

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

## Un théorème sur l'intégrale de Laplace-Stieltjes

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 75, n° 1 (1958), p. 1-17

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1958\\_3\\_75\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_1_1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

---

UN THÉORÈME SUR L'INTÉGRALE

DE  
LAPLACE-STIELTJES

PAR M. HUBERT DELANGE.

---

1. INTRODUCTION. — Soit  $\alpha(t)$  une fonction réelle ou complexe définie pour  $t \geq 0$  et à variation bornée sur tout intervalle fini, et supposons que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t)$$

ait une abscisse de convergence  $\sigma_c$  finie et soit égale pour  $\Re s > \sigma_c$  à  $f(s)$ .

Dans des travaux précédents <sup>(1)</sup>, nous avons établi des théorèmes permettant d'affirmer, moyennant des hypothèses convenables, l'existence d'un point singulier pour la fonction  $f(s)$ , soit au point  $\sigma_c$ , soit sur un certain segment de la droite  $\Re s = \sigma_c$ . Nous nous proposons ici d'établir encore le théorème suivant, que nous avons déjà énoncé sans démonstration par ailleurs <sup>(2)</sup> :

Supposons que l'on ait

$$\alpha(t) = \int_0^t e^{i\psi(u)} d\nu(u),$$

---

<sup>(1)</sup> Sur certaines intégrales de Laplace [Bull. Sc. Math., (2), t. 77, 1953, p. 141-168]; Sur les points singuliers de la fonction définie par une intégrale de Laplace-Stieltjes (J. Anal. Math., t. 3, 1956-1957, p. 1-33).

<sup>(2)</sup> Sur les singularités des fonctions définies par des intégrales de Laplace (Rend. Sem. Matem. Fis. di Milano, t. 26, 1954-1955).

où  $v(t)$  est une fonction réelle non décroissante pour  $t \geq 0$  et  $\psi(t)$  une fonction réelle continue pour  $t \geq 0$  <sup>(3)</sup>.

Supposons, en outre, qu'il existe un nombre positif  $k$  tel que l'on ait quels que soient  $t'$  et  $t'' \geq 0$

$$(1) \quad |\psi(t'') - \psi(t')| \leq k |t'' - t'|,$$

ce qui implique évidemment que la fonction  $\psi(t)$  soit à variation bornée sur tout intervalle fini.

Alors, si l'on a, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,

$$(2) \quad \int_0^t |d\psi(u)| = o[t],$$

le point  $\sigma_c$  est un point singulier de la fonction  $f(s)$ .

On voit immédiatement que ce théorème entraîne comme corollaire le théorème bien connu suivant de Fabry <sup>(4)</sup> :

Soit la série entière  $\sum_0^{+\infty} a_n z^n$ , de rayon de convergence 1 et de somme  $F(z)$ , et supposons que, pour chaque  $n \geq 0$ ,

$$a_n = r_n e^{i\theta_n}, \quad \text{avec } r_n \geq 0 \text{ et } \theta_n \text{ réel.}$$

Si, quand  $N$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\sum_1^N |\theta_n - \theta_{n-1}| = o[N],$$

le point 1 est un point singulier de  $F(z)$ .

Il est évident qu'on peut sans inconvénient supposer que, pour chaque  $n \geq 1$ ,  $|\theta_n - \theta_{n-1}| \leq \pi$ .

En effet, si cette condition n'était pas réalisée, on pourrait définir une suite  $\{\theta'_n\}$  en prenant  $\theta'_0 = \theta_0$ , puis déterminant  $\theta'_n$  pour  $n \geq 1$ , par

$$e^{i\theta'_n} = e^{i\theta_n} \quad \text{et} \quad \theta'_{n-1} - \pi \leq \theta'_n < \theta'_{n-1} + \pi.$$

On aurait ainsi  $a_n = r_n e^{i\theta'_n}$  pour tout  $n \geq 0$  et

$$\sum_1^N |\theta'_n - \theta'_{n-1}| \leq \sum_1^N |\theta_n - \theta_{n-1}| \quad \text{pour tout } N \geq 1,$$

<sup>(3)</sup> Notons que ceci implique que la variation de  $\alpha(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$  soit  $v(T) - v(0)$ .

<sup>(4)</sup> Sur les points singuliers d'une fonction... [Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., (3), t. 13, 1896, p. 367-399].

puisque, pour chaque  $n \geq 1$ ,

$$|\theta'_n - \theta'_{n-1}| \leq |\theta_n - \theta_{n-1}|.$$

Si maintenant on définit les fonctions  $\nu(t)$  et  $\psi(t)$  pour  $t \geq 0$  par

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t = 0, \\ \sum_0^n r_j & \text{pour } n < t \leq n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$\psi(n) = \theta_n \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

et  $\psi$  linéaire sur chaque intervalle  $[n, n+1]$ ,

on voit que ces fonctions satisfont aux hypothèses de notre théorème avec  $k = \pi$ , et que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t), \quad \text{où } \alpha(t) = \int_0^t e^{i\psi(u)} d\nu(u),$$

se ramène à la série  $\sum_0^{+\infty} a_n e^{-ns}$ , donc a pour abscisse de convergence 0 et est égale pour  $\Re s > 0$  à  $F(e^{-s})$ .

