ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. VRANCEANU

Sur les groupes de mouvements des espaces à connexion affine projectifs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 74, nº 3 (1957), p. 249-268

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1957_3_74_3_249_0>

SUR LES

GROUPES DE MOUVEMENTS

DES

ESPACES A CONNEXION AFFINE PROJECTIFS

PAR M. G. VRANCEANU.

Étant donné un espace à connexion affine A_n, on sait qu'il possède un groupe maximum de mouvements ayant n^2+n paramètres s'il est localement euclidien, donc si les tenseurs de torsion et de courbure sont nuls. J'ai montré en 1947 (¹), que les espaces A_n qui possèdent une forme de Pfaff invariante ont un groupe maximum de mouvements ayant n^2 paramètres et ce maximum est atteint seulement si la forme de Pfaff est une différentielle totale exacte. D'autre part, en 1949, I. P. Egorof (²) a montré qu'un espace A_n qui n'est pas localement euclidien peut admettre un groupe de mouvements ayant au plus n^2 paramètres. Il en résulte d'ailleurs que tous les espaces A_n à groupe maximum G_{n^2} sont en même temps des espaces à forme de Pfaff invariante, et si l'espace A_n est sans torsion il est projectivement euclidien. En ce qui concerne les espaces A_n qui ne sont pas projectivement euclidiens, j'ai montré qu'ils possèdent au plus un groupe de mouvements ayant $n^2-2n+5 (n \geqq 3)$ paramètres (³).

Nous allons considérer maintenant dans la première partie certaines propriétés des espaces projectivement euclidiens en ce qui concerne la possibilité de prolonger la connexion de ces espaces à l'espace projectif entier. Dans la seconde partie nous allons considérer une nouvelle voie, plus directe, pour déterminer les espaces A_n à groupe maximum G_{n^2}. Dans la troisième partie nous allons montrer qu'à chaque forme de Pfaff de classe $2p$ et d'espèce p ou

(¹) G. VRANCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, t. I, 1947, p. 255.

(²) I. P. EGOROFF, *Dokl. Akad. Nauk.*, t. 66, 1949, p. 793.

(³) G. VRANCEANU, *Sur les espaces à connexion à groupe maximum de transformations en eux-mêmes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 543).

$p+1$, on peut associer un espace A_n ayant un groupe de mouvements à $2p^2+p+(n+1)(n-2p)$ ou $2p^2+p+n(n-2p)$ paramètres, qui sont des groupes maximum compatibles avec cette forme, comme forme de Pfaff invariante. Enfin dans la dernière partie, nous considérons le groupe maximum de mouvements des espaces A_n projectivement euclidiens qui possèdent une forme quadratique de rang $m < n$.

I. On dit qu'un espace à connexion affine Δ_n est projectivement euclidien, ou simplement projectif, s'il existe un système global de coordonnées, disons $(x^1, \ldots, x^n)$, dans lesquelles les courbes autoparallèles de l'espace sont des droites. Il est alors bien connu que dans ces coordonnées « projectives » les composantes Γ^i_{jk} de la connexion supposée symétrique sont données par les formules

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \tag{1}$$

où δ^i_k est égal à 1 si $i=k$ et à 0 si $i \neq k$ et où les φ_k sont des fonctions quelconques des variables $x^1, \ldots, x^n$. Quand aux équations des courbes autoparallèles

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \Gamma^i_{jk} \frac{dx_j}{dt} \frac{dx^k}{dt},$$

elles s'écrivent, en tenant compte des formules (1),

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = 2 \frac{dx^i}{dt} \varphi_s \frac{dx^s}{dt}.$$

On peut donc satisfaire à ces équations par des formules de la forme

$$x^i = a^i u + b^i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

où la variable u est liée à t par la formule

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = 2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 (\varphi_1 a^1 + \varphi_2 a^2 + \ldots \varphi_n a^n)$$

et où dans $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, on a substitué à $(x^1, \ldots, x^n)$ leurs valeurs (2). Nous avons donc pour u comme fonction de t une équation de la forme

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \Phi(u). \tag{3}$$

En supposant la connexion (1) régulière dans tout l'espace, ce qui revient à supposer $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ régulières, par exemple fonctions analytiques entières, la fonction

$$\Phi(u) = 2(a^1 \varphi_1 + \ldots + a^n \varphi_n)$$

est une fonction analytique entière. En ce cas il est facile de voir que t est aussi une fonction entière de u. En effet, en prenant u comme variable indépendante dans l'équation (3), nous avons

$$\frac{d^2 t}{du^2} = -\frac{dt}{du}\Phi(u)$$

et, par conséquent, nous avons

$$t = \int e^{-\int \Phi(u)du} du$$

La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que u n'est pas en général une fonction entière de t. En tout cas on peut supposer dans les formules (2) que u varie de $-\infty$ à $+\infty$, donc que les droites (2) toutes entières sont des courbes autoparallèles de l'espace A_n.

Nous avons donc le théorème :

Si les fonctions φ_i sont analytiques entières, les courbes autoparallèles de l'espace projectif A_n sont les droites entières de l'espace euclidien $E_n(x^1, \ldots, x^n)$.

On peut se demander maintenant si l'espace A_n peut se prolonger dans l'espace projectif entier. Pour cela on peut remarquer en premier lieu que si l'on considère une transformation projective de coordonnées

$$x'^i = \frac{a^i_s x^s + a^i}{a^0_s x^s + a^0}, \tag{4}$$

la connexion Γ'^i_{jk} sera donnée par des formules de la même forme (1), car par une transformation projective les droites se transforment en droites. Nous aurons donc

$$\Gamma'^i_{jk} = \delta^i_j \varphi'_k + \delta^i_k \varphi'_j. \tag{5}$$

D'autre part, on sait que l'espace projectif se compose du voisinage $V(x^1, \ldots, x^n)$, donc de l'espace euclidien $E_n(x^1, \ldots, x^n)$, et de n autres voisinages, qui ont les points à l'infini sur un des axes comme origine. Considérons par exemple le voisinage $V'(x'^1, \ldots, x'^n)$ relatif à l'axe x^1. Nous avons la transformations de coordonnées

$$x'^1 = \frac{1}{x_1}, \qquad x'^2 = \frac{x^2}{x^1}, \qquad \ldots, \qquad x'^n = \frac{x^n}{x^1}. \tag{6}$$

Considérons alors la connexion contractée $\Gamma_k = \Gamma^i_{ik}$. En tenant compte des formules (1) et (5), nous avons

$$\Gamma_k = (n+1)\varphi_k, \qquad \Gamma'_k = (n+1)\varphi'_k.$$

D'autre part, on sait que la connexion contractée Γ_k se transforme, par une transformation de variables, d'après les formules ([4])

$$\Gamma'_s \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} = \Gamma_k + \frac{\partial \log \Delta}{\partial x^k},$$

où Δ est le déterminant fonctionnel de la transformation. Dans le cas de la transformation (6), le déterminant Δ est égal à $-(x^1)^{-n-1}$ de façon que nous avons la formule

$$(6') \qquad \varphi'_k\, dx'^k = \varphi_k\, dx^k - \frac{dx^1}{x^1},$$

ce qui nous donne les formules de transformation pour les quantités φ_k

$$(6'') \qquad \varphi'_1 = x^1(1 - \varphi_1 x^1 - \varphi_k x^k), \qquad \varphi'_k = x^1 \varphi_k \qquad (k > 1),$$

où l'on doit remplacer dans le second membre x^1, x^h par les valeurs déduites de (6).

