ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE DURAND

# Les densités singulières de l'électrostatique et de la magnétostatique

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 73, nº 1 (1956), p. 75-91

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1956_3_73_1_75_0>

# LES DENSITÉS SINGULIÈRES
# DE L'ÉLECTROSTATIQUE
ET
# DE LA MAGNÉTOSTATIQUE

PAR M. ÉMILE DURAND

## I. — Conventions et formules générales.

1. EXPRESSIONS FAISANT INTERVENIR LE LAPLACIEN DE $\frac{1}{r}$. — *a. Introduction de* $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ *dans une intégrale de volume.* — Si $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ est la distance du point $M(\xi, \eta, \zeta)$ au point $P(x, y, z)$ et si l'on calcule le laplacien de $\frac{1}{r}$, soit (¹)

$$\left\{\begin{matrix}(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\left(\frac{1}{r}\right)\\ (\partial_\xi^2+\partial_\eta^2+\partial_\zeta^2)\left(\frac{1}{r}\right)\end{matrix}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{matrix}\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\\ \Delta'\left(\frac{1}{r}\right)\end{matrix}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{matrix}\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\\ \operatorname{div}'\operatorname{grad}'\left(\frac{1}{r}\right)\end{matrix}\right., \tag{1}$$

on trouve $\frac{0}{r}$; ceci est donc nul partout, sauf peut-être au point M où $r=0$ et où l'on peut s'attendre à un comportement singulier. Faisant abstraction de ce comportement au point $r=0$, on a longtemps admis qu'il était inutile de laisser subsister $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ dans les formules. On obtient cependant des expressions plus satisfaisantes et d'un caractère plus général *en conservant ce symbole et en convenant de le traiter comme les fonctions habituelles de l'analyse*. Après des intégrations par parties ou d'autres opérations, on arrive à des expressions qui ont un sens et qui peuvent être calculées effectivement.

(¹) Les dérivées primées sont prises par rapport aux coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$.

Par exemple, si l'on prend l'intégrale de volume de $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ étendue à un volume $v$ limité par une surface S, après transformation en intégrale de surface par la formule classique, on obtient

$$(2)\qquad \iiint_v \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = -\iint_S (\vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}})\left(\frac{1}{r}\right) dS$$
$$= \iint_S (\vec{n}.\overrightarrow{\text{grad}'})\left(\frac{1}{r}\right) = \iint_S \frac{\cos\theta}{r^2}\, dS = \Omega,$$

$\Omega$ étant l'angle solide sous lequel on voit du point $x$, $y$, $z$, la surface S; $dv = d\xi\, d\eta\, d\zeta$; $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à S(*fig.* 1 *a*).

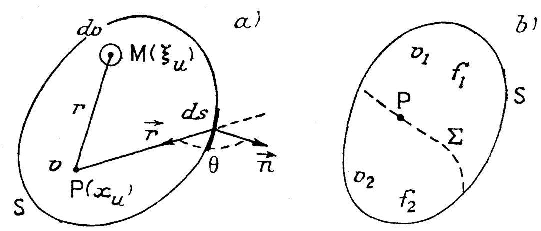


Fig. 1.

On a ainsi donné un sens à l'intégrale de volume puisque l'on arrive à une expression ayant une valeur numérique bien définie en tout point de l'espace.

Comme $\Omega = -4\pi, -2\pi, 0$ suivant que le point $P(x, y, z)$ est à l'intérieur de S, sur S ou en dehors, on peut écrire (2) sous la forme

$$(3)\qquad \iiint_v \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = -4\pi \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2}, \\ 0. \end{cases}$$

Si le point de la surface n'est pas un point régulier et si $\alpha$ est l'angle solide des tangentes, on a $\frac{\alpha}{4\pi}$ au lieu de $\frac{1}{2}$ qui correspond à $\alpha = 2\pi$.

Quand la surface S a des points à l'infini, on peut avoir des expressions différentes. Avec un plan indéfini, on a $\frac{1}{2}$, 0, $-\frac{1}{2}$. Pour un cône dont l'angle solide au sommet est $\alpha$, on a $\frac{4\pi-\alpha}{4\pi}$, $\frac{2\pi-\alpha}{4\pi}$, $-\frac{\alpha}{4\pi}$ et l'on retrouve le plan quand $\alpha = 2\pi$. Pour un cylindre de section droite finie, (3) est encore valable car les bases qui sont rejetées à l'infini sont vues sous un angle solide nul.

Toutes les expressions que l'on peut déduire de (3) et du fait que $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ est partout nul en dehors de $r = 0$, sont parfaitement correctes. Par exemple, si l'on a à calculer

$$\iiint_v f(\xi, \eta, \zeta)\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv,$$

où $f(\xi, \eta, \zeta)$ est une fonction continue donnée, on peut d'abord réduire le volume $v$ à une sphère aussi petite que l'on veut autour du point $x$, $y$, $z$ puisque $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$ hors de $x$, $y$, $z$. On peut donc faire sortir $f(\xi, \eta, \zeta)$ de l'intégrale à condition de lui donner la valeur $f(x, y, z)$, et d'après (3) on voit que l'on a

$$\iiint f(\xi, \eta, \zeta)\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = -4\pi f(x, y, z)\begin{cases}1,\\ \frac{1}{2},\\ 0,\end{cases} \tag{4}$$

Cette expression (4) est une généralisation de (3) que l'on retrouve en faisant $f=1$; c'est un cas particulier de la formule (24) que nous donnons plus loin.

