KING-LAI HIONG

# Sur les fonctions algébroïdes et leurs dérivées. Etude des défauts absolus et des défauts relatifs

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 73, nº 4 (1956), p. 439-451

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_4_439_0>

# SUR LES FONCTIONS ALGÉBROÏDES ET LEURS DÉRIVÉES. ÉTUDE DES DÉFAUTS ABSOLUS ET DES DÉFAUTS RELATIFS

PAR M. KING-LAI HIONG.

Les fonctions algébroïdes ont été d'abord étudiées par G. Remoundos au moyen d'une méthode de E. Borel [1]; M. H. L. Selberg et G. Valiron y ont ensuite étendu la méthode de la moyenne logarithmique et ont obtenu par des voies différentes une inégalité fondamentale analogue à celle de M. R. Nevanlinna pour les fonctions méromorphes [2]. En ce qui concerne la dérivée $u'$ d'une algébroïde $u$, M. E. Ullrich a donné une double inégalité qui limite $T(r, u')$ et en a tiré des conséquences intéressantes [3], Mais dans cette inégalité, n'entrent en jeu que $N(r, u')$ et $N\left(r, \frac{1}{u'}\right)$ comme indices de densité relatifs à $u'$. Dans le présent Mémoire, nous établissons une inégalité qui limite $T(r, u)$ et dans laquelle interviennent un nombre quelconque d'indices de densité relatifs à la fonction considérée et un nombre quelconque d'indices de densité relatifs à une quelconque de ses dérivées. Elle est analogue à l'inégalité fondamentale de M. H. Milloux pour les fonctions méromorphes [4], et elle nous permet, comme dans son cas, de faire une étude des défauts absolus et des défauts relatifs [5].

---

(1) REMOUNDOS, *Extensions aux fonctions algébroïdes multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 23, 1927).

(2) SELBERG, *Uber die Wertverteilung der algebroiden funktionen* (*Math. Z.*, t. 31, 1930); VALIRON, *Sur les fonctions algébroïdes méromorphes du second degré* (*C. R. Acad. Sc.*, t, 189, 1929) et *Sur la dérivée des fonctions algébroïdes* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 59, 1931).

(3) ULLRICH, *Uber den Einfluss der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre wertverteilung* (*J. reine angew Math.*, t. 167, 1931). Il a démontré en outre ce qu'il appelle le Verzweigungssatz.

(4) MILLOUX, *Les dérivées des fonctions méromorphes* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 63, 1946.

(5) Une partie de ces résultats a été communiquée à l'Académie des Sciences de Paris (*C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1956, p. 3032).

## I. — Inégalités fondamentales.

1. Soit $u$ une fonction algébroïde à $\nu$ branches définie par l'équation

$$\psi(u) \equiv A_\nu u^\nu + A_{\nu-1} u^{\nu-1} + \ldots + A_0 = 0, \tag{1}$$

les coefficients $A_j (j = 0, 1, \ldots, \nu)$ étant des fonctions holomorphes de $x$ pour $|x| < R \leqq \infty$ et ne s'annulant pas simultanément.

Désignons par $u_k (k = 1, \ldots, \nu)$ les $\nu$ branches de l'algébroïde. De l'identité

$$\prod_{h=1}^{p} \prod_{k=1}^{\nu} \frac{1}{u_k - a_h} = \frac{\displaystyle\sum_{h=1}^{p} B_{1h} \frac{u'_1}{u_1 - a_h} \cdots \sum_{h=1}^{p} B_{\nu h} \frac{u'_\nu}{u_\nu - a_h}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{\nu} u'_k}, \tag{2}$$

où

$$B_{kh} = \frac{1}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{h-1})(a_k - a_{h+1})\ldots(a_k - a_p)},$$

nous déduisons la suivante :

$$\frac{A_1^p}{\psi(a_1)\psi(a_2)\ldots\psi(a_p)} = \prod_{k=1}^{\nu} H_k, \qquad \text{avec} \quad H_k = \frac{1}{u'_k} \sum_{h=1}^{p} B_{kh} \frac{u'_k}{u_k - a_h}.$$

