Annales scientifiques de l'É.N.S.

Robert Campbell

Généralisation de la formule de Fejér pour les séries de polynomes orthogonaux usuels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 4 (1954), p. 389-419

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_4_389_0>

GÉNÉRALISATION
DE LA FORMULE DE FEJER
POUR LES
SÉRIES DE POLYNOMES ORTHOGONAUX USUELS

PAR M. ROBERT CAMPBELL.

Il est bien connu que dans le développement

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty A_m(x), \qquad \text{où} \quad A_m(x) = a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

d'une fonction de variable réelle $f(x)$ en série de Fourier, on peut calculer explicitement toute somme partielle de rang n :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n A_m(x)$$

par la formule de Fourier. On sait qu'il est également possible de calculer d'une manière analogue les sommes partielles $\sigma_n(x)$ obtenues en appliquant à la série certains procédés de sommation, tels que ceux de Cesaro, par la formule de Fejer. On sait enfin les services qu'ont rendus les calculs effectifs de ces sommes pour la théorie de la convergence et de la sommabilité des séries de Fourier, et dans la théorie de l'approximation.

D'autres développements, généralisant ceux de Fourier, sont souvent utilisés, en Physique mathématique, en particulier ceux de la forme $\sum_0^\infty A_m \varphi_m(x)$ où les φ_m désignent une suite de fonctions orthogonales. Dans ces cas, beaucoup plus généraux, le calcul explicite des sommes partielles analogues aux $S_n(x)$ ou aux $\sigma_n(x)$ n'est pas possible. Cependant, si l'élément $\varphi_m(x)$ est un polynome $\Pi_m(x)$, on dispose de la formule très commode, de « Darboux-Christoffel », qui généralise directement celle de Fourier et permet de calculer immédiatement la somme partielle

$$S_n(x) = \sum_0^n A_m \Pi_m(x).$$

Il n'en est pas de même pour la somme de Fejer; il n'existe pas de formule fournissant, pour une série de la forme $\sum_1^\infty A_m \Pi_m(x)$ la valeur explicite de $\sigma_n^1(x)$ (première moyenne de Cesaro), *a fortiori* celle de $\sigma_n^p(x)$ (moyenne C, p) ($p > 1$).

Étant donné l'importance particulière du procédé de sommation de Cesaro, nous avons cherché à combler cette lacune; et l'objet du présent Mémoire est de définir une classe de polynomes orthogonaux $\Pi_m(x)$ tels que, dans le développement $\sum_0^\infty A_m \Pi_m(x)$ d'une fonction, les sommes de Fejer soient *calculables explicitement* par une formule généralisant la formule classique de Fejer.

Cherchant à étendre le procédé introduit à un large champ de polynomes, nous avons tenté de traiter le même problème non plus pour la moyenne de Cesaro proprement dite, mais pour une moyenne de la forme $\dfrac{\sum_1^n \alpha_p S_p}{\sum_1^n \alpha_p}$ qui, pour certaines valeurs des α_p est équivalente à (C, 1) et peut rendre les mêmes services, soit pour l'étude de la sommabilité, soit pour celle de l'approximation.

Les polynomes $\Pi_m(x)$ ainsi obtenus se définissent par le seul fait qu'ils se *prêtent* à la réussite du calcul; et l'intérêt de la méthode, en dehors de sa simplicité, réside, *a posteriori*, dans le fait que la classe de polynomes ainsi mise en évidence comprend tous les polynomes usuels ; ceux de Laguerre, de Legendre, de Tchebychef et de Gegenbauer. Il est à remarquer toutefois que les polynomes les plus généraux de Jacobi n'appartiennent pas à cette classe.

Généralisant enfin le calcul dans une autre direction, on a cherché si la méthode pourrait fournir aussi l'expression exacte d'une moyenne quelconque (C, p) de Cesaro pour le développement en série considéré $\sum_1 A_m \Pi_m(x)$. On a de nouveau mis en évidence une famille de polynomes, naturellement plus restreinte que la précédente.

Il semble bien clair, d'après ce qui a été dit, que les conditions définissant cette classe de polynomes ne seront que des conditions suffisantes, puisqu'elles ne feront qu'exprimer le seul fait que ces polynomes *se prêtent* à la réussite de la méthode sans rien impliquer de la réussite possible d'autres procédés.

L'étude commence par l'exposé de la méthode de calcul pour le cas, particulièrement simple, des séries de polynomes « de Weber-Hermite ». L'exposé dans le cas général s'en trouve allégé. Après avoir donné le principe du procédé et en avoir vérifié le fonctionnement sur des exemples, l'étude se termine par la recherche systématique de tous les polynomes répondant aux conditions requises pour que la méthode proposée soit applicable. Enfin, on montre, à titre de complément, que la méthode exposée ayant réussi pour la classe considérée de polynomes orthogonaux s'applique aussi à d'autres espèces de séries ; et l'on en donne pour exemple le développement d'une fonction de variable réelle en série de Neumann.

Le procédé ainsi introduit résout partiellement un problème dont la solution était peut-être considérée comme impossible. L'absence de cette solution n'avait pas empêché d'entreprendre l'étude de la sommabilité de ces séries, et de la pousser très loin. Il nous a semblé pourtant que l'obtention d'une formule *exacte* pourrait rendre les plus grands services et permettre en particulier de vérifier si certaines propriétés, démontrées pour les séries de Fourier, étaient spécifiques de celles-ci, ou appartenaient *aussi* à d'autres séries de fonctions orthogonales.

CHAPITRE I.

Moyennes de Cesaro d'une série de Weber-Hermite.

1. Sommation (C, 1) de la série de Weber-Hermite d'une fonction. — C'est en recherchant les sommes de Fejer relatives à une série de fonctions de Weber que la méthode nous est apparue [1]; il est donc utile, avant de l'exposer dans le cas général, d'en montrer sur ce cas simple à la fois le principe et la pratique.

Soit $f(x)$ une fonction développée sous la forme $\sum_0^\infty A_n D_n(x)$ [2] ; la formule de récurrence relative aux fonctions D_n de Weber :

$$x D_n(x) = D_{n+1}(x) + n D_{n-1}(x) \tag{1}$$

permet de calculer immédiatement la somme partielle $S_n(x)$.

L'expression du coefficient A_n :

$$A_n = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} D_n(t) f(t)\, dt$$

(1) *Cf.* R. Campbell, *Sur les sommations de Cesaro d'ordre entier des séries de Weber* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 596).

(2) $D_n(x)$ n'est pas exactement le polynome de Hermite, mais la fonction $e^{-\frac{x^2}{4}} He_n(x)$, pour laquelle les formules de récurrence sont plus commodes.

permet en effet d'écrire

$$(2)\quad S_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_n(x, t)}{x - t} f(t)\, dt, \qquad \text{où} \quad G_n(x, t) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} D_{n+1}(x) & D_n(x) \\ D_{n+1}(t) & D_n(t) \end{vmatrix}.$$

Cette formule n'est du reste autre que celle de Darboux-Christoffel dans ce cas particulier. On peut en déduire la limite pour n infini de $S_n(x)$ grâce à la formule asymptotique d'Adamoff :

$$(3)\qquad D_n(x) = \sqrt{2}\left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(x\sqrt{n} - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

On a ainsi, par un calcul simple et d'ailleurs classique

$$(3')\qquad S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u\sqrt{n}}{u} f(x - u)\, du$$

ou encore

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \left[f\left(x - \frac{u}{\sqrt{n}}\right) + f\left(x + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right] du.$$

Cette somme $S(x)$ de la série sera justement égale à $f(x)$, dans certaines conditions qui ont été maintes fois étudiées. Une des meilleures qu'on connaisse est que la quantité $\dfrac{f(x \pm t) - f(x \pm 0)}{t}$ admette une intégrale de Lebesgue.

Remarquons que le noyau de la sommation, c'est-à-dire la quantité $\mathcal{K}(u)$ de l'expression $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(u) f\left(x - \frac{u}{\sqrt{n}}\right) du$ vaut ici $\frac{\sin u}{u}$; il est le même que pour les séries de Fourier. Comme pour celles-ci et pour la même raison, il entraîne l'existence d'un phénomène de Gibbs.

Soit à calculer la première somme de Fejer (ou la première moyenne de Cesaro)

$$\sigma_n^1(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} G_k(x, t)}{x - t} f(t)\, dt.$$

La question se ramène uniquement au calcul de $\sum_1^{n-1} G_k(x, t)$, $\left(\text{ou de } \sum_1^n\right)$. C'est ici que nous faisons intervenir une propriété des D_n qui n'a pas servi pour le calcul de S_n, à savoir que les D_n sont liés entre eux par une formule de récurrence autre que (2), et faisant intervenir leur dérivée première :

$$2 D'_n(x) = n\, D_{n-1}(x) - D_{n+1}(x).$$

Or, la somme $\sum_1^n G_k(x, t)$ peut s'écrire de deux manières différentes, à savoir :

$$(4)\qquad -\frac{1}{n!} D_n \overline{D}_{n+1} + \sum_0^n \frac{\overline{D}_n}{n!} (D_{n+1} - n\, D_{n-1}) + D_1 \overline{D}_0$$

d'une part, et

$$(4') \qquad + \frac{1}{n!}\overline{D}_n D_{n+1} - \sum_0^n \frac{D_n}{n!}(D_{n+1} - n D_{n-1}) - \overline{D}_1 D_0$$

d'autre part, en posant pour abréger

$$D_n = D_n(x), \qquad \overline{D}_n = D_n(t).$$

D'après (3), on peut écrire (4) sous la forme

$$(5) \qquad -\frac{1}{n!} D_n \overline{D}_{n+1} - \sum_1^n \frac{\overline{D}_n D'_n}{n!} + D_1 \overline{D}_0$$

et faire une transformation analogue sur (4').