Notre théorème implique donc que le point 0 soit un point singulier de  $F(e^{-s})$ .

2. REMARQUES PRÉLIMINAIRES. — 2.1. Remarquons d'abord qu'on peut sans inconvénient se restreindre au cas où  $\sigma_c = 0$ .

En effet, si  $\sigma_c \neq 0$ , posons

$$\alpha_1(t) = \int_0^t e^{-\sigma_c u} d\alpha(u) \quad \text{et} \quad \nu_1(t) = \int_0^t e^{-\sigma_c u} d\nu(u).$$

Quel que soit  $s$ , on a pour  $T > 0$

$$\int_0^T e^{-st} d\alpha_1(t) = \int_0^T e^{-(s+\sigma_c)t} d\alpha(t).$$

Par conséquent, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha_1(t)$  est convergente ou non en même temps que  $\int_0^{+\infty} e^{-(s+\sigma_c)t} d\alpha(t)$  et, lorsqu'il y a convergence, les deux intégrales sont égales. Autrement dit, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha_1(t)$  a pour abscisse de convergence 0 et représente la fonction  $f(s + \sigma_c)$ .

Si le point 0 est un point singulier de  $f(s + \sigma_c)$ ,  $\sigma_c$  est un point singulier de  $f(s)$ .



Mais on a  $\alpha_1(t) = \int_0^t e^{i\psi(u)} d\nu_1(u)$ , et  $\nu_1(t)$  est encore une fonction non décroissante pour  $t \geq 0$ .

2.2. On peut aussi sans inconvénient supposer que la fonction  $\psi(t)$  est linéaire par morceaux sur tout intervalle fini <sup>(5)</sup>.

Pour le voir, introduisons la fonction  $\psi_1$  définie pour  $t \geq 0$  par

$$\psi_1(\log n) = \psi(\log n) \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots,$$

avec  $\psi_1$  linéaire sur chaque intervalle  $[\log n, \log(n+1)]$ .

Il est clair que l'on a encore, quels que soient  $t'$  et  $t'' \geq 0$ ,

$$|\psi_1(t'') - \psi_1(t')| \leq k |t'' - t'|.$$

D'autre part, pour  $\log n \leq t < \log(n+1)$ ,

$$\int_0^t |d\psi_1(u)| \leq \int_0^{\log(n+1)} |d\psi(u)|,$$

d'où

$$\frac{1}{t} \int_0^t |d\psi_1(u)| \leq \frac{1}{t} \int_0^{\log(n+1)} |d\psi(u)| \leq \frac{\log(n+1)}{\log n} \frac{1}{\log(n+1)} \int_0^{\log(n+1)} |d\psi(u)|.$$

Donc, quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\int_0^t |d\psi_1(u)| = o[t].$$

Mais nous allons voir que, si l'on pose

$$\beta(t) = \int_0^t e^{i\psi_1(u)} d\nu(u),$$

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-st} d\beta(t)$  a même abscisse de convergence que  $\int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t)$  et la fonction qu'elle représente a les mêmes points singuliers que  $f(s)$  sur la droite  $\Re s = \sigma_c$ .

Ce résultat sera évidemment établi quand nous aurons prouvé que, si

$$\delta(t) = \beta(t) - \alpha(t),$$

l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-st} d\delta(t)$  est absolument convergente pour  $\Re s > \sigma_c - 1$ , autrement dit, quel que soit  $\sigma$  réel  $> \sigma_c - 1$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} |d\delta(t)|$  est convergente.

---

(5) Nous disons qu'une fonction est *linéaire par morceaux* sur un intervalle si celui-ci peut être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels la fonction est linéaire.

On voit d'abord que, si  $\log n \leq t < \log(n+1)$ , avec  $n \geq 1$ , on a

$$|\psi(t) - \psi(\log n)| \leq k(t - \log n) \leq k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et

$$|\psi_1(t) - \psi(\log n)| \leq k(t - \log n) \leq k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

d'où

$$|\psi_1(t) - \psi(t)| \leq 2k \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{2k}{n}.$$

Or

$$\frac{2k}{n} = \frac{2k}{n+1} \frac{n+1}{n} \leq \frac{4k}{n+1} \leq 4k e^{-t}.$$

Donc, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$|\psi_1(t) - \psi(t)| \leq 4k e^{-t},$$

et, par suite,

$$|e^{i\psi_1(t)} - e^{i\psi(t)}| \leq 4k e^{-t}.$$

Soit maintenant un nombre réel  $\sigma > \sigma_c - 1$ .

Fixons un nombre positif  $a < \frac{\pi}{2k}$  et un nombre réel  $\sigma'$  satisfaisant à  $\sigma_c < \sigma' < \sigma + 1$ .

