Nicolas Artémiadis

Sur les transformées de Fourier et leurs applications aux séries et sur les fonctions typiquement réelles d'ordre *p*

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 74, no 4 (1957), p. 269-318

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_4_269_0>

SUR LES TRANSFORMÉES DE FOURIER

ET LEURS

APPLICATIONS AUX SÉRIES

ET SUR

LES FONCTIONS TYPIQUEMENT RÉELLES D'ORDRE p

PAR M. NICOLAS ARTEMIADIS.

INTRODUCTION.

L'idée simple qui se trouve à la base de la première partie du présent travail est la suivante : si l'on considère une fonction $F(z) = \sum a_n z^n = \sum a_n r^n e^{i\alpha n}$ définie dans le cercle-unité, certaines hypothèses faites sur $F(z)$ entraînent certaines propriétés des coefficients $\{a_n\}$ de cette fonction. Si l'on suppose, par exemple, que $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ est une fonction univalente holomorphe dans le cercle-unité et que la partie du plan couverte par ses valeurs est étoilée par rapport à l'origine, alors l'inégalité $|a_n| \leq n$ a lieu pour tout n. En partant de cette remarque nous avons voulu, sur le conseil de M. S. Mandelbrojt, faire correspondre à la suite $\{a_n\}$ une fonction $f(x)$ appartenant à la classe L_1 de fonctions absolument intégrables sur toute la droite réelle et à $F(z)$ la transformée de Fourier de $f(x)$, dans l'intention de trouver une estimation de $f(x)$.

Ainsi, dans le premier chapitre nous démontrons un certain nombre de théorèmes du type suivant : nous considérons une fonction appartenant à la classe L_1 et nous obtenons des estimations de cette fonction selon les hypothèses, plus ou moins simples, faites sur sa transformée de Fourier.

Le second chapitre est consacré aux applications des résultats obtenus, aux fonctions données par leur développement en série de Taylor ou de Dirichlet. Nous retrouvons donc le problème qui nous a servi comme point de départ et nous l'étudions munis en plus des outils nouveaux, fournis par le chapitre I et des méthodes nouvelles utilisant la transformée de Fourier dans l'étude des séries. Nous obtenons ainsi plusieurs résultats nouveaux concernant les coefficients de Taylor des fonctions typiquement réelles [13]. Nous retrouvons et nous améliorons l'inégalité principale de M. S. Mandelbrojt, qui lui a servi pour démontrer son théorème sur la sommabilité de la série des coefficients de Taylor d'une fonction typiquement réelle [10]. Nous introduisons deux nouvelles classes de fonctions, les classes $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. Pour la classe $\mathcal{M}$, un théorème analogue à celui de Hardy-Littlewood $\left(\text{si } a_n \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x=1-0}{\sim} \frac{1}{1-x}, \text{ alors } \sum_{n=0}^{\nu} a_n \sim \nu\right)$ est donné. Pour toute fonction $\sum a_n z^n$ de la classe $\mathcal{N}$ l'inégalité $|a_n| \leq n$ a lieu. De nouveaux résultats intéressants, sont obtenus concernant les coefficients de Taylor d'une fonction univalente holomorphe et étoilée dans le cercle-unité et les coefficients d'une certaine classe de fonctions représentées par une série de Dirichlet.

Dans le chapitre III nous nous occupons de la classe $\mathcal{T}(p)$ (p entier positif) de fonctions typiquement réelles d'ordre p. Cette classe de fonctions a été étudiée par MM. A. W. Goodman et S. Robertson dans [8]. Nous généralisons le théorème de M. S. Mandelbrojt, mentionné plus haut, dans le cas où $p > 1$ en introduisant une nouvelle méthode de sommation ($\mathcal{M}$, sommabilité) inspirée par celle de M. S. Mandelbrojt et nous donnons des estimations concernant les coefficients des fonctions de la classe $\mathcal{T}(p)$ plus précises que celles de MM. A. W. Goodman et S. Robertson. D'autres résultats de caractère taubérien concernant les séries de coefficients des fonctions de la classe $\mathcal{T}(1)$ sont obtenus.

La plus grande partie des résultats de cette thèse ont fait l'objet des Notes [1], [2], [3], [4].

Je suis très heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde gratitude à M. S. Mandelbrojt pour les conseils qu'il m'a prodigués pendant la rédaction de ce travail.

Qu'il me soit permis enfin de remercier MM. G. Choquet et J. Dixmier qui avec M. S. Mandelbrojt m'ont fait l'honneur d'accepter de constituer le jury.

NOTATIONS.

I. Nous désignons par

$$\mathrm{T}f(x) = \mathrm{T}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ixx}\, dx$$

la transformée de Fourier d'une fonction $f(x)$ de la classe L_1 de fonctions absolument intégrables sur toute la droite réelle.

II. La classe des fonctions qui sont des transformées de Fourier de fonctions de la classe L_1 est désignée par A.

III. Si $g(x)$ est une fonction réelle de la variable réelle x, nous désignons par $g(x)^-$ la fonction définie comme suit :

$$g(x)^- = \begin{cases} g(x) & \text{lorsque } g(x) < 0, \\ 0 & \text{lorsque } g(x) \geqq 0. \end{cases}$$

IV. Par

$$f \star g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

nous désignons le produit de composition de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de la classe L_1.

V. Étant donné une fonction $f \in L_1$, nous désignons par E_f l'ensemble des valeurs de la variable α, telles que $R_e T(f) < 0$. $\overline{E}_f$ sera la fermeture de E_f.

VI. Si a_k, h_k, ε_k sont des nombres positifs finis, nous désignons par $\omega_{a_k, h_k, \varepsilon_k}(\alpha) = \omega_k(\alpha)$, la fonction de la classe A définie comme suit :

$$\omega_k(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |\alpha| \geqq a_k + 2\varepsilon_k, \\ h_k \dfrac{\alpha + a_k + 2\varepsilon_k}{2\varepsilon_k} & \text{» } -a_k - 2\varepsilon_k \leqq \alpha \leqq -a_k, \\ h_k & \text{» } |\alpha| \leqq a_k, \\ h_k \dfrac{a_k + 2\varepsilon_k - \alpha}{2\varepsilon_k} & \text{» } a_k \leqq \alpha \leqq a_k + 2\varepsilon_k. \end{cases}$$

VII. Posons

$$TP_k(x) = \omega_k(\alpha).$$

On trouve

VIII.

$$P_k(x) = \frac{h_k}{2\pi\varepsilon_k} \frac{\cos a_k x - \cos(a_k + 2\varepsilon_k) x}{x^2}.$$

Si λ est un nombre réel, on pose

IX.

$$\omega_k(\alpha + \lambda) = T[P_k(x) e^{i\lambda x}] = \omega_k^{(\lambda)}.$$

X. p. p. est l'abréviation des mots : presque partout.

CHAPITRE I.

ESTIMATION D'UNE FONCTION APPARTENANT A LA CLASSE L_1.

1.1. DÉFINITION DE LA CLASSE L_1^*. — Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ appartient à la classe L_1^* si :

a. $$f(x) \in L_1;$$

b. $$[R_e\,T(f)]^- \in L_1.$$

Remarquons que si $f(x) \in L_1^*$, il existe toujours une suite d'intervalles fermés $\{I_k\}$, telle que $\overline{E}_f \subset \bigcup_k I_k$ et telle que si l'on pose

1.1.2. $$h_k = \max |R_e\,T(f)| \qquad (\alpha \in I_k \cap \overline{E}_f)$$

on ait, si l'on désigne par I_k la longueur de l'intervalle I_k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} I_k h_k < +\infty.$$

1.2. DÉFINITION D'UNE FONCTION RÉGULARISANTE D'UNE FONCTION DE LA CLASSE L_1. — Étant donné une fonction $f(x) \in L_1$ nous dirons que la fonction $P(x)$ est une régularisante de $f(x)$ si,

a. $$P(x) \in L_1;$$

b. $$R_e\,T(f+P) \geqq 0.$$

Remarque. — Il est clair que la classe L_1^* n'est pas vide. Par exemple, toute fonction de la classe L_1 dont la transformée de Fourier est à support borné, appartient à L_1^*. Une telle fonction aura comme régularisante une fonction de la forme (VIII). Remarquons aussi que si $f(x) \in L_1^*$ et $[R_e\,T(f)]^- \in A$, alors la fonction

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [R_e\,T(f)]^- e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

est une régularisante de $f(x)$.

1.3. EXISTENCE DES RÉGULARISANTES DES FONCTIONS DE LA CLASSE L_1^*.

LEMME. — *Hypothèses : $f(x) \in L_1^*$; soit $\{\varepsilon_k\}$ une suite de nombres positifs telle que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k \varepsilon_k < +\infty$, où h_k est la quantité (1.1.2); désignons respectivement par $-\lambda_k$ et a_k l'abscisse du milieu et la moitié de la longueur de l'intervalle I_k; si $P_k(x)$ et $\omega_k^{(\lambda_k)}$ sont respectivement les fonctions (VIII) et (IX) pour $\lambda = \lambda_k$, posons formellement*

1.3.1.

$$\mathrm{P}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{P}_k\, e^{i\lambda_k x}$$

et

$$\omega(\alpha)=\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^{(\lambda_k)}(\alpha).$$

Conclusions :

a. $\mathrm{P}(x)$ *est une fonction régularisante de* $f(x)$*;*
b. $\mathrm{P}(x)$ *est continue;*
c. $\mathrm{T}(\mathrm{P})=\omega(\alpha)$.

Démonstration. — D'après (VII), on trouve

$$\mathrm{P}_k(x)\, e^{i\lambda_k x}=\frac{h_k(a_k+\varepsilon_k)}{\pi}\,\frac{\sin(a_k+\varepsilon_k)x}{(a_k+\varepsilon_k)x}\,\frac{\sin\varepsilon_k x}{\varepsilon_k x}\, e^{i\lambda_k x},$$

d'où

$$|\mathrm{P}_k(x)\, e^{i\lambda_k x}|\leqq\frac{h_k(a_k+\varepsilon_k)}{\pi}.$$

Par conséquent

1.3.2.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\mathrm{P}_k(x)\, e^{i\lambda_k x}|<+\infty.$$

La série (1.3.1) étant uniformément convergente, la fonction $\mathrm{P}(x)$ est continue.

Considérons la fonction

$$g_k(x)=\begin{cases}\dfrac{h_k(a_k+\varepsilon_k)}{\pi} & \text{pour } |x|\leqq 1,\\[2mm] \dfrac{h_k(a_k+\varepsilon_k)}{\pi}\,\dfrac{1}{x^2} & \text{pour } |x|\geqq 1.\end{cases}$$

On a

$$|\mathrm{P}_k(x)\, e^{i\lambda_k x}|\leqq g_k(x)$$

et

$$\|g_k\|_{\mathrm{L}_1}=\frac{4}{\pi}\,h_k(a_k+\varepsilon_k).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\mathrm{P}_k(x)\, e^{i\lambda_k x}\|_{\mathrm{L}_1}<+\infty.$$

Par conséquent

$$\mathrm{P}(x)\in\mathrm{L}_1.$$

Posons

$$G(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} P_k(x)\, e^{i\lambda_k x},$$

$$\Omega_n(\alpha)=\sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(\lambda_k)}(\alpha).$$

On a

$$\Omega_n(\alpha)=T(S_n).$$

Mais puisque

$$|S_n(x)|\leqq G(x) \qquad \text{et} \qquad G(x)\in L_1,$$

le théorème de Lebesgue concernant le passage à la limite donne

$$\omega(\alpha)=\lim_{n=\infty}\Omega_n(\alpha)=\lim_{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x)\, e^{i\alpha x}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\, e^{i\alpha x}\,dx.$$

On en conclut que $\omega(\alpha)\in A$ et que $T(P)=\omega(\alpha)$.

On constate enfin que d'après la façon dont on a construit la fonction $P(x)$, on a

$$R_e T(f+P)\geqq 0.$$

On en conclut que la fonction $P(x)$ est une régularisante de la fonction $f(x)$ et le lemme se trouve démontré.

1.3.3. *Remarque.* — Le lemme 1.3 affirme que toute fonction de la classe L_1^* possède une régularisante. Elle en possède même une infinité selon le choix de la suite $\{\varepsilon_k\}$,

Dans le paragraphe suivant, nous démontrons un certain nombre de propositions qui peuvent être considérées comme cas particuliers du théorème principal de ce chapitre, théorème que nous démontrerons dans le paragraphe 1.5.

1.4. Théorème :

1.4.1. *Hypothèses :* $f(x)\in L_1$; $R_e T(f)\geqq 0$; *il existe un nombre c dont la partie réelle est positive et tel que* $\int_0^1 |f(t)+f(-t)-c|\,\frac{dt}{t}<\infty$. *Posons* $2f(0)=c$.

Conclusions :

$$|f(x)|+|f(-x)|\cos\{\arg f(x)+\arg f(-x)\}\leqq 2R_e f(0) \quad \text{p. p.},$$

$$(|f(x)|+|f(-x)|)(1+\cos\{\arg f(x)+\arg f(-x)\})\leqq 4R_e f(0) \quad \text{p. p.}$$

Démonstration. — Considérons un nombre réel τ et posons $f_1(x) = f(x)\,e^{i\tau x}$. La fonction $f_1(x)$ a les propriétés suivantes :

1.4.2.