En posant $x = re^{i\varphi}$ et en intégrant, il vient

$$\begin{aligned} &p \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |A_\nu(re^{i\varphi})| \, d\varphi + \sum_{h=1}^{p} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{1}{\psi(a_h)} \right| d\varphi \\ &= \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |H_k| \, d\varphi - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{H_k} \right| d\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Appliquons la formule de Jensen au premier membre; en désignant respectivement par $C_\lambda$ et $C_{\lambda,h}$, le premier coefficient non nul du développement de $A_\nu$ et celui de $\psi(a_h)$, il s'écrit

$$p \log |C_\lambda| + p N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) + \sum_{h=1}^{p} \log |C_{\lambda,h}| - \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right).$$

Pour le second membre de (3), on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |H_k| \, d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{u'_k} \right| d\varphi \\ + \nu \sum_{h=1}^{p} m\left(r, \frac{u'}{u - a_h}\right) + \sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{\nu} \overset{+}{\log} |B_{kh}| + K, \end{aligned} \tag{4}$$

K étant une valeur numérique; et, en posant $F_k = \prod_{h=1}^{p}(u_k - a_h)$,

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{H_k}\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F_k|\, d\varphi;$$

Pour minorer cette intégrale, considérons l'identité

$$u_k^p = \prod_{h=1}^{p} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{a_h}{u_k}\right)} F_k;$$

en désignant par $a$ le plus grand des $|a_h|$, on en déduit, pour toutes les valeurs de $x$ telles que $|u_k(x)| > 2a$,

$$|u_h|^p < 2^p |F_k|$$

et

$$p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|u_k|\, d\varphi = \frac{p}{2\pi}\int_{|u_k|\leqq 2a} \overset{+}{\log}|u_k|\, d\varphi + \frac{p}{2\pi}\int_{|u_k|>2a} \overset{+}{\log}|u_k|\, d\varphi$$
$$< p\,\overset{+}{\log} a + 2p\log 2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F_k|\, d\varphi,$$

par conséquent

$$(6) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \overset{+}{\log}|F_k|\, d\varphi > \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \overset{+}{\log}|u_k|\, d\varphi - \nu p\,\overset{+}{\log} a - 2\nu p \log 2.$$

En tenant compte de tous ces résultats, on obtient alors

$$p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \overset{+}{\log}|u_k|\, d\varphi + p\,N\left(r, \frac{1}{A}\right)$$
$$< \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\nu} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u'_k}\right| d\varphi + \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + \sigma + \nu\sum_{h=1}^{p} m\left(r, \frac{u'}{u - a_h}\right),$$

où $\sigma$ désigne une constante ne dépendant que de $\nu$, des $a_h$ et du comportement de $A_\nu$ et des $\psi(a_h)$ à l'origine. Cette inégalité s'écrit

$$(7) \quad \nu p\, T(r, u) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{1}^{\nu} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u'_k}\right| d\varphi + \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + \nu\sum_{h=1}^{p} m\left(r, \frac{u'}{u - a_h}\right) + \sigma.$$

Considérons le premier terme du second membre et soit

$$(8) \qquad \psi_1(u') \equiv B_\nu u'^\nu + B_{\nu-1} u'^{\nu-1} + \ldots + B_0 = 0,$$

l'équation qui définit l'algébroïde dérivée $u'$ et qu'on obtient en éliminant $u$

entre (1) et $\psi'_x + \psi'_u u' = 0$ ; on peut écrire

$$(9)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\nu}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u'_k}\right|d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\nu}\log\left|\frac{1}{u'_k}\right|d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\nu}\overset{+}{\log}|u'_k|\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{B_\nu}{\psi_1(0)}\right|d\varphi + \nu m(r, u').$$

En vertu de la formule de Jensen, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{B_\nu}{\psi_1(0)}\right|d\varphi = \log|C'_\lambda| + N\left(r, \frac{1}{B_\nu}\right) - N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right),$$

où $C'_\lambda$ désigne le premier coefficient non nul du développement de $\frac{B_\nu}{\psi_1(0)}$ autour de l'origine ; il vient donc

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_1^{\nu}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u'_k}\right|d\varphi = \nu T(r, u') - N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + \log|C'_\lambda|.$$

Portons ceci dans (7) ; nous obtenons l'inégalité

$$\nu p T(r, u) < \nu T(r, u') + \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(a_h)}\right) - N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + Q(r),$$

avec

$$Q(r) = \nu\sum_{h=1}^{p} m\left(r, \frac{u'}{u - a_h}\right) + \log|C'_\lambda| + \sigma.$$