En supposant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ analytiques entières, la connexion sera régulière aussi dans le voisinage V' si φ'_k, φ'_1 tendent vers des valeurs finies quand x^1 tend vers l'infini. Il faut donc que les quantités

$$\varphi_k, \quad 1 - x^i \varphi_i$$

tendent vers zéro quand la variable x^1 tend vers l'infini. Cela ne peut pas arriver si φ_i sont des polynomes mais cela arrive si l'on a, par exemple,

$$(7) \qquad \varphi_i = \frac{(x^i)^{2p-1} + P_i}{1 + (x^1)^{2p} + \ldots + (x^n)^{2p}} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où p est un nombre entier positif et où les P_i sont des polynomes dans $x^1, \ldots, x^n$ de degré $2p - 1$, mais qui ne contiennent pas de terme en $(x^i)^{2p-1}$

$$\varphi'_k = \frac{x^1((x^k)^{2p-1} + P_k)}{1 + (x^1)^{2p} + \ldots + (x^n)^{2p}}, \qquad \varphi'_1 = \frac{x^1 - (x^1)^2 P_1 - \ldots - x^1 x^k P_k}{1 + (x^1)^{2p} + \ldots + (x^n)^{2p}}$$

Ces formules nous montrent que φ'_k et φ'_1 tendent vers des valeurs finies quand x^1 tend vers l'infini.

Comme les formules (7) sont symétriques en x^i en ce qui concerne le dénominateur et le terme $(x^i)^{2p-1}$ du numérateur, la connexion (7) sera régulière aussi dans un autre voisinage de l'espace projectif, où l'on fait jouer à $x^i (i > 1)$ le rôle joué par x^1 dans les formules (6).

Nous avons donc le théorème :

La connexion affine (1) où les φ_i sont données par les formules (7) est régulière dans tout l'espace projectif.

([4]) G. Vranceanu, *Leçons de Géométrie différentielle*, t. I, 1949, p. 197.

Il est facile de voir d'ailleurs que l'on peut généraliser les formules (7) en prenant

$$(7') \qquad \varphi_i = \frac{(x^i)^{2p_i-1} + P_i}{P}, \qquad P = (x^1)^{2p_1} + \ldots + (x^n)^{2p_n} + 1,$$

où $p_1, \ldots, p_n$ sont des nombres entiers positifs et où P_i est un polynome en x^i de degré inférieur à $2p_i - 1$ et en x^k de degré inférieur à $2p_k$. On peut même prendre au lieu de P un polynome $P + Q$ où Q est en chaque variable x^i de degré inférieur à $2p_i$, le polynome $P + Q$ ne s'annulant pas.

On peut aussi remarquer que, dans le cas particulier où dans les formules (7) les P_i sont identiquement nuls, on peut écrire

$$\varphi_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2p} \log \theta \qquad [\theta = 1 + (x^1)^{2p} + \ldots + (x^n)^{2p}],$$

donc les φ_i dérivent d'un potentiel. Dans le cas particulier où $p = 1$, nous avons

$$(7'') \qquad \varphi_i = \frac{1}{2\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \qquad [\theta = 1 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]$$

et la connexion (1) nous donne, comme il est bien connu, la connexion d'un espace de Riemann à courbure positive dont l'absolu est la quadrique imaginaire $\theta = 0$.

Supposons maintenant qu'un certain nombre des composantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ soient nulles, par exemple que φ_1 est nulle, et que les autres dépendent seulement des variables $x^2, \ldots, x^n$. En ce cas, les premières formules (6′) nous disent que les φ'_k tendent vers l'infini quand x^1 tend vers l'infini, donc la connexion (1) en ce cas ne peut pas se prolonger du voisinage V au voisinage V′.

Nous aurons donc le théorème :

Étant donné une connexion (1) *régulière dans tout le voisinage* V *et dont les* $\varphi_\alpha = 0 \, (\alpha = m+1, \ldots, n)$ *et* $\varphi_i \, (i = 1, \ldots, m)$ *dépendent seulement des* x^i, *cette connexion ne peut pas se prolonger aux voisinages qui contiennent les points à l'infini des axes de coordonnées* x^α.

Si l'on considère, par exemple, la connexion (1) où

$$\varphi_i = \frac{x^i}{1 + (x^1)^2 + \ldots + (x_m)^2} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ \varphi^\alpha = 0),$$

cette connexion peut être prolongée dans tout l'espace projectif $x^1, \ldots, x^m$, mais elle ne peut être prolongée dans l'espace projectif $x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n$. On peut donc dire qu'elle peut être considérée comme une connexion de l'espace dont les droites $x^1, \ldots, x^m$ sont fermées tandis que les droites $x^{m+1}, \ldots, x^n$ sont ouvertes.

II. Considérons maintenant un espace projectif dans un système quelconque de variables. Un tel espace est caractérisé par le fait que le tenseur de courbure de Weyl est nul, donc que le tenseur de courbure de l'espace est donné par les formules

$$\Gamma^i_{jkl} = \delta^i_j \frac{P_{kl}}{n+1} + \delta^i_k \left(\frac{\Gamma_{jl}}{n-1} - \frac{P_{jl}}{n^2-1} \right) - \delta^i_l \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}}{n-1} - \frac{P_{jk}}{n^2-1} \right),$$

où P_{jk} et Γ_{jk} sont les tenseurs contractés de courbure

$$P_{jk} = \Gamma^i_{ijk}, \qquad \Gamma_{jk} = \Gamma^i_{jik}.$$

Dans les coordonnées projectives, c'est-à-dire si les formules (1) sont vérifiées, ces tenseurs sont donnés par les formules

$$P_{jk} = (n+1)\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j} \right), \qquad \Gamma_{jk} = n\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^j} + (n-1)\varphi_j \varphi_k$$

et nous avons

$$\Gamma_{jk} - \Gamma_{kj} = (n-1) P_{jk}$$

et cette formule est valable évidemment quel que soit le système de variables.