1° $$f_1(x) \in L_1;$$

2° $$R_e\,T(f_1) \geqq 0;$$

3° $$R_e\,f_1(0) > 0;$$

4° $$\int_0^1 |f_1(t) + f_1(-t) - 2f_1(0)| \frac{dt}{t} < +\infty.$$

En effet les propriétés 1°, 2°, 3° étant évidentes, démontrons la propriété 4°. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_1(t) + f_1(-t) - 2f_1(0)| \frac{dt}{t} \\ \leqq \int_0^1 |f(t) + f(-t) - 2f(0)| \frac{dt}{t} \\ + \int_0^1 \frac{2|f(0)|(1-\cos t\tau)}{t}\,dt + \int_0^1 \left|\frac{\sin t\tau}{t}\right| |f(t) - f(-t)|\,dt < \infty.\end{aligned}$$

Donnons-nous maintenant deux nombres positifs R et ε et posons

$$T(f) = \varphi(\alpha), \qquad T(f_1) = \varphi_1(\alpha),$$

$$I_R^f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \varphi(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^R [\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$I_R^{f_1}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \varphi_1(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^R [\varphi_1(\alpha) + \varphi_1(-\alpha)]\,d\alpha.$$

D'après la troisième hypothèse sur $f(x)$ et la propriété 4°, on a

$$\lim_{R=\infty} I_R^f(0) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$\lim_{R=\infty} I_R^{f_1}(0) = f_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\varphi_1(\alpha) + \varphi_1(-\alpha)]\,d\alpha.$$

Posons ensuite

$$I_\varepsilon^f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\,e^{-\varepsilon\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)]\,e^{-\varepsilon\alpha^2}\,d\alpha,$$

$$I_\varepsilon^{f_1}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\alpha)\,e^{-\varepsilon\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\varphi_1(\alpha) + \varphi_1(-\alpha)]\,e^{-\varepsilon\alpha^2}\,d\alpha.$$

Puisque les intégrales $\int_0^\infty [\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)]\,d\alpha$, $\int_8^\infty [\varphi_1(\alpha) + \varphi_1(-\alpha)]\,d\alpha$, existent, on a d'après un théorème d'Abel :

1.4.3.

$$\lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^f(0) = f(0),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^{f_1}(0) = f_1(0).$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$I_\varepsilon^{f_1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2}(2 - e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x})\, d\alpha$$

et passons à la limite pour $\varepsilon = 0$. On trouve si l'on tient compte des (1.4.3)

$$\lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^{f_1}(x) = 2 f_1(0) - f_1(x) - f_1(-x) \quad \text{p. p.},$$

d'autre part, on a

$$I_\varepsilon^{f_1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2} \sin^2\frac{\alpha x}{2}\, d\alpha,$$

d'où

$$R_e\left[\lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^{f_1}(x)\right] \geqq 0$$

ou en remplaçant $f_1(x)$ par $f(x)\, e^{i\tau x}$,

$$R_e[f(x)\, e^{i\tau x} + f(-x)\, e^{-i\tau x}] \leqq 2 R_e f(0) \quad \text{p. p.}$$

Si l'on choisit τ tel que

$$x\tau + \arg f(x) = 0,$$

on a

1.4.4.

$$|f(x)| + |f(-x)| \cos\{\arg f(x) + \arg f(-x)\} \leqq 2 R_e f(0) \quad \text{p. p.}$$

En changeant x en $-x$ dans (1.4.4), on trouve

1.4.5.

$$|f(-x)| + |f(x)| \cos\{\arg f(-x) + \arg f(x)\} \leqq 2 R_e f(0) \quad \text{p. p.}$$

En additionnant (1.4.4) et (1.4.5), on a finalement

$$[\,|f(x)| + |f(-x)|\,][1 + \cos\{\arg f(x) + \arg f(-x)\}] \leqq 4 R_e f(0) \quad \text{p. p.}$$

Le théorème est démontré.

Les corollaires qui suivent sont des conséquences immédiates du théorème 1.4 :

1.4.6. *Si $f(x)$ satisfait aux (1.4.1) et $f(x) = 0$ pour $x < 0$, alors*

$$|f(x)| \leqq 2 R_e f(0) \quad \text{p. p.}$$

1.4.7. *Si $f(x)$ satisfait aux (1.4.1) et si*

$$\underset{x}{\underline{\text{borne}}}\,(1 + \cos\{\arg f(x) + \arg f(-x)\}) = 4l > 0,$$

alors

$$|f(x)| + |f(-x)| \leqq \frac{1}{l} R_e f(0) \quad \text{p. p.}$$

1.4.8. *Si $f(x)$ satisfait aux* (1.4.1) *et si*

$$-\frac{\pi}{2}+\delta \leqq \arg f(x) \leqq \frac{\pi}{2}-\delta,$$

où $0<\delta<\frac{\pi}{2}$, *alors*

$$|f(x)|+|f(-x)| \leqq \frac{4 R_e f(0)}{1-\cos 2\delta} \quad \text{p. p.}$$

Démontrons maintenant une proposition qui peut être considérée comme cas particulier du théorème 1.4 et dont la démonstration est presque la même que celle du 1.4. Nous préférons néanmoins énoncer cette proposition sous forme de théorème car nous en ferons constamment usage dans le chapitre suivant.

1.4.9. Théorème. — *Hypothèses :* $f(x) \in L_1$; $f(x)$ *continue;* $R_e T(f) \geqq 0$; $R f(0)>0$; $T(f) \in L_1$.

Conclusions :

a. $$|f(x)|+|f(-x)|\{\cos(\arg f(x)+\arg f(-x))\} \leqq 2 R_e f(0) \quad \text{partout;}$$

b. $$[|f(x)|+|f(-x)|][1+\cos\{\arg f(x)+\arg f(-x)\}] \leqq 4 R_e f(0) \quad \text{partout.}$$

Démonstration. — Considérons un nombre réel τ et posons

$$f_1(x)=f(x) e^{i\tau x}, \qquad T(f)=\varphi(\alpha), \qquad T(f_1)=\varphi_1(\alpha).$$

Considérons ensuite l'intégrale

$$I(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\alpha)(2-e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x})\, d\alpha.$$

On trouve

$$I(x)=2 f_1(0)-f_1(x)-f_1(-x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\alpha) \sin^2 \frac{\alpha x}{2}\, d\alpha,$$

d'où

$$R_e(f(x) e^{i\tau x}+f(-x) e^{-i\tau x}) \leqq 2 R_e f(0) \quad \text{partout.}$$

En choisissant le nombre τ convenablement et en opérant comme dans la démonstration du théorème 1.4 on arrive à la conclusion désirée.

Le théorème suivant est du même type que ceux que nous venons de démontrer et fournit une estimation de la fonction considérée en un point particulier. La démonstration étant semblable à celles des théorèmes précédents nous n'en donnons que ses points essentiels.

1.4.10. Théorème. — *Hypothèses :* $f(x) \in L_1$; $f(x)=0$ *pour* $x<0$; *il existe un nombre c dont la partie réelle est positive et tel que*

$$\int_0^1 |f(t)-c| \frac{dt}{t}<\infty;$$

$R_e T(f) \geqq 0$. On pose

$$g_x^f(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \qquad \text{et} \qquad 2f(0) = c.$$

Conclusion : Pour chaque valeur de x pour laquelle

$$|f(x)| < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 |g_x^f(t)| \frac{dt}{t} < \infty,$$

on a

$$|f(x)| \leqq 2 R_e f(0).$$

Démonstration. — Considérons un nombre réel τ et posons $f_1(x) = f(x) e^{i\tau x}$. La fonction $f_1(x)$ a les propriétés suivantes :

1° $$f_1(x) \in L_1;$$

2° $$R_e T(f_1) \geqq 0;$$

3° $$f_1(x) = 0 \qquad \text{pour} \quad x < 0;$$

4° $$2f_1(0) = c;$$

5° Si pour une valeur de x, soit x_0, on a

$$|f(x_0) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 |g_{x_0}^f(t)| \frac{dt}{t} < \infty,$$

alors

$$\int_0^1 |g_{x_0}^{f_1}(t)| \frac{dt}{t} < \infty;$$

6° $$\int_0^1 |f_1(t) - 2f_1(0)| \frac{dt}{t} < \infty.$$

Les quatre premières propriétés sont évidentes. La propriété 6° résulte de 5° si l'on y pose $x_0 = 0$. Démontrons donc la propriété 5°. Supposons que pour $x = x_0$ les hypothèses qui figurent dans 5° aient lieu. On trouve

$$\int_0^1 |g_{x_0}^{f_1}(t)| \frac{dt}{t} \leqq \int_0^1 |g_{x_0}^f(t)| \frac{dt}{t} + \int_0^1 \frac{2|f(x_0)|(1 - \cos t\tau)}{t} dt$$
$$+ \int_0^1 \left| \frac{\sin t\tau}{t} \right| |f(x_0 + t) - f(x_0 - t)| \, dt < \infty.$$

La propriété 5° est démontrée.

Posons ensuite $T(f_1) = \varphi_1(\alpha)$ et considérons, pour la même valeur de $x = x_0$ et pour un nombre R positif quelconque l'intégrale

$$I_R(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \varphi_1(\alpha) [2 - e^{i\alpha x_0} - e^{-i\alpha x_0}] \, d\alpha.$$

A partir de ce point la démonstration s'achève comme dans les théorèmes précédents, c'est-à-dire par passage à la limite pour $R = \infty$ et ensuite par un choix convenable de τ.

Démontrons maintenant le théorème principal de ce chapitre.

1.5. Théorème. — *Hypothèses : $f(x) \in L_1^*$; il existe un nombre c dont la partie réelle est positive et tel que*

$$\int_0^1 |f(t)+f(-t)-c| \frac{dt}{t} < \infty;$$

$P(x)$ *étant la régularisante* (1.3.1) *de* $f(x)$, *posons*

$$F(x) = f(x) + P(x), \qquad 2f(0) = c, \qquad K_f^\varepsilon = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} h_k(\alpha_k + \varepsilon_k).$$

Conclusions :

1.5.1.

$$|F(x)| + |F(-x)| \cos\{\arg F(x) + \arg F(-x)\} \leq 2(R_e f(0) + K_f^\varepsilon) \quad \text{p. p.},$$

1.5.2.

$$[|F(x)| + |F(-x)|][1 + \cos\{\arg F(x) + \arg F(-x)\}] \leq 4(R_e f(0) + K_f^\varepsilon) \quad \text{p. p.}$$

Démonstration. — On peut facilement vérifier que la fonction $F(x)$ satisfait aux hypothèses (1.4.1). En appliquant donc le théorème 1.4 à $F(x)$ on arrive à la conclusion désirée.

1.5.3. Corollaire. — *Si* $f(x) = 0$ *pour* $x < 0$ *et satisfait aux hypothèses du théorème* 1.5, *si l'on pose*

$$K_f = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} h_k \alpha_k,$$

alors

$$|f(x)| \leq 2 R_e f(0) + 4 K_f \quad \text{p. p.}$$

Démonstration. — De (1.5.1) pour $x > 0$ résulte

1.5.4.

$$|f(x)| \leq 2(R_e f(0) + K_f^\varepsilon) + |P(x)| + |P(-x)| \leq 2 R_e f(0) + 4 K_f + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} h_k \varepsilon_k.$$

L'inégalité (1.5.4) est vraie pour toute suite $\{\varepsilon_k\}$ telle que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k \varepsilon_k < \infty$. On peut donc en choisissant convenablement la suite $\{\varepsilon_k\}$, faire tendre cette somme vers zéro. Le corollaire est établi.

Remarque. — Les propositions que nous venons de démontrer, fournissent en général, des inégalités contenant $f(x)$ et $f(-x)$ en même temps. Mais on constate facilement que si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que $f(x) = 0$ pour $x < 0$ [comme dans les cas (1.4.6), (1.4.10) et (1.5.1)] ou que $f(x)$ est une fonction paire ou impaire, on peut obtenir une estimation de cette fonction.

Dans le théorème qui suit, nous donnons séparément une estimation de $f(x)$ pour $x \geqq 0$ et $x \leqq 0$, en faisant certaines hypothèses sur son comportement lorsque x tend vers $+$ et $-\infty$.

1.6. THÉORÈME. — *Hypothèses :*

1.6.1. *La fonction* $f(x) \in L_1$.

1.6.2. *Il existe un nombre c dont la partie réelle est positive et tel que*

$$\int_0^1 |f(t)+f(-t)-c| \frac{dt}{t} < \infty.$$

1.6.3. $R_e T(f) = R_e \varphi(\alpha) \geqq 0$.

1.6.4. *Il existe deux nombres positifs* μ_0 *et* λ_0 *tels que pour presque toutes les valeurs de x suffisamment grandes, on ait*

$$f(x) = O(e^{-\mu_0 x}) \quad \text{pour} \quad x = +\infty,$$
$$f(x) = O(e^{\lambda_0 x}) \quad \text{pour} \quad x = -\infty.$$

1.6.5. *Il existe deux nombres* μ *et* λ *tels que*

$$0 < \mu < \mu_0, \qquad 0 < \lambda < \lambda_0,$$
$$R_e \varphi(\alpha + i\lambda) \geqq 0, \qquad R_e \varphi(\alpha - i\mu) \geqq 0.$$

1.6.6. *Posons*

$$2f(0) = c.$$

Conclusions :

$$|f(x)| \leqq \frac{2 R_e f(0)}{1 - e^{-\lambda x}} \qquad \textit{pour presque tout } x \geqq 0,$$

$$|f(x)| \leqq \frac{2 R_e f(0)}{1 - e^{\mu x}} \qquad \textit{pour presque tout } x \leqq 0.$$

Démonstration. — Considérons un nombre réel τ, et posons

$$g(x) = f(x)\, e^{i\tau x}, \qquad f_\lambda(x) = f(x)\, e^{-\lambda x}, \qquad F_\lambda(x) = f_\lambda(x)\, e^{i\tau x}.$$

Nous avons déjà vu, dans la démonstration du théorème 1.4 que la fonction $g(x)$ a les propriétés (1.4.2). Nous allons démontrer que les fonctions $f_\lambda(x)$ et $F_\lambda(x)$ ont aussi les mêmes propriétés. Pour cela, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour $F_\lambda(x)$. Les propriétés 1° et 3° étant évidentes, démontrons les 2° et 4°.

Posons $z = \alpha + i\beta$. Dans la bande $0 < \beta < \lambda$, la fonction

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{izx}\, dx$$

est analytique et régulière.

On a

$$\mathrm{T}f_\lambda(x) = \varphi(\alpha + i\lambda) = \varphi_\lambda(\alpha),$$

$$\mathrm{TF}_\lambda(x) = \varphi_\lambda(\alpha + \tau) = \varphi(\alpha + \tau + i\lambda) = \Phi_\lambda(\alpha).$$

D'après (1.6.5), on a

$$\mathrm{R}_e \Phi_\lambda(\alpha) \geqq 0$$

et la propriété 2° est démontrée.

Posons

$$e^{-\lambda t} = 1 + (-\lambda t)\,\mathrm{A}(t).$$

On a

$$\int_0^1 |\mathrm{F}_\lambda(t) + \mathrm{F}_\lambda(-t) - 2\,\mathrm{F}_\lambda(0)| \frac{dt}{t} \leqq \int_0^1 |f(t)\,e^{-\lambda t} + f(-t)\,e^{\lambda t} - 2f(0)| \frac{dt}{t} + \mathrm{C}_1$$

$$= \int_0^1 |f(t)\,[1 + (-\lambda t)\,\mathrm{A}(t)] + f(-t)[1 + \lambda t\,\mathrm{A}(-t)] - 2f(0)| \frac{dt}{t} + \mathrm{C}_2$$

$$\leqq \int_0^1 |f(t) + f(-t) - 2f(0)| \frac{dt}{t} + \int_0^1 |f(t)\,(-\lambda t)\,\mathrm{A}(t) + f(-t)\lambda t\,\mathrm{A}(-t)| \frac{dt}{t} + \mathrm{C}_3 < \infty,$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes finies. La propriété 4° est aussi démontrée.