Comme l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-\sigma' t} d\alpha(t)$  est convergente,  $\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} d\alpha(u)$  tend vers zéro quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Il existe donc un  $T_0 \geq 0$  tel que, pour  $t \geq T_0$ ,

$$\left| \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} d\alpha(u) \right| \leq \cos ka.$$

Mais

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} d\alpha(u) = \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} e^{i\psi(u)} d\nu(u),$$

d'où

$$e^{-i\psi(t)} \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} d\alpha(u) = \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} e^{i[\psi(u) - \psi(t)]} d\nu(u),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \Re \left\{ e^{-i\psi(t)} \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} d\alpha(u) \right\} &= \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} \cos[\psi(u) - \psi(t)] d\nu(u), \\ &\geq \cos ka \int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} d\nu(u), \end{aligned}$$

puisque, pour  $t \leq u \leq t+a$ ,

$$|\psi(u) - \psi(t)| \leq ka.$$

Donc, pour  $t \geq T_0$ ,

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma' u} d\nu(u) \leq 1.$$

Par ailleurs,

$$\delta(t) = \int_0^t [e^{i\psi_1(u)} - e^{i\psi(u)}] d\nu(u),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+a} e^{-\sigma u} |d\delta(u)| &= \int_t^{t+a} e^{-\sigma u} |e^{i\psi_1(u)} - e^{i\psi(u)}| d\nu(u), \\ &\leq 4k \int_t^{t+a} e^{-(\sigma+1)u} d\nu(u), \\ &\leq 4k e^{-(\sigma+1-\sigma)t} \int_t^{t+a} e^{-\sigma u} d\nu(u), \end{aligned}$$

car, pour  $t \leq u \leq t+a$ ,

$$(\sigma+1)u \geq \sigma' u + (\sigma+1-\sigma')t.$$

Donc, pour  $t \geq T_0$ ,

$$\int_t^{t+a} e^{-\sigma u} |d\delta(u)| \leq 4k e^{-(\sigma+1-\sigma')t}.$$

En particulier, pour  $n \geq \frac{T_0}{a}$ ,

$$\int_{na}^{(n+1)a} e^{-\sigma u} |d\delta(u)| \leq 4k e^{-na(\sigma+1-\sigma')},$$

et, par suite, la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{na}^{(n+1)a} e^{-\sigma u} |d\delta(u)|$  est convergente.

2.3. Rappelons par ailleurs le résultat suivant, valable sous la seule hypothèse que  $\sigma_c = 0$  :

*Soit une suite de fonctions réelles ou complexes  $h_n(y)$  définies sur l'intervalle fermé  $[-l, +l]$  et à variation bornée sur cet intervalle.*

*Supposons que l'on ait*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq 1$$

*et posons*

$$H_n(t) = \int_{-l}^{+l} e^{-ty} dh_n(y).$$

*Alors, si la fonction  $f(s)$  est holomorphe sur le segment fermé  $[-il, +il]$ , on a, quels que soient  $x > 0$  et  $\lambda$  et  $\mu$  satisfaisant à  $0 < \lambda < 1 < \mu$ ,*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{n!} \left| \int_{\frac{\lambda n}{x}}^{\frac{\mu n}{x}} e^{-xt} t^n H_n(t) d\alpha(t) \right| \right\}^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{x}.$$

Nous avons démontré ce résultat au début de notre article : *Sur les points singuliers de la fonction définie par une intégrale de Laplace-Stieltjes* <sup>(6)</sup>.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Compte tenu des remarques qui précèdent, nous supposons que  $\sigma_c = 0$  et que la fonction  $\psi(t)$  est linéaire par morceaux sur tout intervalle fini.

Nous prouverons, à l'aide du théorème rappelé au paragraphe précédent, que, quel que soit  $l$  positif, la fonction  $f(s)$  ne peut être holomorphe sur le segment fermé  $[-il, +il]$ .

3.1. Fixons-nous d'abord un nombre positif  $\varphi$  inférieur à  $\frac{\pi}{4}$ , un nombre positif  $h$  au plus égal à  $\frac{\varphi}{k}$ , et un nombre positif  $\omega$  inférieur à 1.

3.2. Définissons une fonction  $\Phi(t)$  pour  $t > \frac{2h}{\omega}$  par

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \int_{(1-\omega)t}^{t-2h} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (t-u) \right] \right\} |d\psi(u)| \\ & + \int_{t+2h}^{(1+\omega)t} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (u-t-h) \right] \right\} |d\psi(u)|. \end{aligned}$$

On va voir que l'on a

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = 0.$$

En effet, soit  $\eta$  réel satisfaisant à  $0 < \eta < \omega$ .