Si la fonction $f$ présente une surface de discontinuité $\Sigma$ à l'intérieur du volume $v$, comme dans la figure 1 $b$, en un point P régulier de $\Sigma$, on a

$$-2\pi(f_1+f_2) \quad \text{au lieu de} \quad -4\pi f \text{ dans (4).} \tag{5}$$

Pour établir (5) à partir de (4), il suffit de décomposer le domaine $v$ en deux domaines $v_1$ et $v_2$; pour chacun d'eux le point P est sur la limite et (4) s'applique.

*b. Introduction de* $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ *dans une intégrale curviligne.* — Après le symbole $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ partout nul sauf en un point, introduisons le symbole

$$\int_C \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \overrightarrow{dl} \tag{6}$$

qui est partout nul sauf quand P est sur la courbe C (*fig.* 2 $a$). Pour donner un sens à ce vecteur singulier, nous prendrons son flux à travers une surface S coupée par la courbe C (*fig.* 2 $b$). On a alors

$$\iint_S \vec{n}\, dS \int_C \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \overrightarrow{dl}. \tag{7}$$

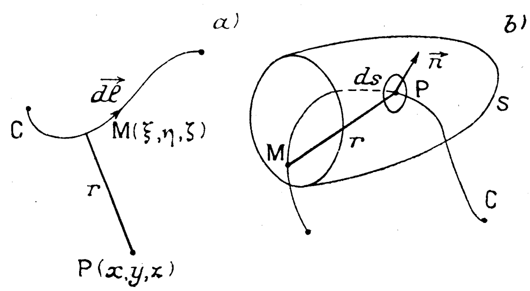

Fig. 2.

Pour prendre le flux de (6) on suppose qu'il y a toute une famille de courbes qui coupent S, mais (6) est nul sur toute courbe autre que C. Or, on a

$(\vec{n}\,\vec{dl})\,d\mathrm{S} = \pm\, dv$; on prend le signe (+) si C coupe S du sens négatif vers le sens positif (*fig.* 2*b*). (7) est donc une intégrale de volume qui s'écrit successivement en tenant compte de (3) et en prenant 1 dans les trois possibilités 1, $\frac{1}{2}$, 0,

$$(8)\qquad \iint_{\mathrm{S}} \vec{n}\, d\mathrm{S} \int_{\mathrm{C}} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \vec{dl} = \iiint \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = -4\pi.$$

On a ainsi trouvé un sens au vecteur symbolique (6) puisque son flux à travers S et dans les conditions que nous venons d'indiquer, est égal à $-4\pi$.

*c. Introduction de* $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ *dans une intégrale de surface.* — Considérons le vecteur symbolique

$$(9)\qquad \iint_{\mathrm{S}} \vec{n}\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\mathrm{S}$$

qui est partout nul sauf quand P est sur la surface S (*fig.* 3*a*). Pour donner un

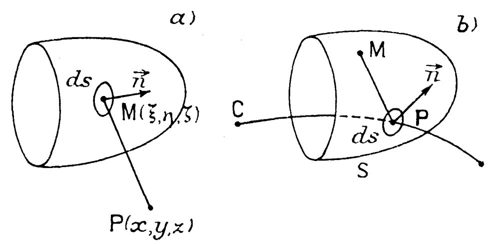


Fig. 3.

sens à cette expression vectorielle (9), nous calculerons sa circulation le long d'une courbe C qui coupe S, soit

$$(10)\qquad \int_{\mathrm{C}} \vec{dl} \iint_{\mathrm{S}} \vec{n}\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\mathrm{S}.$$

Comme précédemment on a $(\vec{n}\,\vec{dl})\,d\mathrm{S} = \pm\, dv$, et si la courbe C coupe $m$ fois S dans le sens (—, +) et $n$ fois S dans le sens (+, —), on en déduit que l'on a

$$(11)\qquad \int_{\mathrm{C}} \vec{dl} \iint_{\mathrm{S}} \vec{n}\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\mathrm{S} = -4\pi(m-n)$$

et l'on a 0, bien entendu, si C ne coupe pas S.

Ces expressions (8) et (11) sont, en quelque sorte, des conventions qui donnent un sens à (6) et (9), mais on voit que ces conventions se rattachent à (2).

Là aussi, pour que le domaine devienne un volume, on a supposé qu'il y avait une infinité de courbes correspondant aux différents points de S, mais $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ n'est différent de zéro que sur la courbe C.

*Remarque.* — Le fait d'attribuer une valeur finie à l'intégrale de volume de $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ nous conduit à dire que la valeur de cette expression qui est partout nulle, sauf quand $r=0$, prend en ce dernier point une valeur infinie. Dans ces conditions l'intégrale de volume se présente sous la forme $(0\times\infty)$ et l'on peut s'expliquer qu'elle ait une valeur finie.