Considérons maintenant deux nombres positifs R et ε et posons

$$\mathrm{T}(g) = \mathrm{G}(\alpha),$$

$$\mathrm{I}_\mathrm{R}^f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \varphi(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\mathrm{R}} [\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$\mathrm{I}_\mathrm{R}^g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \mathrm{G}(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\mathrm{R}} [\mathrm{G}(\alpha) + \mathrm{G}(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$\mathrm{I}_\mathrm{R}^{f_\lambda}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \varphi_\lambda(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\mathrm{R}} [\varphi_\lambda(\alpha) + \varphi_\lambda(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$\mathrm{I}_\mathrm{R}^{\mathrm{F}_\lambda}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \Phi_\lambda(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\mathrm{R}} [\Phi_\lambda(\alpha) + \Phi_\lambda(-\alpha)]\,d\alpha.$$

D'après la propriété 4°, commune aux fonctions f, g, f_λ, F_λ, on a

1.6.7.

$$\lim_{\mathrm{R}=\infty} \mathrm{I}_\mathrm{R}^f(0) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$\lim_{\mathrm{R}=\infty} \mathrm{I}_\mathrm{R}^g(0) = g(0) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\mathrm{G}(\alpha) + \mathrm{G}(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$\lim_{\mathrm{R}=\infty} \mathrm{I}_\mathrm{R}^{f_\lambda}(0) = f_\lambda(0) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\varphi_\lambda(\alpha) + \varphi_\lambda(-\alpha)]\,d\alpha,$$

$$\lim_{\mathrm{R}=\infty} \mathrm{I}_\mathrm{R}^{\mathrm{F}_\lambda}(0) = \mathrm{F}_\lambda(0) = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty [\Phi_\lambda(\alpha) + \Phi_\lambda(-\alpha)]\,d\alpha.$$

Posons ensuite :

$$I_\varepsilon^f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} [\varphi(\alpha) + \varphi(-\alpha)]\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha,$$

$$I_\varepsilon^g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} [G(\alpha) + G(-\alpha)]\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha,$$

$$I_\varepsilon^{f_\lambda}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\lambda(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} [\varphi_\lambda(\alpha) + \varphi_\lambda(-\alpha)]\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha,$$

$$I_\varepsilon^{F_\lambda}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} [\Phi_\lambda(\alpha) + \Phi_\lambda(-\alpha)]\, e^{-\varepsilon\alpha^2}\, d\alpha.$$

Puisque les intégrales (1.6.7) existent, on a d'après un théorème d'Abel :

1.6.8.

$$\lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^f(0) = \lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^g(0) = \lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^{f_\lambda}(0) = \lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^{F_\lambda}(0) = f(0).$$

Considérons maintenant les intégrales

$$I_\varepsilon^g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2}[2 - e^{-i\alpha x} - e^{i\alpha x}]\, d\alpha,$$

$$I_\varepsilon^{F_\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2}[2 + e^{-i\alpha x} + e^{i\alpha x}]\, d\alpha$$

et passons à la limite pour $\varepsilon = 0$.

On trouve si l'on tient compte de (1.6.8)

$$\lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^g(x) = 2g(0) - g(-x) - g(x) \quad \text{p. p.}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} I_\varepsilon^{F_\lambda}(x) = 2F_\lambda(0) + F_\lambda(-x) + F_\lambda(x) \quad \text{p. p.}$$

D'autre part

$$I_\varepsilon^g(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2} \sin^2\frac{\alpha x}{2}\, d\alpha \quad \text{p. p.},$$

$$I_\varepsilon^{F_\lambda}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\lambda(\alpha)\, e^{-\varepsilon\alpha^2} \cos^2\frac{\alpha x}{2}\, d\alpha \quad \text{p. p.},$$

d'où

$$R_e[2f(0) - g(-x) - g(x)] \geqq 0 \quad \text{p. p.},$$
$$R_e[2f(0) + F_\lambda(-x) + F_\lambda(x)] \geqq 0 \quad \text{p. p.}$$

En remplaçant $F_\lambda(x)$ par $f(x)\, e^{-\lambda x}\, e^{i\tau x}$ et $g(x)$ par $f(x)\, e^{i\tau x}$, on a

1.6.9.

$$R_e[2f(0) - f(-x)\, e^{-i\tau x} - f(x)\, e^{i\tau x}] \geqq 0 \quad \text{p. p.},$$

1.6.10.

$$R_e[2f(0) + f(-x)\, e^{\lambda x}\, e^{-i\tau x} + f(x)\, e^{-\lambda x}\, e^{i\tau x}] \geqq 0 \quad \text{p. p.}$$

En multipliant (1.6.10) par $e^{-\lambda x}$ et en ajoutant membre par membre l'inégalité ainsi obtenue et (1.6.9), on trouve pour $x \geqq 0$:

$$R_e[f(x)\,e^{i\tau x}] \leqq \frac{2R_e f(0)}{1-e^{-\lambda x}} \quad \text{p. p.}$$

Si l'on choisit τ tel que

$$\arg f(x) + \tau x = 0,$$

on trouve finalement pour $x \geqq 0$:

$$|f(x)| \leqq \frac{2R_e f(0)}{1-e^{-\lambda x}} \quad \text{p. p.}$$

De même en considérant les fonctions

$$g(x) = f(x)\,e^{i\tau x}, \qquad f_\mu(x) = f(x)\,e^{\mu x}, \qquad F_\mu(x) = f_\mu(x)\,e^{i\tau x}$$

et en opérant comme précédemment on trouve pour $x \leqq 0$:

$$|f(x)| \leqq \frac{2R_e f(0)}{1-e^{\mu x}} \quad \text{p. p.}$$

Le théorème est ainsi démontré.

Démontrons, pour terminer ce chapitre, deux théorèmes qui correspondent aux deux propositions suivantes, dans la théorie des fonctions univalentes :

a. Si $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *est une fonction de la variable complexe z, univalente holomorphe dans le cercle* $|z| < 1$ *et si les* a_n *sont réels, alors*

$$|a_n| \leqq n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

b. Si $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *est une fonction de la variable complexe z, univalente holomorphe dans le cercle* $|z| < 1$, *et si la région du plan couverte par les valeurs de* $F(z)$ *est étoilée par rapport à l'origine, alors*

$$|a_n| \leqq n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

1.7. Théorème, — *Hypothèses :*

1.7.1. *La fonction* $f(x)$ *est réelle et appartient à* L_1.

1.7.2. $f(x) = 0$ *pour* $x < 0$.

1.7.3. *La fonction* $\psi(\alpha) = \mathfrak{I}\,T(f) \neq 0$ *pour* $\alpha \neq 0$.

1.7.4. *On suppose* $\left[\frac{f(x)}{x}\right] \in L_1$ *et* $\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]dx > 0$.

Conclusion :

$$|f(x)| < \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{f(x)}{x}\right] dx \quad \text{p. p.}$$

Remarque : Il existe des fonctions satisfaisant aux hypothèses du théorème (1.7). *Citons comme exemple la fonction* $f(x)$ *égale à* $\frac{e^x - 1}{e^{2x}}$ *pour* $x \geqq 0$ *et égale à zéro pour* $x < 0$.

Démonstration. — La fonction $\psi(\alpha)$ étant continue et ne s'annulant pas pour $\alpha \neq 0$, on a pour $\alpha > 0$, ou bien $\psi(\alpha) > 0$ ou bien $\psi(\alpha) < 0$.

Considérons un nombre positif B quelconque. On trouve

$$\int_0^B \psi(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx - \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \cos Bx\, dx,$$

d'où

$$\lim_{B=\infty} \int_0^B \psi(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty \psi(\alpha)\, d\alpha = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx.$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
&\psi(\alpha) > 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < \alpha < \infty,\\
&\psi(\alpha) < 0 \qquad \text{pour} \quad 0 > \alpha > -\infty,\\
&\psi(0) = 0,\\
&\psi(\alpha) \in L_1.
\end{aligned}$$

Considérons la fonction $\frac{f(x) - f(-x)}{2i}$ et sa transformée de Fourier qui est égale à $\psi(\alpha)$. En utilisant le fait que $\psi(\alpha) \in L_1$, on trouve

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \psi(\alpha) \sin \alpha x\, dx \quad \text{p. p.},$$

d'où

$$|f(x)| < \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx \quad \text{p. p.}$$

Le théorème est démontré.

1.8. Théorème. — *Hypothèses :*

1.8.1. *Les fonctions* $f(x)$ *et* $x f(x)$ *appartiennent à* L_1.

1.8.2. *Si l'on pose* $G(\alpha) = \frac{T(xf)}{T(f)}$, *on suppose que* $T(f) \neq 0$ *et que* $G(\alpha) \in A$.

1.8.3. *La ligne que décrit* $\varphi(\alpha) = T(f)$ *est simple et étoilée par rapport à l'origine.*

1.8.4. *Si* $G(\alpha) = T g(x)$, *on suppose*

$$4l = \underset{x}{\underline{\text{borne}}}\, [1 + \cos\{\arg g(x) + \arg g(-x)\}] > 0.$$

1.8.5. *Il existe un nombre c dont la partie réelle est positive, et tel qu'on ait*

$$\int_0^1 |g(t)+g(-t)-c|\frac{dt}{t}<\infty.$$

1.8.6. *On pose*

$$2g(0)=c.$$

Conclusion :

$$|xf(x)|\leqq \frac{\mathrm{R}_e\, g(0)}{l}\|f\|_{\mathrm{L}_1} \quad \text{p. p.}$$

Remarque : Il existe des fonctions satisfaisant aux hypothèses du théorème (1.8). *Citons comme exemple la fonction* $f(x)$ *égale à* xe^{-x} *pour* $x \geqq 0$ *et égale à zéro pour* $x<0$.

Démonstration. — Posons

$$\varphi(\alpha)=\rho(\alpha)\,e^{i\delta(\alpha)}.$$

On a

$$\log\varphi(\alpha)=\log\rho(\alpha)+i\delta(\alpha),$$

d'où

$$\mathfrak{J}\{\log\varphi(\alpha)\}=\delta(\alpha).$$

On trouve

$$\frac{d\mathfrak{J}\{\log\varphi(\alpha)\}}{d\alpha}=\mathfrak{J}\frac{d\log\varphi(\alpha)}{d\alpha}=\mathfrak{J}\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\mathrm{R}_e\,\mathrm{G}(\alpha).$$

D'après l'hypothèse (1.8.3), on a

$$\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}\geqq 0,$$

d'où

$$\mathrm{R}_e\,\mathrm{G}(\alpha)\geqq 0.$$

On constate que le corollaire 1.4.7 est applicable à la fonction $g(x)$. On trouve

$$|g(x)|+|g(-x)|\leqq\frac{\mathrm{R}_e\, g(0)}{l} \quad \text{p. p.}$$

ou encore

1.8.7.
$$|g(x)|\leqq\frac{\mathrm{R}_e\, g(0)}{l} \quad \text{p. p.}$$

De (1.8.2) résulte

$$xf(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)f(x-y)\,dy$$

ou, d'après (1.8.7)

$$|xf(x)|\leqq\frac{\|f\|_{\mathrm{L}_1}}{l}\mathrm{R}_e\, g(0) \quad \text{p. p.}$$

et le théorème est démontré.

Discussion des résultats obtenus.

Les propositions que nous venons de démontrer nous conduisent à la conclusion générale suivante : une fonction de la classe L_1 sous l'hypothèse essentielle d'avoir la partie réelle de sa transformée de Fourier non négative, est majorée par une constante ou par une fonction simple, comme par exemple dans le cas du théorème 1.6. Ainsi, étant donné une fonction appartenant à la classe L_1, si l'on veut arriver à une estimation de cette fonction, il est naturel de penser à se ramener au cas où l'hypothèse essentielle en question est satisfaite.

A cet effet les méthodes suggérées par la théorie que nous avons exposée sont au nombre de deux.

La première consiste à chercher une régularisante de la fonction donnée. Nous avons vu que grâce au lemme 1.3 cette régularisante existe toujours pour les fonctions de la classe L_1^*. La notion de régularisante est en général liée à celle de la distribution des valeurs négatives de la partie réelle de la transformée de Fourier. Dans le cas particulier où la suite $\{I_k\}$ des intervalles, qui contient l'ensemble $\overline{E}_f$ est telle que $\sum I_k < \infty$, la fonction $f(x)$ appartient à la classe L_1^* et elle possède par conséquent une régularisante. Pour s'exprimer d'une façon générale, la recherche d'une régularisante est indiquée lorsque des renseignements sur le comportement à l'infini de la transformée de Fourier sont donnés.

La seconde méthode consiste à trouver une fonction de la classe A, soit $B(\alpha) = T\beta(x)$, telle que si $\varphi(\alpha)$ est la transformée de Fourier de la fonction donnée $f(x)$, on ait $R_e[\varphi(\alpha) B(\alpha)] \geqq 0$. Il est évident que cette méthode nous conduit à chercher une estimation de la fonction $f \star \beta$ et non pas de $f(x)$ qui nous intéresse. Mais comme on le verra dans le chapitre suivant, l'estimation de $f \star \beta$ nous permettra souvent d'obtenir une estimation de $f(x)$ elle-même. L'application de cette seconde méthode est indiquée dans le cas où les points de changement de signe de la $R_e T(f)$ sont donnés. C'est dans ce but, qu'au début du chapitre suivant, nous donnons quelques lemmes, d'ailleurs très simples, concernant la construction des fonctions de la classe A dont les changements de signe sont donnés d'avance.

CHAPITRE II.

Applications.

2.1. Quelques propositions préliminaires.

2.1.1. Lemme. — *Étant donné q nombres réels :* $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_q$, *et un* *nombre positif quelconque* λ, *la fonction*

$$B(\alpha)=\prod_{k=1}^{q}\frac{\alpha-\alpha_k}{\lambda^2+(\alpha-\alpha_k)^2}$$

appartient à la classe A *et change de signe seulement aux points* $\{\alpha_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, q)$.

Démonstration. — Considérons les fonctions $g(x)$ et $g_1(x)$ définies comme suit :

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geqq 0, \\ 0 & \text{pour } x<0; \end{cases}$$

$$g_1(x)=\frac{g(x)-g(-x)}{2i}.$$

On trouve

$$T(g_1)=\varphi_1(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Mais on a

$$T[g_1(x)\,e^{-i\alpha_k x}]=\varphi_1(\alpha-\alpha_k)=\frac{\alpha-\alpha_k}{\lambda^2+(\alpha-\alpha_k)^2}.$$

Par conséquent la fonction $B(\alpha)$ comme produit d'un nombre fini de fonctions appartenant à la classe A y appartient aussi et il est évident qu'elle ne change de signe qu'aux points $\{\alpha_i\}$ donnés.