Il en résulte qu'un espace A_n projectivement euclidien possède deux tenseurs indépendants, le tenseur symétrique gauche P_{jk} et le tenseur symétrique $\Gamma_{jk} + \Gamma_{kj}$ ou, si l'on veut, le tenseur

$$g_{jk} = \frac{\Gamma_{jk} + \Gamma_{kj}}{2(n-1)}$$

et l'on voit facilement que dans des variables projectives nous avons

$$g_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} + 2\varphi_j \varphi_k \right). \tag{8}$$

Si les φ_i dérivent d'un potentiel, nous avons

$$g_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i\, \partial x^k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

On peut donc associer à un espace A_n projectif deux formes quadratiques

$$\pi = g_{ik}\, dx^j\, dx^k, \qquad \sigma = P_{jk}\, dx^j\, dx^k, \tag{8'}$$

la première étant symétrique et la seconde symétrique gauche.

On voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la forme π soit de rang 1, donc qu'elle soit formée d'un seul carré, est que nous ayons

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = 2\lambda \varphi_i \varphi_j, \tag{8''}$$

où λ est une certaine fonction des variables $x^1, \ldots, x^n$, et en ce cas la forme de Pfaff invariante est donnée par la formule

$$ds = \sqrt{\lambda + 1}\, \varphi_i\, dx^i.$$

Nous allons maintenant montrer que les g_{ij} ne peuvent pas être nulles, sans que les P_{ij} soient aussi nulles, et en ce cas l'espace est évidemment localement euclidien. En effet, si les g_{ij} sont nuls, nous devons avoir les équations

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} = -2\varphi_i \varphi_j.$$

Considérons ces équations pour deux indices quelconques, par exemple 1, 2. Nous avons

$$(9) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^1} = -\varphi_1^2, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} - 2\varphi_1\varphi_2, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} = -\varphi_2^2.$$

En écrivant que les dérivées du second ordre de la fonction φ_1 sont égales, nous obtenons, en tenant compte des équations (9),

$$2\varphi_1\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + 2\varphi_1\varphi_2\right) = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{(\partial x^1)^2} + 2\varphi_1^2\varphi^2 - 2\varphi_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1},$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial^2 \varphi^2}{(\partial x^1)^2} = -4\varphi_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} - 2\varphi_1^2\varphi_2.$$

En dérivant cette équation par rapport à x^2 et en tenant compte des équations (9) et de la dernière des équations (9) dérivée par rapport à x^1, nous avons

$$(9') \qquad \frac{\partial^3 \varphi^2}{\partial x^2 (\partial x^1)^2} = 4\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} + 2\varphi_1\varphi_2\right) + 8\varphi_1\varphi_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + 4\varphi_1\varphi_2\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + 2\varphi_1\varphi_2\right) + 4\varphi_2^1\varphi_2^2.$$

De même, la dernière équation (9) dérivée deux fois par rapport à x^1 nous donne

$$(9'') \qquad \frac{\partial^3 \varphi_2}{(\partial x^1)^2\, \partial x^2} = -2\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right)^2 + 4\varphi_2\left(2\varphi_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} + \varphi_1^2\varphi_2\right).$$

En égalant les seconds membres des équations (9′) et (9″), on obtient la condition

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1}\right)^2 + 2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 = 0,$$

ce qui nous montre qu'on doit avoir

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} = -\varphi_1\varphi_2.$$

Mais, en ce cas, la seconde équation (9) nous dit que $\frac{d\varphi_1}{dx^2}$ est aussi égale à $-\varphi_1\varphi_2$ et, par conséquent, la composante P_{12} du tenseur P_{ij} est nulle.

Comme cela est vrai pour chaque paire d'indices, nous avons le théorème :

Si le tenseur g_{ij} est nul, il en est de même du tenseur P_{ij} et l'espace A_n est localement euclidien.

Étant donné un espace A_n projectif, qui n'est pas localement euclidien, il possède donc les deux formes invariantes et π et σ, la forme π ne pouvant pas être nulle et le groupe de mouvement de l'espace doit donc conserver les deux formes π et σ. Dans le cas où la forme π n'est pas dégénérée, l'espace A_n peut être considéré comme un espace de Riemann V_n de forme fondamentale π et l'on sait qu'un tel espace peut posséder au plus un groupe ayant $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres. Pour avoir des espaces A_n ayant un groupe plus grand, on doit donc supposer que la forme π est dégénérée et le cas le plus simple est celui où cette forme quadratique contient un seul carré. Dans ce cas, on peut écrire $\pi = \varepsilon(ds^1)^2$, où $\varepsilon = \pm 1$ et ds^1 est une forme invariante et l'on dit que l'espace est à forme de Pfaff invariante. En associant en ce cas à la forme ds^1 d'autres $n-1$ formes de Pfaff $ds^2, \ldots, ds^n$ de façon que les formes $ds^1, \ldots, ds^n$ soient indépendantes il en résulte que ces formes sont déterminées, abstraction faite d'une transformation de la forme

$$(10)\qquad d\bar{s}^1 = ds^1, \qquad d\bar{s}^\alpha = c^\alpha_\beta\, ds^\beta + c^\alpha_1\, ds^1,$$

Il en résulte que le groupe de transformations en lui-même d'un espace A_n à forme de Pfaff invariante peut posséder au plus n^2 paramètres. C'est la somme du nombre n des variables x'^i et du nombre n^2-n des fonctions c^α_β, c^α_1 considérées comme fonction des $x^1, \ldots, x^n$. J'ai montré (5) que ce nombre maximum est atteint et j'ai déterminé tous les espaces A_n à groupe G_{n^2}. Je veux donner ici une nouvelle démonstration plus directe de ce résultat.

En premier lieu nous allons observer que si nous avons un espace A_n avec torsion

$$(11)\qquad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},$$

on peut former le vecteur contracté de torsion $t_k = T^i_{ik}$ et l'espace est dit équiafin si le tenseur de torsion s'écrit

$$(12)\qquad T^i_{jk} = \delta^i_j \frac{t_k}{n-1} - \delta^i_k \frac{t_j}{n-1},$$

donc si le tenseur de torsion s'exprime à l'aide du vecteur de torsion. On peut concentrer les formules (1) et les formules (12) dans une seule formule

$$(13)\qquad \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \psi_j,$$

(5) G. VRANCEANU, *Leçons de Géométrie différentielle*, t. I, p. 255.

l'espace étant sans torsion si $\varphi_k = \psi_k$. Un espace A_n avec torsion peut donc, lui aussi, avoir une forme de Pfaff invariante si le vecteur t_k n'est pas nul, c'est la forme $t_k dx^k$.

On peut manifestement observer que si un espace A_n à forme de Pfaff invariante ds^1 possède un groupe maximum G_{n^2}, la forme invariante doit être une différentielle totale exacte, car autrement le covariant bilinéaire de ds^1 impose des conditions aux fonctions c^α_β, c^α_1 du groupe (10). La forme ds^1 étant une différentielle totale exacte, on peut supposer que nous avons $ds^1 = dx^1$. De la relation $ds'^1 = dx'^1 = dx^1$, nous avons $x'^1 = x^1 + a$ et les espaces A_n à groupe G_{n^2} doivent posséder cette translation quel que soit a, donc les composantes de la connexion doivent être indépendantes de la variable x^1.