L'expression (6) doit aussi être considérée comme ayant une valeur infinie en tout point de la courbe C. Quand on prend le flux à travers S, on peut se limiter à l'élément $dS\to 0$ et l'on comprend que ceci puisse être fini puisque c'est de la forme $(0\times\infty)$.

Enfin l'expression (9) doit être considérée comme infinie en tout point de S. La circulation qui s'effectue sur une longueur nulle se présente sous la forme $(0\times\infty)$ et a une valeur finie.

2. Expressions faisant intervenir le laplacien de $\mathrm{Log}\,r$. — *a. Introduction de* $\Delta(\mathrm{Log}\,r)$ *dans une intégrale de surface du plan.* — Pour deux variables dans le plan, on sait que $\Delta(\mathrm{Log}\,r)$ joue le même rôle que $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ dans l'espace. Si $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ est la distance du point $M(\xi,\eta)$ au point $P(x,y)$ et si l'on calcule le laplacien de $\mathrm{Log}\,r$, soit

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l}(\partial_x^2+\partial_y^2)(\mathrm{Log}\,r)\\ (\partial_\xi^2+\partial_\eta^2)(\mathrm{Log}\,r)\end{array}\right. \quad\text{ou}\quad \left\{\begin{array}{l}\Delta(\mathrm{Log}\,r)\\ \Delta'(\mathrm{Log}\,r)\end{array}\right. \quad\text{ou}\quad \left\{\begin{array}{l}\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{Log}\,r),\\ \mathrm{div}'\,\overrightarrow{\mathrm{grad}'}\,(\mathrm{Log}\,r),\end{array}\right.$$

on trouve $\frac{0}{r}$; ceci est donc partout nul sauf, peut-être, au point $r=0$.

On donne un sens à cette expression en admettant que l'on peut lui appliquer les règles habituelles de l'analyse. En prenant l'intégrale de surface de $\Delta(\mathrm{Log}\,r)$ et en transformant en intégrale curviligne étendue à la courbe C qui limite la surface S (*fig.* 4), on a successivement

$$(13)\qquad \iint_S \Delta(\mathrm{Log}\,r)\,dS=-\int_C(\vec{N}.\overrightarrow{\mathrm{grad}})(\mathrm{Log}\,r)\,dl=-\int_C\frac{(\vec{N}.\vec{r})}{r^2}\,dl=-\int_C\frac{\cos\theta}{r}\,dl=-\omega.$$

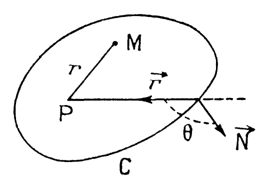

Fig. 4.

Comme $\omega=-2\pi,\ -\pi,\ 0$ suivant que le point P est à l'intérieur de la courbe C, sur cette courbe ou en dehors d'elle, (13) peut s'écrire

$$(14)\qquad \iint \Delta(\mathrm{Log}\,r)\,dS=2\pi\left\{\begin{array}{l}1,\\ \frac{1}{2},\\ 0.\end{array}\right.$$

Si P n'est pas un point régulier de la surface et si $\alpha$ est l'angle des deux tangentes, on a $\frac{\alpha}{2\pi}$, au lieu de $\frac{1}{2}$ qui correspond à $\alpha = \pi$.

Enfin, si la courbe C a des points à l'infini, on a des expressions différentes. Avec une droite indéfinie, on a $\frac{1}{2}$, $0$, $-\frac{1}{2}$ au lieu de $1$, $\frac{1}{2}$, $0$. Avec deux demi-droites issues d'un point et formant un angle $\alpha$, on a $\frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$, $\frac{\pi - \alpha}{2\pi}$, $-\frac{\alpha}{2\pi}$, ce qui se réduit à la droite indéfinie quand $\alpha = \pi$. Quand C est formé de deux droites parallèles indéfinies, (14) est encore valable.

Cette expression (14) correspond à (3) et l'on obtient de la même manière la formule qui correspond à (4), soit

$$\iint f(\xi, \eta)\, \Delta(\operatorname{Log} r)\, dS = 2\pi f(x, y) \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2}, \\ 0. \end{cases} \tag{15}$$

Si le point P intérieur se trouvait sur une ligne de discontinuité pour la fonction $f$, on aurait

$$\pi \{ f_1(x, y) + f_2(x, y) \} \quad \text{au lieu de} \quad 2\pi f(x, y)$$

au second membre de (15).

*b. Introduction de* $\Delta$ (Log$r$) *dans une intégrale curviligne du plan.* — Le symbole vectoriel

$$\int_C \vec{N}\, \Delta(\operatorname{Log} r)\, dl, \tag{16}$$

ou $\vec{N}$ est le vecteur unitaire de la normale positive à la courbe C (*fig.* 5*a*), est une fonction de P$(x, y)$ partout nulle sauf si le point P est sur la courbe C.