Si l'on désigne alors par $\sum$ la somme $\sum_1^n G_k(x, t)$, on obtient, en ajoutant les deux expressions telles que (5) qui sont toutes deux égales à $\sum$:

$$(6) \qquad 2\sum = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_{n+1} & \overline{D}_{n+1} \\ D_n & \overline{D}_n \end{vmatrix} + 2\sum_1^n \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_n & D'_n \\ \overline{D}_n & \overline{D}'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_1 & \overline{D}_1 \\ D_0 & \overline{D}_0 \end{vmatrix}.$$

Le premier terme du second membre de (6) n'est autre que G_n, le problème revient donc au seul calcul du second, Pour l'effectuer, nous sommerons séparément :

$$\sum_1^n D_n \overline{D}'_n \quad \text{et} \quad \sum_1^n \overline{D}_n D'_n.$$

Pour cela, à la formule de récurrence (2) écrite avec la variable x, nous associons la formule qu'on en déduit en dérivant la même formule en t :

$$(7) \qquad \begin{cases} x D_n = D_{n+1} + n D_{n-1}, \\ t\overline{D}'_n = \overline{D}'_{n+1} + n \overline{D}'_{n-1} - \overline{D}_n, \end{cases}$$

système d'où l'on déduit aussitôt, par combinaison linéaire, l'équation suivante :

$$(x - t)\frac{D_n \overline{D}'_n}{n!} = H(n) - H(n-1) - \frac{D_n \overline{D}_n}{n!},$$

avec

$$H_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_{n+1} & D_n \\ \overline{D}'_{n+1} & \overline{D}'_n \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overline{H}_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \overline{D}_{n+1} & \overline{D}_n \\ D'_{n+1} & D'_n \end{vmatrix}.$$

La sommation $\sum_1^n \frac{D_n \overline{D}'_n}{n!}$. s'en déduit immédiatement puisque $\sum_1^n \frac{D_n \overline{D}_n}{n!}$ a déjà été effectuée (par la formule de Christoffel). Et de même pour la somme $\sum_1^n \frac{\overline{D}_n D'_n}{n!}$.

On obtient ainsi, pour la première somme de Fejer :

$$(8)\qquad S_n^1(x)=\sum=\sum^{n} G_k(x,\,t)=\frac{1}{2}G_n+\frac{H_n+\overline{H}_n-(H_0+\overline{H}_0)}{x-t}-\frac{2G_n}{(x-t)^2}.$$

On déduit immédiatement de cette expression le théorème analogue à celui de Fejer des séries de Fourier. En effet, la valeur asymptotique déjà employée de $D_n(x)$ permet de trouver immédiatement l'expression de la valeur asymptotique du noyau $\mathcal{K}_n^1(x,\,t)$ de la somme (C, 1), qui s'écrit :

$$(9)\quad \mathcal{K}_n^1(x,\,t)=\frac{1}{2}\sin\sqrt{n}(x-t)+2\sqrt{n}\,\frac{\cos\sqrt{n}(x-t)}{x-t}-\frac{2\sin\sqrt{n}(x-t)}{(x-t)^2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

d'où l'on déduit, par un passage à la limite analogue à celui qu'on effectue pour la somme ordinaire S_n et par les mêmes changements de variables, que

$$(10)\qquad \lim_{n\to\infty}\sigma_n^1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u}\left[\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)\right]f\left(x-\frac{u}{\sqrt{n}}\right)du.$$

Pour que cette limite soit $f(x)$, il faut et il suffit que, pour la valeur de x considérée et quel que soit ε positif :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\varepsilon}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\,\mathcal{K}_n^1(x,\,t)\,dt=0.$$

Telle est la condition de sommabilité (C, 1) de la série de Weber-Hermite de $f(x)$ [2].

Contrairement à ce qui se passe dans les séries de Fourier, la sommation (C, 1) ne *fait pas disparaître* le phénomène de Gibbs.

Il est d'ailleurs facile de trouver un procédé de sommation qui n'est pas celui de Fejer (mais qui a des propriétés équivalentes) et qui fait disparaître le phénomène de Gibbs.

En effet, d'après (3)' le noyau de S_n est asymptotique à $\frac{\sin u\sqrt{n}}{u}$; donc, si l'on considère non plus la moyenne $\frac{1}{n}\sum_1^n S_k$ mais la moyenne $\tau_n=\frac{1}{n}\sum_1^n S_{k^2}$, comme $S_{k^2}\sim\frac{\sin ku}{u}$, on peut ici, pour avoir l'ordre de grandeur asymptotique de τ_n, appliquer la formule élémentaire

$$\sum_{k=1}^{n}\sin h\theta=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

---

(2) *Cf.* CAMPBELL, *Sur la sommabilité et la dérivabilité de la série de Weber d'une fonction* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1951, p. 910-912).

Cette moyenne conduit donc directement à une intégrale dont le noyau $\frac{1}{u^2}\sin^2 nu$, toujours positif, ne donne plus le phénomène de Gibbs.

2. Calcul de la moyenne (C, k). — Il est maintenant facile de comprendre que l'on peut calculer de manière semblable toutes les moyennes de Cesaro de la série.

Si l'on pose en effet :

$$\begin{aligned} S_n^1 &= S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1},\\ S_n^2 &= S_0^1 + S_1^1 + \ldots + S_{n-1}^1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

ces moyennes ont pour numérateurs les S_n^k (les dénominateurs correspondants étant des facteurs numériques). Il suffit donc d'itérer le calcul précédent. Nous effectuons cette itération pour la sommation $(\mathrm{C}, 2)$.

Pour calculer $\sigma_n^2 = \dfrac{\sum_1^n S_k^1}{\sum_1^n C_k^1}$, il suffit de sommer les trois termes de l'expression (8), d'où, si $x - t = u$:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (H_n + \overline{H}_n) + \frac{1}{2}\sum_1^n G_n\left(1 - \frac{4}{u^2}\right),$$

le calcul revient à la sommation $\sum_1^n (H_n + \overline{H}_n)$.

Posons pour la suite des opérations

$$H_n = H_n^1, \qquad \overline{H}_n = \overline{H}_n^1,$$

$$H_n^{(p)} = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} D_{n+1} & D_n \\ \overline{D}_{n+1}^{(p)} & \overline{D}_n^{(p)} \end{vmatrix}, \qquad \overline{H}_n^{(p)} = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \overline{D}_{n+1} & \overline{D}_n \\ D_{n+1}^{(p)} & D_n^{(p)} \end{vmatrix}.$$

$\sum H_n^1$ s'exprime alors sous deux formes dans le calcul de $S_n^2(x)$:

1° $$\sum_1^n H_n^1 = \frac{1}{n!} D_{n+1}\overline{D}'_n - \sum_1^n \frac{D_n}{n!}\underbrace{(\overline{D}'_{n+1} - n\,\overline{D}'_{n-1})}_{-2\overline{D}''_n} - D_0\overline{D}'_1;$$

2° $$\sum_1^n H_n^1 = -\frac{1}{n!} D_n\overline{D}'_{n+1} + \sum_1^n \frac{\overline{D}'_n}{n!}\underbrace{(D_{n+1} - n\,D_{n-1})}_{2D'_n} + D_1\overline{D}'_0.$$

On a ainsi à effectuer les deux espèces de sommes : $\sum D_n\overline{D}''_n$ et $\sum \overline{D}'_n D'_n$.

$\sum D_n \bar{D}''_n$ se calcule en dérivant deux fois (1) comme dans l'opération (7)

$$x D_n = D_{n+1} + n D_{n-1},$$
$$t \bar{D}''_n = \bar{D}''_{n+1} + n \bar{D}''_{n-1} - 2 \bar{D}'_n,$$

ce qui donne

$$(x-t)\frac{D_n \bar{D}''_n}{n\,!} = H^{(2)}_n - H^{(2)}_{n-1} - 2\frac{D_n \bar{D}'_n}{n\,!};$$

d'où, en n'écrivant pas les termes d'indice zéro (qui donneront, pour n grand, une contribution nulle dans la moyenne cherchée) :

$$(x-t)^3 \sum \frac{D_n \bar{D}''_n}{n\,!} = 2 G_n - 2(x-t) H^{(1)}_n - (x-t)^2 H^{(2)}_n.$$

Quant à la somme $\sum \frac{D'_n \bar{D}'_n}{n\,!}$, elle s'obtient évidemment par la juxtaposition des deux formules dérivées de (2) :

$$x D'_n + D_n = D'_{n+1} + n D'_{n-1},$$
$$t \bar{D}'_n + \bar{D}_n = \bar{D}'_{n+1} + n \bar{D}'_{n-1},$$

qui donnent de la même manière, en posant $x - t = u$:

$$u^3 \sum \frac{D'_n \bar{D}'_n}{n\,!} = 2 G_n - u(H^1_n + \bar{H}^1_n) + 2 u K_n,$$

où

$$K_n = \frac{1}{n\,!}\begin{vmatrix} D'_{n+1} & \bar{D}'_{n+1} \\ D'_n & \bar{D}'_n \end{vmatrix},$$

il en résulte pour S^2_n la valeur

$$S^2_n = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{u^2} + \frac{8}{u^4}\right) G_n + \left(\frac{1}{u} + \frac{4}{u^2}\right)(H^1_n + \bar{H}^1_n) - \frac{1}{u^2}\left[2 K_n - (H^{(2)}_n - \bar{H}^{(2)}_n)\right].$$

Le noyau de la sommation (C, 2) est alors obtenu par les formules asymptotiques (9) et s'écrit

$$\mathcal{K}^2_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{8}{u^3}\left[\left(\frac{2}{u^2} - 1\right)\sin u - \frac{2}{u}\cos u\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{8}{u^2}\,\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{\sin u}{u}\right).$$

La forme du noyau obtenu montre que le phénomène de Gibbs n'a pas disparu.

Remarques. — *a.* La forme asymptotique obtenue pour $\mathcal{K}^0_n$, $\mathcal{K}^1_n$, $\mathcal{K}^2_n$ incite à penser que les noyaux suivants s'expriment eux aussi très simplement à partir des dérivées successives de $\frac{\sin u}{u}$. Je ne l'ai pas démontré.

b. Il peut être avantageux d'exprimer S^2_n en fonction de S^1_n et de S^0_n :

$$S^2_n = \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{u^2}\right) S^0_n + \left(1 - \frac{4}{u^2}\right) S^1_n - \frac{1}{u^2}\left[2 K_n - (H^{(2)}_n - \bar{H}^{(2)}_n)\right].$$

Tous les $H_n^{(p)}$ et les $K_n^{(p)}$ qui figurent dans les sommes suivantes sont fonctions linéaires respectivement des $H_n^{(i)}$ et des $K_n^{(i)}$ $(i < p)$.