Pour  $t > \frac{2h}{\eta}$ , on peut écrire

$$(4) \quad \Phi(t) = A(t) + B(t) + C(t) + D(t),$$

avec

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{(1-\omega)t}^{(1-\eta)t} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (t-u) \right] \right\} |d\psi(u)|, \\ B(t) &= \int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (t-u) \right] \right\} |d\psi(u)|, \\ C(t) &= \int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (u-t-h) \right] \right\} |d\psi(u)|, \\ D(t) &= \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (u-t-h) \right] \right\} |d\psi(u)|. \end{aligned}$$

(1) montre que l'on a

$$B(t) \geq k \int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (t-u) \right] \right\} du$$

<sup>(6)</sup> *J. Anal. Math.*, t. 5, 1956-1957, p. 1-33.



et

$$C(t) \geq k \int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (u - t - h) \right] \right\} du.$$

Mais on a, en faisant le changement de variable  $u = t(1 - \nu)$ ,

$$\int_{(1-\eta)t}^{t-2h} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (t - u) \right] \right\} du = t \int_{\frac{2h}{t}}^{\eta} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega} \nu \right] \right\} d\nu > t \int_0^{\eta} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega} \nu \right] \right\} d\nu,$$

et, en faisant le changement de variable  $u = (t + h)(1 + \nu)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{t+2h}^{(1+\eta)t} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (u - t - h) \right] \right\} du &= (t + h) \int_{\frac{h}{t+h}}^{\frac{\eta t - h}{t+h}} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega t} (t + h)\nu \right] \right\} d\nu \\ &> (t + h) \int_0^{\eta} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega} \nu \right] \right\} d\nu. \end{aligned}$$

Donc

$$(5) \quad B(t) + C(t) \geq k(2t + h) \int_0^{\eta} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega} \nu \right] \right\} d\nu.$$

Par ailleurs, on a évidemment pour  $t > \frac{2h}{\eta}$

$$A(t) \geq \left[ \log \left( \sin \frac{\pi\eta}{4\omega} \right) \right] \int_{(1-\omega)t}^{(1-\eta)t} |d\psi(u)|$$

et

$$D(t) \geq \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi\eta}{4\omega} \left( 1 - \frac{h}{\eta t} \right) \right] \right\} \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)| \geq \left[ \log \left( \sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_{(1+\eta)t}^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|,$$

de sorte que

$$(6) \quad A(t) + D(t) \geq \left[ \log \left( \sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_0^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|.$$

(4), (5) et (6) montrent que, pour  $t > \frac{2h}{\eta}$ ,

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geq k \frac{2t + h}{t} \int_0^{\eta} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega} \nu \right] \right\} d\nu + \frac{1}{t} \left[ \log \left( \sin \frac{\pi\eta}{8\omega} \right) \right] \int_0^{(1+\omega)t} |d\psi(u)|,$$

et, en tenant compte de (2), ceci entraîne

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \geq 2k \int_0^{\eta} \left\{ \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega} \nu \right] \right\} d\nu.$$

Comme  $\eta$  peut être pris arbitrairement petit, on en déduit en faisant tendre  $\eta$  vers zéro

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \geq 0,$$

d'où (3) puisque  $\Phi(t) \leq 0$ .

3.3. Désignons maintenant par  $\psi'_n$  et  $\psi''_n$  le minimum et le maximum de  $\psi(t)$  dans l'intervalle  $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ .

On a évidemment

$$\psi'_n \leq \psi(nh) \leq \psi''_n.$$

3.3.1. Si l'on a

$$(7) \quad \psi(nh) - \pi + 2\varphi \leq \psi'_n \leq \psi''_n \leq \psi(nh) + \pi - 2\varphi \quad \text{et} \quad \psi''_n - \psi'_n \leq \pi,$$

on peut trouver un nombre réel  $\gamma_n$  satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leq \gamma_n \leq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi,$$

tel que

$$\cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0 \quad \text{pour} \quad (1-\omega)nh \leq t \leq (1+\omega)nh.$$

On peut prendre, par exemple,

$$\gamma_n = \psi''_n - \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \psi''_n \geq \psi(nh) + 2\varphi,$$

$$\gamma_n = \psi'_n + \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \psi''_n < \psi(nh) + 2\varphi \quad \text{et} \quad \psi'_n \leq \psi(nh) - 2\varphi,$$

$$\gamma_n = \psi(nh) \quad \text{si} \quad \psi(nh) - 2\varphi < \psi'_n \leq \psi''_n < \psi(nh) + 2\varphi.$$

Notons que les inégalités (7) ont certainement lieu pour  $n \leq \frac{2}{\omega}$ , car, si  $n \leq \frac{2}{\omega}$ , on a pour  $(1-\omega)nh \leq t \leq (1+\omega)nh$ ,

$$|\psi(t) - \psi(nh)| \leq k|t - nh| \leq k\omega nh \leq 2kh \leq 2\varphi < \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} < \psi'_n \leq \psi''_n < \psi(nh) + \frac{\pi}{2}.$$

3.3.2. Si l'on n'a pas les inégalités (7), quel que soit  $\gamma$  satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leq \gamma \leq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi,$$

la fonction  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  prend des valeurs de signe contraire dans l'intervalle  $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ .

Si  $\psi''_n - \psi'_n > \pi$ , c'est évident puisque  $\psi(t) - \gamma$  parcourt un intervalle de longueur supérieure à  $\pi$ .