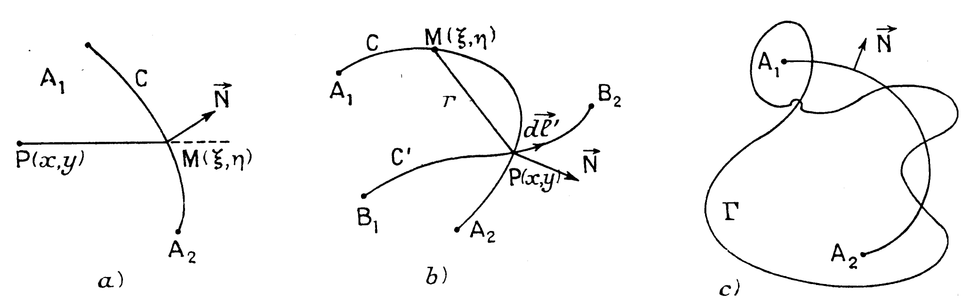


Fig. 5.

Pour donner un sens à cette expression (16), on donne l'expression de sa circulation le long d'une courbe C′ qui coupe C (*fig.* 5*b*). Elle s'écrit, de la manière habituelle

$$\int_{C'} \vec{dl'} \int_C \vec{N}\, \Delta(\operatorname{Log} r)\, dl \tag{17}$$

et comme

$$(\vec{dl'}.\vec{N})\,dl = \pm\, dS, \tag{18}$$

avec (+) ou (—) suivant que C′ coupe C du sens négatif vers le sens positif ou inversement. On voit que cette expression (17) se ramène à (15), d'où

$$\int_{C'} \vec{dl'} \int_{C} \vec{N}\,\Delta(\mathrm{Log}\,r)\,dl = 2\pi(m-n) \tag{19}$$

si C′ coupe C, $m$ fois de (—) vers (+) et $n$ fois de (+) vers (—). Par exemple, dans le cas de la figure 5$c$ on a $m = 3$, $n = 1$. Si le circuit Γ coupait la courbe aux points $A_1$ et $A_2$, $m'$ fois dans un sens et $n'$ fois dans l'autre, il faudrait ajouter à (19) le terme $\pi(m' - n')$.

Nous avons rattaché (19) à (15), mais on peut admettre que (19) donne un sens à (16) par convention, ce symbole vectoriel se manipulant comme une fonction ordinaire et régulière.

3. Expressions relatives au laplacien de $r = |x - \xi|$. — Pour une fonction d'une seule variable le laplacien se réduit à la dérivée seconde $\partial_x^2$ ou $\partial_\xi^2$. Dans ce cas c'est la fonction $r = |x - \xi|$ dont le laplacien jouit des propriétés analogues à celles que nous avons rencontrées pour $\frac{1}{r}$ et Log$r$ avec trois et deux variables.

Comme $r = (x - \xi)$ si $x > \xi$ et $r = (\xi - x)$ si $x < \xi$, on voit que l'on a $\Delta r = 0$ partout sauf peut-être pour $r = 0$ où la fonction présente une discontinuité (*fig.* 6$a$). Pour donner un sens à $\Delta r$ pour $r = 0$, nous admettrons que l'on peut écrire

$$\int_a^b \Delta r\, d\xi = 2\begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Delta r = 0 \quad \text{quand } \xi \neq x, \tag{20}$$

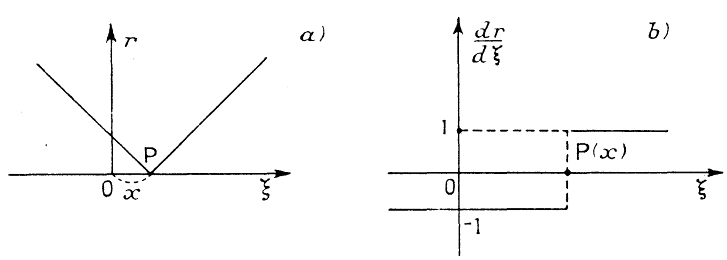


Fig. 6.

avec $1, \frac{1}{2}, 0$ suivant que le point P de coordonnées $x$ se trouve entre les points A et B de coordonnées $a$ et $b$, sur l'un de ces deux points ou en dehors de l'intervalle AB, soit respectivement

$$a < x < b, \qquad \begin{cases} x = a, \\ x = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < a, \\ x > b. \end{cases}$$

Si l'on admet que l'on peut traiter (20) comme une intégrale normale, elle s'écrit aussi

$$(21) \qquad \int_b^a \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right) d\xi = \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_{\xi=a}^{\xi=b}$$

et l'on obtient bien le résultat qui figure au second membre de (20), d'après la figure 6*b*.

De (20) on en déduit comme dans les paragraphes précédents, que l'on a pour une fonction continue $f(x)$ de l'intervalle $ab$ fermé

$$(22) \qquad \int_a^b f(\xi)\,\Delta r\, d\xi = 2 f(x) \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2}, \\ 0. \end{cases}$$

Si $f(x)$ présente une discontinuité simple en un point $P(x)$ intérieur à $(a, b)$, on a $(f_1(x) + f_2(x))$ au lieu de $2f(x)$.