Pour majorer $Q(r)$, appliquons à $m\left(r, \frac{u'}{u-a_h}\right)$ l'inégalité relative à la dérivée logarithmique de $u$,

$$(11)\qquad m\left(r, \frac{u'}{u}\right) < \sigma + 3\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 12\log\frac{t}{t-r} + 10\overset{+}{\log}T(t, u) \quad (^6)$$

pour $|x| = r < t < R$, $\sigma$ étant une constante qui ne dépend que de $\nu$ et du comportement des $A_j$ à l'origine. D'après la définition de $T(r, u)$, on a

$$T(r, u - a) < T(r, u) + \frac{1}{\nu}\overset{+}{\log}|a| + \log 2$$

et par suite

$$m\left(r, \frac{u'}{u - a_h}\right) < \sigma_k + 3\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 12\log\frac{t}{t-r} + 10\overset{+}{\log}T(t, u),$$

$\sigma_k$ ne dépendant que de $a$ à part $\sigma$. La majoration se fait immédiatement et l'on a ce résultat

---

(6) *Voir* VALIRON, *loc. cit.*

THÉORÈME I. — *Soit $u(x)$ une fonction algébroïde méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$, définie par l'équation* (1) *et soient p nombres $a_h (h = 1, \ldots, p)$ finis et distincts. On a pour $|x| = r < t < R$, l'inégalité*

$$\nu p\, T(r, u) < \nu T(r, u') + \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) - N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + S(r, u), \tag{12}$$

*avec*

$$S(r, u) = \sigma_1 + 3\nu p \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + 12\nu p \log \frac{t}{t-r} + 10\nu p \overset{+}{\log} T(t, u),$$

*où $\sigma_1$ est une constante dépendant, à part $\nu$ et p, seulement de $a_h$ et des conditions à l'origine des fonctions $A_j$ et $\psi(a_h)$.*

2. Maintenant, soient $b_i (i = 1, \ldots, q)$ $q$ nombres distincts, finis ou non, mais différents de zéro; prenons le second théorème fondamental de Valiron :

$$\nu(p - 2\nu) T(r, u) < \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + S(r, u), \tag{13}$$

avec

$$S(r, u) = \sigma + \alpha \overset{+}{\log} \frac{1}{r} + \beta \log \frac{t}{t-r} + \gamma \overset{+}{\log} T(t, u) \quad (^7)$$

et appliquons-la à $u'(x)$ pour ces nombres et zéro; on a

$$\nu(q + 1 - 2\nu) T(r, u') < \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right) + N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + S(r, u') \tag{14}$$

De (12) et (14) on déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} \nu p(q + 1 - 2\nu) T(r, u) < (q + 1 - 2\nu) \sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) \\ + \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right) - (q - 2\nu) N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + Q_1(r), \end{aligned}$$

où

$$Q_1(r) = (q + 1 - 2\nu) S(r, u) + S(r, u').$$

Pour majorer $Q_1(r)$, nous avons à transformer $S(r, u')$, c'est-à-dire à exprimer $\overset{+}{\log} T(t, u')$ en fonction de $u$. On a

$$m(r, u') < m(r, u) + m\left(r, \frac{u'}{u}\right);$$

(7) Dans la suite nous désignerons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\sigma$ des constantes qui ne seront pas nécessairement partout les mêmes.

et comme on sait que $B_\nu$ est égal au produit de $A_\nu^2$ par le discriminant $J(x)$ et que

$$N\left(r, \frac{1}{J}\right) < 2\nu(\nu-1)T(r, u) + \sigma$$

($\sigma$ ne dépendant que du comportement à l'origine des $A_j$), on a

$$(15) \qquad N\left(r, \frac{1}{B_\nu}\right) < N\left(r, \frac{1}{A^2 J}\right) < 2N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) + 2\nu(\nu-1)T(r, u) + \sigma,$$

par suite

$$(16) \qquad T(t, u') < 2\nu T(t, u) + m\left(t, \frac{u'}{u}\right) + \sigma.$$

Pour $r < t < t' < R$, on trouve

$$\gamma \overset{+}{\log} m\left(t, \frac{u'}{u}\right) < \sigma + \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \log\frac{t'}{t'-r} + \overset{+}{\log} T(t', u)$$

et en prenant $t' = t + \frac{1}{2}(t'-r)$, il vient

$$S(r, u') < \sigma + \alpha \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \beta \log\frac{t'}{t'-r} + \gamma \overset{+}{\log} T(t', u).$$