Les opérations auxquelles on est ramené pour effectuer les moyennes (C, p) sont toujours des sommations identiques ou analogues à celles effectuées précédemment. On peut donc expliciter chacune de ces moyennes et en déduire les noyaux $\mathcal{K}_n^{(p)}(u)$.

CHAPITRE II.

Calcul de la somme de Fejer d'un développement d'une fonction en série de polynomes orthogonaux.

Soit $\sum_0^\infty A_n P_n(x)$ le développement, dans un intervalle (a, b), de la fonction $f(x)$ en séries de polynomes $P_n(x)$, supposés orthogonaux et normés dans l'intervalle (a, b). Trois P_n successifs normés sont liés par la relation de récurrence

$$P_n = (A_n x + B_n) P_{n-1} - C_n P_{n-2}, \tag{1}$$

où

$$A_n > 0, \qquad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

La somme partielle du développement $S_n = \sum_0^n A_n P_n$ est obtenue sous forme explicite et quels que soient les P_n par la formule, déjà signalée de Darboux-Christoffel, qui s'écrit, dans le cas général (³) :

$$S_n(x) = \frac{1}{A_{n+1}} \int_a^b \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x - t} f(t)\, dt. \tag{2}$$

Cherchons alors s'il existe une manière, analogue à celle employée dans (1), de calculer les premières moyennes de Cesaro. La somme $\sum_1^n S_r$, numérateur de la moyenne $(C, 1)$, s'écrit des deux façons suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} & -\frac{1}{A_{n+1}} P_n \overline{P}_{n+1} + \sum_0^n \overline{P}_r \left[\frac{P_{r+1}}{A_{r+1}} - \frac{P_{r-1}}{A_r}\right] + \frac{1}{A_1} P_1 \overline{P}_0, \\ & +\frac{1}{A_{n+1}} \overline{P}_n P_{n+1} - \sum_0^n P_r \left[\frac{\overline{P}_{r+1}}{A_{r+1}} - \frac{\overline{P}_{r-1}}{A_r}\right] - \frac{1}{A_1} \overline{P}_1 P_0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[en posant, comme au chapitre I : $P_n(x) = P_n$, $P_n(t) = \overline{P}_n$].

(³) *Cf.* Szegö, p. 41.

C'est ici, rappelons-le, que, dans le chapitre précédent, on avait fait intervenir une deuxième relation de récurrence entre les D_n. Si une telle seconde relation n'a pas lieu, les deux sommations précédentes ne s'effectuent pas, c'est-à-dire n'admettent pas d'expression plus simple que celle même sous laquelle elles sont écrites.

Or, dans le cas d'une série de polynomes $P_n(x)$ orthogonaux et normés *quelconques*, une telle « *seconde relation* » n'existe pas. Dans le cas général, la moyenne (C, 1) n'a donc pas d'expression « simple » analogue à celle trouvée pour les fonctions de Weber-Hermite; mais si l'on suppose, au contraire, que, comme dans le cas des D_n, les polynomes P_n sont liés à leurs dérivées par une relation telle que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x, n) \frac{d^k}{dx^k} P_{n-1}(x), \tag{4}$$

alors un calcul analogue à celui qu'on vient d'exposer dans (1) est possible, comme on va le voir, du moins pour certaines formes de $\varphi_k(x, n)$, ces formes ayant lieu pour presque tous les polynomes usuels, où il suffit d'ailleurs toujours de prendre $k = 1$. C'est ce qu'on supposera dans la suite, pour se limiter aux polynomes orthogonaux habituellement employés.

La relation (4) sera alors prise sous la forme

$$P_n(x) = f_n(x) P_{n-1}(x) - g_n(x) P'_{n-1}(x). \tag{4'}$$

Nous rappelons sur le tableau ci-joint les expressions de $f_n(x)$ et $g_n(x)$ dans les cas usuels (*cf.* p. 410).

Une telle relation permet de réduire les quantités $\sum_0^n$ qui figurent dans (3) à ne porter que sur le *seul* indice r (les indices $r+1$ et $r-1$ n'y figurant pas). On n'a ainsi à sommer que les produits tels que

$$\sum_0^n P_r(x) P_r(t), \qquad \sum_0^n P_r(x) P'_r(t).$$

Or, on obtient grâce à (1) et (4') :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{P_{r+1}}{A_{r+1}} &= \frac{1}{A_{r+1}} [A_{r+1} x + B_{r+1}] P_r - \frac{P_{r-1}}{A_r}, \\ \frac{P_{r-1}}{A_r} &= \frac{1}{A_{r+1}} [(A_{r+1} x + B_{r+1} - f_{r+1}) P_r + g_{r+1} P'_r]. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

En tenant compte de (4'), l'une des sommes $\sum_0^n$ qui figurent dans (3) devient

$$\sum_{r=0}^{n} P_r(t) [U_r(x) P_r(x) - V_r(x) P'_r(x)],$$

où l'on a posé

$$(6)\qquad \begin{cases} U_r(x) = 2\dfrac{f_r(x)}{A_r} - \left(x + \dfrac{B_r}{A_r}\right), \\ V_r(x) = 2\dfrac{g_r(x)}{A_r}. \end{cases}$$

Ainsi le problème se ramène à effectuer les nouvelles sommes $\sum_0^n U_r P_r \overline{P}_r$ et $\sum_0^n V_r \overline{P}_r P'_r$ qui sont immédiatement calculables par le procédé employé dans (1), *chaque fois que* U_r *et* V_r *ne dépendent pas de* r.

Il est facile de vérifier que cette condition définit une classe de polynomes orthogonaux à laquelle appartiennent ceux de Laguerre (et évidemment ceux de Weber-Hermite).

La somme $\sum P_r \overline{P}_r$ déjà calculée est fournie par (2) et la somme $\sum \overline{P}_r P'_r$ $\left(\text{ou } \sum P_r \overline{P}'_r\right)$ se calcule en associant à (1) écrite en x la formule dérivée écrite en t :

$$(7)\qquad \begin{cases} (A_{r+1}x + B_{r+1})P_r = P_{r+1} + \dfrac{A_{r+1}}{A_r}P_{r-1}, \\ (A_{r+1}t + B_{r+1})\overline{P}'_r = \overline{P}'_{r+1} + \dfrac{A_{r+1}}{A_r}\overline{P}'_{r-1} - A_{r+1}\overline{P}_r, \end{cases}$$

système d'où l'on tire par combinaison linéaire :

$$(8)\qquad (x-t)P_r\overline{P}'_r = \Delta_{r+1}(x, t) - \Delta_r(x, t),$$

où

$$(8')\qquad \Delta_r = \frac{1}{A_r}\begin{vmatrix} P_{r-1} & P'_{r-1} \\ \overline{P}_r & \overline{P}'_r \end{vmatrix},$$

la somme $\sum_0^n P_r \overline{P}'_r$ s'en déduit aussitôt.

On en déduit la première moyenne de Cesaro $\sigma_n^1(x)$ grâce à la demi-somme effectuée des expressions (3) :

$$(9)\qquad \sigma_n^1(x) = \frac{1}{n+1}\sum_0^n S_r(x) = \frac{1}{n+1}\int_a^b \frac{\Sigma_n^1(x, t)}{x-t} f(t)\,dt,$$

U_r et V_r, $\overline{U}_r$ et $\overline{V}_r$ ne dépendant pas de r, on peut supprimer l'indice; en ce cas l'expression de Σ_n^1 s'écrit

$$(10)\qquad 2\Sigma_n^1 = \left[1 + \frac{U - \overline{U}}{x-t} - \frac{V + \overline{V}}{(x-t)^2}\right]\Sigma_n^0 - \frac{V[\Delta_{n+1} - \Delta_0] + \overline{V}[\overline{\Delta}_{n+1} - \overline{\Delta}_0]}{x-t} + \Sigma_1^0;$$

Σ_n^0 désigne lui-même $\dfrac{1}{A_{n+1}}\left(P_{n+1}\overline{P}_n - \overline{P}_{n+1}P_n\right)$, c'est-à-dire l'expression même qu'on rencontre dans la formule donnant la somme ordinaire (Darboux-Christoffel), puisque

$$S_n(x) = \sigma_n^0(x) = \sum_0^n A_r P_r(x) = \int_a^b \frac{\Sigma_n^0(x, t)}{x - t} f(t)\, dt. \tag{11}$$

Applications : Cas du développement d'une fonction en séries de polynomes de Hermite et de Laguerre. — A. *Polynomes de Hermite*. — Dans le chapitre I, on a traité le cas du développement d'une fonction en série de fonctions de Weber; ces fonctions sont liées très simplement aux polynomes de Hermite par la relation

$$D_n(x) = e^{-\frac{x^2}{4}} \sqrt{n!}\, \mathcal{H}_n(x), \tag{12}$$

$\mathcal{H}_n$ étant le polynome normé de Hermite satisfaisant, par conséquent, aux deux relations (1) et (4′) précédentes où

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad B_n = 0, \qquad f_n = \frac{x}{\sqrt{n}}, \qquad g_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On a alors $U = x$, $\overline{U} = t$, $V = \overline{V} = 1$, et le noyau Σ_n^1 de la moyenne (C, 1) s'écrit

$$\Sigma_n^1 = \left[1 - \frac{1}{(x-t)^2}\right] \Sigma_n^0 - \frac{1}{2(x-t)} \left[\overline{\Delta}_{n+1} + \Delta_{n+1} - (\overline{\Delta}_0 + \Delta_0)\right]. \tag{13}$$

Si l'on se reporte à la formule (8), on y constate que le coefficient de G_n n'est plus ici exactement le même, ce qui a pour effet de modifier le coefficient $\frac{1}{2} \sin \sqrt{n}(x - t)$ du premier terme de (10) (chap. I); mais ce terme ne donne aucune contribution, quand $n \to \infty$, dans la formule asymptotique (11), qui ainsi est encore valable telle quelle, et fournit le noyau de sommation d'une fonction $g(x)$ [fonction qui n'est pas soumise aux mêmes conditions qu'au chapitre I, à cause de la présence du facteur $e^{-\frac{x^2}{4}}$ de (12)]. Ainsi sous des conditions plus larges que celles données par Uspensky et Kowallik ([4]) et sur lesquelles nous n'insisterons pas ici, on a encore en remplaçant f par g, l'égalité asymptotique (11) (chap. I).