4. Dérivées partielles successives des laplaciens de $\frac{1}{r}$, $\operatorname{Log} r$, $r$. — Comme les fonctions, ces dérivées seront nulles pour $r \neq 0$ et infinies pour $r = 0$. Nous les écrirons de la manière habituelle

$$(23) \qquad \partial_x^l\,\partial_y^m\,\partial_z^n\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right); \quad \partial_x^m\,\partial_y^n(\operatorname{Log} r); \quad \partial_x^n\,\Delta r.$$

Pour pouvoir donner un sens à ces expressions et les utiliser dans des calculs du type classique, nous admettrons les relations

$$(24) \qquad \iiint_v f(\xi, \eta, \zeta)\,\partial_x^l\,\partial_y^m\,\partial_z^n\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = -4\pi\,\partial_x^l\,\partial_y^m\,\partial_z^n f(x, y, z) \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2}, \\ 0; \end{cases}$$

$$(25) \qquad \iint_S f(\xi, \eta)\,\partial_x^m\,\partial_y^n\,\Delta(\operatorname{Log} r)\, dS = 2\pi\,\partial_x^m\,\partial_y^n f(x, y) \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2}, \\ 0; \end{cases}$$

$$(26) \qquad \int_a^b f(\xi)\,\partial_x^n\,\Delta r\, d\xi = 2\,\partial_x^n f(x) \begin{cases} 1, \\ \frac{1}{2}, \\ 0. \end{cases}$$

Ces relations (24), (25), (26) généralisent les expressions (4), (15), (22) que l'on retrouve en faisant $l = m = n = 0$. Ces expressions sont celles que l'on obtiendrait si les laplaciens étaient des fonctions ordinaires. Par exemple, on pourrait alors intégrer (26) $n$ fois par parties et comme $\Delta r$ est nul aux limites, de la relation $\partial_x \Delta r = -\partial_\xi \Delta r$ et de

$$(27) \qquad \partial_\xi\left[\partial_\xi^p f(\xi)\,\partial_x^q\,\Delta r\right] = \partial_\xi^{p+1} f(\xi)\,\partial_x^q(\Delta r) - \partial_\xi^p f(\xi)\,\partial_x^{q+1}\,\Delta r$$

on en déduirait (26), puisque l'intégrale devient finalement

$$\int_a^b \partial_\xi^n f(\xi)\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\xi$$

qui, d'après (22), est bien égale au second membre de (26).

On admet aussi que les dérivées sont indépendantes de l'ordre des dérivations, ce qui résulte d'ailleurs de la forme même de (24), (25), (26).

En résumé, nous pouvons dire que *toutes les expressions singulières faisant intervenir les laplaciens se traitent de la même manière que les fonctions classiques.* On peut même généraliser les résultats précédents, prendre leur divergence, leur gradient, leur rotationnel et transformer leurs intégrales multiples comme pour les fonctions ordinaires. En opérant de la sorte, si l'on finit par obtenir des fonctions du type classique, on est sûr que le résultat est correct.

## II. — Les densités singulières de l'électrostatique.

1. Densités volumiques correspondant a des sources ponctuelles. — *a. Charges ponctuelles.* — Une distribution volumique de charges est caractérisée par sa densité $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ telle que

$$\iiint_v \rho\, dv = Q, \tag{28}$$

Q étant la charge totale contenue dans le volume $v$, et le potentiel d'une telle distribution obéit à l'équation de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{29}$$

Les distributions superficielles et linéaires sont caractérisées respectivement par les densités $\sigma$ et $\lambda$ telles que

$$Q = \int_S \sigma\, dS, \qquad Q = \int_C \lambda\, dl. \tag{30}$$

Contrairement aux distributions volumiques $\rho$, le potentiel de ces dernières n'obéit pas à (29), mais à l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0. \tag{30 bis}$$

Dans cette dernière expression, il n'y a plus rien qui rappelle les sources de V et elle n'apparaît pas avec la même signification que (28) qui relie le potentiel aux sources. La même chose se présente pour les charges ponctuelles. Cet état de choses est peu satisfaisant et nous allons voir qu'il peut être évité en introduisant les laplaciens étudiés dans les paragraphes précédents.

Le potentiel $V(x, y, z)$ d'une charge ponctuelle $q$ située au point $M(\xi, \eta, \zeta)$

a pour expression

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}. \tag{31}$$

En prenant le laplacien des deux membres de (30), on voit s'introduire naturellement le laplacien de $\frac{1}{r}$. Si l'on pose

$$\rho(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{q}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{r}\right), \tag{32}$$

on obtient (29) et il est facile de voir que cette expression (32) a bien les caractéristiques d'une densité volumique qui correspond à la charge ponctuelle. Si l'on prend son intégrale de volume étendue à tout l'espace, on a

$$\iiint \rho\, dv = q, \tag{33}$$

d'après (3) où l'on prend $-4\pi$ au second membre puisqu'alors on est toujours à l'intérieur du domaine.