Alors on arrive facilement au théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Soit $u(x)$ une fonction algébroïde méromorphe pour $|x| < R \leqq \infty$ définie par* (1); *soient ensuite $a_h (h = 1, \ldots, p)$ $p$ nombres finis et distincts et $b_i (i = 1, \ldots, q)$ $q$ nombres distincts finis ou non mais différents de zéro. On a pour $|x| = r < t < R$ l'inégalité*

$$(17) \qquad \nu p(q+1-2\nu)T(r, u) < (q+1-2\nu)\sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right)$$
$$- (q-2\nu)N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + S_1(r, u),$$

$S_1(r, u)$ *étant une expression de la forme*

$$S_1(r, u) = \sigma + \alpha \overset{+}{\log}\frac{1}{r} + \beta \overset{+}{\log}\frac{t}{t-r} + \gamma \log T(t, u),$$

*où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des nombres ne dépendant que de $\nu$, $p$ et $q$, tandis que $\sigma$ dépend, à part $\gamma$, $p$ et $q$, seulement des $a_h$, $b_i$ et du comportement à l'origine des fonctions $A_j$, $B_j$, $\psi(a_h)$ et $\psi_1(b_i)$.*

On peut voir comme dans le cas des fonctions méromorphes que *si l'ordre est fini, on a $S_1(r, u) = O\left(\frac{1}{R-r}\right)$ et s'il est infini, on a*

$$S_1(r, u) < O\left(\log\frac{1}{R-r}\right) + O[\log T(r, u)]$$

*en excluant éventuellement une suite d'intervalles dans lesquels la variation de* $\frac{1}{R-r}$ *est finie.*

3. Dans ce qui précède faisons varier $i$ de 1 à $q+1$ et supposons $b_{q+1}=\infty$; en tenant compte de (15), on a de suite le corollaire.

Théorème III. — *$u(x)$ étant défini comme précédemment, soient $a_h(h=1, \ldots, p)$ et $b_i(i=1, \ldots, q)$ deux groupes de nombres finis ($b_i \neq 0$) et distincts entre eux dans chaque groupe. On a, pour $r<R$,*

$$(18)\quad \nu[pq-2(p+1)(\nu-1)]T(r, u)<2N\left(r, \frac{1}{A_\nu}\right) + (q+2-2\nu)\sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right)+\sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right) - (q+1-2\nu)N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right)+S_1(r, u).$$

4. Cas où $u$ est une fonction algébroïde du type général. — On appelle ainsi une algébroïde $u$ définie par l'équation (1) dont les coefficients $A_j$ ne sont liés par aucune relation linéaire homogène à coefficients constants. Pour une telle algébroïde, M. H. Cartan a établi [8] l'inégalité suivante qui est plus précise que celle de Valiron,

$$(19)\quad \nu(q-\nu-1)T(r, u)<\sum_{h=1}^{q} N_\nu\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right)+S(r),$$

où pour $N_\nu\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right)$, chaque zéro de $\psi(a_h)$ est compté avec son ordre de multiplicité $\lambda$ si $\lambda<\nu$ et $\nu$ fois seulement si $\lambda \geqq \nu$. En utilisant cette inégalité au lieu de celle de Valiron, on déduit de (12) une inégalité plus précise que (17) et l'on a le théorème :

Théorème II'. — *Soit $u$ une fonction algébroïde du type général qui est définie par une équation de forme (1) et qui est méromorphe pour $|x|<R \leqq \infty$; soient ensuite $a_h(h=1, \ldots, p)$ $p$ nombres finis distincts entre eux et $b_i(i=1, \ldots, q)$ $q$ nombres (finis ou non) distincts entre eux et différents de zéros. On a, pour $|x|=r<t<R$, l'inégalité*

$$(20)\quad \nu p(q-\nu)T(r, u)<(q-\nu)\sum_{h=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right)+\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right) -(q-\nu+1)N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right)+S_1(r, u),$$

*$\psi_1(u')$ et $S_1(r, u)$ ayant les mêmes significations que dans le théorème* II.

---

[8] H. Cartan, *Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données* (*Mathématica*, Cluj, t. 7, 1933).