Si  $\psi'_n < \psi(nh) - \pi + 2\varphi$ ,  $\psi(t) - \gamma$  a un minimum inférieur à  $-\frac{\pi}{2}$  et prend une valeur au moins égale à  $-\frac{\pi}{2} + 2\varphi$  pour  $t = nh$ ; donc, pour  $\varepsilon$  positif assez petit,  $\psi(t) - \gamma$  prend les valeurs  $-\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  et  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ .

Si  $\psi''_n > \psi(nh) + \pi - 2\varphi$ , le maximum est supérieur à  $\frac{\pi}{2}$  et la valeur pour

$t = nh$  est au plus égale à  $\frac{\pi}{2} - 2\varphi$ ; donc, pour  $\varepsilon$  positif assez petit,  $\psi(t) - \gamma$  prend les valeurs  $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$  et  $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$ .

La fonction  $\psi(t)$  étant linéaire par morceaux sur l'intervalle  $[(1 - \omega)nh, (1 + \omega)nh]$ , celui-ci peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels sur chacun desquels  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  est croissante, ou décroissante, ou constante. Il en résulte que l'ensemble des points de l'intervalle ouvert  $] (1 - \omega)nh, (1 + \omega)nh[$  où  $\cos[\psi(t) - \gamma] \neq 0$  se compose d'un nombre fini d'intervalles ouverts sur chacun desquels  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  a un signe constant.

Deux intervalles ouverts consécutifs sur lesquels  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  a des signes contraires sont séparés, soit par un point  $t_0$  tel que  $\cos[\psi(t_0) - \gamma] = 0$ , soit par un intervalle fermé  $[t'_0, t''_0]$  sur lequel  $\cos[\psi(t) - \gamma] = 0$ .

Dans le premier cas, nous dirons qu'il y a changement de signe pour  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  au point  $t_0$ , dans le second qu'il y a changement de signe au point  $\frac{t'_0 + t''_0}{2}$ .

Le nombre total des points de changement de signe dans l'intervalle  $[(1 - \omega)nh, (1 + \omega)nh]$  est borné supérieurement par un nombre indépendant de  $\gamma$ . En effet, si  $[t', t'']$  est un intervalle fermé contenu dans  $[(1 - \omega)nh, (1 + \omega)nh]$  et dans lequel  $\psi(t)$  est linéaire, le nombre des points de changement de signe de  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  appartenant à  $[t', t'']$  ne peut dépasser  $\frac{|\psi(t'') - \psi(t')|}{\pi} + 1$ .

D'autre part, il n'y a aucun point de changement de signe de  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  dans l'intervalle ouvert  $] (n - 2)h, (n + 2)h[$ .

En effet, sur cet intervalle,

$$|\psi(t) - \psi(nh)| \leq k |t - nh| < 2kh \leq 2\varphi,$$

d'où

$$\psi(nh) - 2\varphi < \psi(t) < \psi(nh) + 2\varphi,$$

et, par suite,  $-\frac{\pi}{2} < \psi(t) - \gamma < +\frac{\pi}{2}$ , de sorte que

$$\cos[\psi(t) - \gamma] > 0.$$

3.3.3. Ceci étant, dans le cas où l'on n'a pas les inégalités (7), nous définissons une fonction  $G_n(\gamma)$  sur l'intervalle  $[\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi, \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi]$  de la façon suivante :

$t_1, t_2, \dots, t_p$  étant les points de changement de signe de  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  dans l'intervalle  $[(1 - \omega)nh, (1 + \omega)nh]$ , on prend

$$G_n(\gamma) = \sum_{j=1}^p L_n(t_j),$$

avec

$$L_n(t) = \begin{cases} \log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega nh} (nh - t) \right] & \text{pour } (1 - \omega)nh \leq t \leq (n - 2)h, \\ \log \left\{ \sin \frac{\pi}{4\omega nh} [t - (n + 1)h] \right\} & \text{pour } (n + 2)h \leq t \leq (1 + \omega)nh. \end{cases}$$

3.3.4.  $G_n(\gamma)$  est bornée sur l'intervalle  $\left[ \psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi, \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi \right]$  puisque  $p$  est borné supérieurement et

$$\log \left[ \sin \frac{\pi}{4\omega n} \right] \leq L_n(t) \leq 0.$$

On va voir qu'elle est continue, sauf peut-être en un nombre fini de points, donc intégrable au sens de Riemann, et que l'on a

$$(8) \quad \int_{\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi}^{\psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi} G_n(\gamma) d\gamma \cong \Phi(nh),$$

où  $\Phi$  est la fonction définie au paragraphe 3.2.

En effet, d'après nos hypothèses, l'intervalle  $[(1 - \omega)nh, (1 + \omega)nh]$  peut être décomposé en intervalles partiels  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{q-1}, a_q]$  sur chacun desquels la fonction  $\psi(t)$  est linéaire.