B. *Polynomes de Laguerre*. — Le polynome de Laguerre normé $\mathcal{L}_n^\alpha(x)$ satisfait à (1) et (4′) où

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha)}}, \qquad B_n = (2n + \alpha - 1) A_n;$$

$$f_n = (-x + n + \alpha) A_n, \qquad g_n = -A_n x;$$

d'où

$$U = -3x + 1, \qquad V = -x.$$

([4]) *Cf.* Szegö, p. 200 (th. 9.1.16).

La somme ordinaire partielle d'ordre n s'écrit [*cf.* formule (2)]

$$\text{(14)}\qquad S_n(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^\alpha K_n^\alpha(x,t)f(t)\,dt,$$

K_n^α étant le noyau de Christoffel. En désignant par L_n^α le polynome de Laguerre habituel non normé et lié à $\mathcal{L}_n^\alpha$ par

$$\sqrt{\Gamma(n+\alpha+1)}\,\mathcal{L}_n^\alpha=\sqrt{n!}\,L_n^\alpha \qquad (\alpha>-1).$$

On a la formule asymptotique connue

$$\text{(15)}\qquad L_n^\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\cos\left[2\sqrt{nx}-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \quad [5]$$

qui, en utilisant commodément la relation $L_n^\alpha=L_{n+1}^\alpha-L_{n+1}^{\alpha-1}$ permet d'écrire le noyau sous la forme

$$K_n^\alpha(x,t)=\frac{R(x,t)}{x-t}\left[\sqrt{x}\sin X\cos T-\sqrt{t}\sin T\cos X+O(1)\right].$$

où

$$R(x,t)=\frac{1}{\pi}n^{\alpha-\frac{1}{2}}(xt)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{2}(x+t)}\left\{\begin{aligned}X&=2\sqrt{nx}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi,\\ T&=2\sqrt{nt}-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi.\end{aligned}\right.$$

Le crochet se calcule facilement en transformant les produits trigonométriques en sommes, on obtient alors

$$K_n^\alpha(x,t)=R(x,t)\left[\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}+\sqrt{t})-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\pi}{\sqrt{x}+\sqrt{t}}-\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{x}-\sqrt{t}}+O(1)\right].$$

Le premier terme dans le calcul de l'intégrale (14) donnera une contribution tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. L'autre fournira à lui seul le noyau de la sommation. Si l'on y pose $2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})=u$, et qu'on fasse rentrer les quantités de la forme $e^{-t}t^\alpha$ dans la fonction $f(t)$ à développer [qu'on écrira, ainsi modifiée, $g(t)$], on obtient alors le même noyau que pour les fonctions de Weber du chapitre I, à savoir $\frac{1}{u}\sin u$.

D'où l'égalité asymptotique

$$\text{(16)}\qquad S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}g(t)\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{x}-\sqrt{t}}\,dt,$$

---

(5) *Cf.* Szegö, p. 231 (th. 8.8.3).

mais comme, alors

$$\sqrt{t}=\sqrt{x}-\frac{u}{2\sqrt{n}}, \qquad \text{où} \quad t=x+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right);$$

$$S_n(x)=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} g\left(x-u\sqrt{\frac{x}{n}}+\frac{u^2}{4n}\right)\sin u\,\frac{du}{u}.$$

On retrouve le théorème d'équiconvergence pour les séries de Laguerre ([6]).

Pour le calcul du noyau de la sommation (C, 1) on pratique de manière très analogue. Pour calculer Δ_r de (8′), on utilise encore la relation

$$L_n^{\alpha}=L_{n+1}^{\alpha}-L_{n+1}^{\alpha-1}$$

et l'équation dérivée de celle-ci. On utilise par ailleurs la formule asymptotique :

$$-\frac{dL_n^{\alpha}}{d(\sqrt{x})}=\frac{2}{\pi}e^{\frac{x}{2}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\sin X$$

qui permet d'écrire Δ_r sous la forme

$$\Delta_r=\frac{1}{\pi}(xt)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}e^{\frac{x+t}{2}}\sqrt{t}\left[\sqrt{t}\sin X\sin T+\sqrt{x}\cos X\cos T\right].$$

Le deuxième terme de (10) où interviennent les Δ_r se compose alors de deux parties qui sont (en omettant désormais la partie symétrique en x et t qui figure devant le crochet) :

1° $\frac{1}{2}\sqrt{tx}\,\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{t})^2\cos(X-T)}{x-t}$; portée sous le signe intégral de (9) cette quantité, divisée une fois de plus par $(x-t)$ peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\sqrt{tx}\,\frac{\cos 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{(\sqrt{x}-\sqrt{t})^2}; \tag{17}$$

2° $\frac{1}{2}\sqrt{tx}\,\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{t})^2\cos(X+T)}{x-t}$ qui donnera dans l'intégrale de (9) une contribution nulle à la limite (Riemann-Lebesgue).

Le seul terme effectif qui reste est donc le terme (17); quant au premier terme de Σ_n^1 [*cf.* expression (10)] et qui comprend trois parties, les deux premières sont constantes puisque $U=-3x$ et fournissent dans (9) une contribution nulle à la limite, pour la même raison que dans le chapitre I [calcul du noyau (10) des séries de Weber]. Le terme $\frac{V+\bar{V}}{(x-t)^2}\Sigma_n^0$ s'écrit ici $\frac{x+t}{(x-t)^2}\Sigma_n^0$. Or, l'expression asymptotique de Σ_n^0 a été calculée ci-dessus et vaut

$$(x-t)\frac{\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{\sqrt{x}-\sqrt{t}}.$$

([6]) *Cf.* Szegö, p. 240.

Dans l'intégrale (9) la quantité est à diviser encore une fois par $(x-t)$ et fournit une contribution égale à

$$\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})\frac{x+t}{(x-t)^2(\sqrt{x}-\sqrt{t})} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{t}}\,\frac{(x+t)\sin 2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})}{(\sqrt{x}+\sqrt{t})^2(\sqrt{x}-\sqrt{t})^2}.$$

En posant encore $2\sqrt{n}(\sqrt{x}-\sqrt{t})=u$ et en se rappelant que $t=x+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ on réalise que si $n\to\infty$, le rapport $\frac{x+t}{(\sqrt{x}+\sqrt{t})^2}$ tend vers 1, et le noyau s'écrit encore asymptotiquement $\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)$; il est, ainsi, encore le même que pour les séries de Weber-Hermite.

CHAPITRE III.

GÉNÉRALISATION DU CALCUL PRÉCÉDENT A UNE CATÉGORIE PLUS GÉNÉRALE DE POLYNOMES ET DÉTERMINATION DE CEUX-CI.

On peut généraliser de manière très simple le mode précédent de calcul à une famille plus générale de polynomes; si l'on ne s'impose plus de calculer précisément une moyenne de Cesaro ou une somme de Fejer, mais seulement une moyenne analogue de la forme $m_n=\frac{\sum_0^n \alpha_r S_r}{\sum_0^n \alpha_r}$ (pour les sommes de Fejer les $\alpha_r=1$).

Du point de vue de la convergence et de l'approximation, ces moyennes peuvent rendre les mêmes services, pour certaines formes des α_r, que les moyennes (C, 1).

Il est donc intéressant de chercher si, pour un choix convenable des coefficients α_r, un calcul analogue à celui qui a été effectué au chapitre II n'est pas possible. Tel est l'objet de ce nouveau chapitre qui sera conduit un peu autrement. Ici, en effet, non seulement nous avons à chercher une méthode de calcul qui nous fournisse explicitement les moyennes en question, mais il nous faut déterminer si, d'abord, ces nouveaux coefficients α_r existent, ensuite si leur calcul effectif est possible, et enfin, quels sont les polynomes orthogonaux correspondant aux cas d'existence de ces α_r.

Nous reprenons, tout d'abord, le calcul exposé au début du chapitre II; nous calculons m_n à partir de la formule (2) (chap. II); le numérateur de cette quantité se met sous deux formes voisines, analogues à (3). On suppose toujours, bien entendu, que l'hypothèse (4) est satisfaite, les formules (5) sont valables telles quelles et conduisent pour $\sum_0^n \alpha_r S_r$ à une expression telle que (6). C'est ici que le calcul commence à se distinguer de l'autre [*cf.* chap. II, (10)] car les expressions des quantités U_r et V_r font intervenir les α_r; ces quantités s'écrivent ici :

$$(1)\qquad \begin{cases} U_r(x) = \dfrac{\beta_r}{A_r} f_r(x) - \alpha_{r-1}(x+u_r), \\ V_r(x) = \dfrac{\beta_r}{A_r} g_r(x), \end{cases}$$

où

$$\beta_r = \alpha_r + \alpha_{r-1}, \qquad u_r = \frac{B_r}{A_r}.$$

Pour que notre calcul soit possible, les deux nouvelles conditions [analogues aux conditions (6')] sont que U_r et V_r soient indépendantes de r. Notons que les α_r sont *essentiellement* fonctions de r sans quoi on serait dans le cas du chapitre II.

Étant donné une suite normée de polynomes orthogonaux, il s'agira donc de trouver des coefficients α_r tels que les conditions (1) soient satisfaites. Nous nous proposons de déterminer *toutes* les suites de polynomes orthonormés pour lesquels il pourra en être ainsi, c'est-à-dire pour lesquelles toute moyennne m_n sera explicitable. Cette recherche nous mènera également en même temps à la détermination de tous les polynomes se prêtant au calcul des sommes particulières de Fejer (ce seront tous ceux pour lesquels les α_r sont des constantes).