5. Généralisation. — Au lieu de la première dérivée, on peut considérer la dérivée d'un ordre quelconque $u^{(l)}$. En procédant comme au n° 1, on arrive à l'inégalité

$$(21)\quad \nu p \mathrm{T}(r, u) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{\nu}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u_k^{(l)}}\right| + \sum_{h=i}^{p}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + \sum_{h=1}^{p} m\left(r, \frac{u^{(l)}}{u-a_h}\right) + \sigma.$$

Soit

$$(22)\quad \psi_l(u) = \mathrm{L}_\nu[u^{(l)}]^\nu + \mathrm{L}_{\nu-1}[u^{(l)}]^{\nu-1} + \ldots + \mathrm{L}_0 = 0$$

l'équation définissant l'algébroïde $u^{(l)}$; on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum^{\nu}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u_k^{(l)}}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{\mathrm{L}_\nu}{\psi_l(0)}\right| d\varphi + \nu m(r, u^{(l)})$$

et l'on trouve

$$(23)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum^{\nu}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{u_k^{(l)}}\right| = \nu \mathrm{T}(r, u^{(l)}) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(0)}\right) + \log|\mathrm{C}_\lambda^{(l)}|.$$

Pour majorer $m\left(r, \frac{u^{(l)}}{u-a_h}\right)$, on peut écrire

$$\frac{u^{(l)}}{u-a_h} = \frac{u'}{u-a_h}\,\frac{u''}{u'}\cdots\frac{u^{(l)}}{u^{(l-1)}}$$

et appliquer l'inégalité (12).

On obtient ainsi l'inégalité

$$(12')\quad \nu p \mathrm{T}(r, u) < \nu \mathrm{T}(r, u^{(l)}) + \sum_{h=1}^{p}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(0)}\right) + \mathrm{S}(r, u).$$

Ensuite à l'aide de l'inégalité de Valiron, on parvient à établir l'inégalité fondamentale

$$(16')\quad \nu p(q+1-2\nu)\mathrm{T}(r, u) < (q+1-2\nu)\sum_{h=1}^{p}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + \sum_{i=1}^{q}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(b_i)}\right)$$
$$- (q-2\nu)\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(0)}\right) + \mathrm{S}_l(r, u).$$

On peut également obtenir une inégalité de la même forme que (17). A partir de (15), on trouve

$$(24)\quad \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\mathrm{L}_\nu}\right) < 2^l \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\mathrm{A}_\nu}\right) + 2(2^l-1)\nu(\nu-1)\mathrm{T}(r, u) + \overline{\sigma}.$$

Au moyen de ce résultat, on déduit de (12′) l'inégalité

$$(17')\quad \nu[pq - 2(\nu-1)(p+2^l-1)](\mathrm{T}r, u) < 2^l\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\mathrm{A}_\nu}\right)$$
$$+ (q+2-2\nu)\sum_{h=1}^{p}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_h(a)}\right) + \sum_{i=1}^{q}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(b_i)}\right)$$
$$- (q+1-2\nu)\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(0)}\right) + \mathrm{S}_l(r, u).$$

Enfin dans le cas où $u$ est une algébroïde du type général, l'emploi de l'inégalité fondamentale de M. H. Cartan permet de démontrer l'inégalité

$$(19')\qquad \nu p(q-\nu)\mathrm{T}(r, u) < (q-\nu)\sum_{h=1}^{p}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) + \sum_{i=1}^{q}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(b_i)}\right) - (q-\nu+1)\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_l(0)}\right) + \mathrm{S}_l(r, u),$$

qui est plus précise que (16').

## II. — Étude des défauts de la dérivée d'une algébroïde.

6. Considérons une algébroïde $u(x)$ méromorphe dans tout le plan [1] et définie par une équation de la forme (1) et supposons que sa dérivée $u'(x)$ est définie par une équation de la forme (8). Appelons *défaut absolu* et *défaut relatif* d'une valeur $\alpha$ pour $u'(x)$ les quantités

$$1-\overline{\lim}\frac{\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(\alpha)}\right)}{\nu\mathrm{T}(r, u')} \qquad \text{et} \qquad 1-\overline{\lim}\frac{\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(\alpha)}\right)}{\nu\mathrm{T}(r, u)}$$

respectivement; nous les désignons respectivement par $\delta'_a(\alpha)$ et $\delta'_r(\alpha)$.