Nous supposons que, sur  $[a_{r-1}, a_r]$ ,

$$\psi(t) = b_r t + c_r.$$

Pour chaque entier  $r$  satisfaisant à  $0 \leq r \leq q$ , il existe exactement un nombre réel  $\theta'_r$  satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} \leq \theta'_r < \psi(nh) + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos[\psi(a_r) - \theta'_r] = 0.$$

Ceux des points  $\theta'_r$  qui sont intérieurs à l'intervalle

$$\left[ \psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi, \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi \right]$$

partagent celui-ci en un nombre fini d'intervalles partiels, que nous désignerons par  $[\theta_0, \theta_1], [\theta_1, \theta_2], \dots$

Lorsque  $\gamma$  varie dans un intervalle ouvert  $]\theta_{m-1}, \theta_m[$ , le nombre  $p$  des points de changement de signe de  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  sur l'intervalle  $[(1 - \omega)nh, (1 + \omega)nh]$  reste constant et, si  $t_1, t_2, \dots, t_p$  sont ces points rangés par ordre croissant, pour chaque  $j$ ,  $t_j$  reste à l'intérieur de l'un des intervalles  $[a_{r-1}, a_r]$  pour lesquels  $b_r \neq 0$ , soit  $[a_{r_j-1}, a_{r_j}]$ .

On a pour chaque  $j$  une relation de la forme

$$t_j = \frac{1}{b_{r_j}} \gamma + d_j,$$

ce qui montre que  $G_n(\gamma)$  est continue sur l'intervalle ouvert  $] \theta_{m-1}, \theta_m [$ , et, quand  $\gamma$  parcourt cet intervalle, chaque  $t_j$  parcourt un intervalle ouvert  $] \alpha_{m,j}, \beta_{m,j} [$  contenu dans l'intervalle ouvert  $] a_{r_{j-1}}, a_{r_j} [$ .

On a

$$\beta_{m,j} \leq (n-2)h \quad \text{ou} \quad \alpha_{m,j} \geq (n+2)h,$$

puisque  $t_j$  ne peut jamais appartenir à l'intervalle  $] (n-2)h, (n+2)h [$ .

Les différents intervalles  $[\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}]$  sont donc tous contenus dans la réunion des intervalles fermés  $[(1-\omega)nh, (n-2)h]$  et  $[(n+2)h, (1+\omega)nh]$ .

On voit que l'on a

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} G_n(\gamma) d\gamma = \sum_{j=1}^p \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} L_n(t_j) d\gamma.$$

Mais, en faisant le changement de variable  $\frac{1}{b_{r_j}} \gamma + d_j = u$ , on obtient

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} L_n(t_j) d\gamma = \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u) |b_{r_j}| du = \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u) |d\psi(u)|.$$

On a donc

$$\int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} G_n(\gamma) d\gamma = \sum_{j=1}^p \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u) |d\psi(u)|,$$

et, par suite,

$$\int_{\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi}^{\psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi} G_n(\gamma) d\gamma = \sum_{m,j} \int_{\alpha_{m,j}}^{\beta_{m,j}} L_n(u) |d\psi(u)|.$$

On voit par ailleurs que les intervalles  $[\alpha_{m,j}, \beta_{m,j}]$  sont non empiétants. Deux de ces intervalles correspondant à un même  $m$  sont évidemment non empiétants s'ils ne sont pas contenus dans le même intervalle  $[a_{r-1}, a_r]$ . Ils le sont encore s'ils sont contenus dans le même intervalle  $[a_{r-1}, a_r]$ , car alors  $\psi(t)$  parcourt des intervalles non empiétants lorsque  $t$  les parcourt. Enfin, deux intervalles correspondant à deux valeurs différentes  $m'$  et  $m''$  de  $m$  sont aussi non empiétants. En effet, s'ils avaient un point intérieur commun, soit  $\tau$ , celui-ci serait point de changement de signe de  $\cos[\psi(t) - \gamma]$  pour deux valeurs  $\gamma'$  et  $\gamma''$  de  $\gamma$  appartenant l'une à l'intervalle ouvert  $] \theta_{m'-1}, \theta_{m'} [$ , l'autre à l'intervalle ouvert  $] \theta_{m''-1}, \theta_{m''} [$ , et l'on aurait

$$\cos[\psi(\tau) - \gamma'] = \cos[\psi(\tau) - \gamma''] = 0,$$

ce qui exigerait que  $\gamma'' - \gamma'$  soit multiple de  $\pi$ . Or ceci n'est pas possible avec  $\gamma' \neq \gamma''$ , puisque  $\gamma'$  et  $\gamma''$  doivent appartenir à l'intervalle  $[\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi, \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi]$  dont la longueur est  $\pi - 4\varphi$ .

La fonction  $L_n(t)$  étant négative sur les intervalles

$$[(1-\omega)nh, (n-2)h] \quad \text{et} \quad [(n+2)h, (1+\omega)nh],$$

on voit finalement que

$$\int_{\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi}^{\psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi} G_n(\gamma) d\gamma \geq \int_{(1-\omega)nh}^{(n-2)h} L_n(u) |d\psi(u)| + \int_{(n+2)h}^{(1+\omega)nh} L_n(u) |d\psi(u)|.$$

Mais le second membre est précisément  $\Phi(nh)$ .