2.1.2. Lemme. — *Si* δ *est un nombre réel, la fonction* $\frac{\sin\alpha\delta}{\alpha}$ *appartient à la classe* A.

En effet, par exemple, pour $\delta>0$, on a

$$T\beta_\delta(x)=\frac{\sin\alpha\delta}{\alpha},$$

où $\beta_\delta(x)$ est définie comme suit :

2.1.3.

$$\beta_\delta(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pour } |x| \leqq \delta, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

2.1.4. Lemme. — *Si* $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n z^n$ *est une fonction de la variable complexe* $z=re^{i\alpha}$, *régulière dans le cercle-unité, alors pour une valeur de r fixe* $(0 \leqq r < 1)$, *la fonction*

$$\frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha}F(re^{i\alpha})$$

de α, *appartient à la classe* A.

Démonstration. — Considérons la fonction $f(x)$ définie comme suit :

2.1.5.
$$f(x)=\begin{cases} A_n r^n & \text{pour } n \leqq x < n+1 \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

Il est clair que la fonction $f(x)$ appartient à la classe L_1.

On trouve

$$T(f)=\int_0^\infty f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx=\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \int_n^{n+1} e^{i\alpha x}\, dx=\frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha} F(r\, e^{i\alpha})$$

et le lemme est démontré.

2.2. La classe $\mathfrak{T}$ de fonctions typiquement réelles. — Une fonction $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ de la variable complexe $z=re^{i\alpha}$ régulière dans le cercle $|z|<1$, est dite typiquement réelle dans ce cercle si elle n'est réelle que pour des valeurs de z réelles.

Il résulte de cette fonction que les coefficients $\{a_n\}$ sont nécessairement réels.

On démontre [13], que les propositions suivantes sont vraies pour les fonctions de la classe $\mathfrak{T}$.

a. La classe $\mathfrak{T}$ est caractérisée par la relation

2.2.1.
$$\operatorname{sign} \mathfrak{J}\, F(z)=\operatorname{sign} \mathfrak{J}(z).$$

b. Si $F(z)\in\mathfrak{T}$ *et* $-1\leqq x\leqq 1$, *on a*

2.2.2.
$$\operatorname{sign} F(x)=\operatorname{sign} x.$$

c. Si $F(z)\in\mathfrak{T}$ *et* $0\leqq x\leqq 1$, *on a*

2.2.3.
$$\frac{x}{(1+x)^2}\leqq F(x)\leqq\frac{x}{(1-x)^2}.$$

2.2.4. *Le théorème de M. S. Mandelbrojt* [10] *: Si* $F(z)\in\mathfrak{T}$, *la limite* $\lim_{r=1-0} F(r)=F(1)$ *existe (cette limite peut éventuellement être égale à* $+\infty$*) et l'on a*

$$\lim_{r=1-0} F(r)=F(1)=\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n+\dfrac{\sigma_{n+1}}{2}}{n}.$$

où

$$\sigma_i=1+a_2+\ldots+a_i \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

Dans le cas où $F(z)$ *est en plus une fonction impaire, on a*

$$\lim_{r=1-0} F(r) = F(1) = \lim_{n=\infty} \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n}{n}.$$

Pour démontrer son théorème M. S. Mandelbrojt établit d'abord l'inégalité fondamentale suivante :

2.2.5.

$$0 \leqq 1 + a_2 + \ldots + a_{\nu-1} + \frac{a_\nu}{2} \leqq 2F(1).$$

C'est cette inégalité que nous allons démontrer et améliorer lorsque $F(1) = \infty$. Plus précisément nous démontrons le théorème suivant :

2.2.6. Théorème. — *Si* $F(z) \in \mathcal{C}$ *et si*

$$\lim_{r=1-0} (1-r)^2 F(r) = 8l,$$

alors

2.2.7.

$$\nu^2 l \leqq 1 + a_2 + \ldots + a_{\nu-1} + \frac{a_\nu}{2} \leqq 2F(1).$$

Démonstration. — Considérons la fonction $f(x)$ définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} a_{[x]} r^{[x]} + a_{[x]+1} r^{[x]+1} & \text{pour } x \geqq 0, \\ 0 & \text{pour } x < 0, \end{cases}$$

où r est un nombre fixe pour le moment : $0 < r < 1$. Posons

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2i}.$$

Il est clair que $f_1(x) \in L_1$. On trouve

$$\begin{aligned} T(f_1) = \psi(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}[r + a_2 r^2 \cos\alpha + (a_3 r^3 - r)\cos 2\alpha + (a_4 r^4 - a_2 r^2)\cos 3\alpha + \ldots] \\ &= 2\frac{\sin\alpha}{\alpha} \mathfrak{I} F(z). \end{aligned}$$

Il en résulte, d'après (2.2.1), que pour $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$, on a

$$\alpha\psi(\alpha) \geqq 0$$

et puisque la fonction $\alpha\psi(\alpha)$ admet 2π comme période, on en conclut que

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &\geqq 0 \qquad \text{pour } \alpha \geqq 0, \\ \psi(\alpha) &\leqq 0 \qquad \text{pour } \alpha \leqq 0. \end{aligned}$$

En d'autres termes le seul changement de signe de $\psi(\alpha)$ a lieu au point $\alpha = 0$.

Les notations du (2.1.1) étant conservées, considérons les fonctions $g(x)$ et $g_1(x)$ qui figurent dans ce lemme. On a

$$\mathrm{T}(g_1) = \varphi_1(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}.$$

Posons

$$\mathrm{H}(\alpha) = \psi(\alpha)\,\varphi_1(\alpha) \qquad \text{et} \qquad h_r(x) = f_1 \star g_1.$$

On a

$$\mathrm{T}\,h_r(x) = \mathrm{H}(\alpha) = \frac{2\sin\alpha\,\mathfrak{I}\,\mathrm{F}(z)}{\alpha^2+\lambda^2}$$

et

2.2.8.

$$h_r(x) = \frac{1}{4}\int_0^\infty f(y)\,[g(x+y) - g(-y-x) - g(x-y) + g(y-x)]\,dy.$$

On constate que la fonction $h_r(x)$ est continue, réelle, paire, appartient à L_1 et que $\mathrm{H}(\alpha) \in \mathrm{L}_1$.

Calculons $h_r(0)$. On trouve

$$h_r(0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\,e^{-\lambda y}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{e^\lambda - 1}{\lambda e^\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n r^n + a_{n+1} r^{n+1}}{e^{\lambda n}},$$

donc d'après (2.2.2), on a

$$0 < h_r(0) < +\infty.$$

En appliquant le théorème (1.4.9) à la fonction $h_r(x)$, on trouve

2.2.9.

$$|h_r(x)| \leqq h_r(0) \quad \text{partout.}$$

Choisissons maintenant $x = \nu =$ entier positif et le nombre $\lambda = \log(2-r)$.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\mathrm{B}(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n r^n + a_{n+1} r^{n+1}}{e^{\lambda n}} \qquad \mathrm{B}_\nu(r) = \sum_{n=1}^{\nu}(a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n)\,e^{\lambda(n-1)}.$$

$$\mathrm{C}_{\nu-1}(r) = \sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{a_n r^n + a_{n+1} r^{n+1}}{e^{\lambda n}}.$$

De l'inégalité (2.2.9) découlent les deux inégalités suivantes :

2.2.10.

$$\mathrm{B}(r)\,(e^{\lambda\nu} - 1)^2 \leqq e^\lambda \mathrm{B}_\nu(r) + e^{2\lambda\nu}\mathrm{C}_{\nu-1}(r),$$

2.2.11.

$$e^\lambda \mathrm{B}_\nu(r) + e^{2\lambda\nu}\mathrm{C}_{\nu-1}(r) \leqq \mathrm{B}(r)\,(e^{\lambda\nu} + 1)^2.$$

Mais on a

$$\lim_{r=1} B(r)(e^{\lambda\nu}-1)^2 = \lim_{r=1}\left[B(r)\left(1-\frac{r}{e^{\lambda}}\right)^2(e^{\lambda\nu}-1)^2\frac{1}{\left(1-\frac{r}{e^{\lambda}}\right)^2}\right] = 4l\nu^2.$$

Par conséquent, dans (2.2.10) et (2.2.11) en passant à la limite pour $r=1$, on trouve

2.2.12.

$$l\nu^2 \leqq 1 + a_2 + \ldots + a_{\nu-1} + \frac{a_\nu}{2},$$

2.2.13.

$$1 + a_2 + \ldots + a_{\nu-1} + \frac{a_\nu}{2} \leqq 2F(1);$$

d'où la conclusion (2.2.7).

2.2.14. Corollaire. — *Si* $F(z) \in \mathfrak{C}$ *et* $F(r) \underset{r=1-0}{\sim} \frac{1}{(1-r)^2}$, *alors :*

a. quel que soit $\delta : 0 \leqq \delta < 2$, *on a*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1 + a_2 + \ldots + a_{\nu-1} + \frac{a_\nu}{2}}{\nu^\delta} = \infty;$$

b. $\lim_{\nu=\infty} \frac{1 + a_2 + \ldots + a_\nu}{\nu} = \infty.$

Démonstration. — En effet on a

$$\lim_{r=1}[(1-r)^2 F(r)] = 8l = 1$$

et la conclusion *a* résulte de (2.2.12) pour $l = \frac{1}{8}$.

D'autre part on sait que l'inégalité $|a_\nu| \leqq \nu$ (ν entier positif) est vraie pour les fonctions de la classe $\mathfrak{C}$. Par conséquent la conclusion *b* découle de *a* si l'on pose $\delta = 1$.

2.2.15. Lemme. — *Hypothèses :* $F(z) \in \mathfrak{C}$; $F(r) \underset{r=1-0}{\sim} \frac{\alpha}{(1-r)^q}$ (*où* $q = 0, 1, 2$); *il existe un polynome*

$$P(r) \equiv \sum_{i=0}^{k} \gamma_i r^i \qquad (\gamma_i \textit{ réels})$$

tel que :

a. $P(r)$ *a la racine* $r=1$ *de multiplicité* q;

b. $\lim_{r=1}\left[\frac{P(r)}{(1-r)^q}\right] = 1;$

c. Si l'on pose

$$B_n^r = \frac{r^{n-1}\gamma_{n-1} - r^n\gamma_n}{\gamma_0 - \gamma_1 r},$$

on ait à partir d'une certaine valeur de r suffisamment voisine de 1 :

$$(\gamma_0 - \gamma_1 r)\left[1 + B_2^r \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} + B_3^r \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} + \ldots + B_{k+1}^r \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}\right] > 0.$$

Posons

$$1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_j = S_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Conclusion :

1° $$\Lambda_k = \mathfrak{A} - (\gamma_1 + \gamma_2 S_2 + \gamma_3 S_3 + \ldots + \gamma_k S_k) \geqq 0;$$

2° $$\left|\mathfrak{A} - \frac{1}{2}\{\gamma_0(S_\nu + S_{\nu-1}) + \gamma_1(S_{\nu+1} + S_{\nu-2}) + \ldots + \gamma_k(S_{\nu+k} + S_{\nu-k-1})\}\right| \leqq \Lambda_k.$$

Démonstration. — Considérons les fonctions $\mu(x)$ et $\mu_1(x)$ définies comme suit :

$$\begin{aligned}
&\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{p=n}^{\infty} a_p r^p \qquad \text{pour} \quad n-1 < x \leqq n \qquad (n = 1, 2, \ldots),\\
&\mu(x) = \mu(-x),\\
&\mu_1(x) = \gamma_0 \qquad \text{pour} \quad |x| \leqq 1,\\
&\mu_1(x) = \gamma_n r^n \qquad \text{pour} \quad n < |x| \leqq n+1 \qquad (n = 1, 2, \ldots, k),\\
&\mu_1(x) = 0 \qquad \text{ailleurs.}
\end{aligned}$$

On voit facilement que les fonctions $\mu(x)$ et $\mu_1(x)$ appartiennent à la classe L_1.

On a

$$T(\mu) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{J}F(z),$$

$$\begin{aligned}
T(\mu_1) &= 2\int_0^{k+1} \mu_1(x)\cos\alpha x\,dx\\
&= 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}(\gamma_0 - \gamma_1 r)\left[1 + B_2^r \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} + \ldots + B_{k+1}^r \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Posons

$$H_r(x) = \mu \star \mu_1.$$

On a pour r assez voisin de l'unité,

$$\begin{aligned}
T(H_r) &= T(\mu)T(\mu_1) = \varphi_r(\alpha)\\
&= \frac{2\sin\alpha}{\alpha^2}\mathcal{J}F(z)(\gamma_0 - \gamma_1 r)\left[1 + B_2^r \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} + \ldots + B_{k+1}^r \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}\right] \geqq 0.
\end{aligned}$$

On trouve

$$H_r(0) = 2\sum_{p=0}^{k+1} \gamma_p \int_p^{p+1} \mu(y)\,dy$$

ou

2.2.16.

$$H_r(0) = P(r)\sum_{p=1}^{\infty} a_p r^p - \gamma_1 r^2 - \gamma_2 r^2(r + a_2 r^2) - \ldots - \gamma_k r^k(r + a_2 r^2 + \ldots + a_k r^k).$$

D'autre part $\varphi_r(\alpha) \in L_1$ et $H_r(x)$ étant continue, on a

$$H_r(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\alpha)\, d\alpha$$

et comme $\varphi_r(\alpha) \not\equiv 0$, on a

$$H_r(0) > 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{r=1-0} H_r(0) \geqq 0$$

et de (2.2.16) résulte, en passant à la limite, pour $r=1$, la conclusion 1°.

Du fait que $\mu(x)$ et $\mu_1(x)$ sont des fonctions paires résulte que $H_r(x)$ est aussi une fonction paire. En appliquant le théorème (1.4.9) à cette fonction, on trouve

2.2.17.
$$|H_r(x)| \leqq H_r(0) \quad \text{partout.}$$

Pour $x = \nu =$ entier positif ou nul, on trouve

$$H_r(\nu) = P(r)F(r) - \frac{1}{2}[\gamma_0(S_\nu + S_{\nu-1}) + \gamma_1 r(S_{\nu+1} + S_{\nu-2}) + \ldots + \gamma_k r^k(S_{\nu+k} + S_{\nu-k+1})].$$

En remplaçant dans (2.2.17) la valeur de $H_r(\nu)$, et en passant à la limite pour $r=1$, on obtient la conclusion 2°.

Le lemme est établi.