Désignons donc par $\Pi_n(x)$ un polynome orthogonal de la classe cherchée. Tout $\Pi_n(x)$ devra d'abord, selon notre hypothèse initiale, satisfaire à une relation de la forme (4') soit

$$(2)\qquad \Pi_n = f_n \Pi_{n-1} - g_n \Pi'_{n-1}$$

comme on a toujours par ailleurs

$$(3)\qquad \Pi_n = (A_n x + B_n)\Pi_{n-1} - C_n \Pi_{n-2},$$

on tire, en dérivant (3) et posant $A_n x + B_n = l_n$:

$$(3')\qquad \Pi'_n = l_{n-1}\Pi'_{n-1} - C_{n-1}\Pi'_{n-2} + A_{n-1}\Pi_{n-1},$$

d'où l'on peut grâce à (2) éliminer les dérivées. On aura alors une relation entre Π_{n+1}, Π_n, Π_{n-1}, Π_{n-2} d'où l'on pourra éliminer Π_{n+1} grâce à (3).

On obtient ainsi

$$(4)\qquad \Pi_n\left[\frac{f_{n+1}-l_{n+1}}{g_{n+1}} + \frac{l_n}{g_n}\right] = \Pi_{n-1}\left[\frac{l_n f_n}{g_n} + \frac{C_n}{g_{n-1}} - \frac{C_{n+1}}{g_{n+1}} + A_n\right] - C_n \frac{f_{n-1}}{g_{n-2}}\Pi_{n-2}.$$

Cette relation (4) ne doit pas être distincte de (3), relation générale des polynomes orthogonaux; il en résulte deux conditions

$$(5) \qquad \frac{l_n}{g_n} - \frac{l_{n+1}}{g_{n+1}} = \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}} - \frac{f_{n+1}}{g_{n+1}},$$

$$(6) \qquad \frac{l_n f_n}{g_n} + \frac{C_n}{g_{n-1}} - \frac{C_{n+1}}{g_{n+1}} + A_n = \frac{l_n^2}{g_n} + l_n\left[\frac{f_{n+1} - l_{n+1}}{g_{n+1}}\right].$$

Pour le problème particulier que nous nous sommes proposé de résoudre, il est préférable de remplacer (5) et (6) par (5′) et (6′) qui en sont des combinaisons linéaires :

$$(5') \qquad \frac{l_{n+1} - f_{n+1}}{g_{n+1}} - \frac{f_n}{g_n} = \frac{l_n - f_n}{g_n} - \frac{f_{n-1}}{g_{n-1}} = \ldots = \frac{l_1 - f_1}{g_1} - \frac{f_0}{g_0},$$

$$(6')' \qquad \frac{(l_{n+1} - f_{n+1})f_n - C_{n+1}}{g_{n+1}} - \frac{(l_n - f_n)f_{n-1} - C_n}{g_{n-1}} + A_n = 0.$$

Nous n'avons pas à résoudre ces équations fonctionnelles dans le cas général, mais seulement dans le cas où f_r et g_r ont les formes données par (1), qui sont nécessaires à l'application de notre méthode de sommation.

(5′) montre que la quantité $\dfrac{l_r - f_r}{g_r} - \dfrac{f_{r-1}}{g_{r-1}}$ ne dépend pas de r [soit $\varphi(x)$].

Quand on substitue à f_r et g_r leurs expressions (1), (5′) devient :

$$(7) \qquad x[\alpha_r - \alpha_{r-2}] + \alpha_r u_r - \alpha_{r-2} u_{r-1} = \psi(x).$$

où $\psi(x)$, indépendant de r, signifie $V(x)\varphi(x) + 2U(x)$.

(7) montre aussitôt que $\psi(x)$ doit se réduire, dans notre cas, à une fonction linéaire dont les coefficients sont indépendants de r, d'où les deux équations fonctionnelles :

$$(8) \qquad \alpha_r - \alpha_{r-2} = C_1,$$

$$(9) \qquad \alpha_r u_r - \alpha_{r-2} u_{r-1} = C_2.$$

(8) exprime un fait remarquable, c'est que les coefficients α_r ne sont liés que de deux en deux et qu'ils sont des fonctions linéaires de r. On peut donc poser par exemple,

$$\alpha_r = \begin{cases} \lambda r + \mu & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \lambda r + \mu' & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

Avant d'aller plus loin, examinons le cas particulièrement simple où les α_r sont des constantes; on peut alors retomber sur le cas ou l'on explicite la moyenne (C, 1), mais on peut aussi avoir d'autres moyennes, puisque μ et μ' peuvent être différents; on pourra même envisager des cas où tous les α_r d'indices pairs par exemple, sont nuls.

Dans le cas, très important, où tous les α_r sont égaux, alors dans (8)

$C_1 = 0$; (9) montre que U_r est soit constant, soit linéaire en r; (1) donne alors pour f_r et g_r :

$$2\frac{f_r}{A_r} = U + x + u_r, \qquad 2\frac{g_r}{A_r} = V.$$

La relation (6′) qui n'a pas encore été utilisée s'écrit alors :

$$\text{(10)} \qquad U[(u_{r+1} - u_r) - (u_r - u_{r-1})] + \frac{1}{2}(x + u_r)(u_{r+1} - u_{r-1}) + \frac{2}{A_{r-1}^2} - \frac{2}{A_r^2} + V = 0.$$

a. Si u_r est constant, $U(x)$ est arbitraire en x, donc f_r aussi, $V(x)$ est constante ainsi que $g(x)$,

$$\frac{1}{A_{r-1}^2} - \frac{1}{A_r^2} = \text{const.},$$

$\frac{1}{A_r^2}$ est une fonction linéaire de r, ou une constante.

Exemple :

$$\frac{1}{A_r^2} = r \qquad \text{(Polynomes de Hermite).}$$

b. Si u_r est effectivement linéaire en r, soit $u_r = hr + k$, U est encore quelconque, mais V est linéaire en x, comme g. $\frac{1}{A_{r-1}^2} - \frac{1}{A_r^2}$ est linéaire en r, $\frac{1}{A_r^2}$ est un trinome du second degré en r.

Exemple :

$$\frac{1}{A_r^2} = r(r + q) \qquad \text{(Polynomes de Laguerre).}$$

Ces deux exemples sont ceux pour lesquels on a déjà effectué en effet les sommes partielles de Fejer dans les chapitres I et II.

Cherchons maintenant à déterminer d'autres familles de Π_n pour lesquelles les α_r diffèrent. On sait que α_r est linéaire en r, soit $\alpha_r = \lambda r + \mu$ (μ pouvant varier avec la parité de r).

Pour commencer, supposons que μ soit invariant avec cette parité. Comme λ n'est pas nul, la relation (9) peut s'écrire ($r = 1, 2, \ldots$)

$$\text{(9′)} \qquad (r + q)u_r - (r + q - 2)u_{r-1} = Q.$$

Nous cherchons d'abord la solution de cette équation de récurrence dans le cas où $Q = 0$, elle est évidemment

$$u_r = \frac{\text{const.}}{(r + q)(r + q - 1)}.$$

Pour avoir la solution de l'équation avec $Q \neq 0$, on pose

$$u_r = \frac{\Phi(r)}{(r + q)(r + q - 1)}.$$

(9′) détermine $\Phi(r)$ par la relation

$$\Phi(r) - \Phi(r-1) = (r+q-1)\,Q,$$

d'où

$$\Phi(r) = \left[\frac{r^2}{2} + (q-1)\frac{r}{2} + C\right] Q,$$

u_r est donc le quotient, mais *non le quotient le plus général*, de deux trinomes du second degré. On vérifie aisément que les polynomes de Legendre, de Gegenbauer, de Tchebychef ont un u_r de la forme précédente. Ceux de Jacobi vérifient la condition si $\alpha + \beta = 2$. Les polynomes introduits récemment par MM. Pollaczek et Szegö, pour lesquels u_r est le quotient de deux trinomes en r, ne répondent pas à cette définition.

Supposons maintenant que μ varie avec la parité de r. La solution de (9′), sans second membre est alors

$$u_r = \frac{\text{const.}}{(r+q)(r+q')}.$$

En éliminant u_{r-1} entre deux équations successives (9′) où le second membre n'est pas nul, on obtient

$$(r+q)(r+q')u_r - (r+q-2)(r+q'-2)u_{r-2} = (2r+q+q'-2)Q,$$

d'où

$$(10') \quad (r+q)(r+q')u_r = \begin{cases} \dfrac{Q}{2}\,r[(r+2)+q+q'-2] + \text{const.} & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \dfrac{Q}{2}(r+1)[r+1+q+q'-2] + \text{const.} & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

En particulier si les α_r sont une suite de nombres prenant alternativement deux valeurs μ et μ', u_r est une fonction linéaire de r.

Si l'une de ces valeurs est nulle, le calcul précédent n'est pas valable, mais il est clair qu'alors $u_r = (-1)^r$ à un facteur près. Aucun polynome usuel ne rentre dans cette classe.

Les conditions trouvées ne sont pas suffisantes puisque la relation (6′) n'a pas encore été alléguée. On va voir qu'elle fournit les fonctions f_r et g_r ainsi que la suite des A_r.