On a évidemment $0 \leqq \delta'_a(\alpha) \leqq 1$ et $\delta'_r(\alpha) \leqq 1$. Dans un cas très étendu, celui des algébroïdes dépourvues d'intervalles extraordinaires, il est facile d'obtenir une borne inférieure de $\delta'_r(\alpha)$. En effet dans ce cas le rapport $\dfrac{m\left(r, \frac{u'}{u}\right)}{\mathrm{T}(r, u)}$ tend vers zéro pour $r \to \infty$, et il résulte de l'inégalité (16) que

$$(25)\qquad \overline{\lim}\frac{\mathrm{T}(r, u')}{\mathrm{T}(r, u)} \leqq 2\nu.$$

D'où

$$\overline{\lim}\frac{\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(\alpha)}\right)}{\nu\mathrm{T}(r, u)} \leqq 2\nu\,\overline{\lim}\frac{\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(\alpha)}\right)}{\nu\mathrm{T}(r, u')},$$

et par suite, on a

$$(26)\qquad \delta'_r(\alpha) \geqq (1-2\nu) + 2\nu\,\delta'_a(\alpha).$$

Donc dans le cas considéré tout défaut relatif est au moins égal à $-(2\nu-1)$.

7. Étude des défauts absolus. — Supposons que $u'$ admet $b_i (i = 1, \ldots, 2)$ comme valeurs déficientes et désignons par $\delta'_a$ la somme de leurs défauts absolus. Par définition

$$(27)\qquad \sum_{i=1}^{q}\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right) < \nu[q-\delta'_a+\varepsilon']\mathrm{T}(r, u'), \qquad \lim_{r\to\infty}\varepsilon' = 0.$$

Prenons l'inégalité fondamentale

$$\nu(p-2\nu)\,\mathrm{T}(r,u) < \sum_{h=1}^{p} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + \mathrm{S}(r,u)$$

et appliquons-la à $u'$ pour les valeurs $0$, $\infty$ et $b_i$; il vient

$$\begin{aligned}(28)\qquad \nu[q-2(\nu-1)]\,\mathrm{T}(r,u') < {} & \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(\infty)}\right) + \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) \\ & + \sum^{q} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right) + \mathrm{S}(r,u'),\end{aligned}$$

S se précise facilement et peut être négligé devant $\mathrm{T}(r, u)$ sauf pour une suite d'intervalles de longueur totale finie. Comme

$$\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(\infty)}\right) < 2\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\mathrm{A}_\nu}\right) + 2\nu(\nu-1)\,\mathrm{T}(r,u) + \sigma$$

et

$$\mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) < \nu[1 - \delta'_a(0) + \varepsilon_0]\,\mathrm{T}(r,u'),$$

l'inégalité (28) donne

$$(29)\qquad \nu[\delta'_a - 2(\nu-1)]\,\mathrm{T}(r,u') - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) < 2\nu[\nu - \delta(\infty)]\,\mathrm{T}(r,u) + o[\mathrm{T}(r,u)]$$

sauf pour une suite d'intervalles éventuels.

Distinguons deux cas :

1° $\delta'_a > 2\nu - 1$. L'inégalité (29) peut s'écrire

$$(30)\qquad [\delta'_a - 2(\nu-1)]\left[\nu\,\mathrm{T}(r,u') - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right)\right] < 2\nu[\nu - \delta(\infty)]\,\mathrm{T}(r,u) + o[\mathrm{T}(r,u)].$$

D'après (12), $\nu\mathrm{T}(r, u') - \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right)$ est supérieur à

$$\nu p\,\mathrm{T}(r,u) - \sum_{h=1}^{p} \mathrm{N}\left(r, \frac{1}{\psi(a_h)}\right) - \mathrm{S}(r,u)$$

et *a fortiori* à

$$(31)\qquad \nu p\,\mathrm{T}(r,u) - \nu[p - \delta + \varepsilon]\,\mathrm{T}(r,u) - \mathrm{S}(r,u) = \nu(\delta - \varepsilon)\,\mathrm{T}(r,u) - \mathrm{S}(r,u).$$

il s'ensuit que

$$\nu\delta[\delta'_a - 2(\nu-1)]\,\mathrm{T}(r,u) < 2\nu[\nu - \delta(\infty)]\,\mathrm{T}(r,u) + o[\mathrm{T}(r,u)].$$

En divisant par $\mathrm{T}(r, u)$ et en faisant tendre $r$ vers l'infini, on obtient l'inégalité

$$\delta[\delta'_a - 2(\nu-1)] \leq 2[\nu - \delta(\infty)]$$

et l'on peut énoncer le théorème :