3.3.5. L'inégalité (8) montre qu'on peut trouver un nombre réel  $\gamma_n$  satisfaisant à

$$\psi(nh) - \frac{\pi}{2} + 2\varphi \leq \gamma_n \leq \psi(nh) + \frac{\pi}{2} - 2\varphi$$

et tel que

$$G_n(\gamma_n) \geq \frac{\Phi(nh)}{\pi - 4\varphi}.$$

Notons que ceci entraîne que, pour  $\gamma = \gamma_n$ , le nombre des  $t_j$  soit au plus égal à

$$\frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi) \log \sqrt{2}},$$

car, comme on le voit immédiatement, on a pour chaque  $j$ ,

$$L_n(t_j) \leq \log \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\log \sqrt{2}.$$

3.4. Dans ce qui suit, on supposera qu'on a déterminé une suite  $\{\gamma_n\}$  en choisissant  $\gamma_n$  comme il est dit au paragraphe 3.3.4 dans le cas où l'on a les inégalités (7), et comme il est dit au paragraphe 3.3.5 dans le cas où l'on n'a pas ces inégalités.

Dans ce dernier cas, on désignera par  $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_{p_n}^{(n)}$  les points de changement de signe de  $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$  dans l'intervalle  $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ , et par  $q_n$  le nombre des  $t_j^{(n)}$  qui sont supérieurs à  $nh$ .

D'après ce qu'on vient de voir, on a

$$p_n \leq \frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi) \log \sqrt{2}}.$$

3.5. Nous allons maintenant montrer, en utilisant le résultat rappelé au paragraphe 2.3, que, quel que soit  $l$  positif, on arriverait à une contradiction si l'on supposait que  $f(s)$  soit holomorphe sur le segment fermé  $[-il, +il]$ .

Fixons donc un  $l$  positif.

3.5.1. Observons d'abord que, d'après (3), il existe un  $n_0 > \frac{2}{\omega}$  tel que,

pour  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{\Phi(nh)}{nh} > - \frac{4\omega(\pi - 4\varphi) \log \sqrt{2}}{\pi} l,$$

d'où

$$(9) \quad \frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi) \log \sqrt{2}} < \frac{4\omega nh}{\pi} l.$$

Ceci étant, définissons la suite des fonctions  $h_n(y)$  sur l'intervalle fermé  $[-l, +l]$  de la façon suivante :

Pour  $n < n_0$ , nous prenons  $h_n(y)$  absolument arbitraire.

Pour  $n \geq n_0$ , si l'on a les inégalités (7), nous prenons

$$h_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -l \leq y < 0, \\ 1 & \text{pour } 0 \leq y \leq l, \end{cases}$$

de sorte que

$$H_n(t) = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| = 1.$$

Si l'on n'a pas les inégalités (7), nous remarquons que, d'après la formule d'Euler,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

on a

$$(-1)^{q_n} \prod_{j=1}^{p_n} \sin \frac{\pi}{4\omega nh} [t - t_j^{(n)}] = \sum_{r=0}^{p_n} A_r^{(n)} \exp \left\{ i \frac{p_n - 2r}{4\omega nh} \pi t \right\},$$

où les  $A_r^{(n)}$  sont des constantes, et, puisque

$$p_n \leq \frac{-\Phi(nh)}{(\pi - 4\varphi) \log \sqrt{2}},$$

on a d'après (9)

$$\frac{p_n \pi}{4\omega nh} < l.$$

Nous prenons alors

$$h_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } -l \leq y < -\frac{p_n \pi}{4\omega nh}, \\ \sum_{j=0}^r A_j^{(n)} & \text{pour } \frac{(2r - p_n)\pi}{4\omega nh} \leq y < \frac{(2r + 2 - p_n)\pi}{4\omega nh} \quad (r = 0, 1, \dots, p_n - 1), \\ \sum_{j=0}^{p_n} A_j^{(n)} & \text{pour } \frac{p_n \pi}{4\omega nh} \leq y \leq l, \end{cases}$$

de sorte que

$$H_n(t) = (-1)^{q_n} \prod_{j=1}^{p_n} \sin \frac{\pi}{4\omega nh} [t - t_j^{(n)}].$$

Comme on a  $|A_r^{(n)}| \leq \frac{1}{2^{p_n}} \binom{p_n}{r}$ , on voit que

$$\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| = \sum_0^{p_n} |A_r^{(n)}| \leq 1.$$

3.5.2. Comme, pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| \leq 1,$$

on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left[ \int_{-l}^{+l} |dh_n(y)| \right]^{\frac{1}{n}} \leq 1.$$