Considérons alors une transformation de variables de la forme

$$x'^1 = x^1 + a, \qquad x'^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^n). \tag{14}$$

Par cette transformation, les quantités $\Gamma^1_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 2, \ldots, n)$ sont les composantes d'un tenseur covariant du second ordre, car nous avons

$$\frac{\partial^2 x'^1}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} = 0 = \Gamma'^1_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^1}{\partial x^\beta} - \Gamma^1_{\alpha\beta}.$$

Pour les espaces à groupe G_{n^2} il faut donc que $\Gamma^1_{\alpha\beta} = 0$. De même, nous avons

$$\frac{\partial^2 x'^1}{\partial x^1 \, \partial x^\beta} = \Gamma'^1_{1s} \frac{\partial x'^s}{\partial x^\beta} - \Gamma^1_{1\beta} = 0 \tag{15}$$

et il faut donc que nous ayons aussi $\Gamma^1_{1\beta} = 0$. Comme nous avons

$$\frac{\partial^2 x'^1}{(\partial x^1)^2} = 0 = \Gamma'^1_{11} - \Gamma^1_{11}, \tag{16}$$

il faut que Γ^1_{11} soit une constante. En ce qui concerne les autres composantes, nous avons par une transformation (7)

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \Gamma'^\alpha_{\rho\lambda} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda}. \tag{17}$$

Cela nous montre que, pour x^1 égale à une constante, les quantités constituent les composantes d'un espace à connexion affine A_{n-1} et, en accord avec les formules (6), cet espace doit avoir le groupe maximum à $n^2 - n$ paramètres. Cet espace A_{n-1} est donc un espace euclidien et, par conséquent, on peut choisir un système de variables $x^2, \ldots, x^n$ de façon que $\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}$ soit nulle et alors les transformations de variables qui conservent cette situation sont de la forme

$$x'^1 = x^1 + a, \qquad x'^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha. \tag{18}$$

où a^α_β, a^α peuvent dépendre seulement de la variable x^1. On peut même supposer que a^α_β ne dépend pas de x^1, car l'espace A_{n-1} ne dépend pas lui non plus de x^1. Cela fait, considérons les formules

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^1 \partial x^\beta} = \Gamma'^\alpha_{1\lambda} a^\lambda_\beta - \Gamma^\rho_{1\beta} a^\alpha_\rho,$$

$$\frac{d^2 a^\alpha}{(dx^1)^2} = \Gamma'^\alpha_{11} + [\Gamma'^\alpha_{1\lambda} + \Gamma'^\alpha_{\lambda 1} - \Gamma^1_{11}] \frac{da^\alpha}{dx^1} - \Gamma^\lambda_{11}.$$

Les premières nous montrent qu'il faut avoir

$$\Gamma^\rho_{1\lambda} = (r - s)\,\delta^\rho_\lambda, \qquad \Gamma^\rho_{\lambda 1} = (r + s)\,\delta^\rho_\lambda,$$

où r, s sont des constantes, pour que les a^α_β ne soient liés par aucune relation Les secondes équations s'écrivent

$$\frac{d^2 a^\alpha}{(dx^1)^2} = \Gamma'^\alpha_{11} + (2r - \Gamma^1_{11}) \frac{da^\alpha}{dx^1} - \Gamma^\lambda_{11} a^\alpha_\lambda.$$

Elles nous disent qu'on doit avoir

$$\Gamma^\lambda_{11} = \varepsilon x^\lambda, \qquad \Gamma'^\lambda_{11} = \varepsilon x'^\lambda,$$

où ε est une constante, et l'on retrouve le résultat que la connexion de l'espace A_n à groupe G_{n^2} peut se réduire toujours à la forme canonique ([6])

$$(18') \qquad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \mu, & \Gamma^\alpha_{1\beta} = (r - s)\,\delta^\alpha_\beta, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta 1} = (r + s)\,\delta^\alpha_\beta, \\ \Gamma^h_{11} = \varepsilon x^h, & \Gamma^1_{\alpha\beta} = \Gamma^1_{1\alpha} = \Gamma^1_{\alpha 1} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0. \end{cases}$$

Quant au groupe il est donné par les formules (8) où a^α sont solutions de l'équation

$$\frac{d^2 u}{(dx^1)^2} = (2r - \mu) \frac{du}{dx^1} + \varepsilon u.$$

Par une transformation de variables

$$x^1 = \alpha x^1, \qquad x'^h = e^{-px^1} x^h,$$

où α et p sont des constantes, on peut supposer $\mu = 2r$ et $\varepsilon = \pm 1$ ou 0. Donc on peut supposer que a^α sont solutions de l'équation

$$(19) \qquad \frac{d^2 u}{(dx^1)^2} = \varepsilon u.$$

Par une transformation de variables on peut réduire le groupe à un groupe projectif qui conserve deux hyperplans

$$(x^1)^2 - \varepsilon = 0,$$

ce qui conduit à un résultat trouvé par Egoroff. En particulier, dans le cas ellip-

---

([6]) G. Vranceanu, *Propriétés différentes globales des espaces* A_n *à groupe maximum* G_{n^2}. (*Bull. St. Acad. R. P. R.*, t. 6, 1954, p. 49-59).

tique $\varepsilon = -1$, ces hyperplans sont imaginaires et la connexion est définie par les formules

$$(20)\qquad \begin{cases} \Gamma^1_{11} = \dfrac{2x^1 + 2r}{1+(x^1)^2}, \qquad \Gamma^\alpha_{1\beta} = \dfrac{x^1 + r - s}{1+(x^1)^2}\delta^\alpha_\beta, \qquad \Gamma^\alpha_{\beta 1} = \dfrac{x^1 + r + s}{1+(x^1)^2}\delta^\alpha_\beta, \\ \Gamma^1_{\alpha\beta} = \Gamma^1_{1\alpha} = \Gamma^1_{\alpha 1} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{11} = 0 \end{cases}$$

et l'on voit qu'elle est régulière pour chaque système de valeurs finies des variables $x^1, \ldots, x^n$. Elle est aussi régulière à l'infini sur l'axe x^1, car par la transformation projective de variables (6) nous avons

$$\Gamma'^1_{11} = \frac{2x'^1 - 2r}{1+(x'^1)^2}, \qquad \Gamma'^\alpha_{1\beta} = \delta^\alpha_\beta \frac{x'^1 - r + s}{1+(x'^1)^2}, \qquad \Gamma'^\alpha_{\beta 1} = \delta^\alpha_\beta \frac{x'^1 - r - s}{1+(x'^1)^2},$$

$$\Gamma'^\alpha_{11} = \Gamma'^1_{\alpha\beta} = \Gamma'^1_{1\alpha} = \Gamma'^1_{\alpha 1} = \Gamma'^\alpha_{\beta\gamma} = 0,$$

donc la connexion est aussi régulière pour chaque système de valeurs finies des $x'^1, \ldots, x'^n$. On peut donc dire que la connexion (20) peut être prolongée sur toute la droite projective x^1.