THÉORÈME IV. — *Soit $u$ une algébroïde à $\nu$ branches et méromorphe dans tout le plan; on suppose qu'elle admet des valeurs déficientes finies avec $\delta$ comme somme de leurs défauts et l'on désigne par $\delta(\infty)$ le défaut de l'infini, qui peut être nul. Si $u'$ admet des valeurs finies non nulles comme valeurs déficientes et si la somme $\delta'_a$ de leurs défauts absolus est $> 2\nu - 1$, on a*

$$\delta[\delta'_a - 2(\nu - 1)] \leqq 2[\nu - \delta(\infty)]. \tag{32}$$

En particulier si $\delta(\infty) = 1$, on a

$$\delta'_a \leqq 2(\nu - 1) + \frac{2(\nu - 1)}{\delta}.$$

Comme l'on suppose $\delta'_a > 2\nu - 1$, on a nécessairement $\delta < 2(\nu - 1)$.
D'où le corollaire :

COROLLAIRE. — *On conserve la première partie de l'énoncé précédent et la signification de $\delta'_a$. Si $\delta(\infty) = 1$, on a ou bien $\delta < 2(\nu - 1)$ ou bien $\delta'_a \leqq 2\nu - 1$.*

2° $\delta'_a \leqq 2\nu - 1$. Dans ce cas, introduisons un nombre $\lambda$ tel que $0 < \lambda \leqq 1$, et écrivons

$$N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) = \lambda N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) + (1 - \lambda) N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right).$$

L'inégalité (29)

$$\begin{aligned} \nu[\delta'_a - 2(\nu - 1) - (1 - \lambda)(1 - \delta'_a(0))] T(r, u) - \lambda N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right) & \\ < 2\nu[\nu - \delta(\infty)] T(r, u) + o[T(r, u)]. & \end{aligned} \tag{33}$$

Déterminons $\lambda$ tel que

$$\delta'_a - 2(\nu - 1) - (1 - \lambda)(1 - \delta'_a(0)) = \lambda;$$

on trouve

$$\lambda = \frac{\delta'_a + \delta'_a(0) - 2\nu + 1}{\delta'_a(0)}. \tag{34}$$

Pour que $\lambda \leqq 1$, il faut que

$$\delta'_a + \delta'_a(0) - 2\nu + 1 \leqq \delta'_a(0), \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \delta'_a \leqq 2\nu - 1,$$

ce qui est vérifié d'après hypothèse.

Si donc $\delta'_a + \delta'_a(0) > 2\nu - 1$, on a $0 < \lambda \leqq 1$ et pour cette valeur $\lambda$ donnée par (34), l'inégalité (33) s'écrit

$$\lambda\left[\nu T(r, u') - N\left(r, \frac{1}{\psi_1(0)}\right)\right] < 2\nu[\nu - \delta(\infty)] T(r, u) + o[T(r, u)]. \tag{35}$$

Minorons alors le crochet au moyen de (12), il vient

$$\nu\lambda\, \delta T(r, u) < 2\nu[\nu - \delta(\infty)] T(r, u) + o[T(r, u)]$$

et l'on trouve

$$\lambda\delta \leqq 2[\nu - \delta(\infty)[,$$

ou

$$\delta[\delta'_a + \delta'_a(0) - 2\nu + 1] \leqq 2[\nu - \delta(\infty)]\delta'_a(0).$$

Donc on a le théorème :

THÉORÈME V. — *Étant donné une algébroïde u comme dans le théorème* II *avec les mêmes significations pour* $\delta$ *et* $\delta(\infty)$, *on suppose que u' admet zéro et d'autres valeurs finies comme valeurs déficientes; on désigne par* $\delta'_a(0)$ *le défaut absolu de zéro et par* $\delta'_a$ *la somme des défauts de ces autres valeurs. Si* $\delta'_a \leqq 2\nu - 1$ *et* $\delta'_a + \delta'_a(0) > 2\nu - 1$, *on a*

$$\delta[\delta'_a + \delta'_a(0) - 2\nu + 1] \leqq 2[\nu - \delta(\infty)]\delta'_a(0). \tag{36}$$