Par suite, en prenant  $x = \frac{1}{h}$ ,  $\lambda = 1 - \omega$  et  $\mu = 1 + \omega$ , le théorème rappelé au paragraphe 2.3 permet d'affirmer que, si  $f(s)$  était holomorphe sur le segment fermé  $[-il, +il]$ , en posant

$$\Omega_n = \frac{1}{n!} \left| \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h} t^n} H_n(t) d\alpha(t) \right|,$$

on aurait

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \Omega_n^{\frac{1}{n}} < h.$$

3.5.3 On a évidemment

$$\begin{aligned} \Omega_n &\geq \frac{1}{n!} \mathcal{R} \left\{ e^{-i\gamma_n} \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h} t^n} H_n(t) d\alpha(t) \right\}, \\ &\geq \frac{1}{n!} \int_{(1-\omega)nh}^{(1+\omega)nh} e^{-\frac{t}{h} t^n} H_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n] d\nu(t). \end{aligned}$$

Mais, pour  $n \geq n_0$ , on a

$$H_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0$$

sur tout l'intervalle  $[(1-\omega)nh, (1+\omega)nh]$ .

Dans le cas où l'on a les inégalités (7), cela résulte de ce que  $\cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq 0$  et  $H_n(t) = 1$ . Dans le cas contraire, cela tient à ce que  $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$  et  $H_n(t)$  sont positifs pour  $t = nh$  et  $H_n(t)$  change de signe en tous les points de changement de signe de  $\cos[\psi(t) - \gamma_n]$ .

Donc, pour  $n \geq \text{Max} \left[ n_0, \frac{1}{\omega} \right]$ ,

$$\Omega_n \geq \frac{1}{n!} \int_{nh}^{(n+1)h} e^{-\frac{t}{h} t^n} H_n(t) \cos[\psi(t) - \gamma_n] d\nu(t).$$

3.5.4. Par ailleurs, pour  $nh \leq t \leq (n+1)h$ ,

$$e^{-\frac{t}{h} t^n} \geq (n+1)^n e^{-n-1} h^n,$$

puisque la fonction  $e^{-\frac{t}{h} t^n}$  est décroissante pour  $t \geq nh$ .



D'autre part,  $\cos[\psi(t) - \gamma_n] \geq \sin \varphi$ , puisque

$$|\psi(t) - \gamma_n| \leq |\psi(t) - \psi(nh)| + |\psi(nh) - \gamma_n| \leq kh + \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) \leq \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Enfin

$$H_n(t) \geq \exp \left[ \frac{\Phi(nh)}{\pi - 4\varphi} \right].$$

En effet, dans le cas où l'on a les inégalités (7),  $H_n(t) = 1$ , alors que  $\Phi(nh) \leq 0$ . Dans le cas où l'on n'a pas les inégalités (7),

$$H_n(t) > 0 \quad \text{et} \quad \log H_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \log \left| \sin \frac{\pi}{4\omega nh} [t - t_j^{(n)}] \right|;$$

mais, pour les  $t_j^{(n)}$  au plus égaux à  $(n-2)h$ ,

$$\log \left| \sin \frac{\pi}{4\omega nh} [t - t_j^{(n)}] \right| \geq \log \left\{ \sin \frac{\pi}{4\omega nh} [nh - t_j^{(n)}] \right\},$$

et, pour les  $t_j^{(n)}$  au moins égaux à  $(n+2)h$ ,

$$\log \left| \sin \frac{\pi}{4\omega nh} [t - t_j^{(n)}] \right| \geq \log \sin \left\{ \frac{\pi}{4\omega nh} [t_j^{(n)} - (n+1)h] \right\};$$

par suite

$$\log H_n(t) \geq G_n(\gamma_n) \geq \frac{\Phi(nh)}{\pi - 4\varphi}.$$

3.5.5. Finalement, on voit que, pour  $n \geq \text{Max} \left[ n_0, \frac{1}{\omega} \right]$ ,

$$\Omega_n \geq \frac{(n+1)^n e^{-n-1} h^n}{n!} (\sin \varphi) \exp \left[ \frac{\Phi(nh)}{\pi - 4\varphi} \right] \{ \nu[(n+1)h] - \nu(nh) \},$$

d'où

$$\{ \nu[(n+1)h] - \nu(nh) \}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{h} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}} e}{n+1} \left( \frac{e}{\sin \varphi} \right)^{\frac{1}{n}} \exp \left[ \frac{-\Phi(nh)}{nh} \frac{h}{\pi - 4\varphi} \right] \Omega_n^{\frac{1}{n}}.$$

Comme, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}} e}{n+1} \left( \frac{e}{\sin \varphi} \right)^{\frac{1}{n}} \exp \left[ \frac{-\Phi(nh)}{nh} \frac{h}{\pi - 4\varphi} \right] \quad \text{tend vers } 1,$$

il en résulte que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \{ \nu[(n+1)h] - \nu(nh) \}^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{h} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \Omega_n^{\frac{1}{n}}.$$

3.5.6. L'hypothèse que  $f(s)$  soit holomorphe sur le segment fermé  $[-i\ell, +i\ell]$  entraînerait donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \{ \nu[(n+1)h] - \nu(nh) \}^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Mais ceci ne peut avoir lieu.