2.2.18. LEMME. — *Hypothèses : $F(z) \in \mathcal{C}$; il existe un polynome*

$$P(r) \equiv \sum_{i=0}^{k} \gamma_i r^i \qquad (\gamma_i \textit{ réels}),$$

tel que si l'on pose

$$B_n^r = \frac{r^{n-1}\gamma_{n-1} - r^n\gamma_n}{\gamma_0 - \gamma_1 r},$$

on ait à partir d'une valeur de r suffisamment voisine de 1 :

$$(\gamma_0 - \gamma_1 r)\left[1 + B_2^r \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} + \ldots + B_{k+1}^r \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}\right] > 0.$$

Posons

$$1 + a_2 + \ldots + a_j = S_j \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Conclusion :

$$\gamma_0(S_\nu + S_{\nu-1}) + \gamma_1(S_{\nu+1} + S_{\nu-2}) + \ldots + \gamma_k(S_{\nu+k} + S_{\nu-k-1}) \geqq 2(\gamma_1 + \gamma_2 S_2 + \ldots + \gamma_k S_k).$$

Démonstration. — Elle est presque la même que celle du lemme précédent. Les notations du (2.2.15) étant conservées, on voit facilement que l'inégalité (2.2.17) est encore vraie, d'où en opérant comme précédemment on arrive à la conclusion désirée.

Remarque. — Le choix du polynome $P(r)$ n'étant pas unique on peut trouver, en choisissant convenablement $P(r)$, des relations concernant les coefficients d'une fonction appartenant à la classe $\mathcal{C}$. Par exemple si $\lim\limits_{r=1-0} F(r) < \infty$ en prenant $P(r) \equiv 1$ on retrouve l'inégalité (2.2.5) de M. S. Mandelbrojt.

2.2.19. Théorème. — *Si* $F(z) \in \mathcal{C}$ *et* $F(r) \underset{r=1-0}{\sim} \dfrac{\mathfrak{A}}{1-r}$ *on a*

$$\left| \mathfrak{A} + \frac{a_{\nu-2} - a_{\nu+2}}{2} + a_{\nu+1} - a_{\nu-1} \right| \leqq \mathfrak{A} + 2 - a_2.$$

Démonstration. — On prend $P(r) \equiv 2 - 3r + r^2$ et l'on applique le lemme 2.2.15.

2.2.20. Théorème. — *Si* $F(z) \in \mathcal{C}$, *on a*

$$2 + a_2 + a_{\nu-1} - a_{\nu+1} + \frac{a_{\nu-2} - a_{\nu+2}}{2} \geqq 0.$$

Démonstration. — On prend $P(r) \equiv 2 - r - r^2$ et l'on applique le lemme 2.2.18.

2.2.21. Théorème. — *Si* $F(z) \in \mathcal{C}$, *on a*

$$2 - a_2 + a_{\nu-1} - a_{\nu+1} + \frac{a_{\nu+2} - a_{\nu-2}}{2} \geqq 0.$$

Démonstration. — On prend $P(r) \equiv 2 - 3r + r^2$ et l'on applique le lemme 2.2.18.

2.3. Séries de Dirichlet. Fonctions univalentes.

2.3.1. Théorème. — *Hypothèses : Soit* $\lambda_1 = 0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,$ *une suite de nombres positifs* ($\lambda_{n+1} > \lambda_n$, $\lim\limits_{n=\infty} \lambda_n = +\infty$); *la série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} (s = \sigma + it)$ *converge absolument dans le demi-plan* $R_e s < 0$; $R_e\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}\right) \geqq 0$; $R_e a_1 > 0$; *il existe un nombre positif d tel que pour tout n, on ait* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq d$.

Conclusion :

$$|a_n| \leqq 2 R_e a_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Démonstration. — La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$ représente une fonction de s holomorphe dans $R_e s < 0$. Soit $F(s)$ cette fonction. Considérons un nombre $\delta : 0 < \delta < \frac{d}{3}$ et désignons par I_n l'intervalle $[\lambda_n - \delta, \lambda_n + \delta]$.

Il est clair que si $i \neq j$, on a $I_i \cap I_j = \emptyset$.

Posons $E = \bigcup_n I_n$, et définissons, pour $\sigma_0 < 0$ la fonction $f(x)$ de la variable réelle x, comme il suit :

$$f_{\sigma_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n e^{\lambda_n \sigma_0} & \text{pour } x \in I_n \\ 0 & \text{pour } x \notin I_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La fonction $f_{\sigma_0}(x) \in L_1$. En effet on a

$$\| f_{\sigma_0}(x) \|_{L_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} | f_{\sigma_0}(x) | \, dx = \delta \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | e^{\lambda_n \sigma_0} < +\infty.$$

Calculons la transformée de Fourier de $f_{\sigma_0}(x)$. On a

$$T(f_{\sigma_0}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f_{\sigma_0}(x) e^{itx} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n e^{\lambda_n \sigma_0} \int_{I_n} e^{itx} \, dx = \frac{\sin t\delta}{t} F(\sigma_0 + it).$$

Considérons la fonction $\beta_\delta(x)$ donnée par (2.1.3) et posons

$$h_{\sigma_0}(x) = f_{\sigma_0} \star \beta_\delta.$$

On a

$$T(h_{\sigma_0}) = \frac{\sin^2 t\delta}{t^2} F(\sigma_0 + it),$$

d'après l'hypothèse $R_e\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \right) \geqq 0$, on a

$$R_e[T(h_{\sigma_0})] \geqq 0.$$

On trouve

$$h_{\sigma_0}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{+\delta} f_{\sigma_0}(x - y) \, dy = \frac{1}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\omega) \, d\omega,$$

$$h_{\sigma_0}(\lambda_n) = \frac{1}{2} \int_{\lambda_n - \delta}^{\lambda_n + \delta} f_{\sigma_0}(\omega) \, d\omega = \frac{\delta}{2} a_n e^{\lambda_n \sigma_0},$$

$$h_{\sigma_0}(0) = \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{+\delta} f(-y) \, dy = \frac{\delta}{2} a_1,$$

$$R_e h_{\sigma_0}(0) = \frac{\delta}{2} R_e a_1 > 0.$$

On constate facilement que $T(h_{\sigma_0}) \in L_1$ et que $h_{\sigma_0}(x)$ est continue. En appliquant à la fonction $h_{\sigma_0}(x)$ la conclusion a du théorème 1.4.9, on trouve :

2.3.2.

$$| h_{\sigma_0}(x) | + | h_{\sigma_0}(-x) | [\cos \{ \arg h_{\sigma_0}(x) + \arg h_{\sigma_0}(-x) \}] \leqq 2 R_e h_{\sigma_0}(0) = \delta R_e a_1 \quad \text{partout.}$$

Mais pour $x > 2\delta$, on a $h_{\sigma_0}(-x) = 0$.

En effet, on a

$$h_{\sigma_0}(-x) = \frac{1}{2}\int_{-x-\delta}^{-x+\delta} f_{\sigma_0}(\omega)\, d\omega$$

et puisque $-x+\delta < -\delta$ et $-x-\delta < -3\delta$. On a

$$[-x-\delta, -x+\delta] \cap E = \emptyset,$$

donc $h_{\sigma_0}(-x) = 0$ pour les valeurs de x considérées. D'autre part d'après l'hypothèse $0 < \delta < \frac{d}{3}$, on a

$$\lambda_n > 2\delta \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

et de (2.3.2) résulte que

$$|h_{\sigma_0}(\lambda_n)| \leqq \delta R_e a_1$$

ou

$$|a_n| e^{\lambda_n \sigma_0} \leqq 2 R_e a_1.$$

En faisant tendre σ_0 vers zéro par des valeurs négatives on arrive à la conclusion désirée.

2.3.3. Théorème. — *Si la fonction* $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *de la variable* $z = r e^{i\alpha}$ *est univalente holomorphe dans le cercle* $|z| < 1$ *et représente ce cercle sur un domaine étoilé par rapport à l'origine, alors*

$$|a_{\nu-1} + a_\nu| \leqq \frac{4}{\nu}\sum_{n=1}^{\nu} |a_n| + C \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

où C *est une constante* : $0 \leqq C \leqq 3$.

Démonstration. — Puisque $F(z)$ est univalente et étoilée dans $|z| < 1$, on a

$$R_e \frac{zF'(z)}{F(z)} \geqq 0$$

On a

$$zF'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n.$$

Posons

2.3.4.

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

La fonction $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ étant holomorphe dans $|z| < 1$ et puisque

$$R_e\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right] \geqq 0,$$

on en conclut que $|b_n| \leqq 2$.

Définissons les fonctions $\beta(x)$, $\Delta(x)$, $\Delta_1(x)$, $\Delta_2(x)$ et $\mu(x)$ appartenant toutes à L_1, et écrivons à côté leur transformée de Fourier, calculée d'après le lemme 2.1.4 :

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases} \qquad T(\beta) = \frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha};$$

$$\Delta(x) = \begin{cases} b_n r^n & \text{pour } n \leqq x < n+1, \\ 0 & \text{» } x < 0, \end{cases} \qquad T(\Delta) = \frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{in\alpha};$$

$$\Delta_1(x) = \begin{cases} n a r^n & \text{» } n \leqq x < n+1, \\ 0 & \text{» } x < 0, \end{cases} \qquad T(\Delta_1) = \frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^n e^{i\alpha n};$$

$$\Delta_2(x) = \begin{cases} a_n r^n & \text{» } n \leqq x < n+1, \\ 0 & \text{» } x < 0, \end{cases} \qquad T(\Delta_2) = \frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n e^{i\alpha n};$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{» } |x| \leqq 1, \\ 0 & \text{» } |x| > 1, \end{cases} \qquad T(\mu) = \frac{e^{-i\alpha}-1}{-i\alpha}\,\frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha} = \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

En multipliant les deux membres de (2.3.4) par

$$\frac{e^{i\alpha}-1}{-i\alpha}\left(\frac{e^{i\alpha}-1}{i\alpha}\right)^2,$$

on trouve

2.3.5.
$$T(\mu)\,T(\Delta_1) = T[\beta(-x)]\,T(\Delta).$$

Posons

$$h(x) = \beta(-x) \star \Delta(x),$$

on a

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(-y)\Delta(x-y)\,dy = \int_0^1 \Delta(x+y)\,dy = \int_x^{1+x} \Delta(y)\,dy$$

et

$$T(h) = T\beta(-x)\,T(\Delta) = \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n e^{i\alpha n}.$$

On constate que $h(x)$ est continue et que $T(h) \in L_1$. On a

$$h(0) = \int_0^1 \Delta(y)\,dy = 1.$$

En appliquant le théorème 1.4.9 à la fonction $h(x)$, on trouve

2.3.6.
$$|h(x)| + |h(-x)| \cos\{\arg h(x) + \arg h(-x)\} \leqq 2 R_e h(0) = 2 \quad \text{partout.}$$

Mais pour $x \leqq -1$ on a $h(x) = 0$.

Par conséquent pour $x \geqq 1$, de (2.3.6) résulte

$$|h(x)| \leqq 2.$$

Pour $-1 < x < 0$, on trouve

$$h(x) = 1 + x < 1.$$

Pour $0 < x < 1$, on a

$$h(x) = \int_x^{1+x} \Delta(y)\, dy = \int_x^1 \Delta(\omega)\, d\omega + \int_1^{1+x} \Delta(\omega)\, d\omega = 1 - x + b_1 r x,$$

d'où

$$|h(x)| < 3.$$

L'égalité (2.3.5) s'écrit

$$\mathrm{T}(\mu)\mathrm{T}(\Delta_1) = \mathrm{T}(\Delta_2)\mathrm{T}(h),$$

d'où

2.3.7.

$$\mu \star \Delta_1 \equiv \Delta_2 \star h.$$

Pour $x = \nu =$ entier positif, on a

$$\mu \star \Delta_1 = \frac{\nu(a_\nu r^\nu + a_{\nu-1} r^{\nu-1}) - a_{\nu-1} r^{\nu-1}}{2}$$

et

$$|\Delta_2 \star h| = \left| \int_{-1}^{\infty} \Delta_2(\nu - y) h(y)\, dy \right|$$

$$\leqq \int_{-1}^{0} |\Delta_2(\nu - y)|\, dy + 3\int_0^1 |\Delta_2(\nu - y)|\, dy + 2\int_1^{\infty} |\Delta_2(\nu - y)|\, dy$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\nu} |a_n|\, r^n + |a_{\nu-1}|\, r^{\nu-1} - |a_\nu|\, r^\nu$$

et de (2.3.7), en majorant le second membre et en passant à la limite pour $r = 1$, résulte

2.3.8.

$$|a_{\nu-1} + a_\nu| \leqq \frac{4}{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} |a_n| + \frac{3\,|a_{\nu-1}|}{\nu} - \frac{2\,|a_\nu|}{\nu}.$$

On trouve en tenant compte de l'inégalité $|a_p| \leqq p\,(p = 1, 2, \ldots)$ qui est vraie pour les fonctions univalentes, ici considérées, que pour tout ν, on a

$$\left| \frac{3\,|a_{\nu-1}|}{\nu} - \frac{2\,|a_\nu|}{\nu} \right| < 3,$$

d'où

$$\overline{\text{borne}}_{\nu} \left| \frac{3\,|a_{\nu-1}|}{\nu} - \frac{2\,|a_\nu|}{\nu} \right| = C \leqq 3$$

et de (2.3.8) en majorant le second membre, on arrive à la conclusion désirée.

2.4. Les classes de fonctions $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$. — Considérons une fonction $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ donnée dans le cercle $|z| < 1$ par son développement en série de Taylor. On sait qu'en général si l'on connaît le comportement asymptotique de $F(z)$ lorsque z approche la circonférence $|z| = 1$ suivant un rayon du cercle on ne peut rien dire sur le comportement des $\{a_n\}$ lorsque n tend vers l'infini. Par contre si l'on fait des hypothèses supplémentaires on peut obtenir des expressions asymptotiques pour les coefficients. Citons comme exemple le théorème suivant de Hardy et Littlewood :

2.4.1. *Si* $a_n \geqq 0\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *et si* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{x=1-0}{\sim} \frac{1}{1-x}$, *alors*

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \sim n.$$

Dans ce paragraphe nous définissons la classe de fonctions, $\mathfrak{M}$, pour lesquelles un théorème analogue à (2.4.1) est vrai. Nous démontrons aussi qu'il existe des fonctions de la classe $\mathfrak{M}$ pour lesquelles la conclusion du (2.4.1) n'est pas vraie.

Nous définissons ensuite une autre classe de fonctions, la classe $\mathfrak{N}$. Pour toute fonction $\sum a_n z^n$ de cette classe l'inégalité $|a_n| \leqq n$ a lieu.

2.4.2. *Définition de la classe* $\mathfrak{M}$. — Nous dirons qu'une fonction $F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ de la variable complexe $z = r e^{i\alpha}$ appartient à la classe $\mathfrak{M}$, si quel que soit α, et à partir d'une certaine valeur de r, soit $0 \leqq r_0 \leqq r < 1$:

1° $F(z)$ est régulière dans $|z| < 1$;

2° $R_e F(z) \geqq \mathcal{I} F(z) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

La classe $\mathfrak{M}$ n'est pas vide. Par exemple les fonctions

$$\frac{1}{1-z}, \qquad \frac{1}{1+z}, \qquad \frac{1}{1-z^2}, \qquad \frac{1}{(1+z)^2}$$

et la constante 1, y appartiennent.