Si en particulier, $\delta(\infty) = 1$, on a

$$\delta \leqq \frac{2(\nu - 1)}{\lambda}$$

à condition que $\delta'_a(0) > 0$, $\delta'_a + \delta'_a(0) > 2\nu - 1$ et $\delta'_a \leqq 2\nu - 1$. Mais dans le cas où $\delta'_a > 2\nu - 1$, on a en vertu du corollaire précédent $\delta < 2(\nu - 1)$. Donc on a le

COROLLAIRE. — *On conserve la première partie de l'énoncé du théorème précédent; si* $\delta(\infty) = 1$, *l'une des trois circonstances suivantes se présente nécessairement : ou bien* $\delta'_a(0) = 0$, *ou bien* $\delta'_a + \delta'_a(0) \leqq 2\nu - 1$, *ou bien* $\delta < 2(\nu - 1)$ *si* $\delta'_a > 2\nu - 1$ *et dans le cas contraire*

$$\delta \leqq \frac{2(\nu - 1)}{\lambda}, \qquad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\delta'_a + \delta'_a(0) - 2\nu + 1}{\delta'_a(0)} \quad (^9).$$

8. ÉTUDE DES DÉFAUTS RELATIFS. — Prenons d'abord l'inégalité (17) et majorons les deux sommes au moyen de

$$\sum^{p} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(a_h)}\right) < \nu[p - \delta + \varepsilon] T(r, u), \qquad \lim_{r \to \infty} \varepsilon = 0,$$
$$\sum^{q} N\left(r, \frac{1}{\psi_1(b_i)}\right) < \nu[q - \delta'_r + \varepsilon'] T(r, u), \qquad \lim_{r \to \infty} \varepsilon' = 0;$$

il vient, pour $q \geqq 2\nu$,

$$[\delta(q + 1 - 2\nu) + \delta'_r] T(r, u) < qT(r, u) + o[T(r, u)].$$

Divisons les deux membres par $T(r, u)$ et faisons tendre $r$ vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, on obtient

$$\delta(q + 1 - 2\nu) + \delta'_r < q.$$

(9) Ceci complète un point de l'énoncé donné dans la Note citée (5).

D'où le théorème :

THÉORÈME VI. — *Étant donné une algébroïde comme précédemment, on suppose qu'elle admet des valeurs déficientes finies avec $\delta$ comme somme de leurs défauts. Si $u'$ admet comme valeurs déficientes $q$ valeurs (finies ou non) différentes de zéro, la somme $\delta'_r$ de leurs défauts relatifs vérifie pour $q \geqq 2\nu$ l'inégalité*

$$\delta'_r \leqq q - (q + 1 - 2\nu)\delta. \tag{37}$$

On peut faire intervenir particulièrement le défaut de l'infini $\delta(\infty)$ pour $u$. Considérons l'inégalité (18), on trouve pour $q \geqq 2\nu - 1$,

$$\begin{aligned}\nu[\delta(q + 2 - 2\nu) - 2(\nu - 1) + \delta'_r]\,\mathrm{T}(r, u) &< 2\nu[1 - \delta(\infty)]\,\mathrm{T}(r, u)\\ &\quad + \nu q \mathrm{T}(r, u) + o[\mathrm{T}(r, u)]\end{aligned}$$

en excluant éventuellement une suite d'intervalles de longueur totale finie.

De cette inégalité résulte la suivante :

$$(q + 2 - 2\nu)\delta - 2(\nu - 1) + \delta'_r \leqq 2\nu[1 - \delta(\infty)] + q,$$

ce qui donne

$$\delta'_r \leqq 2[1 - \delta(\infty)] - (q + 2 - 2\nu)\delta + q + 2(\nu - 1).$$

THÉORÈME VII. — *$u$ et $\delta$ étant définis comme dans le théorème précédent, on suppose que l'infini ait un défaut désigné par $\delta(\infty)$. Si $u'$ admet $q$ valeurs déficientes relatives finies et différentes de zéro, la somme $\delta'_a$ de leurs défauts relatifs vérifie pour $q \geqq 2\nu - 1$, l'inégalité*

$$\delta'_r \leqq 2\nu + q - (q + 2 - 2\nu)\delta - 2\delta(\infty). \tag{38}$$

9. Dans le cas où $u$ est du type général, l'emploi des inégalités plus précises (19) et (20) permet d'obtenir des résultats meilleurs.

On peut faire une étude analogue en ce qui concerne une dérivée d'ordre quelconque $u^{(l)}$.