(6′) s'écrit, après avoir posé $\dfrac{\beta_r}{A_r} = p_r$, $\dfrac{\alpha_{r-1}}{A_r} = q_r$, et utilisé (1) :

$$(11) \quad p_{r+1}\left[\left(l_{r+1} - \frac{U + q_{r+1}l_{r+1}}{p_{r+1}}\right)\frac{U + q_r l_r}{p_r} - \frac{A_{r+1}}{A_r}\right]$$
$$= p_{r-1}\left[\left(l_r - \frac{U + q_r l_r}{p_r}\right)\frac{U + q_{r-1}l_{r-1}}{p_{r-1}} - \frac{A_r}{A_{r-1}}\right] - A_r V,$$

soit, le terme en U^2 disparaissant :

$$U[p_{r+1}l_{r+1} - p_r l_r + q_{r-1}l_{r-1} - q_{r+1}l_{r+1}] + p_{r+1}l_{r+1}q_r l_r - p_r l_r q_{r+1} l_{-1r}$$
$$+ q_r l_r(q_{r-1}l_{r-1} - q_{r+1}l_{r+1}) + p_r\left(p_{r-1}\frac{A_r}{A_{r-1}} - p_{r+1}\frac{A_{r+1}}{A_r}\right) + A_r p_r V = 0.$$

ou en revenant aux notations primitives :

$$(11') \qquad U\{x[\alpha_{r+1}-\alpha_{r-1})-(\alpha_r-\alpha_{r-2})]+(\alpha_{r+1}u_{r+1}-\alpha_{r-1}u_r)-(\alpha_r u_r-\alpha_{r-2}u_{r-1}) + (x+u_r)[(x+u_{r+1})\alpha_{r+1}\alpha_{r-1}-(x+u_{r-1})\alpha_r\alpha_{r-2}] + \frac{\beta_r\beta_{r-1}}{A_{r-1}^2}-\frac{\beta_r\beta_{r+1}}{A_r^2}+\beta_r V = 0.$$

Le coefficient de U est nul et la relation précédente est de la forme

$$x^2 H_2(r) + x H_3(r) + H_4(r) = V(x).$$

Puisque la relation est vraie pour tout x, il est possible d'en trouver trois valeurs x_1, x_2, x_3, telles que le déterminant

$$|x_i^2 \quad x_i \quad 1|$$

ne soit pas nul, c'est-à-dire qu'il est alors possible de résoudre le système des 3 équations ainsi obtenu, les inconnues étant les $H_j(r)$. Ces valeurs obtenues étant uniques, les H_j ne sont pas fonctions de r. Ainsi tous les coefficients précédents sont des constantes en r. Les coefficients H_1, H_2, H_3, constants en r, sont constants. Il en résulte que

$$(12) \qquad \alpha_{r+1}\alpha_{r-1}-\alpha_r\alpha_{r-2}=C_1\beta_r \qquad \text{(terme en } x^2\text{)},$$

$$(13) \qquad \alpha_{r+1}\alpha_{r-1}(u_r+u_{r+1})-\alpha_r\alpha_{r-2}(u_r+u_{r-1})=C_2\beta_r \qquad \text{(terme en } x\text{)};$$

$$(14) \qquad \frac{1}{\beta_r}(\alpha_{r+1}\alpha_{r-1}u_r u_{r+1}-\alpha_r\alpha_{r-2}u_r u_{r-1})+\frac{\beta_{r-1}}{A_{r-1}^2}-\frac{\beta_{r+1}}{A_r^2}=C_3 \qquad \text{(terme constant)}.$$

et $V(x)$ est un trinome du second degré en x.

(12) montre que $C_1 = 1$, (13) que $C_2 = Q$.

(14) fournit la valeur de A_r et s'écrit :

$$\frac{\beta_{r-1}}{A_{r-1}^2}-\frac{\beta_{r+1}}{A_r^2}=C_3+(1-Q)u_r.$$

Les polynomes usuels satisfont à cette relation, sauf ceux de Jacobi, qui satisfaisaient à (10) quand $\alpha+\beta=2$, mais ne satisfont à (14) que si $\alpha=\beta$ (ils sont alors de Gegenbauer) (*cf.* tableau ci-joint). Connaissant A_r et B_r, on peut alors écrire, l'expression du polynome orthonormé sous forme de déterminant [1] :

$$P_n(x) = p_0(x)\begin{vmatrix} A_1x+B_1 & \sqrt{C_2} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{C_2} & A_2x+B_2 & \sqrt{C_3} & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{C_3} & A_3x+B_3 & \dots & 0 \\ . & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_nx+B_n \end{vmatrix}.$$

([1]) *Cf.* Szegö, p. 368 (exemple 6).

Application. — On peut appliquer la méthode qui vient d'être exposée aux polynomes de Legendre, de Tchebychef et de Gegenbauer. Ces derniers, plus habituellement dénommés ultrasphériques contenant les deux autres comme cas particuliers, c'est à eux que nous appliquerons directement le procédé. Nous prenons la notation de Gegenbauer $C_n^\nu(x)$ liée à celle de Jacobi par

$$C_n^\nu(x) = P_n^{\nu-\frac{1}{2},\,\nu-\frac{1}{2}}(x).$$

Les déterminants intervenant dans les calculs et dont certains contiennent les dérivées des C_n^ν seront simplifiées grâce à la formule

$$\frac{dC_n^\nu(x)}{dx} = 2\nu\, C_{n-1}^{\nu+1}(x),$$

leurs valeurs asymptotiques seront déterminées par la formule,

$$C_n^\nu(\cos\theta) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^\nu \sin^{-\nu}\theta}{\sqrt{\pi}} \, \frac{\cos\left[(n+\nu)\theta - \dfrac{\nu\pi}{2}\right]}{\sqrt{n}}.$$

Rappelons que le polynome correspondant orthonormé vaut

$$G_n^\nu = \left[\frac{(n+\nu)\, n\,!}{\Gamma(n+2\nu)}\right]^{\frac{1}{2}} C_n^\nu$$

et que

$$B_n = 0 \qquad \text{et} \qquad A_n = 2\sqrt{\frac{(n+\nu)(n+\nu-1)}{n(n+2\nu-1)}}.$$

On retrouve facilement le noyau de la somme ordinaire, connu dans le cas le plus général des $P_n^{\alpha,\beta}$ (8) et qui est ici, à un facteur près, en posant

$$x = \cos\varphi, \qquad t = \cos\theta$$

et en faisant éventuellement entrer dans la fonction à développer des termes en x et t :

$$N_1(\theta,\varphi) = \frac{\sin\left[\left(n+\nu+\dfrac{1}{2}\right)(\varphi+\theta) - \nu\pi\right]}{\sin\dfrac{\varphi+\theta}{2}} + \frac{\sin\left(n+\nu+\dfrac{1}{2}\right)(\varphi-\theta)}{\sin\dfrac{\varphi-\theta}{2}}.$$

Asymptotiquement, le premier de ces termes tendant vers zéro, si

$$\left(n+\nu+\frac{1}{2}\right)(\varphi-\theta) = u,$$

le noyau de la sommation est encore $\dfrac{\sin u}{u}\cdot$ Pour la « pseudo somme » de Fejer

(8) *Cf.* SZEGÖ, p. 247-248.

$\left(\text{avec } \alpha_r = r + \nu + \frac{1}{2}\right)$ la même méthode donne respectivement pour le premier des termes de la formule (10) du chapitre II :

$$2\left[\frac{3}{2} + \nu - \frac{\sin^2\theta + \sin^2\varphi}{(\cos\theta + \cos\varphi)^2}\right] \sin\frac{\theta+\varphi}{2} \sin\left(n + \nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\varphi - \theta}{2}$$

et pour le terme en $V(\Delta_{n+1} + \bar{\Delta}_{n+1})$ de la même formule (10)

$$\nu \frac{\cos\left(n + \nu + \frac{1}{2}\right)(\varphi - \theta)}{\sin\frac{\varphi - \theta}{2}}.$$

En faisant tendre n vers l'infini et avec la même notation, le noyau de la moyenne m_n est encore, *pour les polynomes normés* : $\frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right)$.

Ce noyau est donc valable pour toutes les sommes (ou « pseudo-sommes » de Fejer) des séries de polynomes usuels considérés.

	Hermite.	Laguerre.	Gegenbauer.	Legendre.	Tchebychef.
A_n......	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n(n+\alpha)}}$	$2\sqrt{\frac{(n+\nu)(n+\nu-1)}{n(n+2\nu-1)}}$	$\frac{1}{n}\sqrt{4n^2-1}$	2
$\frac{B_n}{A_n}$......	0	$2n+\alpha-1$	0	0	0
$\frac{f_n}{A_n}$......	x	$-x+n+\alpha$	$\frac{(n+2\nu-1)x}{2(n+\nu-1)}$	$\frac{nx}{2n-1}$	$\frac{x}{2}$
$\frac{g_n}{A_n}$......	1	$-x$	$\frac{1-x^2}{2(n+\nu-1)}$	$\frac{1-x^2}{2n-1}$	$\frac{1-x^2}{2(n-1)}$
α_n......	1	1	$n+\nu-\frac{1}{2}$	n	$n-\frac{1}{2}$
U......	x	$-3x+\alpha+1$	$\left(\nu+\frac{1}{2}\right)x$	x	$\frac{x}{2}$
V......	2	$-2x$	$1-x^2$	$1-x^2$	$1-x^2$

CHAPITRE IV.

Moyennes d'ordre supérieur.

On a calculé explicitement dans le chapitre I la moyenne (C, 2) d'un développement en série de Weber-Hermite, et l'on a montré la possibilité de généraliser le procédé au calcul explicite d'une moyenne de Cesaro d'ordre quelconque. Il reste à examiner si le procédé employé se généralise pour d'autres séries de polynomes orthonormés et dans quels cas.

Pour le calcul plus général des moyennes m_n considérées au chapitre III, le problème est moins intéressant, car les moyennes successives, même en choisissant à chaque nouvelle opération de nouveaux α_r, sont toutes de la forme $\dfrac{\sum \lambda_r S_r}{\sum \lambda_r}$; on verra, du reste, que l'itération du calcul n'est praticable effectivement que dans le cas des véritables moyennes de Cesaro.

Soit à calculer la deuxième moyenne σ_n^2 de Cesaro; en se reportant à la formule (11) (chap. II), on voit qu'il s'agit de sommer :

1° Σ_n^0, ce qui a été déjà fait.

2° Les quantités Δ_{n+1} et $\bar{\Delta}_{n+1}$: Pour Δ_{n+1} par exemple, il suffit d'appliquer deux fois la relation (4′) pour obtenir

$$(1)\qquad \sum_0^n \Delta_{r+1} = \sum_0^n \left[\frac{f'_{r+1}}{A_{r+1}} P_r \bar{P}_r + \frac{f_{r+1} - g'_{r+1}}{A_{r+1}} P'_r \bar{P}_r - \frac{f_{r+1}}{A_{r+1}} P_r \bar{P}'_r - \frac{g_{r+1}}{A_{r+1}} (P''_r \bar{P}_r - P'_r \bar{P}'_r)\right].$$

Les coefficients des quantités de la forme $P_r \bar{P}_r$, $P'_r \bar{P}_r$, $P'_r \bar{P}'_r$, $P_r \bar{P}''_r$ ne doivent pas dépendre de r, sans quoi notre méthode est inapplicable.