D'autre part, en tenant compte des résultats obtenus plus haut, il en résulte que la connexion ne peut pas se prolonger à d'autres voisinages de l'espace projectif.

Nous avons donc le théorème :

La connexion (20) *de l'espace* A_n *elliptique à groupe* G_{n^2} *peut être prolongée à l'espace topologique formé de la droite fermée* x^1 *et des droites ouvertes* $x^2, \ldots, x^n$.

III. Nous allons considérer maintenant le cas où l'espace A_n possède une forme ds^1 invariante, cette forme n'étant pas une différentielle totale exacte. Cela signifie que le covariant bilinéaire Δs^1 n'est pas nul. Le cas où ce covariant impose le plus petit nombre de conditions au groupe des transformations des formes de Pfaff $ds^1, \ldots, ds^n$ est celui où Δs^1 est nul en même temps que ds^1, donc dans le cas où l'on peut écrire

$$(21)\qquad \Delta s^1 = [ds^1\, ds^2].$$

Dans ce cas, les formes ds^1, ds^2, ds^h sont déterminées abstraction faite d'une transformation de la forme

$$(22)\qquad \begin{cases} d\bar{s}^1 = ds^1, \qquad d\bar{s}^2 = ds^2 + \alpha\, ds^1, \\ d\bar{s}^h = c^h_k\, ds^k + c^h_1\, ds^1 + c^h_2\, ds^2 \qquad (h = 3, \ldots, n). \end{cases}$$

Le groupe maximum de l'espace peut donc posséder au plus

$$n + 1 + n(n-2) = n^2 - n + 1 \quad \text{paramètres,}$$

c'est-à-dire la somme du nombre des variables $x'^1, \ldots, x'^m$ et des fonctions α, c^h_k, c^h_1, c^h_2. D'autre part, comme on peut toujours prendre $ds^1 = \dfrac{dx^1}{(x^2)^2}$, en choisissant convenablement les variables, il faut que ds^4 possède un groupe de transformation en elle-même à trois paramètres, ce qui est réalisé si l'on prend

$$(23) \qquad x'^1 = \frac{ax^1 + b}{cx^1 + d}, \qquad x'^2 = \frac{x^2}{cx^1 + d}, \qquad ad - bc = 1.$$

D'autre part, en associant à ces transformations les formules

$$(23') \qquad x'^h = \frac{a^h_k x^k + a^h_1 x^1 + a^h_2 x^2 + a^h}{cx^1 + d},$$

nous obtenons un groupe projectif ayant $n^2 - n + 1$ paramètres. Nous allons montrer qu'il existe un espace A_n possédant ce groupe.

En premier lieu nous allons déterminer les espaces A_2 possédant le groupe (23). Ces espaces ont été déjà déterminés par St. Petrescu ([7]) dans un système de variables où l'on prend comme variable au lieu de x^2 le logarithme de $(x^2)^2$.

Pour déterminer les espaces A_2 en partant du groupe (23) nous allons utiliser le fait que l'on doit avoir les équations

$$(24) \qquad \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma'^i_{rs} \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma^s_{jk} \frac{\partial x'^i}{\partial x^s},$$

où Γ'^i_{jk} sont les mêmes fonctions des variables x' que les Γ^i_{jk} des variables x.

Considérons alors les équations (24) relatives au groupe (23') pour $j = k = 2$. Nous avons

$$\frac{\partial^2 x'^1}{(\partial x^2)^2} = 0 = \Gamma'^1_{22} \frac{1}{(cx^1 + d)^2} - \Gamma^1_{22} \frac{1}{(cx^1 + d)^2},$$
$$\frac{\partial^2 x'^2}{(\partial x^2)^2} = 0 = \Gamma'^2_{22} \frac{1}{(cx^1 + d)^2} - \Gamma^2_{22} \frac{1}{cx^1 + d} + \Gamma^1_{22} \frac{cx^2}{cx^1 + d}.$$

La première de ces équations nous dit que Γ^1_{22} est une constante et la seconde que cette constante est nulle et que $\Gamma^2_{22} = \frac{k}{x^2}$, donc que nous avons

$$\Gamma^1_{22} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = \frac{k}{x^2},$$

où k est une constante.

Considérons maintenant les formules (24) pour $j = 1$, $k = 2$. Nous avons

$$0 = \Gamma'^1_{12} \frac{1}{(cx^1 + d)^3} - \Gamma^1_{12} \frac{1}{(cx^1 + d)^2},$$
$$- \frac{c}{(cx^1 + d)^2} = \Gamma'^2_{12} \frac{1}{(cx^1 + d)^3} - \Gamma'^2_{22} \frac{cx^2}{(cx^1 + d)^3} - \Gamma^2_{12} \frac{1}{cx^1 + d} + \Gamma^1_{12} \frac{cx^2}{(cx^1 + d)^2}$$

et des formules analogues où l'on change Γ^1_{12} et Γ^2_{12} avec Γ^1_{21}, Γ^2_{21}.

([7]) St. Petrescu, *La classification des espaces à connexion affine* A_2 (*St. Cerc. mat.*, t. 11, 1951, p. 14).

La première de ces formules nous montre qu'on doit avoir

$$\Gamma^1_{12} = \frac{\alpha}{x^2}, \qquad \Gamma^1_{21} = \frac{\beta}{x^2},$$

où α, β sont des constantes et la seconde qu'on doit avoir

$$\Gamma^2_{12} = \frac{\lambda}{(x^2)^2}, \qquad \Gamma^2_{21} = \frac{\mu}{(x^2)^2}, \qquad \alpha = \beta = k - 1,$$

où λ, μ sont des constantes.

Considérons enfin les équations (24) pour $j = k = 2$, Nous avons

$$\frac{\partial^2 x'^1}{(\partial x^1)^2} = \frac{-2c}{(cx^1+d)^3} = \Gamma'^1_{11}\frac{1}{(cx^1+d)^4} - 2\frac{(k-1)\,cx^2}{x'^2(cx^1+d)^4} - \Gamma^1_{11}\frac{1}{(cx^1+d)^2},$$

$$\frac{\partial^2 x'^2}{(\partial x^1)^2} = \frac{2c^2x^2}{(cx^1+d)^3} = \Gamma'^2_{11}\frac{1}{(cx^1+d)^4} - \frac{\lambda+\mu}{(x'^2)^2}\,\frac{cx^2}{(cx^1+d)^4} + \frac{k}{x'^2}\,\frac{c^2(x^2)^2}{(cx^1+d)^4}$$
$$-\Gamma^2_{11}\frac{1}{(cx^1+d} + \Gamma^1_{11}\frac{cx^2}{(cx^1+d)^2}.$$

La première nous montre que l'on doit avoir

$$k = 2, \qquad \Gamma'^1_{11} = \frac{\rho}{(x^2)^2}$$

et la seconde que l'on doit avoir

$$\rho = \lambda + \mu, \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{\delta}{(x^2)^3},$$

En conclusion, l'espace A_2, qui admet le groupe (23) possède comme composantes de la connexion

$$(25)\qquad \begin{cases} \Gamma^1_{22} = 0, \qquad \Gamma^2_{22} = \dfrac{2}{x^2}, \qquad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \dfrac{1}{x^2}, \\ \Gamma^1_{11} = \dfrac{\lambda+\mu}{(x^2)^2}, \qquad \Gamma^2_{12} = \dfrac{\lambda}{(x^2)^2}, \qquad \Gamma^2_{21} = \dfrac{\mu}{(x^2)^2}, \qquad \Gamma^2_{11} = \dfrac{\delta}{(x^2)^3}, \end{cases}$$

où λ, μ, δ sont des constantes.