Propriétés des fonctions de la classe $\mathfrak{M}$. — 1° Si $F(z) \in \mathfrak{M}$ et $p \geqq 0$, alors

$$\frac{p + F(z)}{1+p} \in \mathfrak{M}.$$

2° Si $F_1(z) \in \mathfrak{M}$, $F_2(z) \in \mathfrak{M}$, et λ et μ sont deux nombres positifs, alors

$$\frac{\lambda F_1 + \lambda F_2}{\lambda + \mu} \in \mathfrak{M}.$$

2.4.3. **Théorème.** — *Si* $F(z) \in \mathfrak{M}$, *alors* :

$$\begin{array}{lll} a. & |a_n + a_{n+1}| \leqq 2 & \\ b. & |a_n| \leqq 2n+1 & \end{array} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Démonstration. — Considérons la fonction $f(x)$ de la classe L_1 définie comme suit :

$$f(x) = \begin{cases} a_n r^n & \text{pour } n \leqq x < n+1, \\ 0 & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$

On a d'après le lemme 2.1.4 :

$$T(f) = \frac{e^{i\alpha} - 1}{i\alpha}(F r e^{i\alpha})$$

ou, si l'on pose

$$F(r e^{i\alpha}) = P(r, \alpha) + iQ(r, \alpha) = P + iQ,$$

$$T(f) = P\frac{\sin\alpha}{\alpha} - Q\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} + i\left[Q\frac{\sin\alpha}{\alpha} + P\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right].$$

Considérons la fonction $\beta_1(x)$ définie dans (2.1.3), pour $\delta = 1$. On a

$$T(\beta_1) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Posons

2.4.4.
$$h(x) = f \star \beta_1.$$

Il est clair que $h(x) \in L_1$ et est continue. On a

$$T(h) = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}P - \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}Q\right) + i\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}Q + \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}P\right),$$

d'où puisque $F(z) \in \mathfrak{M}$ résulte que

$$R_e T(h) \geqq 0.$$

La fonction $T(h) \in L_1$. En effet, si l'on désigne par M le max $|F(z)|$ sur $|z| = r$, on a

$$|T(h)| = \left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| . |F(r e^{i\alpha})| \leqq M\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \in L_1.$$

De (2.4.4) résulte

$$h(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(y)\,dy,$$

d'où pour $x = \nu =$ entier positif ou nul, on a

$$h(\nu) = \frac{1}{2}(a_\nu r^\nu + a_{\nu-1} r^{\nu-1}),$$

$$h(0) = \frac{1}{2}.$$

En appliquant le théorème 1.4.9 à la fonction $h(x)$ on trouve

2.4.5.

$$|h(x)| + |h(-x)|[\cos\{\arg h(x) + \arg h(-x)\}] \leqq 2 R_e h(0) = 1, \quad \text{partout.}$$

Mais on constate que pour $x \leqq -1$ on a $h(x) = 0$. Par conséquent pour une valeur de $x = \nu$ entière, supérieure, ou égale à 1, de (2.4.5) résulte

$$|h(\nu)| \leqq 1,$$

d'où en passant à la limite pour $r = 1$, on trouve

2.4.6.

$$|a_{\nu-1} + a_\nu| \leqq 2.$$

L'égalité dans (2.4.6) a lieu dans le cas où $F(z) = \frac{1}{1-z}$.

De (2.4.6) résulte par récurrence :

$$|a_\nu| \leqq 2\nu + 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Le théorème est démontré.

2.4.7. **Théorème.** — *Si* $F(z) \in \mathfrak{M}$ *et* $F(r) \underset{r=1-0}{\sim} \frac{C}{1-r}$, *alors*

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2} \sim Cn \qquad (n = \infty).$$

Démonstration. — Posons

$$a_n = \lambda_n + i\mu_n \qquad \text{et} \qquad C = C_1 + iC_2.$$

On a

$$F(r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n r^n + i\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n r^n$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n r^n \underset{r=1-0}{\sim} \frac{C_1}{1-r}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n r^n \underset{r=1-0}{\sim} \frac{C_2}{1-r}.$$

Puisque $F(z) \in \mathfrak{M}$, on a d'après (2.4.3)

$$|a_n + a_{n-1}| = |\lambda_n + \lambda_{n-1} + i(\mu_n + \mu_{n-1})| \leqq 2,$$

d'où

$$|\lambda_{n-1} + \lambda_n| \leqq 2, \qquad |\mu_n + \mu_{n-1}| \leqq 2.$$

Posons

$$A_n = 2 - \lambda_n - \lambda_{n-1}, \qquad B_n = 2 - \mu_n - \mu_{n-1}.$$

On trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n = \frac{2}{1-r} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n r^n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{n-1} r^n \sim \frac{2(1-C_1)}{1-r} \qquad (r = 1-0).$$

Puisque $A_n \geqq 0$, on a $1 - C_1 \geqq 0$. Nous pouvons supposer que $1 - C_1 > 0$. Car si $1 - C_1 = 0$ nous n'avons qu'à considérer et continuer la démonstration avec la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2 + \lambda_n + \lambda_{n-1}) r^n \sim \frac{2(1+C_1)}{1-r} = \frac{4}{1-r} \qquad (r = 1-0)$$

et arriver au même résultat.

Revenons donc à la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n$ et appliquons-lui le théorème 2.4.1. On trouve

2.4.8.

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1} + \frac{\lambda_n}{2} \sim n C_1 \qquad (n = \infty).$$

De même en considérant la série $\sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n$, on trouve

2.4.9.

$$\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{n-1} + \frac{\mu_n}{2} \sim n C_2 \qquad (n = \infty).$$

En combinant (2.4.8) et (2.4.9) on arrive à la conclusion désirée.

Exemple. — Nous allons donner un exemple d'une fonction qui appartient à à la classe $\mathfrak{M}$ et pour laquelle la conclusion du théorème 2.4.1 n'est pas vraie.

Les fonctions $\frac{1}{1-z}$ et $\frac{1}{(1+z)^2}$ appartenant à $\mathfrak{M}$, il résulte de la propriété 2° des fonctions de cette classe, que la fonction

$$G(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1+z)^2}\right]$$

appartient aussi à $\mathfrak{M}$.

On a

$$G(r) \underset{r=1-0}{\sim} \frac{1}{2(1-r)}.$$

La fonction $G(z)$ est l'exemple cherché. En effet, on trouve

$$G(z) = 1 - \frac{1}{2}z + 2z^2 - \frac{3}{2}z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

$$a_{2p} = p + 1, \qquad a_{2p+1} = -\left(p + \frac{1}{2}\right).$$

Pour $n = 2p$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{3}{2}p + 1, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{3}{4}.$$

Pour $n = 2p + 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{p+1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{4}.$$

On en conclut que $S_n \not\sim \frac{n}{2}$ lorsque $n = \infty$.

2.4.10. *Définition de la classe $\mathfrak{N}$.* — La fonction $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ de la variable complexe, $z = re^{i\alpha}$ appartient à la classe $\mathfrak{N}$, si quel que soit α et à partir d'une certaine valeur de r, soit $0 \leqq r_0 \leqq r < 1$:

1° $F(z)$ est régulière dans $|z| < 1$;

2° $R_e F(z) + \frac{1+r}{1-r} \mathcal{J} F(z) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geqq 0$.

La classe $\mathfrak{N}$ n'est pas vide. Les fonctions

$$z, \quad \frac{z}{1+z}, \quad \frac{z}{1-z}, \quad \frac{z}{(1-z)^2}, \quad \frac{z}{(1+z)^2}$$

y appartiennent.

Propriété des fonctions de la classe $\mathfrak{N}$. — Si $F_1(z) \in \mathfrak{N}$, $F_2(z) \in \mathfrak{N}$ et λ et μ sont deux nombres positifs, alors

$$\frac{\lambda F_1 + \mu F_2}{\lambda + \mu} \in \mathfrak{N}.$$

2.4.11. **Théorème.** — *Si* $F(z) \in \mathfrak{N}$, *alors*

$$|a_{n+2} - a_n| \leqq 2 \qquad \text{et} \qquad |a_n| \leqq n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Démonstration. — Posons

$$A_n = a_{n+1} - a_n, \qquad F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n,$$

$$F(z) = P(r, \alpha) + iQ(r, \alpha) = P + iQ, \qquad F_1(z) = P_1(r, \alpha) + iQ_1(r, \alpha) = P_1 + iQ_1.$$

On a

$$F_1(z) = \frac{F(z)(1-z)}{z}.$$

La fonction $F_1(z)$ appartient à la classe $\mathfrak{M}$. En effet on a

$$P_1 = \frac{P(\cos\alpha - r) + Q\sin\alpha}{r}, \qquad Q_1 = \frac{Q(\cos\alpha - r) - P\sin\alpha}{r},$$

d'où, puisque $F(z) \in \mathfrak{N}$, résulte

$$P_1 \geqq Q_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

On en conclut que $F_1(z) \in \mathfrak{M}$.

Par conséquent, d'après le théorème 2.4.3, on a

$$|A_n + A_{n+1}| = |a_{n+2} - a_n| \leqq 2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

d'où par récurrence

2.4.12.
$$|a_n| \leqq n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

l'égalité dans (2.4.12) a lieu dans le cas où

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Le théorème est ainsi établi.

CHAPITRE III.

La classe $\mathfrak{T}(p)$ de fonctions typiquement réelles d'ordre p.

La classe $\mathfrak{T}(p)$ a été introduite, pour la première fois par M. S. Robertson [12]. Il s'agit essentiellement des fonctions

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad (z = r e^{i\theta}),$$

aux coefficients réels, régulières dans $|z| < 1$ et telles que $\mathcal{J}F(z)$ change de signe $2p$ fois sur la circonférence $|z| = r$, et ceci, à partir d'une certaine valeur de r soit $0 \leqq r_0 \leqq r < 1$. Cette classe de fonctions est une généralisation naturelle de la classe $\mathfrak{T}$ de fonctions « typiquement réelles » introduites par M. W. Rogosinski [13].

La classe $\mathfrak{T}(p)$ a été également étudiée par MM. A. W. Goodman et S. Robertson [8].

Dans ce qui suit, nous nous occupons de la sommabilité des séries de coefficients d'une fonction de la classe $\mathcal{C}(p)$. Plus précisément nous généralisons, pour les fonctions de cette classe, le théorème de M. S. Mandelbrojt, déjà cité dans (2.2.4) et nous obtenons une nouvelle estimation des coefficients de ces fonctions.

Voici d'abord quelques définitions et lemmes préliminaires d'après le travail de MM. A. W. Goodman et S. Robertson [8].

3.1. Quelques propositions préliminaires.

3.1.1. *Définition.* — On dit qu'une fonction harmonique $U(r, \delta)$ change de signe à $\delta = \delta_j$, s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour $0 < d < \varepsilon$, on ait

3.1.2.
$$U(r, \delta_j + d)\, U(r, \delta_j - d) < 0.$$

Notons que dans (3.1.2), r est constant et que δ_j qui est fixe pour une fonction donnée $U(r, \delta)$ et un r donné, dépend en général de r.

3.1.3. *Définition.* — Si $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} z^n$ est une fonction régulière dans $|z| < 1$, on dit que $\mathcal{I}F(z) = U(r, \delta)$ change q fois de signe sur la circonférence $|z| = r$, s'il existe q valeurs $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q$ de δ, telles que :

a. L'inégalité (3.1.2) a lieu pour tous les $\delta_j (j = 1, 2, \ldots, q)$;

b. $\delta_j \not\equiv \delta_k \pmod{2\pi}$ si $j \neq k$.

c. Si δ_s est une valeur de δ à laquelle $U(r, \delta)$ change de signe, alors, pour une des valeurs $\delta_j (j = 1, 2, \ldots, q)$, on a $\delta_s \equiv \delta_j \pmod{2\pi}$.

3.1.4. Lemme. — *Si* $U_1(r, \delta)$ *et* $U_2(r, \delta)$ *changent de signe à* δ_j *alors le produit* $U_1(r, \delta)\, U_2(r, \delta)$ *ne peut pas changer de signe à* δ_j. *Si* $U_1(r, \delta)$ *change de signe à* δ_j *et si* $U_2(r, \delta)$ *ne change pas de signe à* δ_j *alors le produit change de signe à* δ_j.

3.1.5. Lemme. — *Si* $F(z)$ *est régulière dans* $|z| \leqq 1$, *alors pour tout* r : $0 < r \leqq 1$, $\mathcal{I}F(z)$ *change de signe un nombre pair de fois.*

3.1.6. *Définition.* — La fonction $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} z^n$ appartient à la classe $\mathcal{C}_1(p)$, où p entier positif, si :

a. $F(z)$ est régulière dans $|z| \leqq 1$ et tous les coefficients $C_n^{(p)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont réels.

b. $\mathcal{I}F(z)$ change $2p$ fois de signe sur la circonférence $|z| = 1$.

3.1.7. *Définition.* — La fonction $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} z^n$ appartient à la classe $\mathcal{C}_2(p)$ où p entier positif, si :

a. $F(z)$ est régulière dans $|z| < 1$ et tous les coefficients $C_n^{(p)}$ sont réels.

b. Il existe un nombre $r_0 < 1$ tel que pour tout $r(r_0 < r < 1)$, $\mathcal{J}F(z)$ change $2p$ fois de signe sur $|z| = r$.

3.1.8. *Définition.* — Posons

$$\mathfrak{C}(p) = \mathfrak{C}_1(p) \cup \mathfrak{C}_2(p).$$

Toute fonction qui appartient à la classe $\mathfrak{C}(p)$ sera par définition « typiquement réelle d'ordre p ».

3.1.9. LEMME. — *Si* $F(z) \in \mathfrak{C}_2(p)$ *alors* $F(rz) \in \mathfrak{C}_1(p)$ *pour tout* $r(r_0 < r < 1)$.

3.1.10. LEMME. — *Si* $F(z) \in \mathfrak{C}_1(p)$ *alors* $\mathcal{J}F(e^{i\delta})$ *change de signe à* $\delta = 0$ *et* $\delta = \pi$.

Si $\mathcal{J}F(e^{i\delta})$ *change de signe à* δ_j *elle change aussi de signe à* $-\delta_j$.

3.2. GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME 2.2.4 DE M. S. MANDELBROJT. — Citons d'abord un théorème et une remarque de M. S. Mandelbrojt [10] qui lui ont servi pour établir son théorème 2.2.4 et que nous utiliserons dans la suite.

