi(nh)}{(\pi-4\varphi)\log\sqrt{2}} < \frac{4\omega nh}{\pi}\,l.$$

Ceci étant, définissons la suite des fonctions $h_n(y)$ sur l'intervalle fermé $[-l, +l]$ de la façon suivante :

Pour $n < n_0$, nous prenons $h_n(y)$ absolument arbitraire.

Pour $n \geqq n_0$, si l'on a les inégalités (7), nous prenons

$$h_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -l \leqq y < 0, \\ 1 & \text{pour } \quad 0 \leqq y \leqq l, \end{cases}$$

de sorte que

$$H_n(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| = 1.$$

Si l'on n'a pas les inégalités (7), nous remarquons que, d'après la formule d'Euler,

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

on a

$$(-1)^{q_n} \prod_{j=1}^{p_n} \sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}] = \sum_{r=0}^{p_n} A_r^{(n)} \exp\left\{i\frac{p_n-2r}{4\omega nh}\pi t\right\},$$

où les $A_r^{(n)}$ sont des constantes, et, puisque

$$p_n \leqq \frac{-\Phi(nh)}{(\pi-4\varphi)\log\sqrt{2}},$$

on a d'après (9)

$$\frac{p_n\pi}{4\omega nh} < l.$$

Nous prenons alors

$$h_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \quad -l \leqq y < -\dfrac{p_n\pi}{4\omega nh}, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{r} A_j^{(n)} & \text{pour } \quad \dfrac{(2r-p_n)\pi}{4\omega nh} \leqq y < \dfrac{(2r+2-p_n)\pi}{4\omega nh} \qquad (r=0, 1, \ldots, p_n-1), \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{p_n} A_j^{(n)} & \text{pour } \quad \dfrac{p_n\pi}{4\omega nh} \leqq y \leqq l, \end{cases}$$

de sorte que

$$H_n(t) = (-1)^{q_n} \prod_{j=1}^{p_n} \sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}].$$

Comme on a $|A_r^{(n)}| \leq \frac{1}{2^{p_n}} \binom{p_n}{r}$, on voit que

$$\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| = \sum_0^{p_n} |A_r^{(n)}| \leq 1.$$

3.5.2. Comme, pour tout $n \geq n_0$,

$$\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| \leq 1,$$

on a

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \left[\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Par suite, en prenant $x = \frac{1}{h}$, $\lambda = 1 - \omega$ et $\mu = 1 + \omega$, le théorème rappelé au paragraphe 2.3 permet d'affirmer que, si $f(s)$ était holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$, en posant

$$\Omega_n = \frac{1}{n!} \left| \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h}} t^n \mathrm{H}_n(t)\, d\alpha(t) \right|,$$

on aurait

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \Omega_n^{\frac{1}{n}} < h.$$

3.5.3 On a évidemment

$$\Omega_n \geq \frac{1}{n!} \mathcal{R} \left\{ e^{-i\gamma_n} \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h}} t^n \mathrm{H}_n(t)\, d\alpha(t) \right\},$$

$$\geq \frac{1}{n!} \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h}} t^n \mathrm{H}_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n]\, dv(t).$$

Mais, pour $n \geq n_0$, on a

$$\mathrm{H}_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0$$

sur tout l'intervalle $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$.

Dans le cas où l'on a les inégalités (7), cela résulte de ce que $\cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0$ et $\mathrm{H}_n(t) = 1$. Dans le cas contraire, cela tient à ce que $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$ et $\mathrm{H}_n(t)$ sont positifs pour $t = nh$ et $\mathrm{H}_n(t)$ change de signe en tous les points de changement de signe de $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$.

Donc, pour $n \geq \mathrm{Max}\left[n_0, \frac{1}{\omega}\right]$,

$$\Omega_n \geq \frac{1}{n!} \int_{nh}^{(n+1)h} e^{-\frac{t}{h}} t^n \mathrm{H}_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n]\, dv(t).$$

3.5.4. Par ailleurs, pour $nh \leq t \leq (n+1)h$,

$$e^{-\frac{t}{h}} t^n \geq (n+1)^n e^{-n-1} h^n,$$

puisque la fonction $e^{-\frac{t}{h}} t^n$ est décroissante pour $t \geq nh$.

D'autre part, $\cos[\psi(t)-\gamma_n] \geqq \sin\varphi$, puisque

$$|\psi(t)-\gamma_n| \leqq |\psi(t)-\psi(nh)| + |\psi(nh)-\gamma_n| \leqq kh + \left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right) \leqq \frac{\pi}{2}-\varphi.$$

Enfin

$$H_n(t) \geqq \exp\left[\frac{\Phi(nh)}{\pi-4\varphi}\right].$$

En effet, dans le cas où l'on a les inégalités (7), $H_n(t)=1$, alors que $\Phi(nh) \leqq 0$. Dans le cas où l'on n'a pas les inégalités (7),

$$H_n(t)>0 \qquad \text{et} \qquad \log H_n(t) = \sum_{j=1}^{p_n} \log\left|\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}]\right|;$$

mais, pour les $t_j^{(n)}$ au plus égaux à $(n-2)h$,

$$\log\left|\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}]\right| \geqq \log\left\{\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[nh-t_j^{(n)}]\right\},$$

et, pour les $t_j^{(n)}$ au moins égaux à $(n+2)h$,

$$\log\left|\sin\frac{\pi}{4\omega nh}[t-t_j^{(n)}]\right| \geqq \log\sin\left\{\frac{\pi}{4\omega nh}[t_j^{(n)}-(n+1)h]\right\};$$

par suite

$$\log H_n(t) \geqq G_n(\gamma_n) \geqq \frac{\Phi(nh)}{\pi-4\varphi}.$$

3.5.5. Finalement, on voit que, pour $n \geqq \operatorname{Max}\left[n_0, \frac{1}{\omega}\right]$,

$$\Omega_n \geqq \frac{(n+1)^n e^{-n-1} h^n}{n!}(\sin\varphi)\exp\left[\frac{\Phi(nh)}{\pi-4\varphi}\right]\{v[(n+1)h]-v(nh)\},$$

d'où

$$\{v[(n+1)h]-v(nh)\}^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{h}\,\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}e}{n+1}\left(\frac{e}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{n}}\exp\left[\frac{-\Phi(nh)}{nh}\,\frac{h}{\pi-4\varphi}\right]\Omega_n^{\frac{1}{n}}.$$

Comme, quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}e}{n+1}\left(\frac{e}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{n}}\exp\left[\frac{-\Phi(nh)}{nh}\,\frac{h}{\pi-4\varphi}\right] \quad \text{tend vers } 1,$$

il en résulte que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,\{v[(n+1)h]-v(nh)\}^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{h}\,\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}.$$

3.5.6. L'hypothèse que $f(s)$ soit holomorphe sur le segment fermé $[-il, +il]$ entraînerait donc

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,\{v[(n+1)h]-v(nh)\}^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Mais ceci ne peut avoir lieu.