Or, les relations

$$(2)\qquad U'(x) = 2\frac{f'_r}{A_r} - 1 \qquad \text{et} \qquad V'(x) = 2\frac{g'_r}{A_r}$$

montrent que les coefficients des ces quantités sont tous indépendantes de r sauf celui de $P'_r \bar{P}_r - P'_r \bar{P}_r$ qui est $\frac{f_{r+1}}{A_{r+1}}$ et qui, lui, n'est indépendant de r que si $\frac{B_r}{A_r}$ l'est lui-même.

Cette dernière condition n'existait pas pour le calcul de la moyenne (C, 1). Il est clair que, combinée aux deux conditions (2), elle entraîne que $\frac{f_r}{A_r}$, $\frac{g_r}{A_r}$ et $\frac{B_r}{A_r}$ soient tous trois des constantes par rapport à r. On voit immédiatement déjà que, pour les polynomes de Laguerre, il n'en est pas ainsi. (Parmi les polynomes *usuels*, seuls ceux de Hermite y satisfont.)

Pour toute la classe des polynomes qui y satisfont, on peut expliciter la moyenne (C, 2) à partir de la formule précédente (1). Dans cette formule, les trois premières sommations $\sum P_r \bar{P}_r$, $\sum P_r \bar{P}'_r$, $\sum \bar{P}_r P'_r$ ont déjà été effectuées. Quant aux deux autres, elles se calculent comme il suit, en dérivant une fois de plus (1) (Ch. II) et en procédant comme pour $\sum P_r \bar{P}'_r$; on obtient, par combinaison linéaire :

$$(t-x)\sum_0^n P''_r \overline{P}_r = [\Delta_{n+1}^{(0,2)} - \Delta_1^{(0,2)}] - 2\sum_0^n P'_r \overline{P}_r,$$

où la dernière somme est déjà connue, et où

$$\Delta_r^{(0,2)} = \frac{1}{A_r}(\overline{P}_r P''_{r-1} - P''_r \overline{P}_{r-1}).$$

Enfin en dérivant (1) (Ch. II) en x et en t, on obtient aussi

$$(t-x)\sum_0^n P'_r \overline{P}'_r = (\Delta_{n+1}^{(1,1)} - \Delta_1^{(1,1)}) + \sum_0^n (P_r \overline{P}'_r - \overline{P}_r P'_r).$$

où la dernière somme est déjà connue et où

$$\Delta_r^{(1,1)} = \frac{1}{A_r}(\overline{P}'_r P'_{r-1} - P'_r \overline{P}'_{r-1}).$$

Nous n'effectuerons pas ce calcul ici.

Pour calculer σ_n^3 et les moyennes suivantes (C, k), il est évident qu'il suffira de répéter autant de fois que nécessaire des opérations identiques ou analogues aux précédentes; on aura à sommer des quantités dont la forme générale est

$$\Delta_r^{(p,q)} = \frac{1}{A_r}\left[\frac{d^p \overline{P}_r}{dt^p}\frac{d^q P_{r-1}}{dx^q} - \frac{d^q P_r}{dx^q}\frac{d^p \overline{P}_{r-1}}{dt^p}\right].$$

Quant aux coefficients qui apparaîtront devant ces quantités, on constate facilement, par un calcul analogue à celui qu'on a effectué pour σ_n^2 et qui consiste à appliquer autant de fois que possible la relation (4′), que ce sont tous des combinaisons linéaires des dérivées successives des quantités $\frac{f_r}{A_r}$ et $\frac{g_r}{A_r}$. Ils seront donc tous indépendants de r d'après les mêmes conditions déjà trouvées pour (C, 2). Ainsi donc, quand le calcul de (C, 2) est possible, celui de (C, k) pour k quelconque entier est possible aussi. Parmi les polynomes usuels, ceux de Hermite seuls se prêtent au calcul (effectué du reste pour eux au chapitre I).

Cette méthode permet le calcul exact des noyaux de toutes les moyennes (C, k) et permet ainsi de résoudre, pour les développements en séries de Weber-Hermite, les problèmes analogues à ceux traités pour les séries de Fourier (phénomènes de Gibbs, approximation, saturation).

Si l'on veut itérer le calcul déjà fait pour la moyenne m_n, c'est-à-dire calculer une nouvelle moyenne à partir de σ_n^1, avec des coefficients inégaux on aura calculer une somme de la forme

$$\sum \gamma_r S_r^1 \quad \text{ou} \quad \sum \frac{\gamma_r}{2}\left[1 + \frac{U-\overline{U}}{x-t} - \frac{V+\overline{V}}{(x-t)^2}\right]\Sigma_r^0 + \sum_r \gamma_r(V\Delta_r + \overline{V}\overline{\Delta}_r).$$

Le premier terme de cette sommation fait apparaître $\sum\limits_r (\gamma_r \Sigma_r^0)$, c'est-à-dire qu'on est ramené à la moyenne précédente; il est donc nécessaire que $\gamma_r = \alpha_r$.

D'après les expressions (1) du chapitre III pour les U_r et V_r, le nouveau coefficient de Σ_r^0 s'écrira en remplaçant U_r et V_r respectivement par

$$U_r(x) = \frac{\frac{f_r}{A_r}}{\alpha_r} + \frac{\frac{f_r}{A_r}}{\alpha_{r-1}} - \alpha_{r-1}x - \frac{\frac{B_r}{A_r}}{\alpha_{r-1}},$$

$$V_r(x) = \frac{g_r}{A_r}(\alpha_r + \alpha_{r-1});$$

U_r et V_r doivent être indépendants de r, l'expression de V montre que, comme $\frac{g_r}{A_r}$ l'est déjà, α_r doit être une constante; on est alors dans le cas des *véritables* moyennes (C, k) : Cette tentative d'itération n'aboutit donc qu'à des résultats triviaux et déjà remarqués au début de ce paragraphe,

CHAPITRE V.

Autre application : Développements en série de Neumann.

La méthode précédente employée pour les séries de polynomes orthogonaux n'est pas exclusivement applicable à ces séries. Elle est, en effet, fondée sur le fait que, dans le développement en séries considéré $\sum a_n f_n(x)$, l'élément $f_n(x)$ satisfait à deux relations linéaires, l'une entre f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, l'autre entre, f_n, f_{n-1}, f'_{n-1}. Le fait que les f_n soient des polynomes orthogonaux n'intervient nullement pour lui-même.

Comme exemple d'autres développements en séries usuelles, citons le développement de Neumann d'une fonction de variable réelle qui a la forme

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n J_n(x),$$

$J_n(x)$ étant la fonction d'ordre n de Bessel. Ces développements ont été étudiés par Neumann et Gegenbauer, puis par Webb et Kapteyn, et plus récemment d'une part par Bateman, et de l'autre par J. Pérès [9].

---

[9] WEBB, *Messenger of Math.*, t. 33, 1904, p. 55; KAPTEYN, *Ibid.*, t. 35, 1906, p. 122; BATEMAN, *Ibid.*, t. 36, 1907, p. 31; J. PÉRÈS, *Reale Acad. dei Lincei*, vol. 27, fasc. 10 et 11, 1918.

Les coefficients a_n ont pour expression ([10])

$$
(1)\qquad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,J_1(|x|)\,dx, \\ a_n = n\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,J_n(x)\,\dfrac{dx}{|x|}. \end{cases}
$$

La somme partielle d'ordre n s'écrit donc

$$
a_0 J_0(x) + \sum_{p=1}^{n} a_p J_p(x) = a_0 J_0 + \sum_{p=1}^{n} J_p \left[p \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,J_p(t)\,\frac{dt}{|t|} \right]
$$

ou encore

$$
a_0 J_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{p=0}^{n} p\,J_p(t)\,J_p(x) \right] f(t)\,\frac{dt}{|t|}.
$$

On a à effectuer la somme

$$
\sum_{0}^{n} p\,J_p(x)\,J_p(t)
$$

qu'on obtient facilement grâce à la formule usuelle de récurrence des J_p :

$$
(2)\qquad \frac{2p}{x} J_p(x) = J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x).
$$

En adjoignant à la formule (2) la même formule, soit (2'), écrite avec la variable t, et en effectuant la combinaison linéaire $J_p(x) \times (2') - \bar{J}_p(t) \times (2)$, on obtient immédiatement

$$
(1)\qquad \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right) \sum_{1}^{n} 2p\,J_p \bar{J}_p = \Delta_1 - \Delta_{n+1},
$$

en posant

$$
\Delta_p = \begin{vmatrix} J_p & \bar{J}_p \\ J_{p-1} & \bar{J}_{p-1} \end{vmatrix} \qquad [J_p = J_p(x),\ \bar{J}_p = J_p(t)],
$$

d'où l'on tire immédiatement

$$
S_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xt}{x-t} (\Delta_1 - \Delta_{n+1}) f(t)\,\frac{dt}{|t|} + \frac{1}{2} J_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,J_1(|t|)\,dt
$$

ou en isolant la partie indépendante de n :

$$
(4)\qquad S_n(x) = \frac{1}{2} J_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,J_1(|t|)\,dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{vmatrix} J_1 & \bar{J}_1 \\ J_0 & \bar{J}_0 \end{vmatrix} \frac{xt}{x-t} f(t)\,\frac{dt}{|t|} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{n+1} \frac{xt}{x-t} f(t)\,\frac{dt}{|t|}.
$$

([10]) *Cf.* WATSON, *Bessel functions*, p. 535.

La somme ici effectuée se présente d'une manière différente de celle trouvée dans le cas des séries de polynomes orthogonaux. On l'obtient, si on suppose $f(x)$ par exemple bornée, sous la forme d'une somme de deux termes, dont le premier est indépendant de n et dont le second, qui seul en dépend, tend vers zéro, comme on va le montrer :

$$S_n(x) = R(x) + \lambda_n(x).$$

Quand $n \to \infty$, $S_n(x) \to R(x)$, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ considérée n'admet un développement de Neumann que si $R(x) = f(x)$.