3.2.1. THÉORÈME. — *Soit* $P_m(\delta) = \sum_{k=0}^{m} A_k \cos k\delta$ *un polynome trigonométrique tel que :*

a. $P_m(\delta) \geqq 0 \ (0 \leqq \delta \leqq 2\pi)$;

b. $P_m(0) = P_m(2\pi) = 0$.

En posant

$$s_j = \sum_{k=0}^{j} A_k, \qquad S_j = \sum_{k=0}^{j} s_k \qquad (j = 0, 1, \ldots, m).,$$

On a l'inégalité suivante :

3.2.2.

$$0 \leqq |S_m - S_j| - (S_m - S_j) \leqq S_j \leqq 2S_m.$$

Remarque : Le théorème précédent se généralise aux séries de Fourier, $P(\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k\delta$ *à condition que* $\sum n|s_n|$ *converge.*

Généralités et notations. — Si $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} z^n$ appartient à la classe $\mathfrak{C}(p)$ et si $(r, \delta_i^{(r)})$ désigne, en coordonnées polaires, un point de la circonférence $|z| = r$, différent des $(r, 0)$ et (r, π), où $\mathcal{J}F(z)$ change de signe, nous désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points d'accumulation de tous les points $(r, \delta_i^{(r)})$ sur $|z| = 1$, lorsqu'on fait tendre r vers 1.

Si $(1, \delta) \in \mathcal{E}$, on pose $\gamma = \cos \delta$.

Donnons-nous un nombre $r (r_0 \leqq r < 1)$ et posons $z = r\zeta$. On a

$$F(r\zeta) = \Phi_r(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} r^n \zeta^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \zeta^n,$$

où l'on a posé

$$C_n^{(p)} r^n = b_n^{(r)} \qquad \text{et} \qquad \zeta = \rho\, e^{i\delta}.$$

D'après le lemme 3.1.9., $\Phi_r(\zeta) \in \mathcal{T}_1(p)$. D'après le lemme 3.1.10, la quantité

$$\mathcal{I}\, \Phi_r(e^{i\delta}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \sin n\, \delta$$

change de signe aux points suivants :

$$0, \quad \delta_1^{(r)}, \quad \delta_2^{(r)}, \quad \ldots, \quad \delta_{p-1}^{(r)}, \quad \pi, \quad 2\pi - \delta_{p-1}^{(r)}, \quad 2\pi - \delta_{p-2}^{(r)}, \quad \ldots, \quad 2\pi - \delta_2^{(r)}, \quad 2\pi - \delta_1^{(r)},$$

où les $\delta_i^{(r)} (i = 1, 2, \ldots, p-1)$ sont des nombres positifs compris entre 0 et π et dépendent en général de r.

Remarquons qu'on peut toujours supposer que la quantité $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \sin n\delta$ reste de même signe, par exemple positive, pour $0 < \delta < \delta_1^{(r)}$, et pour tout $r (r_0 \leqq r < 1)$. En effet si cette hypothèse n'est pas réalisable on peut toujours trouver une suite $\{r_i\}$ tendant vers 1, pour laquelle on ait

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r_i)} \sin n\, \delta > 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < \delta < \delta_1^{(r_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dans ce cas-là, les raisonnements qui vont suivre (passage à la limite pour $r = 1$) seraient également valables, si au lieu d'avoir tous les $r (r_0 \leqq r < 1)$ on avait seulement la suite $\{r_i\}$. Posons

$$K_p^{(\delta)} = 2^p \sin\frac{\delta}{2} \sin\frac{\delta_1^{(r)} - \delta}{2} \ldots \sin\frac{\delta_{p-1}^{(r)} - \delta}{2} \sin\frac{\pi - \delta}{2} \sin\frac{2\pi - \delta_{p-1}^{(r)} - \delta}{2} \ldots \sin\frac{2\pi - \delta_1^{(r)} - \delta}{2}.$$

On constate facilement que

3.2.3.

$$K_p^{(\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \sin n\, \delta \geqq 0 \qquad (0 \leqq \delta \leqq 2\pi).$$

Dans le cas où $F(z) \in \mathcal{T}(1) = \mathcal{T}$ on trouve $K_1^{(\delta)} = \sin\delta$ et de (3.2.3) résulte l'inégalité

$$\sin\delta\, \mathcal{I}\, F(\delta) \geqq 0$$

qui est équivalente à la relation (2.2.1) qui caractérise les fonctions de la classe $\mathcal{T}$.

3.2.4. *Définition.* — Nous dirons qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est $\mathfrak{M}$-sommable, s'il existe un $\lambda \geqq 0$, tel que, si l'on pose $\sigma_j = \sum_{k=1}^{j} a_k (j = 1, 2, \ldots)$ la limite

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1} + \frac{\sigma_n}{2}}{n} + \lambda \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_{n-1}}{n} \right]$$

existe, est finie et différente de zéro.

Le cas $\lambda = 0$ correspond au théorème 2.2.4.

Nous allons maintenant généraliser le théorème 2.2.4, dans le cas des fonctions de la classe $\mathfrak{T}(2)$, la méthode à suivre étant la même dans le cas où $p > 2$.

3.2.5 Théorème. — *Hypothèses :* $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} z^n \in \mathfrak{T}(2)$; *la limite*

$$\lim_{r=1-0} F(r) = F(1)$$

existe, est finie et différente de zéro; posons

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{i} C_k^{(2)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Conclusions : a. Un des trois cas suivants se présente :

1° *Il existe au moins un point de $\mathcal{E}$ tel que* $\gamma \neq 1$, $2F(1)(1-\gamma) - C_1^{(2)} \neq 0$, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)}$ *est $\mathfrak{M}$-sommable et sa somme est* $F(1)$.

2° *Il existe un seul point de $\mathcal{E}$ tel que* $\gamma \neq 1$ *et*

$$F(1) = \frac{C_1^{(2)}}{2(1-\gamma)}.$$

3° *On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{(n+1)(n+2)} = \int_0^1 dx \int_0^x \left[F(t) + \frac{F(t)}{t} - C_1^{(2)} \right] dt.$$

b. Pour tout point $(1, \delta) \in \mathcal{E}$, *on a*

1° $\quad |C_{n+2}^{(2)} - C_{n-2}^{(2)} - 2\gamma(C_{n+1}^{(2)} - C_{n-1}^{(2)})| \leqq 2(C_2^{(2)} - 2\gamma C_1^{(2)}) \qquad (n = 0, 2, 3, \ldots);$

2° $\quad |C_3^{(2)} + C_1^{(2)} - 2\gamma C_2^{(2)}| \leqq 2(C_2^{(2)} - 2\gamma C_1^{(2)}).$

Démonstration. — Pour $p = 2$, et si l'on pose $\cos \delta_1^{(r)} = \gamma_r$, on a

3.2.6.

$$V(\delta) = K_2^{(\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \sin n\,\delta = \sin\delta(\cos\delta - \gamma_r) \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(r)} \sin n\,\delta \geqq 0.$$

On trouve

3.2.7.

$$4V(\delta) = b_2^{(r)} - 2\gamma_r b_1^{(r)} + (b_3^{(r)} + b_1^{(r)} - 2\gamma_r b_2^{(r)}) \cos\delta$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [b_{n+2}^{(r)} - b_{n-2}^{(r)} - 2\gamma_r (b_{n+1}^{(r)} - b_{n-1}^{(r)})] \cos n\,\delta,$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 4V(\delta)\,d\delta = b_2^{(r)} - 2\gamma_r b_1^{(r)} \geqq 0.$$

On a aussi pour $n = 0, 2, 3, \ldots$ (sauf pour $n = 1$)

$$\int_0^{2\pi} 4V(\delta)(1 \pm \cos n\,\delta)\,d\delta = 2\pi(b_2^{(r)} - 2\gamma_r b_1^{(r)}) \pm [b_{n+2}^{(r)} - b_{n-2}^{(r)} - 2\gamma_r (b_{n+1}^{(r)} - b_{n-1}^{(r)})] \geqq 0,$$

d'où

$$|b_{n+2}^{(r)} - b_{n-2}^{(r)} - 2\gamma_r (b_{n+1}^{(r)} - b_{n-1}^{(r)})| \leqq 2(b_2^{(r)} - 2\gamma_r b_1^{(r)}) \qquad (n = 0, 2, 3, \ldots).$$

En multipliant les deux membres de (3.2.7) par $(1 \pm \cos\delta)$ et en intégrant de 0 à 2π, on trouve

$$|b_3^{(r)} + b_1^{(r)} - 2\gamma_r b_2^{(r)}| \leqq 2(b_2^{(r)} - 2\gamma_r b_1^{(r)}).$$

Soit $(1, \delta)$ un point de $\mathcal{E}$. Si, dans les deux dernières inégalités, on fait tendre r vers 1 suivant une suite de valeurs correspondant au point d'accumulation en question on arrive à la conclusion b.

Posons

$$A_0 = b_2^{(r)} - 2\gamma_r b_1^{(r)}, \qquad A_1 = b_3^{(r)} + b_1^{(r)} - 2\gamma_r b_2^{(r)}, \qquad A_n = b_{n+2}^{(r)} - b_{n-2}^{(r)} - 2\gamma_r (b_{n+1}^{(r)} - b_{n-1}^{(r)})$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

L'égalité (3.2.6) s'écrit

3.2.8.

$$4V(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\,\delta.$$

Posons

$$s_j^{(r)} = A_0 + A_1 + \ldots + A_j \qquad \text{et} \qquad S_j^{(r)} = s_0^{(r)} + s_1^{(r)} + \ldots + s_j^{(r)}.$$

On trouve pour $n = 1, 2, \ldots,$

$$s_n^{(r)} = b_{n-1}^{(r)} + b_n^{(r)} + b_{n+1}^{(r)} + b_{n+2}^{(r)} - 2\gamma_r (b_n^{(r)} + b_{n+1}^{(r)}).$$

On constate facilement que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|s_n^{(r)}| < +\infty.$$

D'autre part, d'après (3.2.6), on a

$$V(0) = V(2\pi) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(\delta) \geqq 0 \qquad (0 \leqq \delta \leqq 2\pi).$$

Par conséquent le théorème 3.2.1 est applicable à (3.2.8). On trouve, en posant $\sigma_i^{(r)} = \sum_{k=1}^{i} b_k^{(r)}$:

3.2.9.

$$S_n^{(r)} = \sigma_{n-1}^{(r)} + \sigma_n^{(r)} + \sigma_{n+1}^{(r)} + \sigma_{n+2}^{(r)} - 2\gamma_r(\sigma_n^{(r)} + \sigma_{n+1}^{(r)}) - 2b_1^{(r)} \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous allons maintenant, dans (3.2.9) faire tendre r vers 1, et distinguer différents cas, selon la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$.

Premier cas : $\mathcal{E}$ contient un seul point tel que $\gamma \neq 1$ et $2F(1)(1-\gamma) - C_1^{(2)} \neq 0$. De (3.2.9) en passant à la limite pour $r = 1$, résulte

$$S_n = \sigma_{n-1} + \sigma_n + \sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} - 2\gamma(\sigma_n + \sigma_{n+1}) - 2C_1^{(2)} \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$. On a

$$\lim_{x=1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = 4F(1)(1-\gamma) - 2C_1^{(2)}.$$

Par conséquent

$$4F(1)(1-\gamma) - 2C_1^{(2)} > 0.$$

En appliquant le théorème 2.4.1 à la série $\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$, on trouve

3.2.10.

$$\lim_{n=\infty} \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1} + \dfrac{\sigma_n}{2}}{n} + \frac{1}{4n(1-\gamma)}(\sigma_{n+1} - \sigma_{n-1}) \right] = F(1).$$

Deuxième cas : $\mathcal{E}$ contient un seul point tel que $\gamma \neq 1$ et $2F(1)(1-\gamma) - C_1^{(2)} = 0$. Dans ce cas, on n'a que l'égalité évidente :

$$F(1) = \frac{C_1^{(2)}}{2(1-\gamma)}.$$

Troisième cas : $\mathcal{E}$ Contient un seul point tel que $\gamma = 1$.
De (3.2.9) résulte :

3.2.11.

$$S_n = C^{(2)}_{n+2} - C^{(2)}_n - 2C^{(2)}_1 \geqq 0.$$

On trouve comme précédemment

$$\lim_{x=1-0} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = -2C^{(2)}_1$$

et puisque $S_n \geqq 0$, on a $C^{(2)}_1 \leqq 0$.

Supposons d'abord $C^{(2)}_1 = 0$. On a

3.2.12.

$$S_n = C^{(2)}_{n+2} - C^{(2)}_n \geqq 0.$$

De (3.2.12) pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, on trouve

$$\begin{aligned}
&C^{(2)}_2 \geqq 0,\\
&C^{(2)}_3 \geqq C^{(2)}_1 = 0,\\
&C^{(2)}_4 \geqq C^{(2)}_2 \geqq 0,\\
&C^{(2)}_5 \geqq C^{(2)}_3 \geqq C^{(2)}_1 \geqq 0,\\
&C^{(2)}_{n+2} \geqq C^{(2)}_n \geqq C^{(2)}_{n-2} \geqq \ldots \geqq 0.
\end{aligned}$$

On constate donc que $C^{(2)}_i \geqq 0 \; (i = 1, 2, 3, \ldots)$ et que les coefficients dont les indices sont de même parité, ne décroissent pas lorsque n croît indéfiniment. Les possibilités qui se présentent sont donc les suivantes :

a. $$C^{(2)}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

b. $$\sum_{i=1}^{\infty} C^{(2)}_i = +\infty.$$

c. A partir d'une certaine valeur de i, les C_i sont nuls.

Les cas *a* et *b* entraînent respectivement $F(1) = 0$, $F(1) = +\infty$, ce qui contredit notre hypothèse. Le cas *c* entraîne que $F(z)$ est un polynome.

3.2.13. *On en conclut que les seules fonctions de la classe $\mathfrak{C}(2)$ pour lesquelles l'ensemble correspondant $\mathcal{E}$ contient un point avec $\gamma = 1$ et $C^{(2)}_1 = 0$ sont des polynomes (si cette sous-classe n'est pas vide).*

Supposons maintenant que $C^{(2)}_1 < 0$.