De plus $\rho$ est partout nul, sauf au point $r = 0$ où elle est infinie. C'est bien le résultat auquel on s'attend si la charge ponctuelle est obtenue à partir d'une distribution uniforme dans une sphère et si l'on fait tendre $\rho \to \infty$ et $v \to 0$ de manière que le produit $\rho v$ soit constamment égal à $q$. Pour calculer la force qu'un champ $\vec{E}$ exerce sur une charge ponctuelle, on peut utiliser l'expression de la densité de force $\vec{f} = \rho\vec{E}$; on a, en effet,

$$\vec{F} = \iiint \rho\,\vec{E}(\xi, \eta, \zeta)\, dv = q\,\vec{E}(x, y, z). \tag{34}$$

*b. Dipôles ponctuels.* — La densité volumique correspondant au dipôle ponctuel $\vec{p}$ au point $M(\xi, \eta, \zeta)$ s'écrit

$$\vec{P}(x, y, z) = \vec{P}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi}\vec{p}\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right). \tag{35}$$

C'est une quantité partout nulle sauf à l'origine où elle est infinie; si l'on calcule l'intégrale de volume étendue à tout l'espace, on trouve

$$\iiint \vec{P}(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \vec{p} \tag{36}$$

en vertu de (3).

Pour avoir la densité volumique de charge $\rho(x, y, z)$ qui correspond au dipôle, on part de l'expression du potentiel qui s'écrit

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\vec{p}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{p}}{r}\right). \tag{37}$$

En prenant le laplacien des deux membres et en l'écrivant sous la forme

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{38}$$

on voit que l'on a

$$\rho(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right) = -\operatorname{div}\vec{P}. \tag{39}$$

En prenant les dérivées primées (par rapport aux coordonnées $\xi$, $\eta$, $\zeta$), on a aussi

$$\rho(\xi, \eta, \zeta) = -\operatorname{div}'\vec{P} = \operatorname{div}\vec{P}. \tag{40}$$

D'après (24), on a

$$\iiint \rho\, dv = 0,$$

c'est-à-dire que la charge totale de la distribution est nulle.

Vérifions que le moment $\vec{p}$ du dipôle qui est donné par (36) est aussi donné par la formule classique

$$\iiint \rho\xi_u\, dv = p_u \qquad (dv = d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3). \tag{41}$$

Ceci s'écrit

$$\iiint \rho\xi_u\, dv = \iiint \xi_u \operatorname{div}\vec{P}\, dv = -\frac{1}{4\pi}\iiint \xi_u p_v\, \partial^v \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv$$

et, en vertu de (24), cela devient

$$p_v\, \partial^v(x_u) = p_v\, \delta_u^v = p_u. \tag{42}$$

Enfin la force qu'un champ $\vec{E}$ excerce sur cette distribution se calcule par

$$\vec{F} = \iiint \rho\,\vec{E}\, dv = -\frac{1}{4\pi}\iiint \vec{E}(\xi, \eta, \zeta)\left(\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = \left(\vec{p}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{E} \tag{43}$$

toujours en vertu de (24). On retrouve bien l'expression classique de la force sur un dipôle ponctuel.

On notera que (39) est l'expression habituelle de la densité fictive de charge équivalente à une densité $\vec{P}$ de polarisation.

Enfin (35) permet de démontrer aisément que l'on a (*voir* [2])

$$\vec{B}^\star = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{44}$$

entre l'induction électrique $\vec{B}^\star$ du dipôle, son champ électrique $\vec{E}$ et la densité de polarisation $\vec{P}$. Les grandeurs $\vec{B}^\star$ et $\vec{E}$ sont donc partout reliées par $\vec{B}^\star = \varepsilon_0\vec{E}$ sauf au point même où se trouve le dipôle.

*c. Multipôles ponctuels* (*voir* [1], p. 38 et 207). — La densité multipolaire volumique correspondant au multipôle ponctuel est

$$(45)\qquad P_{uvw\ldots pq}(x_1, x_2, x_3) = P_{uvw\ldots pq}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\frac{1}{4\pi} p_{uvw\ldots pq}\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right).$$

En prenant l'intégrale de volume étendue à tout l'espace, on obtient le moment multipolaire de la distribution

$$(46)\qquad \iiint P_{uvw\ldots pq}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3 = p_{uvw\ldots pq}.$$

Le potentiel du multipôle a pour expression

$$(47)\qquad V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-1)^n}{n!} p_{\underbrace{uvw\ldots pq}_{n}}\,\partial^u\partial^v\partial^w\ldots\partial^p\partial^q\left(\frac{1}{r}\right).$$

En prenant le laplacien des deux membres et en écrivant qu'il est égal à $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on en déduit

$$(48)\qquad \rho(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\frac{(-1)^n}{n!} p_{uvw\ldots pq}\,\partial^u\partial^v\partial^w\ldots\partial^p\partial^q\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right).$$

A l'aide de (24) et comme pour le dipôle, on vérifie que l'on a

$$(49)\qquad \iiint \rho\,dv = 0,$$

$$(50)\qquad \iiint \rho\,\xi_u\xi_v\xi_w\ldots\xi_p\xi_q\,dv = p_{uvw\ldots pq}$$

[$(-1)^n$ disparaît car $\rho(\xi, \eta, \zeta) = (-1)^n\rho(x, y, z)$].