On voit que la connexion devient infinie pour $x^2 = 0$. Donc on peut considérer comme voisinage où l'espace est défini, le domaine $x^2 > 0$ et dans ce domaine le groupe (23) de l'espace est transitif.

Si l'on passe maintenant aux espaces $A_n (n > 2)$ et si l'on veut que ces espaces possèdent le groupe (23), (23′), on trouve facilement que l'on doit avoir

$$(26)\qquad \Gamma^h_{kl} = \Gamma^1_{kl} = \Gamma^2_{kl} = \Gamma^1_{2k} = \Gamma^2_{1k} = \Gamma^2_{2k} = 0 \qquad (k, l > 2).$$

De même, la formule (24) pour $j = k = 1$ et $i > 2$ nous dit que l'on doit avoir $\delta = 0$. Quant aux autres formules (24), elles nous montrent que l'on doit prendre

$$(26')\qquad \Gamma^h_{1k} = \delta^h_k\frac{\lambda}{(x^2)^2}, \qquad \Gamma^h_{k1} = \delta^h_k\frac{\mu}{(x^2)^2}, \qquad \Gamma^h_{k2} = \Gamma^h_{2k} = \frac{\delta^h_k}{x^2}.$$

Nous avons donc le théorème

L'espace A_n *dont la connexion est donnée par les formules* (25) *avec* $\delta = 0$, (26) *et* (26′) *admet le groupe projectif* (23), (23′) *à* $n^2 - n + 1$ *paramètres.*

Il est à observer que l'espace A_n est projectif, si $\lambda = \mu$ avec les fonctions

$$(26'') \qquad \varphi_1 = \frac{\lambda}{(x^2)^2}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{x^2}, \qquad \varphi_h = 0 \qquad (h > 2).$$

Si $\lambda \neq \mu$, il est équiaffin et projectif.

Si, au lieu des variables $x^1, x^2, \ldots . x^n$, on prend

$$(27) \qquad y^1 = \frac{x^1}{x^2}, \qquad y^2 = \frac{1}{x^2}, \qquad y^h = \frac{x^h}{x^2} \qquad (h > 2),$$

le groupe (23), (23′) devient

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y'^1 = ay^1 + by^2, & y'^2 = cy^1 + dy^2 \\ y'^h = a^h_k y^k + a^h_1 y^1 + a^h_2 y^2 + a^h & \end{array} \right\} \qquad (ad - bc = 1),$$

donc il devient un groupe affine unimodulaire dans les variables y^1, y^2 et ce groupe conserve la variété linéaire $y^1 = y^2 = 0$.

En ce qui concerne les quantités $\overline{\varphi}_i$ dans les variables y, nous avons en tenant compte des formules (7)

$$\overline{\varphi}_1 = x^2 \varphi_1, \qquad \overline{\varphi}_2 = x^2(1 - x^1\varphi_1 - x^2\varphi_2),$$

ce qui nous donne, en tenant compte de (26″) et (27),

$$\overline{\varphi}_1 = \lambda y^2, \qquad \overline{\varphi}_2 = -\lambda y^1$$

et l'on retrouve ainsi les espaces A_n à groupe possédant $n^2 - n + 1$ paramètres trouvés par Egoroff [8].

En ce qui concerne la forme de Pfaff $ds = \dfrac{dx^1}{(x^2)^2}$ elle devient dans des variables y^1, y^2

$$(29) \qquad ds = y^2\, dy^1 = y^1\, dy^2.$$

Nous avons donc le théorème :

L'espace A_n

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \qquad (\varphi_1 = -y^2, \ \varphi_2 = -y^1, \ \varphi_h = 0)$$

possède la forme invariante (29) *et a comme groupe de mouvements le groupe affine* (28).

---

(8) I. P. Egorof, *Dokl. Akad. Nauk.*, t. 87, 1952, p. 693; t. 89, 1953, p. 781.

De même, nous avons le théorème :

Les espaces A_n qui possèdent une forme de Pfaff invariante qui n'est pas une différentielle totale exacte, possèdent un groupe ayant au plus $n^2 - n + 1$ paramètres et ce maximum est atteint,

On peut généraliser ce résultat par le théorème :

Étant donnée la forme de Pfaff

$$ds^1 = y^2\, dy^1 - y^1\, dy^2 + \ldots + y^{2p}\, dy^{2p-1} - y^{2p-1}\, dy^{2p} \tag{29'}$$

l'espace projectif $A_n (n > 2p)$ qui possède la connexion projective (1) où nous avons

$$\left\{\begin{array}{lllll} \varphi_1 = y^2, & \varphi_2 = -y^1, & \varphi_3 = y^4, & \varphi_4 = -y^3, & \ldots, \\ \varphi_{2p-1} = y^{2p}, & \varphi_{2p} = -y^{2p-1} & \varphi_\alpha = 0 & & \end{array}\right. \tag{30}$$

possède comme forme symétrique π la forme $(ds^1)^2$, donc cet espace est à forme de Pfaff invariante et son groupe de mouvements est le groupe symplectique dans les $2p$ variables $y^1, \ldots, y^{2p}$, et le groupe affine quelconque dans les variables $y^{2p+1}, \ldots, y^n$, c'est donc un groupe à $2p^2 + p + (n+1)(n-2p)$ paramètres.