L'inégalité (3.2.11) s'écrit

$$S_n = 2|C^{(2)}_1| + C^{(2)}_{n+2} - C^{(2)}_n \geqq 0.$$

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2|C^{(2)}_1| + C^{(2)}_{n+2} - C^{(2)}_n] x^n \underset{x=1-0}{\sim} \frac{2|C^{(2)}_1|}{1-x}.$$

En appliquant le théorème 2.4.1, on trouve

3.2.14.

$$\lim_{n=\infty} \frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{n} = 0.$$

On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)})\, x^n = F_1(x) = \left[F(x) + \frac{F(x)}{x} - C_1^{(2)} \right].$$

En intégrant les deux membres de cette égalité de 0 à $x (0 < x < 1)$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{n+1}\, x^{n+1} = \int_0^x F_1(t)\, dt = \int_0^x F(t)\, dt + \int_0^x \frac{F(t)}{t}\, dt - C_1^{(2)} x = F_2(x).$$

En intégrant de nouveau les membres de cette égalité de 0 à $x (0 < x < 1)$, on trouve

$$F_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{(n+1)(n+2)}\, x^{n+2} = \int_0^x F_2(t)\, dt.$$

La fonction $F_2(x)$ étant bornée et intégrable sur le segment $[0, 1]$, la fonction $F_3(x)$ est continue sur $[0, 1]$ et la limite $\lim\limits_{x=1-0} F_3(x)$ existe. On a

$$\lim_{x=1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{(n+1)(n+2)}\, x^{n+2} = \lim_{x=1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{(n+1)(n+2)}\, x^n = \lim_{x=1-0} F_3(x) = F_3(1).$$

D'autre part, de (3.2.14) résulte que

$$\frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{(n+1)(n+2)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n = \infty).$$

Par conséquent, d'après le théorème de Tauber, on a

3.2.15.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^{(2)} + C_{n+1}^{(2)}}{(n+1)(n+2)} = F_3(1) = \int_0^1 dx \int_0^x \left(F(t) + \frac{F(t)}{t} - C_1^{(2)} \right) dt.$$

Il est évident que (3.2.15) est encore vraie lorsque $F(z)$ est un polynome.

Quatrième cas : $\mathcal{E}$ contient au moins deux points tels que

$$\gamma_1 \neq 1, \qquad \gamma_2 \neq 1, \qquad \gamma_1 \neq \gamma_2,$$
$$2F(1)(1-\gamma_1) - C_1^{(2)} \neq 0, \qquad 2F(1)(1-\gamma_2) - C_1^{(2)} \neq 0.$$

Si dans (3.2.9) on fait tendre r vers 1 suivant deux suites $\{r'_n\}$ et $\{r''_n\}$ correspondant aux deux points d'accumulation en question, on trouve

$$S'_n = \sigma_{n-1} + \sigma_n + \sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} - 2\gamma_1(\sigma_n + \sigma_{n+1}) - 2C_1^{(2)} \geqq 0,$$
$$S''_n = \sigma_{n-1} + \sigma_n + \sigma_{n+1} + \sigma_{n+2} - 2\gamma_2(\sigma_n + \sigma_{n+1}) - 2C_1^{(2)} \geqq 0.$$

En considérant les séries $\sum_{n=0}^{\infty} S'_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} S''_n x^n$ et en opérant comme dans le premier cas on trouve

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{n-1}+\frac{\sigma_n}{2}}{n}+\frac{1}{4(1-\gamma_1)}\,\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_{n-1}}{n}\right]=F(1),$$

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{n-1}+\frac{\sigma_n}{2}}{n}+\frac{1}{4(1-\gamma_2)}\,\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_{n-1}}{n}\right]=F(1).$$

En comparant ces deux relations, on trouve

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_{n-1}}{n}=0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{n-1}+\frac{\sigma_n}{2}}{n}=F(1).$$

Cinquième cas : $\mathcal{E}$ contient seulement deux points tels que

$$\gamma_1\neq 1,\qquad \gamma_2\neq 1,$$
$$2F(1)(1-\gamma_1)-C_1^{(2)}=0,\qquad 2F(1)(1-\gamma_2)-C_1^{(2)}>0.$$

En opérant comme dans le premier cas, on trouve

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_{n-1}+\frac{\sigma_n}{2}}{n}+\frac{1}{4(1-\gamma_2)}\,\frac{\sigma_{n+1}-\sigma_{n-1}}{n}\right]=F(1)=\frac{C_1^{(2)}}{2(1-\gamma_1)}.$$

Sixième cas : $\mathcal{E}$ contient seulement deux points tels que

$$\gamma_1\neq 1,\qquad \gamma_2=1,$$
$$2F(1)(1-\gamma_1)-C_1^{(2)}=0,\qquad 2F(1)(1-\gamma_2)-C_1^{(2)}>0.$$

Il est évident qu'on peut se ramener au troisième cas et démontrer que (3.2.15) a lieu.

On constate maintenant que la série $\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(2)}$ est $\mathfrak{M}$-sommable, dans les premier, quatrième et cinquième cas. En effet, les valeurs de λ qui correspondent respectivement à ces trois cas, sont :

$$\lambda=\frac{1}{4}(1-\gamma),\qquad \lambda=0,\qquad \lambda=\frac{1}{4}(1-\gamma_2).$$

Dans le troisième cas et le sixième cas la relation (3.2.15) a lieu.

Le deuxième cas est le cas trivial.

Le théorème est démontré.

3.2.16. *Discussion des résultats obtenus.* — MM. A. W. Goodman et S. Robertson ont démontré [8] le théorème suivant :

3.2.17. THÉORÈME. — *Si* $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(p)} z^n \in \mathfrak{T}(p)$, *on a pour* $n > p$:

3.2.18.
$$|C_n^{(p)}| \leq \sum_{k=1}^{p} D(p, k, n)\,|C_k^{(p)}|,$$

où

$$D(p, k, n) \equiv \frac{2k(n+p)\,!}{(p+k)\,!\,(p-k)\,!\,(n-p-1)\,!\,(n^2-k^2)},$$

l'égalité dans (3.2.18) *ayant lieu pour toutes les variables*

$$|C_1^{(p)}|, \quad |C_2^{(p)}|, \quad \ldots, \quad |C_p^{(p)}|.$$

C'est-à-dire à tout ensemble $|C_k^{(p)}|\,(k=1, 2, \ldots, p)$ *non tous zéro, correspond une fonction* $F(z) \in \mathfrak{T}(p)$ *pour laquelle l'égalité dans* (3.2.18) *a lieu.*

Remarquons que les inégalités qui figurent dans la conclusion b du théorème 3.2.5 fournissent des estimations de coefficients plus précises que celles données par (3.2.18). Ceci provient du fait que les inégalités en question contiennent la quantité γ.

Par exemple, si dans (3.2.18) on pose $p=2$ et $n=3$, on trouve

3.2.19.
$$|C_3^{(2)}| \leq 5\,|C_1^{(2)}| + 4\,|C_2^{(2)}|,$$

tandis que l'inégalité 2° de la conclusion b donne

3.2.20.
$$|C_3^{(2)}| \leq 5\,|\gamma|\,|C_1^{(2)}| + 2\,|C_2^{(2)}|\,(1+|\gamma|).$$

De la comparaison des (3.2.19) et (3.2.20) résulte la proposition intéressante suivante :

3.2.21. *Pour que l'égalité dans* (3.2.19) *ait lieu, il faut que l'ensemble* $\mathcal{E}$ *contienne le point* $(1, 0)$ *ou* $(1, \pi)$.

En effet supposons que

$$|C_3^{(2)}| = 5\,|C_1^{(2)}| + 4\,|C_2^{(2)}|$$

et que $(1, 0) \notin \mathcal{E}$ et $(1, \pi) \notin \mathcal{E}$.

On aura $|\gamma| < 1$. En remplaçant dans (3.2.20) $|C_3^{(2)}|$ par $5\,|C_1^{(2)}| + 4\,|C_2^{(2)}|$, on trouve

$$5\,|C_1^{(2)}| + 2\,|C_2^{(2)}| \leq 0, \qquad \text{d'où} \qquad C_1^{(2)} = C_2^{(2)} = 0$$

et d'après la conclusion b du théorème 3.2.5 on trouve $C_i^{(2)} = 0\,(i=1, 2, \ldots)$, ce qui contredit l'hypothèse que la $\lim\limits_{r=1=0} F(r) \neq 0$.

Le cas où l'ensemble $\mathcal{E}$ contient le point $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ est particulièrement remarquable. On a dans ce cas $\gamma = 0$, et de l'inégalité 1° de b résulte pour $n \geqq 2$,

$$|C_{n+2}^{(2)} - C_{n-2}^{(2)}| \leqq 2 C_2^{(2)}.$$

La fonction $F(z) = -\frac{z}{(1+\mu z)^3}$, $\left(\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ est un exemple de fonction de cette catégorie.

Les remarques précédentes mettent en évidence le rôle important que la connaissance de l'ensemble $\mathcal{E}$, associé à une fonction de la classe $\mathfrak{T}(p)$, joue dans la recherche des estimations des coefficients de cette fonction.

3.3 Quelques théorèmes sur les fonctions de la classe $\mathfrak{T}$. — Pour terminer ce chapitre, nous démontrons trois théorèmes, concernant les fonctions typiquement réelles, dont les deux premiers fournissent des expressions asymptotiques des coefficients tandis que le dernier donne une condition suffisante, très simple, pour que la série des coefficients d'une fonction de la classe $\mathfrak{T}$ soit sommable par le procédé de sommation de Cesaro.

3.3.1. Théorème. — *Hypothèses* : $F(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{T}$, $(z = re^{i\alpha})$; $F(r) \underset{r=1-0}{\sim} \frac{1}{1-r}$; *posons*

$$s_n = 1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{k} \sim n \qquad (n = \infty).$$

Démonstration. — On sait que [13]

$$|a_{n+2} - a_n| \leqq 2 \qquad (n = 0, 1, 2, \quad \ldots).$$

On trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2 + a_n - a_{n-2}) r^n \underset{r=1-0}{\sim} \frac{2}{1-r}.$$

D'où en appliquant le théorème 2.4.1, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{n} = 0.$$

Écrivons

$$\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{n} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{a_{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n+2}}{n+2}\right) + \frac{a_{n+2}}{n(n+2)}.$$

En faisant tendre n vers l'infini et en tenant compte du fait que l'inégalité $|a_\nu| \leqq \nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ est vraie pour les fonctions de la classe $\mathfrak{T}$, on trouve

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{n-1}+\frac{a_n}{n}\right)=0,$$

d'où

3.3.2.

$$1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\ldots+\frac{a_n}{n}=o(n) \qquad (n=\infty).$$

D'autre part on a d'après (2.2.5)

$$s_n-\frac{a_n}{2}\geqq 0.$$

On trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(s_n-\frac{a_n}{2}\right)r^n\sim\frac{1}{(1-r)^2} \qquad (r=1-0).$$

En intégrant les deux membres de cette dernière égalité asymptotique, on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(s_n-\frac{a_n}{2}\right)r^{n+1}\underset{r=1-0}{\sim}\frac{1}{1-r}.$$

En appliquant de nouveau le théorème 2.4.1, on trouve

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\right]\sim n \qquad (n=\infty)$$

d'où d'après (3.3.2) on arrive à la conclusion désirée.

3.3.3 **Théorème**, — *Hypothèses* : $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathfrak{C}$, $(z=re^{i\alpha})$; $F(r)\underset{r=1-0}{\sim}\frac{1}{1-r}$; *posons*

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, \qquad S_n=\sum_{k=1}^{n}s_k, \qquad \sigma_n=\frac{s_n}{n}.$$

Conclusion :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k}{k}\sim\frac{n}{2} \qquad (n=\infty).$$

Démonstration. — On sait que [13]

$$n+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\ldots+a_n\geqq 0,$$

d'où

$$S_n\geqq 0,$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n r^{n-1} \sim \frac{1}{(1-r)^3} \qquad (r=1-0).$$

En intégrant deux fois de suite les membres de cette égalité asymptotique on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma n}{n} r^n \sim \frac{1}{2(1-r)} \qquad (r=1-0),$$

d'où, en appliquant le théorème 2.4.1 on arrive à la conclusion désirée.

3.3.4. THÉORÈME. — *Hypothèses* : $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathfrak{G}$, $(z=re^{i\alpha})$; $\lim_{r=1-0} F(r)=s<+\infty$; $R_e F(z) \leq s$; *posons*

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Conclusion : la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *est sommable par le procédé de Cesaro :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} = s(C, 1).$$

Démonstration. — Posons

$$F(z)=P(r, \alpha)+iQ(r, \alpha)=P+iQ.$$

On a

$$\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)\, z^n = \frac{(s-P)(1-r\cos\alpha)+r\sin\alpha\, Q}{s(1-2r\cos\alpha+r^2)} + i\frac{r(s-P)\sin\alpha - Q(1-r\cos\alpha)}{s(1-2r\cos\alpha+r^2)}.$$

D'après l'hypothèse faite sur la partie réelle de $F(z)$ et du fait que $F(z) \in \mathfrak{G}$, il résulte que

$$R_e \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)\, z^n \geq 0.$$

Il en résulte que

$$\left|\frac{s-s_n}{s}\right| \leq 2 \qquad \text{ou} \qquad |s_n| \leq 3s < +\infty.$$

La conclusion du théorème est une conséquence immédiate de la proposition connue [9] suivante :

Si une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *est sommable par le procédé d'Abel :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(A) \qquad \text{et} \qquad s_n = O(1),$$

alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(\mathrm{C}, 1)$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] N. Artemiadis, *Deux théorèmes sur les fonctions appartenant à la classe* $\mathrm{L}_1(-\infty, \infty)$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. **240**, 1955, p. 1500-1502).

[2] N. Artemiadis, *Quelques théorèmes sur les transformées de Fourier et sur les coefficients des fonctions typiquement réelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **244**, 1957, p. 544-547).

[3] N. Artemiadis, *Sur les coefficients de Taylor de certaines classes de fonctions* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **244**, 1957, p. 713-715).

[4] N. Artemiadis, *Généralisation d'un théorème de M. S. Mandelbrojt* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **244**, 1957, p. 834-836).

[5] S. Bochner et Chandrasekharan, *Fourier transforms* (Princeton 1949).

[6] T. Carleman, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent* (Uppsala, 1944).

[7] J. Dieudonné, *Recherches sur quelques théorèmes relatifs aux polynomes et aux fonctions bornées d'une variable complexe* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. **48**, 1931, p. 247-358).

[8] A. W. Goodman et S. Robertson, *A class of multivalent functions* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. **70**, 1951, p. 127-136).

[9] G.-H. Hardy, *Divergent series* (Oxford, 1949).

[10] S. Mandelbrojt, *Quelques remarques sur les fonctions univalentes* (*Bull. Sc. Math.*, t. **58**, 1934).

[11] Z. Nehari, *Conformal Mapping* (New York, 1952).

[12] S. Robertson, *A representation of all analytic functions in terms of functions with positive real parts* (*Ann. Math.*, vol. **38**, 1937, p. 770-783).

[13] W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch reelle Potenzreihen* (*Math. Z.*, Bd **35**, 1932, p. 93-121).

[14] E. C. Titchmarsh, *Theory of functions*.

[15] Zygmund, *Trigonometrical series*, 1935.