Enfin on trouve aisément avec (24) que l'on a l'expression suivante pour la force qui s'exerce sur le multipôle ponctuel

$$(51)\qquad \vec{F} = \iiint \rho\,\vec{E}\,dv = \frac{1}{n!} p_{\underbrace{uvw\ldots pq}_{n}}\,\partial^u\,\partial^v\,\partial^w\ldots\partial^p\,\partial^q\vec{E}$$

$\left(\partial^u \text{ est mis pour } \frac{\partial}{\partial x_u}\right)$. (Rappelons que le $2^n$-pôle est la source qui est caractérisée par un moment à $n$ indices.)

Avec les multipôles, la relation qui correspond à (44) s'écrit

$$(52)\qquad B_u^\star = \varepsilon_0 E_u - \frac{(-1)^n}{n!}\partial^{vw\ldots pq} P_{uvw\ldots pq}.$$

2. Densités volumiques correspondant a des distributions linéaires. — *a. Distributions de charges.* — Le potentiel d'une distribution linéaire de densité $\lambda$ sur une courbe C s'écrit

$$(53)\qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \frac{\lambda}{r}\,dl.$$

En prenant le laplacien des deux membres, on voit que l'on a

$$(54)\qquad \rho(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_C \lambda\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right)dl.$$

Cette densité $\rho$ est partout nulle, sauf sur la courbe C où elle devient infinie. On vérifie aisément que l'intégrale de volume de (54) étendue à tout l'espace donne bien la charge totale de la distribution, puisque l'on peut écrire successivement

$$\iiint \rho\, dv = \int_C \lambda\, dl \iiint \left(-\frac{1}{4\pi}\right) \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = \int_C \lambda\, dl = Q, \tag{55}$$

d'après (3) et (30).

Il faut considérer à part le cas d'une distribution uniforme sur une droite indéfinie. On a alors un potentiel qui ne dépend que de deux variables et qui s'écrit

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \operatorname{Log} r, \qquad \text{avec} \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \tag{56}$$

d'où, en prenant le laplacien

$$\rho(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \Delta(\operatorname{Log} r). \tag{57}$$

D'après (14), on a

$$\iiint \rho\, dv = \lambda, \tag{58}$$

ce qui est la charge du système par unité de longueur. La grandeur (57) est partout nulle sauf sur la droite où elle est infinie.

*b. Distribution de dipôles* (*voir* [2], p. 494).

3. Densités volumiques correspondant a des distributions superficielles. — *a. Distributions de charges.* — Le potentiel d'une distribution superficielle de densité $\sigma$ sur une surface S, a pour expression

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r}\, dS. \tag{59}$$

En prenant le laplacien des deux membres de (59) et en égalant le second membre à $-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, on voit que l'on a

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{60}$$

Cette expression est partout nulle sauf sur la surface S où elle devient infinie. L'intégrale de volume de (60) étendue à tout l'espace donne bien la charge totale puisque, d'après (3) et (30), on peut écrire successivement

$$\iiint \rho\, dv = \int_S \sigma\, dS \iiint \left(-\frac{1}{4\pi} \Delta\left(\frac{1}{r}\right)\right) dv = \int_S \sigma\, dS = Q. \tag{61}$$

Il faut considérer à part le cas d'une distribution uniforme sur un plan indéfini. On a alors un potentiel qui ne dépend que d'une variable, par exemple $x$, et qui s'écrit (*voir* [1], p. 25)

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r, \qquad \text{avec} \quad r = |x - \xi|. \tag{62}$$

En prenant le laplacien de (62), on obtient

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{en posant} \quad \rho = \frac{\sigma}{2} \Delta r. \tag{63}$$

D'après (22), on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, d\xi = \sigma, \tag{64}$$

c'est-à-dire la charge par unité de surface.

*b. Distributions de dipôles* (*voir* [2]). — Pour les distributions de multipôles on pourrait développer des considérations analogues à celles qui sont exposées pour les dipôles.

## III. — Les densités singulières de la magnétostatique.

1. Rappel des définitions. — Pour des courants qui circulent dans un volume, on définit une densité $\vec{i}$ telle que le flux à travers une surface soit égal à l'intensité totale du courant I à travers cette surface, soit

$$I = \int_S (\vec{n} . \vec{i}) \, dS, \tag{65}$$

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale positive à la surface S (*fig.* 7*a*). Pour des courants circulant sur une surface (*fig.* 7*b*), on définit une densité $\vec{k}$ telle

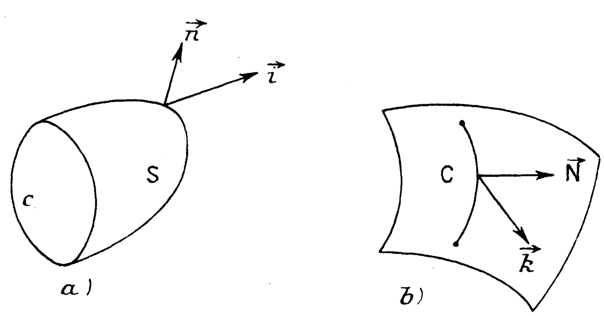


Fig. 7.

que l'intensité du courant à travers une courbe C soit égale à

$$I = \int_C (\vec{N} . \vec{k}) \, dl, \tag{66}$$

$\vec{N}$ étant la normale à la courbe C dans le plan de la surface et $dl$ étant l'élément d'arc de la courbe C.