Pour la démonstration on observe que les g_{ij} calculés par la formule (8) coïncident avec les coefficients des $dy^i dy^j$ dans le carré de la forme ds où l'on voit simplement que les formules (8″) sont vérifiées avec $\lambda = 0$. En ce qui concerne le groupe symplectique des $2p$ variables $y^1, \ldots, y^{2p}$, il possède $2p^2 + p$ paramètres. Le groupe de l'espace projectif A_n dont les φ_i sont données par les formules (30) possède le groupe à

$$M = 2p^2 + p + (n+1)(n-2p) \quad \text{paramètres}$$

donné par les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} y'^i = a^i_j y^j & (i, j = 1, \ldots, 2p), \\ y'^\alpha = a^\alpha_\beta y^\beta + a^\alpha_i y^i + a^\alpha & (\alpha = 2p+1 \ldots n) \end{array}\right. \tag{31}$$

où $|a^i_j|$ est un déterminant symplectique. En effet, ce groupe est linéaire et conserve évidemment la forme (29′), donc le vecteur (30) et, par conséquent, transforme en elle-même la connexion (1). On peut aussi observer que tous ces espaces A_n ainsi considérés sont des espaces ouverts dont la connexion est régulière dans tout l'espace $E_n(y^1, \ldots, y^n)$,

Pour voir que le nombre M est un maximum pour les espaces A_n ayant une forme de Pfaff invariante de rang $2p$, comme c'est le cas de la forme (29′), considérons la transformation de variables (27). Avec ces variables la forme ds^1 s'écrit

$$ds^1 = \frac{dx^1 + x^4\, dx^3 - x^3\, dx^4 + \ldots + x^{2p}\, dx^{2p-1} - x^{2p-1}\, dx^{2p}}{(x^2)^2}.$$

Quant au covariant bilinéaire de cette forme, il s'écrit

$$\Delta s^1 = -\frac{2[ds^1\, dx^2]}{(x^2)^3} + \frac{[dx^3\, dx^4] + \ldots + [dx^{2p-1}\, dx^{2p}]}{(x^2)^2}.$$

Il suffit donc de prendre

$$ds^2 = -2\frac{dx^2}{(x^2)^3}, \qquad ds^h = \frac{dx^h}{x^2} \qquad (h > 2)$$

pour obtenir le covariant bilinéaire Δs^1 sous la forme canonique

$$\Delta s^1 = [ds^1\, ds^2] + [ds^3\, ds^4] + \ldots + [ds^{2p-1}\, ds^{2p}].$$

Le groupe de transformation de congruences qui conserve ce covariant s'écrit

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \qquad d\bar{s}^2 = ds^2 + c_1\, ds^1 + c_\alpha\, ds^\alpha,$$
$$d\bar{s}^\alpha = c^\alpha_\beta\, ds^\beta + c^\alpha\, ds^1,$$

où les c^α_β sont les coefficients du groupe symplectique à $2p-2$ variables. On sait que parmi les c^α_β il y en a $2(p-1)^2 + p - 1$ qui sont indépendantes. D'autre part, comme les c^α sont liées aux c_α, nous avons encore les fonctions indépendantes c_α et c_1, donc $2p - 2 + 1$ fonctions. Le nombre maximum de paramètres du groupe de l'espace est

$$2p + 2(p-1)^2 + p - 1 + 2p - 2 + 1 + (n+1)(n-2p)$$

qui coïncide donc avec M, et le théorème est démontré.

La forme ds^1 donnée par la formule (29′) a la propriété d'être d'espèce p, car si l'on considère des coordonnées polaires ρ_s, θ_s dans chaque plan y^{2s-1}, y^{2s}, la forme s'écrit

$$ds^1 = \rho_1^2\, d\theta_1 + \ldots + \rho_p^2\, d\theta_p$$

et contient seulement p différentielles. La forme ds^1 a aussi la propriété que le rang de son covariant bilinéaire diminue quand on pose $ds^1 = 0$, autrement dit, ce covariant contient la forme ds^1.

Supposons que nous avons ds^1 sous la forme

$$(31') \qquad ds^1 = dx^1 + x^2\, dx^3 - x^3\, dx^2 + \ldots + x^{2p}\, dx^{2p+1} - x^{2p+1}\, dx^{2p}$$

qui est de rang $2p$, mais d'espèce $p+1$.

Nous avons, en posant $ds^h = dx^h$ $(h = 2, \ldots, 2p+1)$,

$$\Delta s^1 = [ds^3\, ds^2] + \ldots + [ds^{2p+1}\, ds^{2p}]$$

et le groupe de transformations de formes de Pfaff associé à l'espace s'écrit

$$d\bar{s}^1 = ds^1, \qquad d\bar{s}^h = c^h_k\, ds^k,$$
$$d\bar{s}^\alpha = c^\alpha_\beta\, ds^\beta + c^\alpha_k\, ds^k + c^\alpha\, ds^1,$$

où $|c^h_k|$ est un déterminant symplectique. Le nombre des c indépendantes est donc

$$m = 2p^2 + p + (n - 2p - 1)n.$$

Il en résulte que le groupe des mouvements de l'espace contient au plus $m+n$ paramètres et ce nombre est atteint par l'espace projectif (1) où l'on pose

$$(31'') \quad \varphi_1 = r, \qquad \varphi_{2s} = -x^{2s+1}, \qquad \varphi_{2s+1} = x^{2s}, \qquad \varphi_\alpha = 0 \qquad (\alpha > 2p+1\,;\, s = 1, \ldots, p).$$

En effet, il est facile de voir que le groupe affine

$$(32) \qquad \begin{cases} x'^1 = x^1 + a + a_i x^i & (i = 2, \ldots, 2p+1), \\ x'^i = a^i_j x^j + a^i, \\ x'^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha_j x^j + a^\alpha & (j = 1, \ldots, 2p+1\,;\, \alpha > 2p+1), \end{cases}$$

où $|a^i_j|$ est un déterminant symplectique et où

$$a_i a^i_j = a^{2s+1} a^{2s}_j - a^{2s} a^{2s+1}_j \qquad (s = 1, \ldots, p)$$

transforme l'espace A_n à connexion (1), (31″) en lui-même.

Les paramètres du groupe (32) indépendants sont donc les $2p^2+p$ paramètres du déterminant symplectique $|a^i_j|$, les $2p+1$ quantités a et a^i et les $(n+1)\times(n-2p-1)$ paramètres a^α_β, a^α_j, a^α, ce qui nous donne

$$N = 2p^2 + p + 2p + 1 + (n+1)(n - 2p - 1) = 2p^2 + p + n(n - 2p - 1) + n,$$

nombre qui est égal, comme on le voit, à $m+n$.

On peut aussi observer que la connexion (1), (31″) peut être considérée comme une généralisation de la connexion (18′) pour $\mu = 2r$ et $\varepsilon = 0$, donc la généralisation du cas parabolique des espaces à groupe G_{n^2}. On voit d'ailleurs que N coïncide avec n^2 si $p = 0$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant donné une forme Pfaff sous la forme canonique (29′) *ou* (31′), *il existe un espace* A_n *projectif qui possède cette forme comme forme invariante, le groupe des mouvements de cet espace, ayant* M *ou* N *paramètres.*

D'autre part, étant donnée une forme de Pfaff dont le covariant bilinéaire est de rang $2p$, on sait qu'elle peut être réduite par une transformation de variables à la forme canonique (29′) ou (31′) suivant qu'elle est d'espèce p ou $p+1$, en appelant espèce le nombre minimum de différentielles qu'on peut laisser figurer dans la forme. Il en résulte alors que le groupe d'un espace A_n possédant cette forme invariante, peut avoir au plus M ou N paramètres suivant que la forme est d'espèce p ou $p+1$, et nous avons donc démontré que ces maximums sont atteints.