Cette dernière condition est extrêmement restrictive puisqu'elle s'écrit

$$(5)\quad f(x) = \frac{1}{2} J_0(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) J_1(|t|)\, dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [J_1(x) J_0(t) - J_1(t) J_0(x)] \frac{xt}{x-t} f(t) \frac{dt}{|t|}$$

et exprime que $f(x)$ n'est développable en série de Neumann que si elle est solution de cette équation intégrale dont la résolution est très difficile. Ces inconvénients ont déjà été signalés, en particulier pour les fonctions impaires, par Webb et Kapteyn, qui sont arrivés par une toute autre méthode à une condition analogue (11).

L'objet de cette étude n'étant pas d'approfondir les conditions de ce développement en série, mais de donner une méthode de calcul de sa moyenne (C, 1) ou d'une analogue, nous n'insisterons pas sur l'obstacle que constitue cette équation intégrale, et nous nous intéresserons au terme $\lambda_n(x)$ qui seul varie avec n; ce qui est le plus important, c'est de montrer qu'il tend vers une limite. Montrons par exemple, pour un ensemble assez général de fonctions, celles qui sont bornées sur $(-\infty, +\infty)$, que cette limite est nulle.

Le terme dépendant de n dans S_n s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{n+1} \frac{xt}{x-t} f(t) \frac{dt}{|t|},$$

et se ramène à l'étude de

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{n+1} \frac{xt}{x-t} \frac{dt}{|t|},$$

c'est-à-dire de

$$(7)\qquad x\left[\int_0^{+\infty} \frac{\Delta_{n+1}}{x-t} \frac{dt}{t} - \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{n+1}}{x+t} \frac{dt}{t}\right].$$

Le terme délicat est celui pour lequel le dénominateur s'annule. Supposons que, par exemple, x soit positif; dans ce cas, c'est le premier. Le premier terme de la quantité (7) s'écrit alors

$$(7')\qquad -x\left[J_n \int_0^{\infty} \bar{J}_{n+1} \frac{dt}{x-t} - J_{n+1} \int_0^{\infty} \bar{J}_n \frac{dt}{x-t}\right].$$

(11) Articles cités; *cf.* aussi WATSON, *Bessel functions*, p. 534.

Ces deux nouvelles intégrales s'étudient toutes deux de la même façon, en découpant l'intervalle, de manière à pouvoir appliquer les formules asymptotiques relatives aux fonctions J_n. La seconde par exemple s'écrira :

$$\int_0^\infty \overline{J}_n \frac{dt}{x-t} = \int_0^n + \int_n^\infty . \tag{8}$$

1° Dans $\int_0^n$, on pose $t = nu$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{J_n(nu)}{\frac{x}{n} - u} = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1 , \tag{9}$$

ε étant choisi pour que $0 < \frac{x}{n} < \varepsilon$.

De ces deux parties, la seconde peut être majorée grâce à la formule ([12])

$$\int_0^1 J_n(nu)\, du \sim \left[\frac{1}{3n} - \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\lambda n^{\frac{5}{2}}} \right] \tag{10}$$

qui montre que cette deuxième partie tend vers zéro avec n.

Quant à la première partie $\int_0^\varepsilon$, il restera à la comparer avec celle qui sera relative au même intervalle dans la deuxième intégrale (7′).

2° $\int_n^\infty \frac{J_n(t)}{x-t} dt$ est de même nature que $\int_n^\infty J_n(t) \frac{dt}{t}$.

Or,

$$| J_n(t) | < \sqrt{\frac{2}{\pi}} (t^2 - n^2)^{\frac{1}{4}},$$

d'où il résulte que $\int_n^\infty$ est borné par

$$\int_n^\infty \left\{ \frac{2}{\pi \sqrt{t^2 - n^2}} \right\}^{\frac{1}{2}} dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Étudions, pour terminer, la somme des deux termes singuliers provenant de chacune des intégrales de (7′).

Pour cela il suffit de chercher l'ordre de la racine $x = t$ dans l'expression Δ_{n+1}. Or, d'après la formule de Meissel-Carlini ([14]) on a, si $x < n$:

$$J_n(nx) \sim \frac{x^n e^{n\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{2\pi n}\,(1-x^2)^{\frac{1}{4}} \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^n}$$

([12]) *Cf.* WATSON, *Bessel functions*, p. 259 $\left[\lambda = 5 \sqrt[3]{3}\, \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]$.

([13]) *Ibid.*

([14]) *Cf.* WATSON, *Développements asymptotiques.*

ou

$$J_n(x) \sim \frac{(ex)^n}{2^n\sqrt{2\pi n}}(1+\varepsilon_n).$$

Soit en se limitant au premier terme et en appliquant la formule de Stirling :

$$\Delta_{n+1} \sim \frac{(xt)^n}{n!\,(n+1)!}(t-x)(1+\varepsilon'_n).$$

La somme des intégrales (7′) est donc équivalente à l'intégrale, sur un intervalle arbitrairement petit, de la fonction $\frac{(xt)^n}{n!(n+1)!}$ prise par rapport à t. Elle est donc elle-même infiniment petite avec n. Dans le cas où f est une fonction bornée, le terme λ_n tend donc vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il nous importe d'ailleurs d'avantage de montrer comment on calcule pour un tel développement de Neumann, une moyenne de la forme $\dfrac{\sum_1^n \alpha_r S_r}{\sum_1^n \alpha_r}$,

La seule somme à effectuer est $\sum_1^n \alpha_r \Delta_r$, soit [*cf.* (4′)]

$$\sum \alpha_r[J_r\bar{J}_{r-1} - J_{r-1}\bar{J}_r]$$

qui s'écrit indifféremment

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_n J_n \bar{J}_{n-1} + \sum_1^n J_{r-1}(\alpha_{r-1}\bar{J}_{r-2} - \alpha_r \bar{J}_r) - \alpha_1 J_0 \bar{J}_1 \\ &-\alpha_n \bar{J}_n J_{n-1} + \sum_1^n \bar{J}_{r-1}(\alpha_r J_r - \alpha_{r-1} J_{r-2}) + \alpha_1 \bar{J}_0 J_1. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit donc encore d'exprimer les quantités entre crochets par exemple $\alpha_{r-1}J_{r-2} - \alpha_r J_r$ en fonction des seules quantités J_{r-1} et J'_{r-1} ou encore d'exprimer

$$(12)\qquad J_r[\alpha_{r+1}\bar{J}_{r+1} - \alpha_r \bar{J}_{r-1}]$$

en fonction de J_r et J'_r.

On applique les formules

$$\bar{J}_{r+1} = \frac{r}{t}\bar{J}_r - \bar{J}'_r,$$

$$\bar{J}_{r-1} = \frac{r}{t}\bar{J}_r + \bar{J}'_r.$$

Le terme (12) devient ainsi

$$\frac{r}{t}\bar{J}_r(\alpha_{r+1}-\alpha_r)-\bar{J}'_r(\alpha_{r+1}+\alpha_r),$$

c'est la formule (2) qui sera utilisée pour effectuer la sommation. Il en résulte aussitôt que les coefficients α_r doivent être choisis pour que, d'après (2) et (12)

$$\alpha_{r+1}-\alpha_r=\text{const.},$$

$$\alpha_{r+1}+\alpha_r=\mathrm{C}r \qquad (\mathrm{C}=\text{const.}),$$

si l'on prend $\mathrm{C}=1$, on obtient

$$\alpha_r=\frac{1}{2}(r-1).$$

Les sommations (11) se ramènent alors aux deux sommes $\sum\frac{r}{t}\mathrm{J}_r\bar{\mathrm{J}}'_r$, qui a déjà été effectuée pour la somme ordinaire, et $r\mathrm{J}_r\mathrm{J}'_r$ qui s'obtient en associant à la formule (2) écrite en x la formule dérivée écrite en t :

$$\frac{2r}{x}\mathrm{J}_r=\mathrm{J}_{r-1}+\mathrm{J}_{r+1}, \tag{13}$$

$$\frac{2r}{t}\bar{\mathrm{J}}'_r=\bar{\mathrm{J}}'_{r-1}+\bar{\mathrm{J}}'_{r+1}+\frac{2r}{t^2}\bar{\mathrm{J}}_r \tag{13'}$$

(de $r=1$ à $r=n-1$).

Il en résulte par combinaison linéaire :

$$2r\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{J}_r\bar{\mathrm{J}}'_r=\mathrm{H}(r)-\mathrm{H}(r-1)+\frac{2r}{t^2}r\mathrm{J}_r\bar{\mathrm{J}}_r,$$

d'où

$$\sum_1^n r\mathrm{J}_r\bar{\mathrm{J}}'_r=\frac{xt}{2(t-x)}[\mathrm{H}(0)-\mathrm{H}(n)]+\frac{x}{t(t-x)}\sum_1^n r\mathrm{J}_r\bar{\mathrm{J}}_r,$$

où

$$\mathrm{H}(n)=\begin{vmatrix}\bar{\mathrm{J}}'_n & \mathrm{J}_n\\ \bar{\mathrm{J}}'_{n-1} & \mathrm{J}_{n-1}\end{vmatrix},$$

le numérateur de la moyenne cherchée $\sum_1^n\alpha_r\mathrm{S}_r$ s'écrit alors

$$\Sigma_n^1=\frac{1}{2}\frac{xt}{x-t}\left[(\Delta_1-\Delta_{n+1})\left(1+\frac{x}{t-x}\right)-\frac{1}{t}(\mathrm{H}_1-\mathrm{H}_{n+1})\right],$$

le dénominateur valant

$$\sum_1^n\alpha_r=\frac{1}{2}\sum_0^{n-1}r=\frac{n(n-1)}{4}.$$

Étant donné la forme trouvée déjà pour S_n qui se composait [*cf.* formule (4)] d'un terme indépendant de n et d'un autre tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, toutes les moyennes trouvées sont de cette forme, le terme indépendant est toujours le même, l'autre donne immédiatement l'approximation, et même l'erreur absolue, exactement.

Ainsi on a ici pour la moyenne m_n cherchée :

$$\sigma_n^1(x) = S(x) - \frac{4}{n(n-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_n^1 \frac{xt}{t-x} f(t) \frac{dt}{|t|}.$$