Enfin il y a les courants linéaires qui ont une section nulle et une densité infinie, mais dont l'intensité totale I est finie. Nous allons voir qu'il est possible de définir une intensité de courant volumique $\vec{i}$ pour ces courants linéaires et aussi pour les courants superficiels, grâce à l'emploi des laplaciens de $\frac{1}{r}$ et de $\operatorname{Log} r$.

En magnétostatique, on considère parfois les systèmes fictifs de masses magnétiques ou de dipôles magnétiques associés aux systèmes réels de courants. Pour ces sources fictives toutes les considérations développées en électrostatique sont valables, sauf que l'on remplace $\varepsilon_0$ par $\mu_0$ et les grandeurs V, $\vec{E}$, $q$, $\rho$, $\sigma$, $\vec{\tau}$, ... par les mêmes lettres affectées d'un astérique, soit $V^\star$, $\vec{E}^\star$, $q^\star$, $\rho^\star$, $\sigma^\star$, $\vec{\tau}^\star$, ....

2. Densité volumique correspondant a un courant linéaire. — Le potentiel-vecteur d'un courant linéaire a pour expression

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{\vec{dl}}{r}. \tag{67}$$

Si l'on prend le laplacien des deux membres, on obtient

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{i} \tag{68}$$

en posant

$$\vec{i} = -\frac{I}{4\pi} \int_C \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \vec{dl}. \tag{69}$$

Cette expression (69) est le symbole cherché puisque (68) a la même forme que pour une distribution volumique de courants; cette densité est bien nulle partout sauf sur la courbe C où circule le courant et où, comme il se doit, elle devient infinie.

Pour justifier complètement (69), il nous faut montrer que la formule (65) conduit bien à I. Or ceci est exact, d'après (8).

On sait que le système magnétique associé au courant linéaire est le feuillet magnétique uniformément polarisé. Ce feuillet produit le champ magnétique $\vec{E}^\star$ et le courant produit l'induction $\vec{B}$.

L'auteur a montré que ces deux vecteurs étaient reliés par l'expression

$$\vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E}^\star + \vec{P}^\star, \tag{70}$$

où $\vec{P}^\star$ est la densité volumique de moment magnétique associé au feuillet, soit

$$\vec{P}^\star = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \vec{n}\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{71}$$

Comme $\vec{E}^* = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V^*$, sa circulation le long d'un circuit fermé est nulle, et, dans ces conditions, si l'on prend la circulation de $\vec{B}$, (70) donne

$$\oint (\vec{B}\, \vec{dl}) = \oint (\vec{P}^*\, \vec{dl}). \tag{72}$$

D'après (71) et (11), cela s'écrit encore

$$\oint (\vec{B}\, \vec{dl}) = (m - n)\mu_0 I. \tag{73}$$

Cette expression (73) n'est autre que le théorème d'Ampère.

La force $\vec{F}$ qu'une induction donnée exerce sur un courant linéaire est donnée par l'intégrale de volume étendue à tout l'espace

$$\vec{F} = \iiint [\vec{i} \times \vec{B}] = -\frac{I}{4\pi} \int_C [\vec{dl} \times \vec{B}] \iiint \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = I \int_C [\vec{dl} \times \vec{B}], \tag{74}$$

ce qui redonne bien la force de Laplace.

3. Densité de courant volumique correspondant a des courants superficiels. — Le potentiel-vecteur d'une distribution superficielle de courants sur une surface S, a pour expression

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S \frac{\vec{k}}{r}\, dS. \tag{75}$$

En prenant le laplacien, on obtient $\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{i}$, à condition de poser

$$\vec{i} = -\frac{1}{4\pi} \int_S \vec{k}\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dS. \tag{76}$$

Pour justifier cette expression, vérifions que le flux de $\vec{i}$ à travers une surface S′ qui coupe S suivant la courbe C, donne bien l'intensité totale du courant (*fig.* 8).

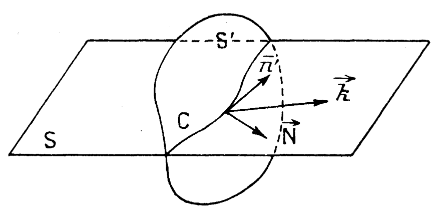


Fig. 8.

On a

$$\int_{S'} (\vec{i}.\vec{n}')\, dS' = -\frac{1}{4\pi} \int_{S'} \vec{n}'\, dS' \int \vec{k}\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dS \tag{77}$$

et comme $dI\, \vec{dl} = \vec{k}\, dS$ et, en tenant compte de (8), on peut écrire successivement

$$(78)\qquad \int_{S'} (\vec{i}.\vec{n}')\, dS' = -\frac{1}{4\pi}\int dI \int_{S'} \vec{n}'\, dS' \int \vec{dl}\,\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \int_C dI = \int_C (\vec{N}.\vec{k})\, dl = I,$$

ce qui est bien le résultat cherché, d'après (66).

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] É. Durand, *Électrostatique et Magnétostatique*, Masson, Paris, 1953.
[2] É. Durand, *Les distributions de dipôles* (*Ann. Physique*, t. 9, 1954, p. 493-523).