IV. Supposons maintenant que la forme π soit une somme de m carrés où

$m \leqq n$. Dans ce cas, l'espace peut posséder au plus un groupe ayant

$$\text{(33)} \qquad \mathrm{P} = n + \frac{m(m-1)}{2} + (n-m)\,m \quad \text{paramètres,}$$

et ce nombre maximum est atteint seulement si la forme quadratique π est la métrique d'un espace V_m à courbure constante k. En supposant par exemple, que la courbure k est positive, on peut écrire la connexion de l'espace V_m sous la forme

$$\text{(34)} \qquad \Gamma^i_{jk} = -\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j \qquad (i, j, k = 1, \ldots, m),$$

où φ_i sont données par les formules $(7'')$. En considérant comme connexion de l'espace $A_n (n > m)$

$$\text{(35)} \qquad \Gamma^a_{bc} = \delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b \qquad (a, b, c = 1, \ldots, n),$$

où $\varphi_\alpha = 0\,(\alpha = m+1, \ldots, n)$, on obtient un espace dont le groupe de mouvement est donné par les formules

$$\text{(36)} \qquad x'_i = \frac{c^i_j x^j + c^i_0}{c^0_s x^s + c^0_0}, \qquad x'^\alpha = \frac{c^\alpha_\beta x^\beta + c^\alpha_i x^i + c^\alpha_0}{c^0_s x^s + c^0_0},$$

où le déterminant

$$\begin{vmatrix} c^1_1 & \ldots & c^1_m & c^1_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^m_1 & \ldots & c^m_m & c^m_0 \\ c^0_1 & \ldots & c^0_m & c^0_0 \end{vmatrix}$$

est un déterminant orthogonal. Le groupe (35) possède donc P paramètres.

Nous avons donc le théorème :

Si la forme quadratique π est formée de m carrés, le nombre maximum des paramètres du groupe de l'espace A_n est égal à P *et ce maximum est atteint par l'espace* (35) *où $\varphi_\alpha = 0$ et φ_i sont données par les formules* $(7'')$.

En tenant compte des résultats obtenus dans la première partie, il en résulte que l'espace projectif A_n dont la connexion est donnée par les formules (35) peut être prolongée aux droites fermées $x^1, \ldots, x^m$, mais ne peut pas être prolongée aux droites fermées $x^{m+1}, \ldots, x^n$.

Nous allons supposer maintenant que la forme quadratique π ne contient pas des termes en $dx^\alpha, dx^\beta (\alpha, \beta = m+1, \ldots, n)$, donc que $g_{\alpha\beta} = 0$. En ce cas nous avons vu plus haut que les $P_{\alpha\beta}$ sont aussi nulles, donc on peut poser $\varphi_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$. En posant aussi $\varphi = \log \rho$, il est facile de voir que $g_{\alpha\beta} = 0$ montre que ρ est une fonction linéaire des variables x^α, donc que nous pouvons prendre

$$\rho = A_\alpha x^\alpha + B,$$

où A_α, B sont fonctions seulement des variables x^i. Considérons maintenant les composantes $g_{i\alpha}$ et $P_{i\alpha}$. Elles s'écrivent

$$g_{i\alpha} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\alpha} + \left(\frac{A_\alpha}{\rho}\right)_i + 2\varphi_i \frac{A_\alpha}{\rho}, \qquad P_{i\alpha} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\alpha} - \left(\frac{A_\alpha}{\rho}\right)_i.$$

Supposons que nous soyons dans le cas ou $g_{i\alpha}$ et $P_{i\alpha}$ sont aussi nulles, donc que les deux formes π et σ ne contiennent que les différentielles $dx^i (i=1, \ldots, m)$. En ce cas, si les A_n sont toutes nulles, les φ_α sont toutes nulles, les φ_i ne doivent pas dépendre de x^α, Si les φ_α ne sont pas toutes nulles, nous avons les conditions

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{A_\alpha}{\rho}\right)_i, \qquad \varphi_i \frac{A_\alpha}{\rho} + \left(\frac{A_\alpha}{\rho}\right)_i = 0. \tag{37}$$

Les secondes de ces conditions nous disent que les φ_i dérivent d'un potentiel, donc que les P_{ij} sont aussi nulles. Il en résulte donc que si les deux formes π et σ dépendent seulement de m différentielles $dx^i (i \leqq m < n)$, la forme σ est identiquement nulle.

Les équations (31) nous montrent aussi qu'on peut écrire ρ sous la forme

$$\rho = a_\alpha x^\alpha + b,$$

où a_α sont des constantes et où b dépend seulement des variables x^i et, par conséquent, que nous avons

$$\varphi_i = \frac{\partial}{\partial x^i}[\log(a_\alpha x^\alpha + b)].$$

Nous avons alors, en accord avec les formules (8),

$$g_{ij} = \frac{1}{a_\alpha x^\alpha + b} \frac{\partial^2 b}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{37'}$$

Si l'on suppose que b est une forme quadratique des variables x^i, définie positive, on peut choisir les variables x^i et x^α de façon à avoir

$$\rho = (x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 + x^n,$$

ce qui nous donne

$$\pi = \frac{2}{\rho}[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^m)^2]. \tag{38}$$

En ce cas on voit que la transformation de variables

$$\left\{\begin{array}{ll} x'^i = a^i_j x^j + a^i & (i, j = 1, \ldots, m), \\ x'^\alpha = a^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha_i x^i + a^\alpha & (\alpha = m+1, \ldots, n-1), \\ x'^n = x^n - a^n_j x^j - a^n, & \end{array}\right. \tag{39}$$

où $|a^i_j|$ est un déterminant orthogonal, et où l'on a les formules

$$a^n_j = a^i_j a^l, \qquad a^n = a^i a^i,$$

conserve la forme quadratique (38). Il en résulte que l'espace projectif A_n dont les φ_α sont données par les formules

$$(40) \qquad \begin{cases} \varphi_i = \dfrac{2x^i}{\rho}, \qquad \varphi_\alpha = 0 \qquad (m < \alpha < n, \\ \varphi_n = \dfrac{1}{\rho} \qquad [\rho = (x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2 + x^n] \end{cases}$$

admet le groupe (39) à

$$S = \frac{m(m+1)}{2} + (n+1)(n-m-1) \text{ paramètres,}$$

et il est facile de voir que nous avons le théorème :

Si la forme π est de rang m et contient seulement les différentielles dx^i ($i = 1, \ldots, m$) et si la forme σ est nulle, l'espace projectif A_n possède un groupe de mouvements ayant au plus S paramètres.